सांख्यिकी के मूल तत्त्व

कैलाश नाथ नागर
रिटायर्ड प्रिंसिपल, देवनागरी कॉलिज, मेरठ।

मीनाक्षी प्रकाशन
मेरठ

मीनाक्षी प्रकाशन
बेगम ब्रिज, मेरठ।

B. A. राजस्थान संस्करण, अगस्त 1996

मूल्य । 160·00

© कैलाश नाथ नागर

एकेडेमिक प्रेस, मेरठ में मुद्रित।

प्रस्तावना

आधुनिक युग में ज्ञान-विज्ञान के सभी क्षेत्रों में सांख्यिकीय विधियों और उनके व्यापक अनुप्रयोगों का महत्त्व निरन्तर बढ़ता जा रहा है। विभिन्न विषयों में उच्च-स्तरीय शोध कार्य तथा महत्त्वपूर्ण निर्णय पर्याप्त सीमा तक, उपलब्ध समंकों के सांख्यिकीय विश्लेषण पर आधारित होते हैं। अतः किसी भी विषय का गहन अध्ययन करने वाले विद्यार्थी के लिए सांख्यिकी की मौलिक रीतियों और उनके उपयोगों का यथेष्ट ज्ञान प्राप्त करना परमावश्यक हो गया है। इसी कारण हमारे विश्वविद्यालयों की विभिन्न कक्षाओं के पाठ्यक्रम में इस विषय को महत्त्वपूर्ण स्थान दिया गया है। पुस्तक में सांख्यिकी के मूल तत्त्वों को सरल, बुद्धिगम्य और रोचक भाषा में क्रियात्मक उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करने का प्रयास किया गया है। प्रत्येक अध्याय के अन्त में महत्त्वपूर्ण सूत्रों की सूची और विभिन्न विश्वविद्यालयों तथा लोक सेवा आयोगों की प्रतियोगी परीक्षाओं के नवीनतम प्रश्न अभ्यासार्थ दिये गये हैं। पुस्तक की रचना इस प्रकार की गयी है कि केवल प्रारम्भिक गणित का सामान्य ज्ञान रखने वाले विद्यार्थी भी किसी की सहायता के बिना ही विषय-सामग्री को भली-भाँति समझ सकें।

—कैलाश नाथ नागर

विषय-सूची

1. परिचय एवं परिभाषा (Introduction and Definition)
अर्थ और परिभाषाएँ/सांख्यिकी का क्षेत्र/तथा विभाग/उद्देश्य/प्रकृति/अन्य विज्ञानों से सम्बन्ध/सांख्यिकी का उद्गम तथा विकास। 1–17

2. सांख्यिकी : कार्य, महत्त्व तथा सीमाएँ (Functions, Importance and Limitations)
सांख्यिकी के कार्य/महत्त्व/परिसीमाएँ/समंकों के प्रति अविश्वास/समंको का दुरुपयोग। 18–36

3. सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन (Planning of Statistical Inquiry)
सांख्यिकीय अनुसन्धान का अर्थ/प्रमुख चरण/अनुसन्धान का आयोजन : उद्देश्य व क्षेत्र। सूचना-स्रोत, प्रकार, सांख्यिकीय इकाइयाँ, शुद्धता की मात्रा। 37–43

4. समंकों का संग्रहण (Collection of Data)
प्राथमिक एवं द्वितीयक समंक/प्राथमिक समंको का संग्रहण—रीतियाँ। उपयुक्त रीति का चुनाव/अनुसूची तथा प्रश्नावली/द्वितीयक सामग्री का संग्रहण। 44–58

5. संगणना तथा प्रतिदर्श-अनुसन्धान (Census and Sample Investigation)
समग्र या समष्टि/संगणना अनुसन्धान/प्रतिदर्श अनुसन्धान : प्रतिचयन के आवश्यक तत्व/प्रतिचयन के उद्देश्य/सूक्ष्मता/प्रतिचयन-रीतियाँ/प्रतिदर्श आकार/प्रतिचयन में अभिनति/प्रायिकता सिद्धान्त/सांख्यिकीय नियमितता/महाक जड़ता नियम। 59–76

6. समंकों का सम्पादन (Editing of Statistical Data)
प्राथमिक समंकों का सम्पादन/परिशुद्धता/सन्निकटन/सांख्यिकीय विभ्रम (त्रुटियाँ) : स्रोत, प्रकार, मापन/द्वितीयक समंकों का सम्पादन। 77–88

7. वर्गीकरण तथा सारणीयन (Classification and Tabulation)
वर्गीकरण : अर्थ, उद्देश्य, आदर्श वर्गीकरण के तत्त्व/रीतियाँ : गुणात्मक तथा संख्यात्मक वर्गीकरण/आवृत्ति-वंटन/अपवर्जी तथा समावेशी वर्गान्तर/संचयी आवृत्ति/वर्गान्तरानुसार वर्गीकरण की समस्याएँ/सांख्यिकीय श्रेणियाँ।
सारणीयन : अर्थ, उद्देश्य, महत्त्व/वर्गीकरण व सारणीयन का अन्तर/सारणी के प्रमुख भाग/प्रकार/सारणी-रचना के नियम/यान्त्रिक सारणीयन/द्विचर आवृत्ति सारणी। 89–121

8. सांख्यिकीय माध्य (Statistical Averages)
अर्थ/महत्त्व/उद्देश्य/आदर्श माध्य के गुण/माध्यों के प्रकार—बहुलक : निर्धारण-रीतियाँ/मध्यका। निर्धारण/विभाजन-मूल्य—चतुर्थक, दशमक, शतमक, निर्धारण/समान्तर माध्य। परिकलन-रीतियाँ : चार्लियर जाँच, सामूहिक समान्तर माध्य, अज्ञात मूल्य व अज्ञात आवृत्ति, निर्धारण, समान्तर माध्य के बीजीय गुण/भारित समान्तर माध्य/सरल व भारित माध्य की

तुलना/सामान्य व प्रमापित मृत्यु-दरें/गुणोत्तर माध्य—परिगणन/भारित गुणोत्तर माध्य/विशेष प्रयोग/गुणोत्तर माध्य की गणितीय विशेषताएँ/हरात्मक माध्य—गणना, भारित हरात्मक माध्य, विशेष उपयोग/द्विघातीय माध्य/व्यापारिक माध्य/माध्यों का पारस्परिक सम्बन्ध/उपयुक्त माध्य का चुनाव/विभिन्न माध्यों के उपयोग व परिसीमाएँ/सूत्रों की सूची। 122–212

9. अपकिरण तथा विषमता (Dispersion and Skewness)

अपकिरण—परिभाषा/उद्देश्य व महत्त्व/अपकिरण ज्ञात करने की रीतियाँ—विस्तार, विस्तार गुणांक/अन्तर चतुर्थक विस्तार/शतमक विस्तार/चतुर्थक-विचलन, गुणांक/माध्य-विचलन, गुणांक, परिगणन-रीतियाँ/प्रमाप विचलन, गुणांक, परिकलन-रीतियाँ, चार्लियर-जाँच/समूहित प्रमाप विचलन/समान्तर माध्य तथा प्रमाप विचलन/विचरण-गुणांक/प्रसरण/प्रमाप विचलन के बीजगणितीय गुण/अपकिरण के अन्य माप/अपकिरण-मापों का सम्बन्ध/लॉरेंज वक्र/व्यवसाय-संकेन्द्रण के माप—संकेन्द्रण-गुणांक/अपकिरण के उपयुक्त माप का चुनाव/विषमता—अर्थ, जाँच, विषमता-माप रीतियाँ, गुणांक/अपकिरण व विषमता का अन्तर/महत्त्वपूर्ण सूत्र। 213–291

10. परिघात एवं पृथुशीर्षत्व (Moments and Kurtosis)

अर्थ/चार परिघात/केन्द्रीय परिघात—परिगणन-रीतियाँ/चार्लियर-जाँच/शेपर्ड के संशोधन/परिघातों पर आधारित गुणांक/पृथुशीर्षत्व—माप, निर्वचन/महत्त्वपूर्ण सूत्र। 292–309

11. सहसम्बन्ध (Correlation)

परिभाषा/महत्त्व/प्रकार/परिमाण/रीतियाँ—विक्षेप-चित्र/सहसम्बन्ध-बिन्दुरेख/कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध-गुणांक—परिकलन रीतियाँ/सम्भाव्य विभ्रम/प्रमाप विभ्रम/काल-श्रेणियों में सहसम्बन्ध/स्पियरमैन की कोटि-अन्तर रीति/संगामी विचलन रीति/अन्य रीतियाँ/निश्चयन-गुणांक/विलम्बना/सहसम्बन्ध तथा कार्य-कारण सम्बन्ध/महत्त्वपूर्ण सूत्रों की सूची। 310–361

12. चित्रमय प्रदर्शन (Diagrammatic Representation)

उपयोगिता व लाभ/परिसीमाएँ/चित्र-रचना के नियम/चित्रों के प्रकार—एक विस्तार वाले चित्र/विभिन्न प्रकार के दण्ड-चित्र/दो विस्तार वाले चित्र/तीन विस्तार वाले चित्र/चित्रलेख/मानचित्र/विशेष प्रकार के व्यावसायिक चित्र—गैन्ट चित्र, समविच्छेद चित्र, शुद्ध-अवशेष-चित्र; छाया चित्र, कटिबन्ध चित्र, संघटक भाग चित्र, जो चित्र। 362–398

13. बिन्दुरेखीय प्रदर्शन (Graphic Presentation)

उपयोगिता व लाभ-सीमाएँ/रेखाचित्र की रचना—नियम/काल-श्रेणी के रेखाचित्र/कृत्रिम आधार रेखा/दो मापदण्डों के रेखाचित्र/अनुपात माप श्रेणी/आवृत्ति-बंटनों के रेखाचित्र—रेखा आवृत्ति चित्र, आवृत्ति आयत चित्र, बहुलक-निर्धारण, आवृत्ति बहुभुज, आवृत्ति वक्र—भेद, संचयी आवृत्ति वक्र, मध्यका व विभाजन-मूल्य निर्धारण, गाल्टन विधि/आर्थिक वक्र/सारणीयन, चित्रमय तथा बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की तुलना। 399–427

14. सूचकांक (Index Numbers)

परिभाषा और विशेषताएँ/सूचकांकों का समारम्भ/महत्त्व एवं उपयोग, सीमाएँ/सूचकांक रचना की समस्याएँ—उद्देश्य, पदों का चुनाव, मूल्य-उद्धरण, आधार-चुनाव व सरल-सूचकांकों का निर्माण—स्थिर आधार व श्रृंखला आधार रीति, आधार परिवर्तन, आधार वर्ष परिवर्तन/शिरोबन्धन, माध्य का चुनाव, भारांकन-विधि, भारित सूचकांकों की रचना-विधि/उपभोक्ता-मूल्य; सूचकांक—रचना में कठिनाइयाँ, रीतियाँ, विभ्रम/सूचकांकों की अपस्फीति/मात्राओं के सूचकांक/फिशर का आदर्श सूचकांक/उत्क्राम्यता परीक्षाएँ/अन्य सूत्र/महत्त्वपूर्ण सूत्रों की सूची। 428–474

विषय-सूची

1. परिचय एवं परिभाषा (Introduction and Definition)

अर्थ और परिभाषाएँ/सांख्यिकी का क्षेत्र/तथा विभाग/उद्देश्य/प्रकृति/अन्य विज्ञानों से सम्बन्ध/सांख्यिकी का उद्गम तथा विकास। 1–17

2. सांख्यिकी : कार्य, महत्त्व तथा सीमाएँ (Functions, Importance and Limitations)

सांख्यिकी के कार्य/महत्त्व/परिसीमाएँ/समंकों के प्रति अविश्वास/समंकों का दुरुपयोग। 18–36

3. सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन (Planning of Statistical Inquiry)

सांख्यिकीय अनुसन्धान का अर्थ/प्रमुख चरण/अनुसन्धान का आयोजन : उद्देश्य व क्षेत्र। सूचना-स्रोत, प्रकार, सांख्यिकीय इकाइयाँ, शुद्धता की मात्रा। 37–43

4. समंकों का संग्रहण (Collection of Data)

प्राथमिक एवं द्वितीयक समंक/प्राथमिक समंको का संग्रहण—रीतियाँ। उपयुक्त रीति का चुनाव/अनुसूची तथा प्रश्नावली/द्वितीयक सामग्री का संग्रहण। 44–58

5. संगणना तथा प्रतिदर्श-अनुसन्धान (Census and Sample Investigation)

समग्र या समष्टि/संगणना अनुसन्धान/प्रतिदर्श अनुसन्धान : प्रतिचयन के आवश्यक तत्त्व/प्रतिचयन के उद्देश्य/सूक्ष्मता/प्रतिचयन-रीतियाँ/प्रतिदर्श आकार/प्रतिचयन में अभिनति/प्रायिकता सिद्धान्त/सांख्यिकीय नियमितता/महांक जड़ता नियम। 59–76

6. समंकों का सम्पादन (Editing of Statistical Data)

प्राथमिक समंकों का सम्पादन/परिशुद्धता/सन्निकटन/सांख्यिकीय विभ्रम (त्रुटियाँ)। स्रोत, प्रकार, मापन/द्वितीयक समंकों का सम्पादन। 77–88

7. वर्गीकरण तथा सारणीयन (Classification and Tabulation)

वर्गीकरण : अर्थ, उद्देश्य, आदर्श वर्गीकरण के तत्त्व/रीतियाँ : गुणात्मक तथा सख्यात्मक वर्गीकरण/आवृत्ति-वंटन/अपवर्जी तथा समावेशी वर्गान्तर/संचयी आवृत्ति/वर्गान्तरानुसार वर्गीकरण की समस्याएँ/सांख्यिकीय श्रेणियाँ।

सारणीयन : अर्थ, उद्देश्य, महत्त्व/वर्गीकरण व सारणीयन का अन्तर/सारणी के प्रमुख भाग/प्रकार/सारणी-रचना के नियम/यान्त्रिक सारणीयन/द्विचर आवृत्ति सारणी। 89–121

8 सांख्यिकीय माध्य (Statistical Averages)

अर्थ/महत्त्व/उद्देश्य/आदर्श माध्य के गुण/माध्यों के प्रकार—*बहुलक : निर्धारण-रीतियाँ/* मध्यका। निर्धारण/विभाजन-मूल्य—चतुर्थक, दशमक, शतमक, निर्धारण/समान्तर माध्य। परिकलन-रीतियाँ : चार्लियर जाँच, सामूहिक समान्तर माध्य, अज्ञात मूल्य व अज्ञात आवृत्ति, निर्धारण, समान्तर माध्य के बीजीय गुण/भारित समान्तर माध्य/सरल व भारित माध्य की

तुलना/सामान्य व प्रमापित मृत्यु-दरें/गुणोत्तर माध्य—परिगणन/भारित, गुणोत्तर माध्य/विशेष प्रयोग/गुणोत्तर माध्य की गणितीय विशेषताएँ/हरात्मक माध्य—गणना, भारित हरात्मक माध्य, विशेष उपयोग/द्विघातीय माध्य/व्यापारिक माध्य/माध्यों का पारस्परिक सम्बन्ध/उपयुक्त माध्य का चुनाव/विभिन्न माध्यों के उपयोग व परिसीमाएँ/सूत्रों की सूची। 122–212

9. अपकिरण तथा विषमता (Dispersion and Skewness)

अपकिरण—परिभाषा/उद्देश्य व महत्त्व/अपकिरण ज्ञात करने की रीतियाँ—विस्तार, विस्तार गुणांक/अन्तर चतुर्थक विस्तार/शतमक विस्तार/चतुर्थक-विचलन, गुणांक/माध्य-विचलन, गुणांक, परिगणन-रीतियाँ/प्रमाप विचलन, गुणांक, परिकलन-रीतियाँ, चार्लियर-जाँच/समूहित प्रमाप विचलन/समान्तर माध्य तथा प्रमाप विचलन/विचरण-गुणांक/प्रसरण/प्रमाप विचलन के बीजगणितीय गुण/अपकिरण के अन्य माप/अपकिरण-मापों का सम्बन्ध/लॉरेंज वक्र/व्यवसाय-संकेन्द्रण के माप—संकेन्द्रण-गुणांक/अपकिरण के उपयुक्त माप का चुनाव/विषमता—अर्थ, जाँच, विषमता-माप रीतियाँ, गुणांक/अपकिरण व विषमता का अन्तर/महत्त्वपूर्ण सूत्र। 213–291

10. परिघात एवं पृथुशीर्षत्व (Moments and Kurtosis)

अर्थ/चार परिघात/केन्द्रीय परिघात—परिगणन-रीतियाँ/चार्लियर-जाँच/शेपर्ड के संशोधन/परिघातों पर आधारित गुणांक/पृथुशीर्षत्व—माप, निर्वचन/महत्त्वपूर्ण सूत्र। 292–309

11. सहसम्बन्ध (Correlation)

परिभाषा/महत्त्व/प्रकार/परिमाण/रीतियाँ—विक्षेप-चित्र/सहसम्बन्ध-बिन्दुरेख/कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध-गुणांक—परिकलन रीतियाँ/सम्भाव्य विभ्रम/प्रमाप विभ्रम/काल-श्रेणियों में सहसम्बन्ध/स्पियरमैन की कोटि-अन्तर रीति/संगामी विचलन रीति/अन्य रीतियाँ/निश्चयन-गुणांक/विलम्बना/सहसम्बन्ध तथा कार्य-कारण सम्बन्ध/महत्त्वपूर्ण सूत्रों की सूची। 310–361

12. चित्रमय प्रद[illegible]

उपयोगि[illegible] नियम/चित्रों के प्रकार—एक विस्तार वाले चित्र/विभि[illegible] चित्र/तीन विस्तार वाले चित्र/चित्रलेख/मानचित्र/विशेष[illegible], समविच्छेद चित्र, शुद्ध-अवशेष-चित्र; छाया चित्र, कटिबन्ध चित्र, संघटक भाग चित्र, जी चित्र। 362–398

13. बिन्दुरेखीय प्रदर्शन (Graphic Presentation)

उपयोगिता व लाभ-सीमाएँ/रेखाचित्र की रचना—नियम/काल-श्रेणी के रेखाचित्र/कृत्रिम आधार रेखा/दो मापदण्डों के रेखाचित्र/अनुपात माप श्रेणी/आवृत्ति-बंटनों के रेखाचित्र—रेखा आवृत्ति चित्र, आवृत्ति आयत चित्र, बहुलक-निर्धारण, आवृत्ति बहुभुज, आवृत्ति वक्र—भेद, संचयी आवृत्ति वक्र, मध्यका व विभाजन-मूल्य निर्धारण, गाल्टन विधि/आर्थिक वक्र/सारणीयन, चित्रमय तथा बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की तुलना। 399–427

14. सूचकांक (Index Numbers)

परिभाषा और विशेषताएँ/सूचकांकों का समारम्भ/महत्त्व एवं उपयोग, सीमाएँ/सूचकांक रचना की समस्याएँ—उद्देश्य, पदों का चुनाव, मूल्य-उद्धरण, आधार-चुनाव व सरल-सूचकांकों का निर्माण—स्थिर आधार व श्रृंखला आधार रीति, आधार परिवर्तन, आधार वर्ष परिवर्तन/शिरोबन्धन, माध्य का चुनाव, भारांकन-विधि, भारित सूचकांकों की रचना-विधि/उपभोक्ता-मूल्य; सूचकांक—रचना में कठिनाइयाँ, रीतियाँ, विभ्रम/सूचकांकों की अपस्फीति/मात्राओं के सूचकांक/फिशर का आदर्श सूचकांक/उत्क्राम्यता परीक्षाएँ/अन्य सूत्र/महत्त्वपूर्ण सूत्रों की सूची। 428–474

15. काल-श्रेणी का विश्लेषण (Analysis of Time Series)

अर्थ व महत्त्व/काल-श्रेणी के संघटक (अंग)/काल-श्रेणी का विश्लेषण/योज्य एवं गुणनात्मक निदर्श/प्रारम्भिक समायोजन/सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का मापन/रीतियाँ—मुक्त हस्त वक्र, अर्द्ध-मध्यक, चल माध्य, न्यूनतम वर्ग रीति/सरल रेखीय उपनति-अन्वायोजन, परवलयिक उपनति-निर्धारण/अल्पकालीन उच्चावचनों का मापन/ऋतुनिष्ठ विचरणों का मापन—रीतियाँ/चक्रीय विचरण का मापन—अवशिष्ट रीति/अनियमित उच्चावचनों का मापन/महत्त्वपूर्ण सूत्र। 475–522

16. व्यावसायिक पूर्वानुमान (Business Forecasting)

अर्थ व प्रकृति/उद्देश्य/प्रविधियाँ (रीतियाँ)/सिद्धान्त—काल विलम्बना, क्रिया-प्रतिक्रिया, विशिष्ट ऐतिहासिक सादृश्य, प्रतिकाट आर्थिक विश्लेषण, आर्थिक-लय सिद्धान्त/अन्तर्निहित-मान्यताएँ/पूर्वानुमान की उपयोगिता, सीमाएँ/पूर्वानुमान-सेवाएँ। 523–533

17. आन्तरगणन एवं बाह्यगणन (Interpolation and Extrapolation)

अर्थ और अन्तर/आवश्यकता व महत्त्व/मान्यताएँ/परिशुद्धता/रीतियाँ—बिन्दुरेखीय, बीजगणितीय—प्रत्यक्ष द्विपद विस्तार रीति/न्यूटन की प्रगामी अन्तर विधि/लाग्रेंज की रीति/परवलयिक वक्र विधि/अन्य रीतियाँ/महत्त्वपूर्ण सूत्रों की सूची। 534–562

18. प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis)

अर्थ और उपयोगिता/सहसम्बन्ध एवं प्रतीपगमन में अन्तर/रेखीय प्रतीपगमन/प्रतीपगमन रेखाएँ—अर्थ, दो क्यों?, कार्य/प्रतीपगमन समीकरण/प्रतीपगमन-गुणाक—परिगणन/प्रतीपगमन रेखाओं की रचना/न्यूनतम-वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन समीकरण/अनुमान की प्रमाप-त्रुटि/विचरण का अनुपात, गाल्टन विन्दुरेख/बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन/बहुसम्बन्ध गुणांक/आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक/बहुगुणी प्रतीपगमन/न्यूनतम-वर्ग विधि, विचलन-विधि, महत्त्वपूर्ण सूत्र। 563–608

19. भारतीय समंक (Indian Statistics)

भारतीय समंक व्यवस्था (Statistical System in India)—ऐतिहासिक पृष्ठभूमि/वर्तमान सांख्यिकीय व्यवस्था/केन्द्र में सांख्यिकीय संगठन/केन्द्रीय मन्त्रालयों के अधीन प्रमुख सांख्यिकीय इकाइयाँ—कृषि मंत्रालय, वाणिज्य मंत्रालय, वित्त मंत्रालय, उद्योग मंत्रालय, श्रम मंत्रालय, गृह मंत्रालय, रेल मन्त्रालय, रक्षा मंत्रालय, मानव संसाधन विकास मंत्रालय, योजना मंत्रालय, अन्य मंत्रालय/केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन/राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन/अभिकलित्र (कम्प्यूटर) केन्द्र/भारतीय सांख्यिकीय संस्थान/सार्वजनिक क्षेत्र उपक्रमों में सांख्यिकीय इकाइयाँ/गैर-सरकारी सांख्यिकीय संगठन/राष्ट्रीय सांख्यिकी सलाहकार मंडल/राज्यों में सांख्यिकीय संगठन—उत्तर प्रदेश, राजस्थान, मध्य प्रदेश, बिहार, हरियाणा, पंजाब/विकेन्द्रित सांख्यिकीय संगठन में समन्वय व्यवस्था/सांख्यिकीय प्रशिक्षण एवं सांख्यिकीय सेवा संवर्ग।

भारत में राजकीय समंक (Official Statistics in India)—जनसंख्या समंक—जनगणना, भारतीय जनगणना, 1971 की जनगणना, 1981 की जनगणना, भारत की जनगणना 1991/ राष्ट्रीय आय समंक/भारतीय समंकों के सामान्य दोष/भारत में समंक संकलन में कठिनाइयाँ।

1–80

20. प्रारम्भिक गणित (Elementary Mathematics) 1–164

परिशिष्ट—गणितीय सारणियाँ 1–8

1
परिचय एवं परिभाषा
(INTRODUCTION AND DEFINITION)

आधुनिक युग में मानवीय ज्ञान, विज्ञान तथा सभ्यता के बहुमुखी विकास में संख्याओं का सबसे महत्त्वपूर्ण योगदान रहा है। आज का मानव प्रत्येक क्षेत्र में अधिकतर संख्याओं के रूप में ज्ञान प्राप्त करता है और संख्यात्मक रीतियों की सहायता से ही अनेक विवेकपूर्ण निर्णय लेता है। संख्याओं के आधार पर ज्ञान को स्पष्ट एवं निश्चयात्मक रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जो ज्ञान संख्यात्मक तथ्यों पर आधारित नहीं होता वह वास्तव में 'ज्ञान' ही नहीं कहा जा सकता। लॉर्ड केल्विन के अनुसार, 'जिस विषय की आप बात कर रहे हैं यदि आप उसका माप कर सकते हैं और उसे संख्याओं के रूप में प्रकट कर सकते हैं तो आप उसके बारे में कुछ जानते हैं; किन्तु जब आप उस विषय का माप नहीं कर सकते, उसे संख्याओं में प्रकट नहीं कर सकते तो आपका ज्ञान अल्प है और असंतोषजनक प्रकृति का है। यह 'ज्ञान' का समारम्भ हो सकता है परन्तु आप अपनी विचारधारा में एक 'विज्ञान' के स्तर तक प्रगति नहीं कर पाये हैं।'[1] यही कारण है कि जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में संख्यात्मक तथ्यों और संख्यात्मक विधियों का बहुत प्रयोग किया जाता है।

अंकात्मक सूचना के अभाव में महत्त्वपूर्ण वैज्ञानिक अनुसन्धान और आर्थिक नियोजन की तो कल्पना भी नहीं की जा सकती। मानव की चन्द्र-विजय निस्सन्देह बीसवीं शताब्दी की सबसे महत्त्वपूर्ण वैज्ञानिक उपलब्धि है। अपोलो–11 तथा अन्य अन्तरिक्ष-अभियानों की सफलता अधिकांश रूप में वैज्ञानिकों द्वारा की गई गणना एवं माप पर आधारित थी। इसी प्रकार आर्थिक योजनाओं का निर्माण और उनकी प्रगति का मूल्यांकन पूर्णरूपेण संख्यात्मक विश्लेषण पर निर्भर रहता है।

ज्ञान-विज्ञान की किसी शाखा से सम्बन्धित तथ्यों को संख्याओं के रूप में संकलित करके प्रस्तुत करने, उनका वैज्ञानिक विश्लेषण करने और उनसे तर्कपूर्ण निष्कर्ष निकालने की क्रियाओं का विधिवत् अध्ययन सांख्यिकी-विज्ञान (science of statistics) के अन्तर्गत किया जाता है। सांख्यिकी का सम्बन्ध ज्ञान प्राप्त करने की संख्यात्मक प्रविधियों से है। सांख्यिकी में प्रयोग होने वाली संख्याओं को सांख्यिकीय सामग्री या समंक (statistical data) कहते हैं जिनके कुछ विशिष्ट अभिलक्षण होते हैं।

अर्थ और परिभाषाएँ
(Meaning and Definitions)

सांख्यिकी (Statistics) शब्द का दो अर्थों में प्रयोग किया जाता है—(1) बहुवचन में,

[1] 'When you can measure what you are speaking about and express it in numbers, you know something about it; but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind. It may be the beginning of knowledge, but you have scarcely in your thought advanced to the stage of a science.'—Lord Kelvin.

तथा (2) एकवचन में। बहुवचन में 'Statistics' का तात्पर्य समंकों या आँकड़ों (Statistical data) से होता है जो किसी क्षेत्र से सम्बन्धित संख्यात्मक विवरण होते हैं जैसे जनसंख्या के समंक, राष्ट्रीय आय के समंक, मूल्य-स्तर के समंक, अपराध सम्बन्धी आँकड़े आदि। एकवचन में 'Statistics' का अर्थ सांख्यिकी-विज्ञान है जिसमें समंकों के संग्रह, विश्लेषण और निर्वचन से सम्बन्धित क्रियाओं अर्थात् सांख्यिकीय विधियों (Statistical Methods) का विधिवत् अध्ययन किया जाता है। केन्डाल तथा बकलैण्ड ने Statistics शब्द की निम्न रूप से व्याख्या की है—

Statistics (बहुवचन)—व्यक्तिगत इकाइयों के समूह से सम्बन्धित संख्यात्मक तथ्य।
(एकवचन)—समंकों के संग्रह, विश्लेषण व निर्वचन का विज्ञान।[1]

समंकों (Statistical data) की परिभाषाएं :

सामान्य व्यक्ति के लिए शब्द 'समंक' में मात्र संख्याओं का धुन्धला-सा और नीरस अर्थ निहित है[2] और वह मुख्यतः उसे सांख्यिक समझता है जो वस्तुओं की संख्या की गणना करता हो। यह धारणा गलत है। वास्तव में समंक ऐसी संख्याओं को कहते हैं जिनमें कुछ विशेष गुण पाये जाते हैं और जो सांख्यिकी विज्ञान की आधार-शिला हैं।

वेब्स्टर के अनुसार, 'समंक किसी राज्य के निवासियों की स्थिति से सम्बन्धित वर्गीकृत तथ्य हैं.......विशेष रूप से वे तथ्य जिन्हें संख्याओं में या संख्याओं की सारणियों में प्रस्तुत किया जा सके।'[3] इस परिभाषा में समंकों के क्षेत्र को राज्य में रहने वालों की स्थिति तक ही सीमित कर दिया गया है जबकि आजकल इनका क्षेत्र अत्यन्त विशाल है। दूसरे, इसमें समंकों की प्रमुख विशेषताओं का उल्लेख नहीं किया गया है। तीसरे, इसमें वर्गीकरण एवं सारणीयन को अनावश्यक महत्त्व दिया गया है। अतः यह परिभाषा सीमित और अपर्याप्त है।

डा० बाउले के शब्दों में—'समंक, अनुसन्धान के किसी विभाग से सम्बन्धित तथ्यों के ऐसे संख्यात्मक विवरण हैं जिन्हें एक दूसरे के सम्बन्ध में रखा जा सके।'[4] इस परिभाषा में समंकों की तीन विशेषताओं का वर्णन किया गया है—(1) समंक अनुसन्धान के किसी भी क्षेत्र से सम्बन्धित तथ्य होते हैं, (2) समंक संख्याओं के रूप में प्रस्तुत तथ्य हैं, तथा (3) वे तुलना-योग्य या सजातीय होते हैं। समंकों की अन्य महत्त्वपूर्ण विशेषताओं का इस परिभाषा में उल्लेख नहीं है।

वालिस एवं रॉबर्ट्स् के अनुसार, 'समंक तथ्यों के परिमाणात्मक पहलुओं के संख्यात्मक विवरण हैं जो मदों की गिनती या माप के रूप में व्यक्त होते हैं।'[5] उदाहरण के लिए किसी क्लब के सदस्यों से सम्बद्ध समंकों में, पुरुष व स्त्री सदस्यों की गिनती, 21 वर्ष या उससे अधिक व कम आयु वाले सदस्यों की संख्या, उनके भार, लम्बाई आदि के माप तथा इन मापों के आधार पर परिगणित औसत, प्रतिशत, अनुपात आदि भी सम्मिलित किये जा सकते हैं। इस अर्थ में, 'भारत का सांख्यिकीय सारांश' (Statistical Abstract of India) महत्त्वपूर्ण समंकों का संग्रह है।

समंकों की व्यापक परिभाषा होरेस सिक्राइस्ट द्वारा दी गई है जो इस प्रकार है—'समंक तथ्यों के उन समूहों को कहते हैं जो अनेक कारणों से, पर्याप्त सीमा तक प्रभावित होते हैं,

[1] 'Statistics—Numerical data relating to an aggregate of individuals; the science of collecting, analysing and interpreting such data.'—Kendall and Buckland, *A Dictionary of Statistical Terms*, p. 279.

[2] 'To the layman, the term 'statistics' usually carries only the nebulous—and too often, distasteful—connotation of *figures*.'—Wallis & Roberts, *Statistics—A New Approach*, p. 1.

[3] Statistics are 'classified facts respecting the condition of the people in a state... especially those *facts* which can be stated in numbers or in tables of numbers.'—Webster's Dictionary.

[4] 'Statistics are numerical statements of facts in any department of inquiry, placed in relation to each other.'—Dr. A. L. Bowley, *An Elementary Manual of Statistics*, p. 1.

[5] 'Statistics are numerical descriptions of the quantitative aspects of things and they take the form of counts or measurements.'—Wallis and Roberts, *op. cit.*, p. 1.

जो अंकों में प्रकट किये जाते हैं, यथोचित शुद्धता के अनुसार जिनका आगणन अथवा अनुमान लगाया जाता है, जिन्हें किसी पूर्व-निश्चित उद्देश्य के लिए एक सुव्यवस्थित रीति द्वारा एकत्र किया जाता है तथा जिन्हे तुलना के लिए एक दूसरे के सम्बन्ध में रखा जा सकता है।'[1] इस परिभाषा में समंकों की सभी महत्वपूर्ण विशेषताओं का उल्लेख किया गया है।

समंकों की विशेषताएं (Characteristics of Statistics)—समंकों की निम्नलिखित विशेषताएं होती हैं—

(1) **तथ्यों के समूह**—किसी एक तथ्य से सम्बन्धित अंक समंक नही कहलाता क्योंकि उससे कोई नतीजा नही निकाला जा सकता; परन्तु अनेक तथ्यो के अंक समक होते हैं। उनकी परस्पर तुलना की जा सकती है और उनसे समुचित निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। उदाहरणार्थ, किसी एक विद्यार्थी की आयु, एक दुर्घटना, को समंक नहीं कहा जा सकता, जबकि अनेक विद्यार्थियों की आयु के अंक, अनेक दुर्घटनाओं के अक, समंक कहलाएंगे। इस प्रकार, एक-तथ्य नहीं वरन् अनेक तथ्यों के समूह सांख्यिकी की विषय-सामग्री हैं।[2]

(2) **संख्याओं के रूप में प्रस्तुत**—तथ्यों को या तो गुणात्मक (qualitative) रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जैसे 'नवयुवक', 'प्रौढ़', 'वृद्ध', 'अमीर', 'गरीब' इत्यादि या संख्यात्मक (quantitative) रूप में, जैसे आयु—20, 45, 80 वर्ष आदि। संख्याओं के रूप में प्रस्तुत तथ्य ही समंक कहलाते हैं।

(3) **अनेक कारणों से प्रभावित**—समंक विविध कारणो से प्रभावित होते हैं। उदाहरण के लिए, कृषि-उत्पादन समंकों पर जलवायु, वर्षा, सिंचाई, भूमि की उत्पादकता, बीज, खाद, खेती के तरीकों आदि अनेक कारणों का प्रभाव पड़ता है। विविध कारणों द्वारा प्रभावित होने के कारण ही समंकों का सांख्यिकीय विश्लेषण आवश्यक होता है।

(4) **गणना अथवा अनुमान**—समंकों का संकलन गणना अथवा अनुमान द्वारा किया जा सकता है। अनुसन्धान के सीमित क्षेत्र में गणना और विस्तृत क्षेत्र में अधिकतर सर्वोत्तम अनुमान ही संकलन का आधार होते हैं।

(5) **यथोचित शुद्धता**—समंकों के संकलन मे शुद्धता की यथोचित मात्रा होनी परमावश्यक है। यथोचित शुद्धता, अनुसन्धान के उद्देश्य, उसकी प्रकृति, आकार व उपलब्ध साधनों पर निर्भर होती है। उदाहरणार्थ, यदि विद्यार्थियो की लम्बाई का माप किया जा रहा है तो सेन्टीमीटर तक यथार्थता होनी चाहिए, परन्तु मेरठ से जयपुर की दूरी का माप करने मे किलोमीटर तक शुद्धता ही अपेक्षित है, मीटर आदि को छोड़ा जा सकता है। इसके विपरीत, पृथ्वी से सूर्य या अन्य ग्रहों की दूरी का अनुमान लगाने मे हज़ारो किलोमीटर तक को भी छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार शुद्धता के यथोचित स्तर विभिन्न परिस्थितियों मे भिन्न होते हैं।

(6) **सुव्यवस्थित संकलन**—समंकों को एक निश्चित योजना के अनुसार सुव्यवस्थित रीति द्वारा संकलित किया जाना चाहिए। अव्यवस्थित रूप से एकत्रित तथ्यों से समुचित तथा तर्कशुद्ध निष्कर्ष नही निकाले जा सकते। उदाहरणार्थ, यदि बिना किसी योजना के, कुछ परिवारों के मासिक व्यय के आंकड़े अव्यवस्थित रूप से एकत्र किये जाएं तो वे समंक नही कहलायेंगे; किन्तु यदि श्रमिक परिवारो के पारिवारिक बजट के आंकड़े एक निश्चित योजना के अनुसार सुव्यवस्थित रीति द्वारा विधिवत् संकलित किये जाएं तो वे समंक कहलायेंगे क्योंकि उनसे उचित निष्कर्ष प्राप्त किये जा सकते हैं।

(7) **पूर्व-निश्चित उद्देश्य**—समंको को संकलित करने का उद्देश्य पहले से ही स्पष्ट रूप मे निर्धारित कर लिया जाना चाहिए। उद्देश्य-विहीन आंकड़े समंक नही कहलाते। उदाहरण के

[1] Statistics are 'aggregates of facts, affected to a marked extent by a multiplicity of causes, numerically expressed, enumerated or estimated according to reasonable standards of accuracy, collected in a systematic manner for a pre-determined purpose and placed in relation to each other.'—Horace Secrist, *An Introduction to Statistical Methods*, p. 10.

[2] 'Not a datum, but the data are the subject-matter of statistics.'

लिए, यदि किसी उद्योग में लगे श्रमिकों की मजदूरी के आँकड़े एकत्र किये जा रहे हैं तो यह पहले से ही निश्चित हो जाना चाहिए कि उन्हें संकलित करने का क्या उद्देश्य है—जीवन-स्तर का अनुमान लगाना, मजदूरी-वृद्धि की माँग पर विचार करना, या तुलनात्मक विश्लेषण करना।

(8) **परस्पर तुलना-योग्यता**—समंक इस प्रकार प्रस्तुत किये जाने चाहिएँ जिससे उनकी आपस मे तुलना की जा सके। तुलना के लिए समंकों में सजातीयता (homogeneity) या एकरूपता (uniformity) होनी आवश्यक है। अतुलनीय तथ्य केवल संख्याएँ हैं। उदाहरणार्थ, कुछ व्यक्तियों की आय, उनकी आयु, पेड़ो की ऊँचाई, कॉलिज में विद्यार्थियों की संख्या आदि तुलना-योग्य तथ्य नहीं हैं। अतः इन्हें समंक नहीं कहा जा सकता। समंक कहलाने के लिए संख्याओं का समय, स्थान या परिस्थिति के आधार पर तुलना-योग्य होना अत्यावश्यक है।

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि सभी सांख्यिकीय समक संख्यात्मक तथ्य होते हैं किन्तु सभी संख्यात्मक तथ्य समंक नहीं होते। केवल उन्ही संख्यात्मक तथ्यों को समक कहा जा सकता है जिनमे उपर्युक्त सभी अभिलक्षण पाये जाते है।

सांख्यिकी विज्ञान (Science of Statistics) की परिभाषाएँ—एकवचन के रूप मे Statistics का तात्पर्य सांख्यिकी विज्ञान से है जिनमें समंकों के संकलन, विश्लेषण व निर्वचन से सम्बन्धित अनेक सांख्यिकीय विधियो का अध्ययन किया जाता है। सांख्यिकी विज्ञान की अनेक विद्वानो ने भिन्न-भिन्न परिभाषायें दी है तथा इस सम्बन्ध मे सांख्यिको में काफी मतभेद है।

सामान्य रूप से, सांख्यिकी की मुख्य परिभाषाओ को हम निम्न दो श्रेणियों में बाँट सकते हैं—

(क) प्राचीन मत की (संकीर्ण) परिभाषाएँ।

(ख) आधुनिक मत की (व्यापक) परिभाषाएँ।

(क) प्राचीन मत की परिभाषाएँ—सांख्यिकी का जन्म प्राचीनकाल में राजाओं के विज्ञान के रूप मे हुआ था। अतः प्राचीन मत की परिभाषाओ में या तो सांख्यिकी के क्षेत्र को राज्य विज्ञान तक ही सीमित किया गया है या उनमे केवल एक-दो सांख्यिकीय रीतियो—जैसे गणना, माध्य आदि पर ही बल दिया गया है। इस प्रकार प्राचीन मत की परिभाषाएँ संकीर्ण तथा एकांगी है।

डा० बाउले ने सांख्यिकी की तीन परिभाषाएँ दी है जो निम्न प्रकार है—

(i) 'सांख्यिकी, सामाजिक व्यवस्था को सम्पूर्ण मानकर, सभी स्वरूपों मे उसका माप करने का विज्ञान है।'[1] यह परिभाषा दोषपूर्ण है। प्रथम तो, यह सांख्यिकी का क्षेत्र मनुष्य तथा उसकी सामाजिक क्रियाओं तक ही सीमित करती है। डा० बाउले ने स्वयं यह स्वीकार किया है कि 'सांख्यिकी न तो राज्य-अर्थशास्त्र की एक शाखा-मात्र है और न ही वह किसी एक विज्ञान तक सीमित है।'[2] दूसरे, इसमें सांख्यिकी की केवल एक रीति—मापन (measurement)—का ही उल्लेख किया गया है जबकि इस विज्ञान मे अनुमान का भी बहुत महत्त्व है।

(2) 'सांख्यिकी गणना का विज्ञान है।'[3] प्रथम, इस परिभाषा में केवल गणना-रीति पर ही बल दिया गया है। आगणन सांख्यिकी की एक महत्त्वपूर्ण रीति है परन्तु इसका प्रयोग छोटी संख्याओं के संकलन में ही किया जा सकता है। सांख्यिकी में बडी संख्याओं का काफी प्रयोग होता है जिनकी गणना करना असम्भव है। डा० बाउले ने कहा भी है, 'बडी संख्याओं की गणना नहीं की जाती, उनके अनुमान लगाये जाते हैं।'[4] उदाहरणार्थ, भारत में गेहूँ की उपज का निकट अनुमान लगाया जाता है, उसकी वास्तविक गणना या माप सम्भव नही है। इस परिभाषा

[1] 'Statistics is the science of the measurement of the social organism, regarded as whole, in all its manifestations.'—Dr. A. L. Bowley, *Elements of Statistics*, p. 7.

[2] 'Statistics is not merely a branch of political economy, nor is it confined to any one science.'—*Ibid*., p. 4

[3] 'Statistics is the science of counting.'—*Ibid*., p. 1.

[4] 'Great numbers are not counted...they are estimated.'—*Ibid*., p. 7.

दूसरा दोष यह है कि यह सांख्यिकी की अन्य रीतियों—विश्लेषण, निर्वचन आदि—पर प्रकाश नहीं डालती।

(3) 'सांख्यिकी को उचित रूप से माध्यों का विज्ञान कहा जा सकता है।'[1] निस्सन्देह माध्यों की रीति सांख्यिकी की सबसे महत्त्वपूर्ण रीति है जिसके द्वारा समंकों की केन्द्रीय प्रवृत्ति का पता चल जाता है तथा उनकी तुलना भी की जा सकती है। परन्तु सही निष्कर्ष निकालने के लिए अन्य रीतियों, जैसे अपकिरण, विषमता, रेखाचित्र आदि का भी प्रयोग करना आवश्यक है। केवल माध्यों के प्रयोग से ही सम्पूर्ण तुलना नहीं की जा सकती जैसा कि निम्न सारणी से स्पष्ट है—

व्यापार-संस्थाओं के वार्षिक लाभ (रुपयों में)

वर्ष	क	ख	ग
1969	6,000	34,000	20,000
1970	16,000	24,000	20,000
1971	24,000	16,000	20,000
1972	34,000	6,000	20,000
औसत लाभ	20,000	20,000	20,000

उपर्युक्त सारणी के अनुसार तीनों व्यापारिक संस्थाओं के औसत लाभ बराबर हैं। अतः केवल माध्यों के आधार पर यह निष्कर्ष निकलता है कि तीनों संस्थाओं की व्यापारिक स्थिति एक समान है। परन्तु यदि स्थिति का पूर्ण विश्लेषण किया जाय तो यह पता चलता है कि संस्था 'क' में लगातार उन्नति हो रही है, इसके विपरीत संस्था 'ख' अवनति की ओर जा रही है तथा संस्था 'ग' में स्थिति स्थिर है। इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि सांख्यिकी में माध्यों के साथ-साथ अन्य रीतियों का भी बहुत महत्त्व है। इस परिभाषा में उन रीतियों का समावेश नहीं किया गया है, अतः यह भी संकीर्ण तथा अपर्याप्त है।

बॉडिंगटन के मतानुसार, 'सांख्यिकी अनुमानों व सम्भाविताओं का विज्ञान है।'[2] इस परिभाषा में केवल अनुमानों व सम्भावनाओं की रीतियों का ही उल्लेख किया गया है। सांख्यिकी में बड़ी संख्याओं के सर्वोत्तम अनुमान लगाये जाते हैं परन्तु ये अनुमान भी अधिकतर सामूहिक गणना द्वारा प्राप्त आँकड़ों पर ही आधारित होते हैं। इस प्रकार यह परिभाषा भी संकीर्ण है क्योंकि यह सांख्यिकी की अनेक रीतियों में से केवल एक का ही उल्लेख करती है।

(ख) आधुनिक मत की परिभाषाएँ—आधुनिक मत की परिभाषाओं में सांख्यिकी के क्षेत्र को व्यापक रखा गया है तथा अनेक महत्त्वपूर्ण रीतियों का वर्णन किया गया है। इनमें से कुछ प्रमुख परिभाषाएँ निम्न प्रकार हैं—

किंग के अनुसार, 'गणना अथवा अनुमानों के संग्रह के विश्लेषण द्वारा प्राप्त परिणामों से सामूहिक प्राकृतिक अथवा सामाजिक घटनाओं पर निर्णय करने की रीति को सांख्यिकी विज्ञान कहते हैं।'[3] इस परिभाषा में सांख्यिकी के तीन महत्त्वपूर्ण पहलुओं का विवेचन किया गया है। प्रथम, सांख्यिकी विज्ञान में प्राकृतिक एवं सामाजिक दोनों प्रकार की घटनाओं के सम्बन्ध में निर्णय

[1] 'Statistics may rightly be called the science of averages.'—*Ibid*, p 7.

[2] 'Statistics is the science of estimates and probabilities.' —A. L. Boddington, *Statistics and their Application to Commerce*, p. 7.

[3] 'The science of statistics is the method of judging collective natural or social phenomena from the results obtained by the analysis of an enumeration or collection of estimates.'—W. I. King. *The Elements of Statistical Method*, p. 23.

किये जाते हैं। दूसरे, इसमें सामूहिक तथ्यों का ही विवेचन किया जाता है, व्यक्तिगत तथ्यों का नहीं। तीसरे, गणना अथवा अनुमान द्वारा संकलित समंकों का विश्लेषण ही निर्णय का आधार है। यह परिभाषा अधिक व्यापक है परन्तु इसमें सांख्यिकी की एक रीति—निर्णय देना अथवा निर्वचन को संकलन तथा विश्लेषण की अपेक्षा अधिक महत्त्व दिया गया है। फिर भी व्यावहारिक दृष्टि से यह परिभाषा अच्छी है।

कारमैल के अनुसार, 'सांख्यिकी का विषय उन तथ्यों के संकलन, प्रस्तुतीकरण, वर्णन एवं विश्लेषण से सम्बन्धित है जिनका संख्यात्मक रूप में मापन हो सकता है।'[1]

सैलिगमैन के अनुसार, 'सांख्यिकी वह विज्ञान है जो ऐसे समंकों के संकलन, वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण, तुलना तथा निर्वचन की रीतियों से सम्बन्ध रखता है जिन्हें किसी अनुसन्धान-क्षेत्र पर प्रकाश डालने के लिए एकत्र किया जाता है।'[2]

क्राक्सटन तथा काउडेन लिखते है, 'सांख्यिकी को संख्यात्मक तथ्यों के संग्रहण, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन से सम्बन्धित विज्ञान कहा जा सकता है।'[3]

या-लुन-चाऊ के शब्दों में, 'यह (सांख्यिकी) संख्यात्मक तथ्यों से सम्बन्धित विज्ञान है, इसमें समंकों के प्रारम्भिक नियोजन व संकलन से लेकर निष्कर्षों को अन्तिम रूप में प्रस्तुत करने तक की सभी क्रियाएँ सम्मिलित होती हैं। अधिक विशिष्ट रूप से, इसमें संख्यात्मक तथ्यों का संग्रह करना, उन्हें वर्गीकृत करना, उनका विश्लेषण एवं निर्वचन करना और उनसे तर्कपूर्ण निष्कर्ष निकालना आदि क्रियाओं का समावेश होता है।'[4]

उपर्युक्त परिभाषाओं में सांख्यिकी की लगभग सभी महत्त्वपूर्ण रीतियों का उल्लेख किया गया है, परन्तु इनमें इस विषय की प्रकृति को स्पष्ट नहीं किया गया है।

आजकल नवीन प्रवृत्तियों के अनुसार सांख्यिकी को अनिश्चितता की परिस्थितियों में उचित निर्णय लेने का विज्ञान माना जाता है। वालिस तथा राबर्ट्स के अनुसार, 'अनिश्चितता के समक्ष विवेकपूर्ण निर्णय करने की रीतियों के समूह को सांख्यिकी विज्ञान कहते हैं।'[5]

इसके अनुसार सांख्यिकी, अनेक रीतियों का संग्रह है जिनका मूल उद्देश्य किसी घटना से सम्बन्धित अनिश्चित स्थिति को दूर करके बुद्धिमत्तापूर्ण निर्णय लेना तथा उचित निष्कर्ष निकालना है। सांख्यिकीय रीतियों द्वारा व्यावहारिक कार्य-क्षेत्र तथा वैज्ञानिक शोध के प्रश्नों पर निर्णय किये जाते हैं। ऐसा करने के लिए पहले उपलब्ध संख्यात्मक तथ्यों का संकलन तथा विश्लेषण किया जाता है। फिर उन्नत सांख्यिकीय विधियों द्वारा श्रेष्ठतम तथा विवेकपूर्ण निष्कर्ष निकाले जाते हैं। 'वस्तुतः सांख्यिकी विज्ञान अनिश्चितता की परिस्थितियों में निर्णय लेने के साधन अथवा उपकरण प्रदान करता है।'[6] हैडने, कैने एवं कीपिंग, नेटर व वासरमेन आदि सांख्यिकों ने इस नवीन दृष्टिकोण का समर्थन किया है।

[1] 'The subject 'Statistics' is concerned with the collection, presentation, description and analysis of data which are measurable in numerical terms.'—P. H. Karmel.

[2] 'Statistics is the science which deals with the methods of collecting, classifying, presenting, comparing and interpreting numerical data collected to throw some light on any sphere of inquiry.'—Seligman.

[3] 'Statistics may be defined as the collection, presentation, analysis and interpretation of numerical data.'—F. E. Croxton and D. J. Cowden. *Applied General Statistics.*

[4] '...it is the science of dealing with numerical data ; it encompasses all the necessary operations—from the initial planning and assembling of data to the final presentation of conclusions. More specifically, it involves collecting statistical data, classifying them, analyzing and interpreting them, and drawing from them whatever conclusions are valid.' —Ya-lun Chou, *Applied Business and Economic Statistics*, p. 1.

[5] 'Statistics is a body of methods for making wise decisions in the face of uncertainty.' —W. A. Wallis and H. V. Roberts, *op. cit.*, p 3.

[6] 'Statistics provides tools for making decisions when conditions of uncertainty prevail.'—A. M. Mood and F. A. Graybill, *An Introduction to the Theory of Statistics*, p. 1.

उपर्युक्त सभी परिभाषाओं के विवेचन से यह स्पष्ट हो जाता है कि अर्थशास्त्रियों की भाँति सांख्यिकों में भी अपने विषय की परिभाषा के प्रश्न पर कितना मतभेद है। विभिन्न विद्वानों ने सांख्यिकी के विभिन्न पहलुओं पर जोर देते हुए भिन्न-भिन्न परिभाषाएँ दी हैं। वास्तव में सांख्यिकी की उपयुक्त और आदर्श परिभाषा देना सरल कार्य नहीं है। फिर भी यह निर्विवाद रूप से कहा जा सकता है कि सांख्यिकी के निम्न मूल तत्त्व हैं जिनका समावेश उसकी उपयुक्त परिभाषा में अवश्य होना चाहिए—

(i) सांख्यिकी विज्ञान तथा कला दोनों है।

(ii) सांख्यिकी ऐसे सामूहिक तथ्यों से सम्बन्धित है जिनको संख्याओं के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा जिन पर अनेक कारणों का प्रभाव पड़ता है।

(iii) सांख्यिकी की अनेक रीतियाँ है जिन्हें प्रमुख रूप से चार श्रेणियों में बाँटा जा सकता है—अर्थात् संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन।

(iv) सांख्यिकी का क्षेत्र व्यापक है। उसकी रीतियों का प्रयोग प्रत्येक विज्ञान में किया जाता है।

इन तत्वों के आधार पर हम कह सकते हैं कि सांख्यिकी एक विज्ञान व कला है जिसमें किसी अनुसन्धान-क्षेत्र से सम्बन्धित तथा विविध कारणों द्वारा प्रभावित, सामूहिक संख्यात्मक तथ्यों के संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन की रीतियों का विधिवत् अध्ययन किया जाता है।[1]

सांख्यिकी का क्षेत्र तथा विभाग
(Scope and Divisions of Statistics)

प्राचीनकाल में सांख्यिकी का क्षेत्र अत्यन्त सीमित था। सांख्यिकी की उत्पत्ति 'राजाओं के विज्ञान' के रूप में हुई थी। परन्तु आधुनिक युग में इस विज्ञान का क्षेत्र बहुत विस्तृत हो गया है। वास्तव में, प्रत्येक विज्ञान में एक महत्त्वपूर्ण साधन के रूप में सांख्यिकीय विधियों का काफी प्रयोग किया जाता है। यह कहना अनुचित न होगा कि 'सांख्यिकी के बिना विज्ञान फलदायक नहीं होते और विज्ञानों के बिना सांख्यिकी निराधार और निर्मूल है।'[2]

सांख्यिकी की विषय-सामग्री को निम्न दो भागों में बाँटा जा सकता है—

(क) सांख्यिकीय रीतियाँ (Statistical Methods),

(ख) व्यावहारिक सांख्यिकी (Applied Statistics)।

(क) सांख्यिकीय रीतियाँ—सांख्यिकी विज्ञान की अनेक रीतियाँ हैं जिनके द्वारा किसी भी अनुसन्धान-क्षेत्र में समंकों को एकत्रित करके उनका विश्लेषण किया जाता है और उनसे उचित परिणाम निकाले जाते हैं। जॉन्सन तथा जैक्सन के शब्दों में 'सांख्यिकीय रीतियाँ वे प्रक्रियाएँ हैं जो संख्यात्मक तथ्यों के संग्रहण, संगठन, संक्षिप्तीकरण, विश्लेषण, निर्वचन और प्रस्तुतीकरण में प्रयोग की जाती हैं।'[3] यूल तथा केन्डाल के अनुसार 'सांख्यिकीय रीतियों से हमारा अभिप्रायः उन रीतियों से है जो विविध कारणों से प्रभावित संख्यात्मक तथ्यों का स्पष्टीकरण करने के लिए विशेष रूप से प्रयोग की जाती है।'[4]

[1] Statistics is a science and an art which studies the methods of collection, presentation, analysis and interpretation of collective numerical data affected by multiple causes and collected in any sphere of inquiry.

[2] 'Sciences without statistics bear no fruit. Statistics without sciences have no root.'

[3] 'Statistical methods are the procedures used in the collection, organisation, summary, analysis, interpretation and presentation of data.' —Johnson and Jackson, *Introduction to Statistical Methods*, p. 7.

[4] 'By statistical methods we mean methods specially adapted to the elucidation of quantitative data affected by a multiplicity of causes.'—Yule and Kendall, *An Introduction to the Theory of Statistics*, p. xvi.

सांख्यिकीय रीतियों के द्वारा आंकिक तथ्यों का विश्लेपण करके उन्हें सरल और बुद्धिगम्य बनाया जाता है जिससे उनकी परस्पर तुलना की जा सके और उनसे उचित निष्कर्ष निकाले जा सकें। सांख्यिकीय रीतियां उत्पादन क्रियाओं के समान हैं। जिस प्रकार कपास से कपड़ा बनाने में अनेक निर्माण-विधियों का प्रयोग करना पड़ता है उसी प्रकार प्रारम्भिक रूप में उपलब्ध समंकों को भी सरल तथा प्रयोग में लाने योग्य बनाने के लिए विभिन्न सांख्यिकीय रीतियों की सहायता लेनी पड़ती है।

सांख्यिकी की अनेक महत्त्वपूर्ण रीतियां हैं जिनको निम्न चार वर्गों में बांटा जा सकता है—

(1) संकलन (Collection)—सर्वप्रथम, समंकों को एक निश्चित योजनानुसार उपयुक्त रीति द्वारा संकलित किया जाता है। प्राथमिक विधि या द्वितीयक स्रोतों से आंकड़े एकत्र करने के बाद उनका सम्पादन किया जाता है जिससे उनमें कोई अशुद्धि न रहे।

(2) प्रदर्शन अथवा प्रस्तुतीकरण (Display or Presentation)—संकलित समंकों को सरल, सुव्यवस्थित तथा तुलनीय बनाने के लिए उन्हें खानों व पंक्तियों वाली सारणियों (Tables) में प्रस्तुत किया जाता है। आंकड़ों को चित्रों (Diagrams) तथा बिन्दुरेखाचित्रों (Graphs) द्वारा भी आकर्षक ढंग से प्रदर्शित किया जाता है।

(3) विश्लेषण (Analysis)—समंकों के सांख्यिकीय विश्लेपण के लिए अनेक प्रक्रियाएँ अपनायी जाती हैं—जैसे वर्गीकरण, केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापन, अपकिरण, विषमता, सहसम्बन्ध, सूचकांक-रचना, कालश्रेणी का विश्लेषण, आन्तरगणन इत्यादि।

(4) निर्वचन (Inference)—उपयुक्त विश्लेपणात्मक रीतियों का प्रयोग करने के बाद उपलब्ध सांख्यिकीय मापों के आधार पर उचित, निष्पक्ष व बुद्धिमत्तापूर्ण निर्णय लिये जाते हैं और उन निर्णयों की सांख्यिकीय जांच की जाती है।

सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग पूर्ण तथा अपूर्ण दोनों प्रकार के विज्ञानों में किया जाता है। यद्यपि पूर्ण विज्ञानों में प्रयोगात्मक विधि (Experimental method) का सर्वोपरि महत्त्व है, फिर भी भौतिकी (Physics); रसायनशास्त्र (Chemistry) आदि में विभिन्न परिणामों का विश्लेपण करने के लिए सांख्यिकीय विधियों का उपयोग आवश्यक हो जाता है। अपूर्ण विज्ञानों जैसे समाजशास्त्र, अर्थशास्त्र आदि में तो सांख्यिकीय रीतियां अनुसन्धान और विश्लेपण के प्रमुख साधन के रूप में प्रयोग की जाती हैं। क्राक्सटन तथा काउडेन ने ठीक ही कहा है, 'मानव क्रियाओं के निरन्तर बढ़ते हुए क्षेत्र में तथा किसी भी विचार-क्षेत्र में, जहां संख्यात्मक तथ्य उपलब्ध किये जा सकते हैं, सांख्यिकी की रीतियां उपयोगी सिद्ध होती हैं...आजकल प्रयास का कोई भी क्षेत्र ऐसा नहीं है जिसमें सांख्यिकीय विधियां प्रयोग में न आती हों।'[1]

कार्य के आधार पर सांख्यिकीय विधियां दो प्रकार की हो सकती हैं—विवरणात्मक (Descriptive) तथा निष्कर्षात्मक (Inductive)।

विवरणात्मक सांख्यिकी का प्रमुख कार्य संख्यात्मक समूहों की मौलिक विशेषताओं को प्रदर्शित करना होता है। वर्गीकरण, सारणीयन, चित्रमय एवं बिन्दुरेखीय प्रदर्शन, केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापन आदि विवरणात्मक सांख्यिकी की विभिन्न क्रियाएँ हैं। इसके विपरीत निष्कर्षात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत पूरे क्षेत्र (समग्र) में से कुछ इकाइयों को प्रतिदर्श (sample) के रूप में चुनकर, उनके विश्लेपण के आधार पर समस्त समुदाय के बारे में यथोचित और विवेकपूर्ण निष्कर्ष निकालने, अनुमान लगाने, भविष्यवाणी करने आदि प्रक्रियाओं का समावेश होता है। किसी देश के 10 लाख व्यक्तियों के मृत्यु-दर सम्बन्धी समंकों को आयुवर्गानुसार, आय के अनुसार और मृत्यु-कारण के आधार पर वर्गीकृत करके मरण-सालिका (Mortality

[1] 'The methods of Statistics are useful in an ever-widening range of human activities, in any field of thought in which numerical data may be had. ...Today there is hardly a phase of endeavour which does not find statistical devices atleast occasionally useful.' Croxton and Cowden, *op. cit.*, p. 2.

table) के रूप में प्रस्तुत किया जाय तो यह कार्य विवरणात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत आयेगा। परन्तु इन समंकों के आधार पर पूरे देशवासियों की मृत्यु-दर व मृत्यु के कारणों के सम्बन्ध में निष्कर्ष निकालना व पूर्वानुमान लगाना, निष्कर्ष की त्रुटियों की जाँच करना वस्तुतः निष्कर्षात्मक सांख्यिकी की क्रियाएँ हैं। स्पष्ट है कि निष्कर्षात्मक सांख्यिकी विवरणात्मक सांख्यिकी से अधिक रोचक, जटिल और उपयोगी है।

(ख) **व्यावहारिक सांख्यिकी**—व्यावहारिक सांख्यिकी के अन्तर्गत वास्तविक तथ्यों, विशिष्ट विषय-सामग्री तथा विभिन्न समस्याओं पर सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग किया जाता है। 'व्यावहारिक सांख्यिक विशेष विषय-सामग्री में सांख्यिकीय रीतियों को प्रयोग में लाना है।'[1] सांख्यिकीय रीतियाँ विभिन्न क्रियाओं तथा सिद्धान्तों का निरूपण करती हैं, जबकि उन सिद्धान्तों को व्यावहारिक क्षेत्र में प्रयोग करने से व्यावहारिक समंक उपलब्ध होते हैं। उदाहरणार्थ, जनसंख्या, राष्ट्रीय आय, औद्योगिक उत्पादन, मूल्य, मजदूरी आदि के आँकड़े व्यावहारिक समंक हैं। व्यावहारिक समंक, अर्थशास्त्र, वाणिज्य, समाजशास्त्र, प्रशासन, जीव-विज्ञान, मनोविज्ञान तथा अन्य विज्ञानों से सम्बन्धित होते हैं। अतः व्यावहारिक सांख्यिकी के लिए सांख्यिकीय रीतियों के अतिरिक्त तत्सम्बन्धी विषय का ज्ञान होना भी आवश्यक है।

व्यावहारिक सांख्यिकी को निम्न दो वर्गों में बाँटा जा सकता है—

(1) **वर्णनात्मक व्यावहारिक सांख्यिकी** (Descriptive Applied Statistics)—इसमें किसी क्षेत्र से सम्बन्धित भूतकाल अथवा वर्तमान काल में संकलित समंकों का अध्ययन किया जाता है जिनका उद्देश्य विवरणात्मक सूचना प्रदान करना होता है। उदाहरण के लिए, व्यापारिक समंक, मूल्य-सूचकांक, जनसंख्या समंक, वर्णनात्मक व्यावहारिक सांख्यिकी के क्षेत्र में आते हैं क्योंकि इनमे भूतकाल अथवा वर्तमान काल में तत्सम्बन्धी तथ्यों का विवरण प्राप्त हो जाता है।

(2) **वैज्ञानिक व्यावहारिक सांख्यिकी** (Scientific Applied Statistics)—इस वर्ग में सांख्यिकीय रीतियो के प्रयोग द्वारा विभिन्न विषयो में कुछ वैज्ञानिक नियमों के प्रतिपादन अथवा पुष्टीकरण के उद्देश्य से व्यावहारिक समंकों को एकत्रित किया जाता है। उदाहरणार्थ, उपयुक्त वैज्ञानिक व्यावहारिक समंकों की सहायता से अर्थशास्त्री द्रव्य के परिमाण सिद्धान्त या माँग-नियम का परीक्षण कर सकता है तथा वाणिज्य-विशेषज्ञ व्यापार-चक्र के किसी सिद्धान्त का विवेचन कर सकता है।

व्यावसायिक सांख्यिकी (Business Statistics)—व्यवसाय की विभिन्न समस्याओं का अध्ययन, विश्लेषण और समाधान करने में, सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग 'व्यावसायिक सांख्यिकी' के अन्तर्गत किया जाता है। वर्तमान युग मे 'व्यावसायिक सांख्यिकी द्वारा किसी व्यवसाय के संचालन से सम्बद्ध सभी मामलो पर बुद्धिमत्तापूर्ण निर्णय लेने के लिए संख्यात्मक आधार प्रस्तुत किये जाते हैं।'[2] इस प्रकार, व्यावसायिक सांख्यिकी का क्षेत्र व्यापक है। उसमें व्यावसायिक समंकों को संकलित करने और उन्हें चित्रों व सारणियों मे प्रस्तुत करने की रीतियों का ही समावेश नहीं होता वरन् ऐसी प्रक्रियाओं का भी काफी उपयोग होता है जिनसे यन्त्र व श्रम की कुशलता तथा उत्पादन, विज्ञापन व विपणन की नवीन प्रविधियों का मूल्यांकन करके उपयुक्त प्रणालियों के सम्बन्ध में निर्णय लिए जा सकें। सांख्यिकीय किस्म-नियन्त्रण, बजेटरी-नियन्त्रण, व्यावसायिक पूर्वानुमान, काल-श्रेणी विश्लेषण, विपणन और विनियोजन-विश्लेषण, परिकल्पना-परीक्षण (Testing of Hypothesis), रेखीय प्रक्रमन (Linear Programming) और क्रिया-शोध (Operations Research) आदि आधुनिक व्यावसायिक सांख्यिकी की महत्त्वपूर्ण विधियाँ हैं।

[1] 'The applied statistician puts statistical methods into practice in a particular subject-matter.' —George Simpson and Fritz Kafka. *Basic Statistics*, p. 9.

[2] 'Business statistics is now viewed as providing quantitative bases for arriving at well-informed decisions with respect to *all* matters connected with the operation of a business.' —Freund and Williams, *Modern Business Statistics*, p. 2.

सांख्यिकी का उद्देश्य
(Object of Statistics)

बॉडिंगटन के अनुसार 'सांख्यिकीय अन्वेषण का प्रमुख उद्देश्य भूतकालीन तथा वर्तमान तथ्यों की तुलना करके यह ज्ञात करना है कि जो परिवर्तन हुए हैं उनके क्या कारण रहे हैं और उनके क्या परिणाम भविष्य में हो सकते हैं।'[1] सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग द्वारा ही किसी समस्या से सम्बन्धित भूतकालीन समंक एकत्रित किये जा सकते हैं और वर्तमान प्रवृत्तियों से उनकी यथोचित तुलना की जा सकती है। इनके द्वारा घटनाओं में होने वाले परिवर्तनों के कारणों और उनके प्रभावों का विवेचन किया जा सकता है। संक्षेप में, 'सांख्यिकीय रीतियों का वास्तविक उद्देश्य तथ्यों और संख्याओं से उचित अर्थ निकालना, अज्ञात घटनाओं के बारे में खोज करना और स्थिति पर प्रकाश डालना है।'[2]

सांख्यिकी की प्रकृति
(Nature of Statistics)

सांख्यिकी विज्ञान भी है और कला भी। विज्ञान ज्ञान की उस शाखा को कहते हैं जिसमें निम्न लक्षण होते हैं—

(i) विज्ञान ज्ञान का क्रमबद्ध समूह है।
(ii) उसकी विधियाँ तथा नियम सार्वभौमिक होते हैं।
(iii) वह कारण और परिणाम के सम्बन्धों का विश्लेषण करता है।
(iv) उसमें पूर्वानुमान की क्षमता होती है।

उपर्युक्त सभी लक्षण सांख्यिकी में पाये जाते हैं। सांख्यिकी, ज्ञान का क्रमबद्ध समूह है। इसकी अनेक रीतियाँ हैं जिनका सभी विज्ञानों के क्षेत्र में प्रयोग किया जाता है। इसके अनेक सर्वव्यापी नियम हैं जैसे प्रायिकता सिद्धान्त, सांख्यिकीय नियमितता नियम (Law af Statistical Regularity), महांक जड़ता नियम (Inertia of Large Numbers) आदि। संख्यात्मक तथ्यों के सकलन द्वारा घटनाओं का वर्णन करना तथा उनमें कारण-परिणाम सम्बन्ध का विवेचन करके समुचित निष्कर्ष निकालना, सांख्यिकी की मूलभूत क्रियाएँ हैं। भूतकालीन तथा वर्तमान तथ्यों के आधार पर भावी प्रवृत्तियों का पूर्वानुमान लगाना भी सांख्यिकी की महत्त्वपूर्ण रीति है। सांख्यिकीय रीतियों में निरन्तर शोध-कार्य तथा सुधार होता रहता है। इस प्रकार सांख्यिकी को एक विज्ञान कहना सर्वथा उचित है।

कुछ विद्वानों ने सांख्यिकी को एक विज्ञान न कहकर वैज्ञानिक विधि कहा है। क्राक्सटन व काउडेन के अनुसार 'सांख्यिकी एक विज्ञान नहीं है, वह एक वैज्ञानिक विधि है।'[3] वास्तव में, सांख्यिकी, भौतिकी, रसायनशास्त्र, अर्थशास्त्र आदि की तरह का विज्ञान नहीं है। वह तो ज्ञान प्राप्त करने का एक अत्यन्त उपयोगी साधन है जिसकी विधियाँ प्रत्येक विज्ञान के अनुसन्धानकर्त्ता द्वारा प्रयोग की जाती है। जैसा कि वॉलिस व रॉबर्ट्स ने कहा है, 'सांख्यिकी स्वतन्त्र व मूलभूत ज्ञान का समूह नहीं है वरन् वह ज्ञान प्राप्त करने की रीतियों का समूह है।'[4] वह स्वयं अपने में एक लक्ष्य (end) नहीं है, वह एक साधन (means) है। निस्सन्देह

[1] 'The ultimate end of statistical research is to enable comparison to be made between past and present results, with a view to ascertaining the reasons for changes which have taken place and the effect of such changes on the future.' —A. L. Boddington.

[2] 'The real purpose of statistical methods is to make sense out of facts and figu to probe the unknown, and to cast light upon the situation.' —Johnson and Jackson.

[3] 'Statistics is not a science; it is a scientific method.'—Croxton and Cowden op. cit., p. 1.

[4] 'Statistics is not a body of substantive knowledge, but a body of methods f obtaining knowledge.'—Wallis and Roberts, op. cit., p. 5.

इसके बाद उन्नीसवीं शताब्दी में रोजर, नीज, लेस्ली, हिल्डब्रैंड, जैवन्स आदि अर्थशास्त्रियों ने अर्थशास्त्र में सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग को अत्यधिक प्रोत्साहन दिया। बीसवीं शताब्दी में मार्शल, लॉर्ड कीन्स, पेरेटो, ऐजवर्थ आदि प्रसिद्ध अर्थशास्त्रियों ने अपने सिद्धान्तों के प्रतिपादन में सांख्यिकीय तथ्यों व विधियों का अधिकाधिक प्रयोग किया है। वर्तमान काल में अर्थशास्त्र में सांख्यिकी के निरन्तर बढ़ते हुए प्रयोग का विवेचन करते हुए टिप्पेट ने यहाँ तक कहा है कि 'एक दिन ऐसा भी हो सकता है कि विश्वविद्यालयों के अर्थशास्त्र विभाग कोरे सिद्धान्तवादियों के आधिपत्य में न रहकर सांख्यिकीय प्रयोगशालाओं के आधीन हो जायें जिस प्रकार कि भौतिकी और रसायनशास्त्र विभाग प्रयोगात्मक प्रयोगशालाओं के आधीन है।'[1]

अर्थमिति (Econometrics)—सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र के निरन्तर बढ़ते हुए सम्बन्ध के आधार पर ही प्रथम महायुद्ध के बाद पश्चिमी यूरोप के देशों में अर्थमिति या अर्थमापन विज्ञान नामक एक नये विज्ञान का समारम्भ हुआ है। 'Econometrics' शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम नार्वे (Norway) के प्रसिद्ध अर्थशास्त्री व सांख्यिक नोबेल पुरस्कार विजेता, रागनर फ्रिश (Ragnar Frisch) ने 1926 में एक ऐसे विज्ञान के अर्थ में किया था जिसमें आर्थिक नियमों व सिद्धान्तों का गणितीय तथा सांख्यिकीय विधि से सत्यापन किया जाता है। ओस्कर लांगे के शब्दों में, 'अर्थमिति वह विज्ञान है जो आर्थिक जीवन में पाये जाने वाले स्पष्ट सख्यात्मक नियमों के सांख्यिकीय विधियों द्वारा निर्धारण से सम्बन्ध रखता है।'[2] अर्थमिति का प्रमुख उद्देश्य अर्थशास्त्र को एक वास्तविक और व्यावहारिक विज्ञान बनाना है। इस विज्ञान में विकास-प्रतिरूपों (Models), समीकरणों (Equations) तथा फलनों (Functions) आदि की सहायता से आर्थिक क्रियाओं का मापन किया जाता है और महत्त्वपूर्ण पूर्वानुमान लगाये जाते हैं। प्रतिरूप-निर्माण, परिकल्पना की जाँच, परीक्षण तथा अनुमान, अर्थमिति की महत्त्वपूर्ण शाखाएँ हैं। 1932 में अमेरिका में Econometric Society की स्थापना के बाद से इस विज्ञान में काफी विकास हुआ है जिसका श्रेय रागनर फ्रिश (नोबेल पुरस्कार विजेता), ग्रुल्ट्ज, टिन्बरगेन (नोबेल पुरस्कार विजेता), वलायन, रिचार्ड स्टोन वोल्ड, कूपमेंस ओस्कर लांगे इत्यादि विद्वानों को प्राप्त है।

सांख्यिकी और अन्य सामाजिक विज्ञान—अन्य सामाजिक विज्ञानों जैसे समाजशास्त्र, राजनीति, नीतिशास्त्र (Ethics), मनोविज्ञान, शिक्षाशास्त्र आदि से भी सांख्यिकी का काफी सम्बन्ध है। नियमों व सिद्धान्तों के प्रतिपादन और पुष्टीकरण में तथा विभिन्न सामाजिक समस्याओं, जैसे निरक्षरता, बेकारी, अपराध-प्रवृत्ति, जातिगत व पारिवारिक सम्बन्ध, सामाजिक विघटन आदि के विवेचन और समाधान में सांख्यिकीय रीतियाँ अनिवार्य रूप से प्रयोग की जाती हैं। नवीन समंकों की सहायता से समाजशास्त्री सामाजिक नियमों तथा पूर्व-कल्पनाओं की जाँच करके उनमें आवश्यक संशोधन करते रहते हैं। वास्तव में, सामाजिक विज्ञानों के अनुसंधानकर्ता के लिए सांख्यिकीय विधियाँ उपयोगी औजार का काम करती हैं। क्राक्सटन व काउडेन के अनुसार 'सांख्यिकी की पर्याप्त जानकारी के बिना सामाजिक विज्ञानों का अनुसन्धानकर्ता अक्सर एक ऐसे अन्धे आदमी के समान है जो एक अन्धेरे कमरे में उस काली बिल्ली को ढूंढने का प्रयत्न कर रहा है जो वहाँ है ही नहीं।'[3]

सांख्यिकी और प्राकृतिक विज्ञान (Statistics and Natural Sciences)—प्राकृतिक विज्ञानों में भी सांख्यिकीय विधियाँ बहुत उपयोगी होती हैं। भौतिकी और रसायनशास्त्र में प्रयोग

[1] 'It may one day happen that economics departments at universities, instead of being dominated by the theorists, will come under the domination of the statistical laboratory, just as physics and chemistry departments are dominated by the experimental laboratory.' —Tippett, *op. cit.*, p. 168.

[2] 'Econometrics is the science which deals with the determination by statistical methods of concrete quantitative laws occurring in economic life.' —Oskar Lange, *Introduction to Econometrics*, p. 7.

[3] 'Without an adequate understanding of statistics, the investigator in the social sciences may frequently be like a blind man groping in a dark closet for a black cat that isn't there.'—Croxton and Cowden, *op. cit.*, p. 1.

सांख्यिकी की विभिन्न रीतियाँ जैसे माध्य, सूचकांक, रेखाचित्र, सहसम्बन्ध, आन्तरगणन इत्यादि गणित के सिद्धान्तों पर आधारित हैं और इन सभी में गणितीय सूत्रों का प्रयोग किया जाता है। सांख्यिकी के महत्त्वपूर्ण नियम जैसे सांख्यिकीय नियमितता नियम (Law of Statistical Regularity) तथा महांक जड़ता नियम (Law of Inertia of Large Numbers), गणित के प्रायिकता सिद्धान्त (Theory of Probability) में ही उद्भूत किये गये हैं। सांख्यिकी की रीतियों व नियमों को भली-भाँति समझने के लिए गणित का सामान्य ज्ञान आवश्यक होता है। सांख्यिकीय विधियों को विकसित और परिमार्जित करने में अनेक गणितज्ञों ने महत्त्वपूर्ण योग दिया है जिनमें बरनौली, गौस, लाप्लेस, न्यूटन आदि के नाम उल्लेखनीय हैं।

इस प्रकार, सांख्यिकी और गणित का अटूट सम्बन्ध है। फिशर ने कहा है, 'सांख्यिकी विज्ञान आवश्यक रूप से व्यावहारिक गणित की एक शाखा है और उसे अवलोकन सम्बन्धी तथ्यों पर प्रयोग किया जाने वाला गणित कहा जा सकता है।'[1] गणित में विभिन्न सूत्रों का प्रतिपादन एवं विकास किया जाता है और सांख्यिकी में उन सूत्रों व नियमों का अवलोकित तथ्यों पर व्यावहारिक प्रयोग किया जाता है।

सांख्यिकी और अर्थशास्त्र—सांख्यिकी का अर्थशास्त्र से भी गहरा सम्बन्ध है। यह कहना अतिशयोक्ति न होगा कि आधुनिक अर्थशास्त्र अपनी रीति में सांख्यिकीय होता जा रहा है। संख्यात्मक तथ्यों पर अर्थशास्त्र की निर्भरता का वर्णन करते हुए प्रसिद्ध अर्थशास्त्री मार्शल ने कहा था, 'समंक वे तृण हैं जिनसे प्रत्येक अन्य अर्थशास्त्री की भाँति मुझे भी (अर्थशास्त्र के नियमों की) ईंटें बनानी पड़ती हैं।'[2] अर्थात् अर्थशास्त्र के भिन्न-भिन्न नियमों का आधार समंक ही हैं।

सैद्धान्तिक अर्थशास्त्र के क्षेत्र में एकत्रित समंकों के विश्लेषण तथा निर्वचन के द्वारा नवीन आर्थिक सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया जा सकता है। आर्थिक नियमों की जाँच आगमन प्रणाली (Inductive method) द्वारा की जाती है जो कि वास्तव में सांख्यिकी पर ही आश्रित है। संख्यात्मक विश्लेषण द्वारा आर्थिक सिद्धान्तों का समर्थन या खण्डन प्रामाणिक रूप से किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, माल्थस का जनसंख्या सिद्धान्त, माँग नियम, द्रव्य का परिमाण सिद्धान्त आदि आर्थिक सिद्धान्तों की जाँच संकलित समंकों के विश्लेषणात्मक विवेचन द्वारा ही सम्भव है। आर्थिक नियमों का निर्वचन और प्रदर्शन भी चित्रों व रेखाचित्रों द्वारा आकर्षक ढंग से किया जा सकता है। वास्तव में समंकों की कमी अर्थशास्त्र के समुचित विकास में बाधक सिद्ध हो सकती है। जेवन्स ने ठीक ही कहा है, 'मैं यह नहीं जानता कि हम कब सांख्यिकीय व्यवस्था को पूर्ण बना सकेंगे, परन्तु उसकी (पूर्ण सांख्यिकीय प्रणाली की) कमी ही अर्थशास्त्र को पूर्ण विज्ञान बनाने में एकमात्र अजेय बाधा है।'[3]

व्यावहारिक अर्थशास्त्र के क्षेत्र में भी अनेक आर्थिक समस्याओं जैसे मुद्रा-स्फीति, बेरोजगारी जनसंख्या विस्फोट आदि का अध्ययन तथा समाधान तत्सम्बन्धी समंकों का संकलन और विश्लेषण करके ही किया जा सकता है। आर्थिक विकास की योजनाएँ बनाने में और उनकी प्रगति का मापन करने में समंक नितान्त आवश्यक हैं। आँकड़ों के आधार पर ही उचित आर्थिक नीतियाँ निर्धारित की जा सकती हैं। इस प्रकार, अर्थशास्त्र के सैद्धान्तिक व व्यावहारिक दोनों पक्षों के लिए सांख्यिकी परमावश्यक है।

सांख्यिकीय रीतियों का अर्थशास्त्र में विधिवत् प्रयोग सर्वप्रथम सत्रहवीं शताब्दी में ग्रेगोरी किंग नामक अर्थशास्त्री ने वस्तुओं की पूर्ति और मूल्य का सम्बन्ध प्रदर्शित करने के लिए किया था।

[1] 'The science of statistics is essentially a branch of applied mathematics and may be regarded as mathematics applied to observational data.' —Ronald A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, p 1.

[2] 'Statistics are the straw out of which I, like every other economist, have to make the bricks.' —Marshall.

[3] 'I know not when we shall have a perfect system of statistics but the want of it is the only insuperable obstacle in the way of making Economics an exact science.'—Jevons.

इसके बाद उन्नीसवीं शताब्दी में रोशर, नीज, लेस्ली, हिल्डब्रैंड, जैवन्स आदि अर्थशास्त्रियों ने अर्थशास्त्र में सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग को अत्यधिक प्रोत्साहन दिया। बीसवीं शताब्दी में मार्शल, लॉर्ड कीन्स, पेरेटो, ऐजवर्थ आदि प्रसिद्ध अर्थशास्त्रियों ने अपने सिद्धान्तों के प्रतिपादन में सांख्यिकीय तथ्यों व विधियों का अधिकाधिक प्रयोग किया है। वर्तमान काल में अर्थशास्त्र में सांख्यिकी के निरन्तर बढ़ते हुए प्रयोग का विवेचन करते हुए टिप्पेट ने यहाँ तक कहा है कि 'एक दिन ऐसा भी हो सकता है कि विश्वविद्यालयों के अर्थशास्त्र विभाग कोरे सिद्धान्तवादियों के आधिपत्य में न रहकर सांख्यिकीय प्रयोगशालाओं के आधीन हो जायें जिस प्रकार कि भौतिकी और रसायनशास्त्र विभाग प्रयोगात्मक प्रयोगशालाओं के आधीन है।'[1]

अर्थमिति (Econometrics)—सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र के निरन्तर बढ़ते हुए सम्बन्ध के आधार पर ही प्रथम महायुद्ध के बाद पश्चिमी यूरोप के देशों में अर्थमिति या अर्थमापन विज्ञान नामक एक नये विज्ञान का समारम्भ हुआ है। 'Econometrics' शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम नार्वे (Norway) के प्रसिद्ध अर्थशास्त्री व सांख्यिक नोबेल पुरस्कार विजेता, रागनर फ्रिश (Ragnar Frisch) ने 1926 में एक ऐसे विज्ञान के अर्थ में किया था जिसमें आर्थिक नियमों व सिद्धान्तों का गणितीय तथा सांख्यिकीय विधि से सत्यापन किया जाता है। ऑस्कर लांगे के शब्दों में, 'अर्थमिति वह विज्ञान है जो आर्थिक जीवन में पाये जाने वाले स्पष्ट संख्यात्मक नियमों के सांख्यिकीय विधियों द्वारा निर्धारण से सम्बन्ध रखता है।'[2] अर्थमिति का प्रमुख उद्देश्य अर्थशास्त्र को एक वास्तविक और व्यावहारिक विज्ञान बनाना है। इस विज्ञान में विकास-प्रतिरूपों (Models), समीकरणों (Equations) तथा फलनों (Functions) आदि की सहायता से आर्थिक क्रियाओं का मापन किया जाता है और महत्त्वपूर्ण पूर्वानुमान लगाये जाते हैं। प्रतिरूप-निर्माण, परिकल्पना की जाँच, परीक्षण तथा अनुमान, अर्थमिति की महत्त्वपूर्ण शाखाएँ हैं। 1932 में अमेरिका में Econometric Society की स्थापना के बाद से इस विज्ञान में काफी विकास हुआ है जिसका श्रेय रागनर फ्रिश (नोबेल पुरस्कार विजेता), कुल्ट्ज, टिन्बरगेन (नोबेल पुरस्कार विजेता), बलायन, रिचार्ड स्टोन वोल्ड, कूपमैंस ऑस्कर लांगे इत्यादि विद्वानों को प्राप्त है।

सांख्यिकी और अन्य सामाजिक विज्ञान—अन्य सामाजिक विज्ञानों जैसे समाजशास्त्र, राजनीति, नीतिशास्त्र (Ethics), मनोविज्ञान, शिक्षाशास्त्र आदि से भी सांख्यिकी का काफी सम्बन्ध है। नियमों व सिद्धान्तों के प्रतिपादन और पुष्टीकरण में तथा विभिन्न सामाजिक समस्याओं, जैसे निरक्षरता, बेकारी, अपराध-प्रवृत्ति, जातिगत व पारिवारिक सम्बन्ध, सामाजिक विघटन आदि के विवेचन और समाधान में सांख्यिकीय रीतियाँ अनिवार्य रूप से प्रयोग की जाती हैं। नवीन समंकों की सहायता से समाजशास्त्री सामाजिक नियमों तथा पूर्व-कल्पनाओं की जाँच करके उनमें आवश्यक संशोधन करते रहते हैं। वास्तव में, सामाजिक विज्ञानों के अनुसंधानकर्ता के लिए सांख्यिकीय विधियाँ उपयोगी औजार का काम करती हैं। क्राक्सटन व काउडेन के अनुसार 'सांख्यिकी की पर्याप्त जानकारी के बिना सामाजिक विज्ञानों का अनुसन्धानकर्ता अक्सर एक ऐसे अन्धे आदमी के समान है जो एक अन्धेरे कमरे में उस काली बिल्ली को ढूंढने का प्रयत्न कर रहा है जो वहाँ है ही नहीं।'[3]

सांख्यिकी और प्राकृतिक विज्ञान (Statistics and Natural Sciences)—प्राकृतिक विज्ञानों में भी सांख्यिकीय विधियाँ बहुत उपयोगी होती हैं। भौतिकी और रसायनशास्त्र में प्रयोग

[1] 'It may one day happen that economics departments at universities, instead of being dominated by the theorists, will come under the domination of the statistical laboratory, just as physics and chemistry departments are dominated by the experimental laboratory.' —Tippett, *op. cit.*, p. 168.

[2] 'Econometrics is the science which deals with the determination by statistical methods of concrete quantitative laws occurring in economic life.' —Oskar Lange, *Introduction to Econometrics*, p. 7.

[3] 'Without an adequate understanding of statistics, the investigator in the social sciences may frequently be like a blind man groping in a dark closet for a black cat that isn't there.'—Croxton and Cowden, *op. cit.*, p. 1.

के परिणामों का विश्लेषण करने तथा उनसे समुचित नतीजे निकालने में सांख्यिकी नितान्त आवश्यक है। जीव-विज्ञान (Biology) में वंश-परम्परा (Heredity) द्वारा हस्तांतरित गुणों का विश्लेषण सह-सम्बन्ध, गुण-सम्बन्ध, प्रतीपगमन आदि सांख्यिकीय रीतियों के आधार पर किया जाता है। अन्तरिक्ष विज्ञान (Meteorology) में, तापक्रम, वायु-दबाव आदि के माप के आधार पर सांख्यिकीय रीति द्वारा ही मौसम का पूर्वानुमान लगाया जाता है। नक्षत्रशास्त्र (Astronomy) में, सांख्यिकी की न्यूनतम वर्ग रीति (Method of Least Squares) द्वारा विभिन्न नक्षत्रों की स्थिति और गति का पता लगाया जाता है। इस प्रकार प्राकृतिक विज्ञानों में भी सांख्यिकी का गहरा सम्बन्ध है। क्लार्क मैक्सवेल ने ठीक ही कहा है, 'राशिभूत पदार्थों का हमारा वास्तविक ज्ञान आवश्यक रूप में सांख्यिकीय प्रकृति का है।'[1]

सांख्यिकी का उद्गम तथा विकास
(Origin and Growth of Statistics)

'Statistics' शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम 1749 ई० में जर्मनी के विद्वान् गाटफायड एकेनवाल (Gottfried Achenwall) ने किया था। उन्हें 'सांख्यिकी का जन्मदाता' कहा जाता है। परन्तु इससे पूर्व, इंग्लैण्ड के महाकवि विलियम शेक्सपियर ने हैमलेट (Hamlet, 1602, Act V, Scene II) और सिम्बेलाइन (Cymbeline 1610, Act II, Scene IV) में तथा जॉन मिल्टन ने पैरेडाइज रिगेन्ड (Paradise Regained 1671, Book IV) में 'Statist' शब्द का प्रयोग एक ऐसे व्यक्ति के लिए किया था जो राज्य के शासन-कार्य में निपुण हो। सुप्रसिद्ध कवि वर्ड्सवर्थ[2] ने भी इस शब्द का प्रयोग इन्हीं अर्थों में किया था।

अंग्रेजी भाषा का शब्द 'Statistics', लैटिन भाषा के 'Status', इटैलियन भाषा के 'Statista', और जर्मन भाषा के शब्द 'Statistik' से उद्धृत किया गया है। इन सभी शब्दों का अर्थ 'राज्य' (State) है।

सांख्यिकी की उत्पत्ति राजाओं के विज्ञान (Science of the Kings) या राज्य-शिल्प विज्ञान (Science of Statecraft) के रूप में हुई। अति प्राचीन काल में सांख्यिकी का प्रयोग राज्य के शासन-प्रबन्ध को उचित रूप से चलाने के लिए किया जाता था। समय-समय पर सम्राट् अपने देश की जन-शक्ति व धन-शक्ति के बारे में सर्वेक्षण कराते रहे हैं जिनसे उन्हें यह ठीक-ठीक पता चल जाये कि आवश्यकता पड़ने पर वे कितने सैनिक एकत्र कर सकते हैं और कर के रूप में कितनी आय प्राप्त कर सकते है। जनसंख्या तथा धन-वितरण के आँकड़े सर्वप्रथम मिस्र के सम्राट् ने 3050 ई० पूर्व विश्व-विख्यात पिरेमिड के निर्माण के हेतु एकत्र कराये थे। इसके बाद 1400 ई० पू० सम्राट् रैमेसिस द्वितीय ने मिस्र में भूमि का उचित वितरण करने के उद्देश्य से भूमि-सम्बन्धी आँकड़ों का संग्रह कराया था। मूसा तथा डेविड के शासन-काल में भी विभिन्न जातियों की जनगणना कराई गई थी। इसी प्रकार, अन्य देशों में भी अति प्राचीन काल से शासन-प्रबन्ध को सुचारु रूप में चलाने के लिए सांख्यिकीय तथ्यों का संकलन होता रहा है।

भारत में भी आँकड़े संग्रह करने की परम्परा अत्यन्त पुरानी है। मनुस्मृति और शुक्रनीति में शासन-व्यवस्था के लिए आँकड़े एकत्र करने की रीति तथा संगठन का उल्लेख मिलता है। यूनानी राजदूत मेगस्थनीज ने चन्द्रगुप्त मौर्य के शासन-काल में आय-व्यय, जन्म-मरण, सेना, भूमि-वितरण आदि से सम्बन्धित आँकड़ों के संकलन की प्रचलित विधि का वर्णन किया है। कौटिल्य के 'अर्थशास्त्र' में भी शासन-सम्बन्धी आँकड़े मिलते हैं। तुजुके-बाबरी और आईन-ए-अकबरी में मुगल काल में संकलित समंकों का उल्लेख किया गया है। सम्राट् अकबर के शासन-काल में राजा

[1] 'Our actual knowledge of concrete things is of an essentially statistical nature.' —Clerk Maxwell, quoted by F. C. Mills, *Statistical Methods*, p. 2.

[2] 'Art thou a *statist* in the van,
Of public conflicts trained and bred.' —William Wordsworth.

टोडरमल ने लगान का निर्धारण करने के उद्देश्य से भूमि-सम्बन्धी आँकड़े एकत्र कराये थे ।

इस प्रकार प्राचीन तथा मध्यकाल में समंकों का संग्रह शासन-कार्य को ठीक प्रकार से चलाने के लिए ही किया जाता था । इसीलिए आरम्भ में सांख्यिकी को राज्य-विज्ञान तथा राजनीतिक अंकगणित (Political Arithmetic) आदि नामों से पुकारा जाता था । आगे चलकर धीरे-धीरे सांख्यिकी का प्रयोग अन्य क्षेत्रों में भी किया जाने लगा ।

सोलहवीं शताब्दी में खगोल शास्त्र (Astronomy) के क्षेत्र में जॉन्स केपलर व टाइको ब्राहे नामक विशेषज्ञों ने नक्षत्रों की गति, स्थिति तथा ग्रहण आदि के सम्बन्ध में आँकड़े एकत्र किये । इस अवधि में इंग्लैंड के सर टामस ग्रेशम तथा सर फ्रांसिस बेकन ने आर्थिक व सामाजिक विज्ञान के क्षेत्र में सांख्यिकीय विधियों के प्रयोग को प्रोत्साहन दिया । व्यापारिक क्षेत्र में भी विभिन्न देशों में पर्याप्त मात्रा में आँकड़े एकत्र कराये गये ।

सत्रहवीं शताब्दी में जन्म-मरण सम्बन्धी आँकड़े (Vital Statistics) एकत्र करने के लिए सांख्यिकी के क्षेत्र का विस्तार हुआ और जीवन-मरण सारणियों का निर्माण हुआ । इन सारणियों के आधार पर ही 'जीवन बीमा' का जन्म हुआ ।

अठारहवीं शताब्दी में सांख्यिकी व गणित का घनिष्ठ सम्बन्ध होने के कारण सांख्यिकीय रीतियाँ अधिक उन्नत व परिष्कृत हो गईं । इस अवधि में यूरोप के धनी लोगों ने जुए की जोखिम को कम करने के उद्देश्य से तत्कालीन गणितज्ञों की सहायता लेनी आरम्भ की । कहा जाता है कि जुए की एक समस्या को लेकर ब्लेज पास्कल तथा पीयर डी फरमेंट के बीच होने वाले पत्र-व्यवहार से ही प्रायिकता सिद्धान्त (Theory of Probability) की नींव पड़ी । तत्पश्चात् जेम्स बरनौली तथा डेनियल बरनोली ने इस सिद्धान्त को आधुनिक रूप प्रदान किया । लाप्लेस और गौस ने भी सम्भाविता सिद्धान्त तथा प्रसामान्य नियम (Normal Law of Error) में अनेक सुधार किये । इस प्रकार इस अवधि में सांख्यिकी में गणित के प्रमुख सिद्धान्तों का अधिकाधिक प्रयोग किया जाने लगा ।

उन्नीसवीं शताब्दी में सांख्यिकी के आधुनिक सिद्धान्त की नींव डालने का श्रेय बेल्जियम के प्रसिद्ध गणितज्ञ क्यूटले को प्राप्त है । उन्होंने खगोल-शास्त्र, अन्तरिक्ष-विज्ञान (Meteorology), भौतिकी (Physics), वनस्पति तथा प्राणि-जगत् के क्षेत्र में सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग को अत्यधिक महत्त्व दिया । इनके अतिरिक्त अनेक वैज्ञानिकों जैसे गौस, लैप, लैक्सिस, चालियर आदि ने सांख्यिकी की विधियों को विकसित किया । जीव-विज्ञान (Biology) तथा जनन-विद्या (Genetics) के क्षेत्र में फ्रांसिस गाल्टन और कार्ल पियर्सन नामक प्रसिद्ध वैज्ञानिकों ने अनेक महत्त्वपूर्ण सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग आरम्भ किया । इसी अवधि में जैवन्स, मिल, मार्शल तथा लार्ड केन्स नामक प्रसिद्ध अर्थशास्त्रियों ने अर्थशास्त्र के विभिन्न नियमों का प्रतिपादन एवं परीक्षण करने में अनेक सांख्यिकीय विधियों के प्रयोग का सूत्रपात किया ।

बीसवीं शताब्दी में सांख्यिकी का अत्यधिक विकास हुआ । वर्तमान युग में मानव ज्ञान की सभी शाखाओं में इस विज्ञान का काफी प्रयोग किया जाता है । सांख्यिकी के निरन्तर बढ़ते हुए प्रयोग के निम्न दो प्रमुख कारण है-

(अ) सांख्यिकी की बढ़ती हुई माँग—आजकल व्यापार, उद्योग और वाणिज्य से सम्बन्धित अनेक जटिल समस्याओं के विवेचन और समाधान के लिए आवश्यक समंकों की माँग बढ़ती जा रही है । आधुनिक राज्य की बढ़ती हुई कल्याणकारी क्रियाओं के लिए यथेष्ट समंकों का उपलब्ध होना नितान्त आवश्यक है । वैज्ञानिक अनुसन्धान कार्य में भी सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग लगातार बढ़ता ही जा रहा है । इस प्रकार अनेक दिशाओं में सांख्यिकी की बढ़ती हुई माँग से उसकी निरन्तर प्रगति को काफी प्रोत्साहन मिला है ।

(ब) समंकों की घटती हुई लागत—सांख्यिकीय रीतियों में अनेक महत्त्वपूर्ण सुधार होने के कारण अब कम समय में कम खर्च और कम परिश्रम से ही विश्वसनीय समंकों का संकलन और विश्लेषण सम्भव हो गया है । सर फ्रांसिस गाल्टन, कार्ल पियर्सन, फिशर, स्नेडीकोर, प्रोफेसर महालानोबिस आदि विभिन्न वैज्ञानिकों द्वारा प्रतिचयन (Sampling), प्रयोग-अभिकल्पना (Design of Expe

ment), परिकल्पना-परीक्षण (Testing of Hypothesis) इत्यादि आधुनिक विधियों से किये जाने वाले अनुसन्धानों के परिणामस्वरूप उपलब्ध समकों की लागत बहुत कम हो गई है। इसके अतिरिक्त विद्युत्-समंक-प्रहस्तन (Electronic Data Processing), यान्त्रिक सारणीयन (Mechanical Tabulation) आदि की सहायता से समकों के विश्लेषण में समय और धन की बहुत बचत होती है।

इस प्रकार, समंकों की बढ़ती हुई माँग और घटती हुई लागत के कारण आजकल सभी क्षेत्रों में सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग निरन्तर बढ़ता जा रहा है। जिस विज्ञान की उत्पत्ति प्राचीन काल में राजाओं के विज्ञान के रूप में हुई थी वह आज सर्वव्यापी विज्ञान हो गया है। व्यावहारिक जीवन और ज्ञान-विज्ञान की सभी शाखाओं में आजकल इस विज्ञान के नियमों व विधियों का व्यापक प्रयोग किया जाता है। टिप्पेट (Tippet) ने ठीक ही कहा है—'सांख्यिकीय-शास्त्र प्रत्येक व्यक्ति को प्रभावित करता है और जीवन को अनेक बिन्दुओं पर स्पर्श करता है।' (Statistics affects everybody and touc . . l fe at many points.)

प्रश्न

1. सांख्यिकी विज्ञान के प्राचीन स्वरूप से लेकर वर्तमान जटिल रूप तक के विकास का संक्षिप्त वर्णन कीजिये तथा अर्थशास्त्र में उसके बढ़ते हुए महत्व का मूल्यांकन कीजिए।
Trace briefly the development of the science of statistics from its primitive form to its present complex status, and estimate its increasing importance to Economics.
2. 'सांख्यिकीय समंक संख्यात्मक तथ्य हैं किन्तु सभी संख्यात्मक तथ्य, सांख्यिकीय समंक नहीं।' इस कथन को स्पष्ट कीजिए और यह बताइए कि कौन से संख्यात्मक तथ्य सांख्यिकीय समंक हैं।
'Statistics are numerical statements of facts, but all facts numerically stated are not statistics.' Clarify this statement and point out briefly which numerical statements of facts are statistics. *[B. Com., Allahabad, 1970 ; Indore, 1966 ; Agra, 1963]*
3. (क) निम्नलिखित कथन में प्रयुक्त हुए 'स्टेटिस्टिक्स' शब्द के तीन अर्थों को स्पष्ट रूप से समझाइये—
'You compute statistics from statistics by statistics.'
(ख) निम्नलिखित कथन का स्पष्टीकरण कीजिये—
'Not a datum, but the data are the subject-matter of statistics.'
[B. Com., Agra, 1963]
(संकेत : (क) प्रथम 'Statistics' का अर्थ है प्रतिदर्श पर आधारित सांख्यिकीय माप जैसे औसत, दूसरे 'Statistics' का तात्पर्य सांख्यिकीय सामग्री या समंकों से है और तीसरे 'Statistics' का अर्थ है सांख्यिकीय रीतियाँ।]
4. निम्नलिखित कथनों की व्याख्या कीजिये—
(अ) 'सांख्यिकी गणना का विज्ञान है।'
(ब) 'सांख्यिकी अनुमान एवं सम्भावनाओं का विज्ञान है।'
(स) 'सांख्यिकी माध्यों का विज्ञान है।'
Comment on the following statements—
(a) 'Statistics is the science of counting.'
(b) 'Statistics is the science of estimates and probabilities.'.
(c) 'Statistics is the science of averages.'
[B. A. II Econ., Raj., 1969 ; B. Com., Vikram, 1969 ; Agra, 1964, 1963]
5. 'अनिश्चितता के मध्य बुद्धिमत्तापूर्ण निर्णय करने की रीतियों के समूह को सांख्यिकी कहते हैं।' वालिस व रोबर्ट्स की उक्त परिभाषा की आलोचनात्मक व्याख्या कीजिए।
'Statistics is a body of methods for making wise decisions in the face of uncertainty.' Critically exam.ne the above definition of Statistics as given by Wallis and Roberts.

6. सांख्यिकी शब्द की परिभाषा दीजिए। सांख्यिकी के प्रमुख विभाग क्या हैं?
Define the term 'Statistics'. What are the main divisions of Statistics?
[B. Com., Kanpur, 1972]

7. 'सांख्यिकी के सिद्धान्त से हमारा तात्पर्य सांख्यिकीय रीतियों के स्पष्टीकरण से है।' (यूल) इस कथन की व्याख्या कीजिए और सांख्यिकीय रीतियों व व्यावहारिक सांख्यिकी का अन्तर स्पष्ट करते हुए सांख्यिकीय विज्ञान के क्षेत्र का विवेचन कीजिए।
'By theory of Statistics we mean the exposition of Statistical Methods' (Yule) Explain this statement and differentiate between Statistical Methods and Applied Statistics, to discuss the scope of Statistical Science. *[M. A., Agra, 1965]*

8. 'सांख्यिकी' की परिभाषा दीजिए और उसके क्षेत्र तथा सीमाओं का विवेचन कीजिए।
Define 'Statistics' and discuss its scope and limitations.
[B. Com., Meerut, 1971, Kanpur, 1970, 69 ; Agra, 1972, 61]

9. 'सांख्यिकी विज्ञान और कला दोनों कही जाती है।' ऐसा क्यों? सांख्यिकी का अन्य विज्ञानों से यदि कोई सम्बन्ध है, तो क्या है?
'Statistics is said to be both a science and an art.' Why? What relation, if any, has Statistics with other sciences? *[B. Com, Kanpur, 1970]*

10. 'सांख्यिकी पृथक् ज्ञान का एक समूह नहीं है बल्कि यह ज्ञान प्राप्त करने की रीतियों का समूह है।' इस कथन को स्पष्ट कीजिए और आर्थिक विश्लेषण में सांख्यिकीय रीति के प्रयोग पर अपने विचार प्रकट कीजिए।
'Statistics is not a body of substantive knowledge but a body of methods for obtaining knowledge.' Elucidate this statement, and offer your comments on the use of statistical method in economic analysis. *[M. A., Vikram, 1961]*

11. 'समंक वे तृण हैं जिनसे प्रत्येक अन्य अर्थशास्त्री की भाँति, मुझे भी ईंटें बनानी पड़ती हैं।' (मार्शल) इस कथन को स्पष्ट कीजिए।
'Statistics are the straw out of which I, like every other economist, have to make the bricks.' (Marshall.) Elucidate this statement. *[M. A., Meerut, 1973]*

12. 'सांख्यिकी एक विज्ञान नहीं है, वह एक वैज्ञानिक विधि है।' इस कथन की आलोचनात्मक विवेचना कीजिए और सांख्यिकी के क्षेत्र, उपयोगिता व परिसीमाओं को स्पष्ट कीजिए।
'Statistics is not a science, it is a scientific method.' Discuss critically, explaining the scope, utility and limitations of Statistics. *[B. Com., Gorakhpur, 1971]*

13. (अ) 'सांख्यिकीय विधियों' और 'प्रायोगिक विधियों' में अन्तर स्पष्ट कीजिए।
(ब) 'सांख्यिकी के बिना विज्ञान फलदायक नहीं होते और विज्ञानों के बिना सांख्यिकी निर्मूल है।'— विवेचन कीजिए।
(स) आजकल सांख्यिकी के निरन्तर बढ़ते हुए प्रयोग के प्रमुख कारणों की विवेचना कीजिए।
(a) Distinguish clearly between 'statistical methods' and 'experimental methods.'
(b) 'Sciences without statistics bear no fruit; statistics without sciences have no root.' —Discuss
(c) Discuss the factors responsible for the rapid development of Statistics in recent years.

14. निम्नलिखित पर संक्षिप्त व्याख्यात्मक टिप्पणियाँ लिखिए—
Write brief explanatory notes on the following—
(अ) व्यावहारिक सांख्यिकी (Applied Statistics)। *[B. Com, Agra, 1976]*
(ब) सांख्यिकी का उद्देश्य (Object of Statistics)।
(स) अर्थमिति (Econometrics)।
(द) व्यावसायिक सांख्यिकी (Business Statistics)। *[B. Com, Agra, 1970]*

15. समंकों की परिभाषा कीजिए। उनकी विशेषताएँ उपयुक्त उदाहरण देते हुए बताइए।
Define statistical data. Point out their characteristics giving suitable examples.
[B. Com., Allahabad, 1973]

16. सांख्यिकी विज्ञान से आप क्या समझते हैं? विस्तार से समझाइये।
What do you understand by Science of Statistics? Explain in detail.
[B. Com., Meerut, 1973]

2

सांख्यिकी : कार्य, महत्त्व तथा सीमाएँ
(FUNCTIONS, IMPORTANCE AND LIMITATIONS OF STATISTICS)

आजकल सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग उन सभी विज्ञानों में सफलतापूर्वक किया जाता है जहाँ समक उपलब्ध हो सकते हैं।

सांख्यिक के कार्य
(Functions of Statistician)

किसी भी क्षेत्र में सांख्यिकीय रीतियों द्वारा समकों को एकत्रित करने तथा उनका विश्लेषण करके उचित निष्कर्ष निकालने वाले व्यक्ति को सांख्यिक (statistician) कहते हैं। सांख्यिक का कार्य-क्षेत्र अत्यन्त विस्तृत है। रोड्स के अनुसार सांख्यिक के कार्यों को उचित रूप से तीन भागों में बाँटा जा सकता है—प्रथम, सांख्यिकीय तथ्यों का संग्रहण, दूसरे, उनका विश्लेषण, और तीसरे, विश्लेषण के परिणामों का निर्वचन।

इस प्रकार सांख्यिक के तीन प्रमुख कार्य हैं जो निम्नलिखित हैं—

(1) **समंकों का संग्रहण (Collection)**—सर्वप्रथम सांख्यिक एक स्पष्ट योजना बनाकर यह निश्चित कर लेता है कि उसे किस क्षेत्र में किस उद्देश्य से तथा किस पद्धति द्वारा समकों का संग्रह करना है। फिर वह एक उपयुक्त रीति द्वारा समकों को प्राथमिक अथवा द्वितीयक ढंग से एकत्रित कर लेता है। संकलित समकों के सम्पादन (editing) द्वारा वह शुद्धता की मात्रा की जाँच भी करता है।

(2) **विश्लेषण (Analysis)**—विश्लेषण के अन्तर्गत सांख्यिक को अनेक क्रियाएँ करनी पड़ती हैं। वह संकलित समकों को निश्चित आधार पर भिन्न-भिन्न वर्गों में बाँटता है और उन्हें सारणियों में प्रस्तुत करता है। फिर वह समकों की केन्द्रीय प्रवृत्ति ज्ञात करने, उनकी तुलना करने तथा उनमें सम्बन्ध स्थापित करने के लिए माध्य, अपकिरण, विषमता, सह-सम्बन्ध आदि अनेक सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग करता है।

(3) **निर्वचन (Interpretation)**—समकों का संकलन व विश्लेषण करने के बाद सांख्यिक को उनसे तर्कपूर्ण और निष्पक्ष निष्कर्ष निकालने पड़ते हैं। नीस्वेंगर का कहना है, 'सांख्यिक का कर्तव्य समकों का संकलन करने तथा उनसे सम्बन्धित गणनाएँ करने से कहीं अधिक आगे है। समक स्वयं कुछ नहीं बोलते और सांख्यिक ही वह व्यक्ति है जिसे उनके अर्थों की खोज करने के लिए सांख्यिकीय परिणामों का निर्वचन करना होता है।'[1] वास्तव में, समंकों के आधार पर उचित निष्कर्ष निकालना ही उनके संकलन और विश्लेषण का मूलभूत उद्देश्य है।

[1] 'The duty of the statistician goes much beyond collecting data and making calculations. Facts do not speak for themselves, and it is the statistician who must interpret the statistical results to discover their meaning.'—Neiswanger.

उपर्युक्त कार्यों को सफलतापूर्वक पूरा करने के लिए सांख्यिक को गणित का अच्छा ज्ञान होना नितान्त आवश्यक है। सांख्यिक एक गणितज्ञ है. वह एक लिपिक (clerk) नहीं है। सांख्यिकीय सामग्री का सक्षिप्तीकरण करने, समंकों की तुलना करने तथा पूर्वानुमान लगाने के लिए सांख्यिक को गणित के सिद्धान्तों, सूत्रों व रीतियों की यथेष्ट जानकारी होनी चाहिए।

सांख्यिक कोई रससिद्ध या कीमियागर (alchemist) नहीं है जो निम्न-कोटि की धातुओं से सोना बनाने की क्षमता रखे। वह समंकों से कोई चमत्कार उत्पन्न नहीं कर सकता। अपर्याप्त और त्रुटिपूर्ण आँकडों के आधार पर अपनी पूर्व-धारणाओ के अनुकूल वह काल्पनिक निष्कर्ष नहीं निकाल सकता। वह तो एक रसायनशास्त्री (chemist) की भाँति है जिसका काम एकत्रित समंकों का समुचित विश्लेषण करके उनसे तर्कपूर्ण, वास्तविक और निष्पक्ष परिणाम निकालना है। अतः उसे अपना कार्य सामान्य विवेक, निष्पक्ष भावना, तर्क और निपुणता से निभाना चाहिए। तभी वह एक सफल सांख्यिक का कार्य भली-भाँति कर सकता है।

सांख्यिकी के कार्य
(Functions of Statistics)

वर्तमान काल में साख्यिकी सभी क्षेत्रों में बहुत उपयोगी है। सांख्यिकी की निरन्तर बढती हुई उपयोगिता का मूल कारण यह है कि वह अनेक महत्त्वपूर्ण कार्य सम्पन्न करती है। साख्यिकी के प्रमुख कार्य निम्न प्रकार है—

(1) **जटिल तथ्यों को सरल बनाना**—सामान्य व्यक्ति जटिल और बिखरे हुए समंकों को न तो सरलता से समझ सकता है और न वह उनसे कोई परिणाम ही निकाल सकता है। परन्तु वर्गीकरण, सारणीयन, चित्रमय व बिन्दुरेखीय प्रदर्शन, केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन आदि की विभिन्न सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग करके जटिल साख्यिकीय सामग्री को सरल बनाया जा सकता है। उदाहरणार्थ, पंचवर्षीय योजनाओं के समारम्भ से अब तक भारत की वार्षिक आयात और निर्यात की संख्याओं को चित्रों या वक्रों द्वारा सरल बनाया जा सकता है।

(2) **तथ्यों की तुलना करना तथा उनमें सम्बन्ध स्थापित करना**—तुलनात्मक अध्ययन की सुविधा प्रदान करना भी सांख्यिकी का एक महत्त्वपूर्ण कार्य है। विभिन्न तथ्यों की तुलना करने के लिए माध्य, सूचकांक, गुणांक आदि का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, माध्यों और गुणांकों की सहायता से दो देशों की प्रति व्यक्ति आय की तुलना की जा सकती है और आय-वितरण की असमानतायें भी ज्ञात की जा सकती है।

सह-सम्बन्ध तथा गुण-साहचर्य की रीतियों द्वारा विभिन्न घटनाओं जैसे मुद्रा की मात्रा और सामान्य मूल्य-स्तर, वर्षा की मात्रा और कृषि-उत्पादन आदि में पाये जाने वाले सम्बन्ध को स्पष्ट किया जा सकता है।

(3) **नीति निर्धारण करना**—साख्यिकी सामाजिक, आर्थिक, व्यापारिक तथा अन्य क्षेत्रों मे नीति निर्धारित करने में पथ-प्रदर्शन करती है। देश की आयात व निर्यात नीतियाँ, मूल्य-नीति, मद्य-निषेध नीति आदि एकत्रित समंकों का विश्लेषण करके ही निर्धारित की जाती है। वर्तमान नीतियों के परिणामों का मूल्यांकन करने मे भी साख्यिकी सहायता प्रदान करती है। उदाहरणार्थ, संख्यात्मक विश्लेषण द्वारा ही ठीक प्रकार से इस बात का पता चल सकता है कि भारतीय सरकार द्वारा बैंको के राष्ट्रीयकरण की नीति कहाँ तक सफल हुई है। इस प्रकार, नीति-निर्धारण करना और नीति के प्रभावों का मूल्यांकन करना साख्यिकी के उपयोगी कार्य हैं।

(4) **व्यक्तिगत ज्ञान व अनुभव की वृद्धि करना**—डा० बाउले ने लिखा है 'सांख्यिकी का उचित कार्य, वास्तव मे, व्यक्तिगत अनुभव में वृद्धि करना है।'[1] साख्यिकी के अध्ययन से व्यक्ति के विचारों को स्पष्टता और निश्चयात्मकता मिलती है। समंकों का विश्लेषण व निर्वचन

[1] 'The proper function, indeed, of statistics is to enlarge individual
—Dr. Bowley, *Elements of Statistics*, p. 9.

तर्कशक्ति बढ़ती है और प्रत्येक समस्या के प्रति उचित दृष्टिकोण विकसित होता है। सांख्यिकीय विधियों के उचित प्रयोग के बिना मानव ज्ञान अपूर्ण और अपर्याप्त है। व्यावहारिक सांख्यिकी के क्षेत्र में अनुसन्धानकर्ता के लिए सम्बन्धित विषय जैसे अर्थशास्त्र, व्यावसायिक प्रशासन, समाजशास्त्र आदि की यथेष्ट जानकारी आवश्यक है। सांख्यिकीय सर्वेक्षणों से सांख्यिक को विभिन्न प्रकार के अनुभव प्राप्त होते हैं। उदाहरणार्थ, किसी उद्योग में काम करने वाले मजदूरों की आर्थिक व सामाजिक स्थिति की सांख्यिकीय जाँच करने के लिए सांख्यिक को कुछ प्रारम्भिक ज्ञान की आवश्यकता पड़ेगी। उसे विभिन्न प्रकार के व्यक्तियों से मिलकर सूचना एकत्रित करनी होगी तथा अनेक समस्याओं व कठिनाइयों का सामना करना पड़ेगा। उसे समय-समय पर बुद्धिमत्तापूर्ण निर्णय करने होंगे। इन सब बातों से उसके ज्ञान व अनुभव में वृद्धि होगी। इस प्रकार सांख्यिकी व्यक्ति की ज्ञान-परिधि का विस्तार करने में सहायक होती है।

(5) **अनुमान लगाना**—सांख्यिकी विभिन्न रीतियों द्वारा केवल वर्तमान तथ्यों का ही विश्लेषण नहीं करती वरन् उनके आधार पर भावी अनुमान लगाने में भी सहायक होती है। यह कार्य आन्तरगणन (interpolation), बाह्यगणन (extrapolation) तथा पूर्वानुमान आदि की क्रियाओं द्वारा किया जाता है। वास्तव में, आर्थिक विकास की योजनाएँ भावी अनुमानों के आधार पर ही बनाई जाती हैं। सांख्यिकीय अनुमान कोरे आकस्मिक अनुमानों से कहीं अधिक यथार्थ होते हैं। डा० बाउले ने ठीक ही कहा है, 'एक सांख्यिकीय अनुमान अच्छा हो या बुरा, ठीक हो या गलत, परन्तु प्रायः प्रत्येक दशा में वह एक आकस्मिक प्रेक्षक के अनुमान से अधिक ठीक होगा।'[1]

(6) **वैज्ञानिक नियमों की सत्यता की जाँच करना**—सभी विज्ञानों में निगमन (deduction) द्वारा प्रस्तुत पुराने नियमों के परीक्षण और नये नियमों के निर्माण में सांख्यिकीय रीतियाँ उपयोगी सिद्ध होती हैं। इस कार्य के लिए अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र, जीव-विज्ञान, अन्तरिक्ष-विज्ञान, आदि अनेक विज्ञान सांख्यिकी के आभारी हैं। समंकों के आधार पर ही माल्थस के जनसंख्या सिद्धान्त, द्रव्य के परिमाण सिद्धान्त आदि में अनेक आवश्यक संशोधन किये गये हैं। यह कहना अनुचित न होगा कि सांख्यिकीय विधियों के प्रयोग द्वारा ही विभिन्न विज्ञानों का विकास सम्भव हुआ है।

(7) **विस्तार का आभास कराना**—सांख्यिकी की सहायता से किसी घटना के विस्तार या किसी समस्या की वास्तविक महत्ता का ठीक-ठीक आभास हो जाता है। समंकों के रूप में दिये गये विवरण अधिक स्पष्ट और प्रभावशाली होते हैं। उनसे अनेक तथ्यों का पता चल जाता है। उदाहरण के लिए, यदि कहा जाय कि 1961 और 1971 के बीच की अवधि में भारत की जनसंख्या तीव्र गति से बढ़ी है तो इससे समस्या की गम्भीरता का कुछ पता नहीं चलेगा। परन्तु यदि यह कहा जाय कि 1961 में भारत की जनसंख्या 44 करोड़ थी जबकि 1971 में वह बढ़कर 55 करोड़ हो गई है तो समस्या के आकार का कुछ आभास होने लगेगा। इसके अतिरिक्त यह कहा जाय कि 1961 और 1971 के बीच भारतीय जनसंख्या औसत रूप से 110 लाख व्यक्ति प्रति वर्ष या लगभग 30,140 व्यक्ति प्रतिदिन या 21 व्यक्ति प्रति मिनट की दर से बढ़ी है तो समस्या का आकार और अधिक स्पष्ट हो जायेगा।

सांख्यिकी का महत्त्व
(Importance of Statistics)

प्राचीन युग में सांख्यिकी को राजनीतिक अंकगणित (political arithmetic) कहा जाता था क्योंकि उस समय उसकी उपयोगिता राज्य तक ही सीमित थी। परन्तु सभ्यता के विकास के साथ-साथ इस विज्ञान का क्षेत्र भी बढ़ता गया और आजकल सामाजिक और प्राकृतिक सभी विज्ञानों की विभिन्न समस्याओं के तर्कपूर्ण विवेचन में सांख्यिकी का अत्यन्त महत्त्वपूर्ण योगदान है।

[1] '... statistical estimate may be good or bad, accurate or the reverse; but in almost all cases it is likely to be more accurate than a casual observer's impression ...' —*Ibid.*

वालिस और रोबर्ट्स के शब्दो मे 'साख्यिकी एक ऐसा साधन है जो प्रयोगसिद्ध अनुसन्धान के लगभग प्रत्येक क्षेत्र मे उत्पन्न होने वाली समस्याओ का समाधान करने मे प्रयोग किया जाता है।'[1] आधुनिक सांख्यिकी को यदि मानव कल्याण का गणित (arithmetic of human welfare) कहा जाय तो अतिशयोक्ति नही होगी।

(1) शासन-प्रबन्ध में महत्त्व (Importance in Administration)—शासन-प्रबन्ध को ठीक प्रकार से चलाने के लिए साख्यिकी का उपयोग अति प्राचीन काल से होता आ रहा है, परन्तु आजकल राज्य के कार्यों में आशातीत वृद्धि होने के कारण समकों की उपयोगिता और भी अधिक हो गई है। वर्तमान राज्य केवल एक सुरक्षा-राज्य (police state) न रहकर कल्याणकारी राज्य (welfare state) बन गया है। उसके कल्याणकारी कार्यों को सुचारु रूप से चलाने में साख्यिकी का और भी अधिक महत्त्व है। इसीलिए समको को 'शासन-प्रबन्ध के नेत्र' कहा जाता है।

राज्य की शासन-व्यवस्था की विभिन्न दिशाओ मे समक उपयोगी है। सरकारी आय व्ययक (budget) प्रचलित वर्ष तथा आगामी वर्ष के विभिन्न अनुमानो के आधार पर ही बनाया जाता है। जनसख्या, उत्पादन, आयात-निर्यात, राष्ट्रीय आय इत्यादि के पर्याप्त समको की सहायता से ही वित्त-मन्त्री द्वारा यह निर्णय किया जाता है कि किन करो मे वृद्धि या कमी की जाय, प्रशासन, प्रतिरक्षा, स्वास्थ्य, शिक्षा आदि पर कितनी धनराशि व्यय की जाय तथा प्रशासन मे अपव्यय को कैसे रोका जाय। नीति-निर्धारण मे भी साख्यिकीय रीतियाँ शासन-वर्ग के लिए अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होती है। आंकडो से ही सरकारी विभागो व मन्त्रालयों के निरीक्षण द्वारा कार्यकुशलता का माप किया जा सकता है। नये कानून बनाने तथा पुराने कानूनों में संशोधन करने के लिए भी आवश्यक साख्यिकीय सामग्री की सहायता लेनी पडती है। सरकार द्वारा नियुक्त विभिन्न समितियों तथा आयोगो की रिपोर्ट आवश्यक समको पर ही आधारित होती हैं। युद्ध-नीति, व्यूह-रचना, अस्त्र-शस्त्र व अन्य साज-सामान की आवश्यकता, प्रशिक्षण, खरीदी हुई सामग्री के प्रतिदर्श निरीक्षण आदि की सफलता उपयुक्त समको पर निर्भर होती है जैसा कि 1962, 1965 व 1971 के युद्धों से भारत को अनुभव हुआ है।

(2) आर्थिक नियोजन में महत्त्व (Importance in Economic Planning)—आजकल ससार के लगभग सभी देश आर्थिक नियोजन को अपना रहे हैं। टिप्पेट ने ठीक ही कहा है, 'नियोजन आजकल का व्यवस्थित क्रम है और समको के बिना नियोजन की कल्पना भी नही की जा सकती।'[2]

किसी देश की आर्थिक योजना का निर्माण वहाँ के उपलब्ध साधनों, मुख्य समस्याओं और आवश्यकताओं से सम्बन्धित यथेष्ट साख्यिकीय सामग्री के बिना असम्भव है। पर्याप्त और विश्वसनीय समको के आधार पर ही योजना-निर्माता देश में उपलब्ध प्राकृतिक व मानवीय साधन, पूंजी, राष्ट्रीय आय आदि की ठीक-ठीक जानकारी प्राप्त करते है। आंकड़ो से ही इस बात का पता चलता है कि देश की अल्पकालीन तथा दीर्घकालीन आवश्यकताएँ क्या है तथा किन-किन समस्याओं को प्राथमिकता दी जाये। इन सब तथ्यो के आधार पर अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रो म लक्ष्य निर्धारित किये जाते है तथा उनको प्राप्त करने के लिए उपयुक्त वित्तीय साधनों के सांख्यिकीय अनुमान लगाये जाते हैं। इस प्रकार समक योजना-निर्माण की आधार-शिला है। यही नही, वरन् योजना की प्रगति का मूल्यांकन भी साख्यिकीय विधियो द्वारा ही किया जाता है। समको से ही यह पता चलता है कि किन-किन क्षेत्रों म योजना के निर्दिष्ट लक्ष्य प्राप्त हो गये है, किन म प्रत्याशित गति से विकास नहीं हो पाया है तथा विकास की धीमी गति के क्या कारण है। सक्षेप मे समको के बिना आर्थिक

[1] 'Statistics is a tool which can be used in attacking problems that arise in almost every field of empirical inquiry.'—Wallis and Roberts, *Statistics, A New Approach*,

[2] 'Planning is the order of the day and without statistics planning is'
—Tippett, *Statistics*, p. 146.

नियोजन, पतवार और दिशासूचक यन्त्र-रहित जहाज की भाँति है।[1] जिस प्रकार पतवार और दिशासूचक यन्त्र के बिना जहाज के पथभ्रष्ट होने की सम्भावना रहती है उसी प्रकार पर्याप्त व यथार्थ समकों के बिना आर्थिक योजनाओं के निर्धारित लक्ष्य प्राप्त होने लगभग असम्भव हैं। निस्सन्देह, बिना समकों के आर्थिक नियोजन अन्धकार में छलांग लगाने के समान है।

भारत मे पचवर्षीय योजनाओं का समारम्भ 1951 मे हुआ है। पाँचों योजनाएँ अर्थ-व्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों में उपलब्ध समकों पर ही आधारित हैं। योजना आयोग ने यह स्वीकार किया है कि देश के आर्थिक विकास के लिए, विशेषकर नियोजन के उद्देश्यो की पूर्ति करने और नीति व प्रशासन-सम्बन्धी निर्णय लेने के लिए निरन्तर अधिकाधिक मात्रा मे उपयुक्त समंकों की आवश्यकता होती है।[2] योजनाओं के निर्माण में सांख्यिकों तथा अर्थशास्त्रियों का महत्त्वपूर्ण योगदान रहा है। इन योजनाओं की प्रगति का माप भी सांख्यिकीय विधियों से विशेषज्ञों द्वारा ही किया जाता है। इस प्रकार भारतीय आर्थिक नियोजन के लिए सांख्यिकी की बहुत उपयोगिता है। परन्तु दुर्भाग्य की बात है कि अधिकांश क्षेत्रों मे उपलब्ध भारतीय समक अधिकतर दोषपूर्ण, अपर्याप्त और अविश्वसनीय हैं। यही कारण है कि योजनाओं मे निर्धारित बहुत से अनुमान गलत सिद्ध हुए हैं तथा लक्ष्यों को प्राप्त करने मे अनेक कठिनाइयों का सामना करना पड़ रहा है। मुख्यतः द्वितीय एव तृतीय पंचवर्षीय योजनाओं में जनसंख्या वृद्धि की दर, हीनार्थ-प्रबन्धन की सुरक्षित सीमा, मूल्य-स्तर की प्रवृत्तियाँ, खाद्यान्न के उत्पादन आदि के विषय मे अनुमान गलत रहे क्योंकि वे अधिकतर अपूर्ण और अशुद्ध आँकड़ों पर आधारित थे। योजना आयोग ने यह स्वीकार किया है कि 'अपर्याप्त और अशुद्ध समकों के आधार पर किया जाने वाला नियोजन, नियोजित अर्थ-व्यवस्था के न होने से भी बुरा है।'[3]

भारतीय समकों के दोषों को दूर करने के लिए सरकार ने स्वतन्त्रता-प्राप्ति के बाद से सांख्यिकीय संगठन-सम्बन्धी तथा क्रिया-सम्बन्धी अनेक महत्त्वपूर्ण सुधार किये हैं जिनमें विशेष रूप से उल्लेखनीय हैं—केन्द्रीय सांख्यिकीय सगठन (Central Statistical Organisation), राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (National Sample Survey), स्थायी जनगणना सगठन आदि की स्थापना करना, समक-सकलन अधिनियम की व्यवस्था करना तथा जनसंख्या, राष्ट्रीय आय, उद्योग, कृषि आदि के समकों को एकत्रित करने की रीतियों में और उनके क्षेत्र में व्यापक सुधार करना। इन सुधारों के अतिरिक्त, देश के विश्वविद्यालयों तथा प्रमुख अनुसन्धान संस्थाओं, जैसे भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (Indian Statistical Institute), भारतीय कृषि-अनुसन्धान परिषद् (Indian Council of Agricultural Research), राष्ट्रीय व्यावहारिक आर्थिक अनुसन्धान परिषद् (National Council of Applied Economic Research) आदि का भी, सांख्यिकीय सर्वेक्षणों द्वारा आवश्यक समंक उपलब्ध कराने तथा सांख्यिकों को प्रशिक्षित कराने में पूर्ण सहयोग प्राप्त किया जा रहा है। इस प्रकार सरकार तथा राष्ट्रीय योजना आयोग नियोजन में सांख्यिकी के महत्त्व और उपयोगिता के प्रति जागरूक हैं।

(3) **व्यवसाय तथा वाणिज्य में महत्त्व (Importance in Business and Commerce)**—व्यापार, उद्योग तथा वाणिज्य के प्रत्येक क्षेत्र में सफलता प्राप्त करने के लिए पर्याप्त मात्रा में समकों का प्रयोग अत्यावश्यक है। व्यापारी को उपयुक्त समकों के आधार पर ही वस्तु की माँग का अनुमान लगाना पड़ता है और क्रय-विक्रय व विज्ञापन नीतियाँ निर्धारित करनी पड़ती हैं। माँग का पूर्वानुमान लगाते समय उसे ऋतुकालीन परिवर्तनों, व्यापार-चक्रों, ग्राहकों की अभिरुचि, रीति-रिवाज, जीवन-स्तर, द्रव्य की क्रय-शक्ति आदि के यथेष्ट आँकड़ों को ध्यान मे रखना पड़ता है अन्यथा अनुमान गलत हो सकता है। यदि व्यापारी सम्बन्धित समकों को आधार मानकर अनुमान

[1] 'Planning without statistics is a ship without rudder and compass.'

[2] 'Economic growth continually calls for an increased volume of statistics for purposes of planning and for policy and administrative decisions.' —Planning Commission.

[3] 'Planning on the basis of inadequate and inaccurate statistics is worse than no planning at all.' —Planning Commission.

नहीं लगाता है तो वह यथार्थ नहीं होगा और या तो व्यापारी का बहुत-सा माल बच रहेगा जिससे उसे हानि होगी या माँग से कम माल होने के कारण उसे यथोचित लाभ से वंचित रहना पड़ेगा। इसलिए व्यापारी के लिए समंकों पर आधारित अनुमान लगाने नितान्त आवश्यक हैं। अनुमान जितने यथार्थ होंगे व्यापारी को उतनी ही अधिक सफलता प्राप्त होगी। बॉडिंगटन ने कहा भी है 'एक सफल व्यापारी वही है जिसका अनुमान यथार्थता के अत्यधिक सन्निकट होता है।'[1]

व्यापारी की भांति उद्योगपति को भी भूतकालीन और वर्तमान आँकड़ों के आधार पर माँग का अनुमान लगाना पड़ता है तथा यह निर्णय करना पड़ता है कि आगामी अवधि में किस प्रकार की वस्तु का कितनी मात्रा में उत्पादन करना है। माँग के अनुमान के अतिरिक्त कच्चे माल के क्रय, निर्मित माल के विक्रय, विज्ञापन, यातायात, श्रम, वित्तीय साधनों की प्राप्ति तथा मूल्य-निर्धारण सम्बन्धी नीतियाँ उपयुक्त और यथार्थ समंकों के विश्लेषण के आधार पर ही निर्धारित की जाती हैं। नये उद्योग के प्रवर्तन की विभिन्न समस्याएँ सुलझाने में आँकड़े बहुत सहायक सिद्ध होते हैं।

प्रबन्ध लेखांकन तथा व्यावसायिक लेखाकर्म वस्तुतः समंकों पर ही आधारित होते हैं। समंकों की सहायता से ही किसी वस्तु की प्रति इकाई लागत, विभिन्न तत्त्वों में होने वाले अपव्यय, विभिन्न क्रियाओं तथा विभागों की कार्यक्षमता का सही मापन और वस्तु या सेवा का मूल्य-निर्धारण किया जा सकता है। इसी प्रकार, आँकड़ों के आधार पर ही व्यावसायिक खाते बनाये जाते हैं जिनसे व्यवसाय व उद्योग की गति-विधि का पता चल जाता है और भावी नीति निर्धारित करने में सहायता मिलती है।

वाणिज्य के अन्य क्षेत्रों में भी सांख्यिकी की उपयोगिता कुछ कम नहीं है। बैंक प्रबन्धक व्यापार-चक्रों, द्रव्य की माँग में होने वाले परिवर्तनों, विनियोग सुविधाओं, केन्द्रीय बैंक की नीति, मुद्रा बाजार की स्थिति आदि से सम्बन्धित समंकों के आधार पर ही यह निश्चित करते हैं कि वे कितना नकद कोष रखें तथा अपनी पूँजी का किस प्रकार विनियोग करें। बीमा-व्यवसाय में प्रीमियम की दरों का निर्धारण जीवन-प्रत्याशा, जीवन सारणियाँ, जनसंख्या-सम्बन्धी आँकड़े तथा सम्भावना-सिद्धान्त के आधार पर किया जाता है। सांख्यिकीय विश्लेषण द्वारा ही यह अनुमान लगा लिया जाता है कि निश्चित आयु पर औसत व्यक्ति की कितने समय तक और जीवित रहने की आशा है। एक जीवन बीमा कम्पनी ने एक बार यह विज्ञापन दिया था, 'हम यह नहीं जानते कि कौन मरेगा; पर हम यह अवश्य जानते हैं कि कितने मरेंगे।'[2] बीमा संस्थाओं में विशेष मूल्यांकन (actuarial valuation) सांख्यिकीय विधियों के अनुसार ही किया जाता है। रेलवे तथा अन्य यातायात संस्थाएँ भी पर्याप्त मात्रा में समंकों का उपयोग करती हैं। समंकों की सहायता से ही किराये-भाड़े निश्चित किये जाते हैं और उनके आधार पर ही यह निर्णय किया जाता है कि किन मार्गों पर कितनी गाड़ियों का आयोजन करना है तथा किन विशेष अवसरों पर गाड़ियों की संख्या बढ़ानी है और कब घटानी है। रेलवे की संचालन-कुशलता का माप और रेलवे बजट का निर्माण सांख्यिकीय तथ्यों पर आधारित है।

स्कन्ध-विपणि (Stock Exchange) तथा उपज-विपणि (Produce Exchange) के सदस्यों, सट्टा करने वालों और दलालों को भी अंशों और वस्तुओं के पिछले मूल्य-समंकों तथा माँग-पूर्ति की वर्तमान स्थिति आदि के आधार पर ही भावी मूल्यों के पूर्वानुमान लगाने पड़ते हैं। यदि मूल्यों के आँकड़े उपलब्ध न हों तो व्यवसाय एवं वाणिज्य के सभी पहलुओं में शिथिलता आ जाए। ब्लेयर के अनुसार, 'यदि समाचार-पत्रों, पत्रिकाओं, रेडियो और तार की रिपोर्टों से प्राप्त मूल्य-समंक एक दिन के लिए हटा दिये जायें तो व्यावसायिक जगत् शक्तिहीन हो जायेगा। यदि

[1] 'The successful businessman is the one whose estimate most closely approaches accuracy.' —A. L. Boddington, *Statistics and their Application in Commerce*, p. 8.

[2] 'We do not know *who* will die—but we know *how many.*' Insurance Company (U. S. A.).

आजकल से कुल उपलब्ध समंक समार से एक वर्ष के लिए हटा दिये जायें तो इसका परिणाम होगा—आर्थिक अव्यवस्था तथा विनाश।'[1] अभिगोपकों (underwriters) तथा विनियोजकों (investors) को सफलता प्राप्त करने के लिए ब्याज व लाभांश सम्बन्धी समंकों *तथा संस्था की लाभ कमाने की शक्ति और वित्तीय स्थिति के आँकड़ों की सहायता लेनी* पड़ती है। संक्षेप में, व्यवसाय और वाणिज्य के प्रत्येक क्षेत्र में सांख्यिकी की सेवायें असीम और अनन्त हैं।

व्यावसायिक प्रबन्ध व प्रशासन में समंक अत्यन्त उपयोगी होते हैं। यह कहना अतिशयोक्ति नहीं होगा कि आजकल व्यवसाय में लगभग प्रत्येक निर्णय समंकों और सांख्यिकीय रीति की सहायता से किया जाता है।[2] प्रत्येक व्यवसाय-प्रबन्धक को बाजार-अनुसन्धान, श्रमिकों की नियुक्ति व प्रशिक्षण, विनियोग-नीति, किस्म-नियन्त्रण तथा अनेक दिशाओं में उचित निर्णय लेने पड़ते हैं। सांख्यिकीय विधियाँ इस सम्बन्ध में दो प्रकार से सहायक सिद्ध होती हैं—एक तो प्रबन्धक के सामने यथेष्ट संख्यात्मक सामग्री प्रस्तुत करके और दूसरे, गलत निर्णय से सलग्न जोखिम की प्रायिकता का मूल्यांकन करके। अतः अनिश्चितता को दूर करके बुद्धिमत्तापूर्ण निर्णय लेना, समंकों के संकलन, विश्लेषण तथा निर्वचन सम्बन्धी सांख्यिकीय विधियों की सहायता से ही सम्भव है। माध्य, अपकिरण, प्रतिचयन-पद्धति, प्रायिकता सिद्धान्त, सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन आदि सांख्यिकीय विधियों द्वारा ही उत्पादित वस्तु की किस्म पर नियन्त्रण रखा जाता है।

नियन्त्रण-चित्र (Control charts) के निर्माण में सुनिश्चित गुण की औसत के आधार पर केन्द्रीय रेखा (Central line) और उसके प्रमाप विभ्रम के आधार पर उच्चतम व निम्नतम नियन्त्रण सीमाएँ (Upper and Lower Control limits) निर्धारित की जाती हैं। वस्तुतः, किसी व्यवसाय से सम्बन्धित तीन प्रमुख कार्यों में सांख्यिकीय रीति उपयोगी होती है—(1) क्रियाओं का नियोजन, (2) प्रमापों या मानकों का निर्धारण, तथा (3) नियन्त्रण। इन कार्यों का सम्बन्ध व्यवसाय के पांच प्रमुख क्रियात्मक क्षेत्रों से होता है—विपणन, उत्पादन, श्रम-व्यवस्था, वित्त तथा लेखाकर्म। इन सभी क्षेत्रों में सांख्यिकी बहुत उपयोगी और महत्त्वपूर्ण है। विपणन-प्रबन्धन में उत्पादन नियोजन, बाजार अनुसन्धान, बाजार-विभक्तिकरण, उपभोक्ता-व्यवहार, कीमत-निर्धारण, विज्ञापन नीति-निर्माण, वितरण-मार्गों की व्यवस्था, बाजार नियोजन व विक्रय पूर्वानुमान आदि के लिए समंक अनिवार्य हैं। उत्पादन-प्रबन्धन के क्षेत्र में रेखीय प्रक्रमन, किस्म-नियन्त्रण, स्कन्ध-नियन्त्रण (Inventory Control), पूर्वानुमान, उत्पादन-सारणियाँ, प्रगति-चित्र, उत्पादन नियोजन एवं नियन्त्रण आदि प्राविधिक क्रियाओं के लिए सांख्यिकीय विधियों का उपयोग अत्यावश्यक है। इसी प्रकार, वित्तीय प्रबन्धन और कार्मिक-प्रबन्ध में पग-पग पर आधुनिक सांख्यिकीय रीतियों का पर्याप्त मात्रा में सहारा लेना पड़ता है अन्यथा विवेकपूर्ण निर्णय करना लगभग असम्भव हो हो जाए। यही कारण है कि बड़ी-बड़ी व्यापारिक और औद्योगिक संस्थाओं में समंकों के संकलन, विश्लेषण और निर्वचन के लिए एक अलग सांख्यिकीय विभाग होता है जो प्रबन्धकों को उपयुक्त परामर्श देता रहता है।

(4) अर्थशास्त्र में महत्त्व (Importance in Economics)—या-लुन चाऊ के अनुसार 'अर्थशास्त्री, आर्थिक समूहों जैसे सकल राष्ट्रीय उत्पाद, उपभोग, बचत, विनियोग-व्यय और मुद्रा के मूल्य में होने वाले परिवर्तनों के मापन के लिए समंकों पर निर्भर रहते हैं। वे आर्थिक सिद्धान्तों का सत्यापन करने तथा परिकल्पनाओं की जाँच करने के लिए भी सांख्यिकीय विधि का ही प्रयोग

[1] 'If all price statistics were removed from all papers, magazines, radio and telegraphic reports for a single day, the business world would be paralysed. If all statistics now available were removed from the world for one year, utter economic chaos and ruin would result.' —M. M. Blair.

[2] 'It is not an exaggeration to say that today nearly every decision in business is made with the aid of statistical data and statistical method.' —Ya-Lun Chou, *Applied Business and Economic Statistics*, p. 5.

करते हैं ।'[1] इस प्रकार, अर्थशास्त्र के क्षेत्र में किसी ऐसी समस्या की कल्पना करना लगभग असम्भव है जिसमें समंकों का विस्तृत प्रयोग न किया जाता हो। अर्थशास्त्र की सभी शाखाओं से सम्बन्धित विभिन्न नियमों व सिद्धान्तों का समंकों की सहायता से ही विश्लेषण व पुष्टीकरण किया जा सकता है। उपभोग के समंकों से व्यक्तियों के जीवन-स्तर, विभिन्न मदों पर उनके व्यय, माँग की लोच आदि की समुचित जानकारी प्राप्त होती है। उत्पादन के समंकों से राष्ट्र की सम्पत्ति की मात्रा, उसमें होने वाले परिवर्तनों तथा उनके कारणों का पता चलता है। विनिमय समंक एक देश की व्यापारिक उन्नति, आयात-निर्यात, भुगतान-संतुलन, प्रचलित मुद्रा की मात्रा में होने वाले परिवर्तनों के सम्बन्ध में उपयोगी सूचना प्रदान करते हैं। वितरण के समंकों की सहायता से राष्ट्रीय लाभांश में उत्पादन के विभिन्न साधनों का भाग, विभिन्न वर्गों की आर्थिक स्थिति आदि का पर्याप्त ज्ञान प्राप्त होता है। इस प्रकार सूक्ष्म-अर्थशास्त्र (Micro-Economics) तथा बृहत्-अर्थशास्त्र (Macro-Economics) के सभी विभागों में सांख्यिकीय विश्लेषण व निर्वचन का बहुत महत्त्व है।

सांख्यिकी की सार्वभौमिक उपयोगिता (Universal Utility of Statistics)—सांख्यिकी का व्यापक महत्त्व है। ज्ञान-विज्ञान की प्रत्येक शाखा में सांख्यिकीय विधियों की उपयोगिता निरन्तर बढ़ती जा रही है। समाजशास्त्र, शिक्षा, मनोविज्ञान, भौतिकी व रसायनशास्त्र, जीवशास्त्र, नक्षत्र-विज्ञान, चिकित्साशास्त्र आदि अनेक विज्ञानों में सांख्यिकीय विवेचन नितान्त आवश्यक है। प्रत्येक क्षेत्र में सांख्यिकी, अनुसन्धान का एक महत्त्वपूर्ण साधन है। यहाँ तक कि साहित्य के क्षेत्र में भी लेखकों की शैली का अध्ययन विभिन्न शब्दों की आवृत्ति, वाक्यों की लम्बाई आदि के सांख्यिकीय माप के आधार पर किया जाता है। एडवर्ड केने के अनुसार, 'आजकल सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग ज्ञान एवं अनुसन्धान की लगभग प्रत्येक शाखा—आरेखीय कलाओं से लेकर नक्षत्र-भौतिकी तक और लगभग प्रत्येक प्रकार के व्यावहारिक उपयोग—संगीत रचना से लेकर प्रक्षेपणास्त्र निर्देशन तक—में किया जाता है।'[2] टिप्पेट ने ठीक ही कहा है, 'सांख्यिकी प्रत्येक व्यक्ति को प्रभावित करती है और जीवन को अनेक बिन्दुओं पर स्पर्श करती है।'[3] आधुनिक युग में सांख्यिकी का ज्ञान अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होता है। डा० बाउले के शब्दों में 'सांख्यिकी का ज्ञान विदेशी भाषा या बीजगणित के ज्ञान की भाँति है। यह किसी भी समय, किसी भी परिस्थिति में उपयोगी सिद्ध हो सकता है।'[4] सारांश में यह कहा जा सकता है कि 'सांख्यिकी का प्रयोग इतना विस्तृत हो गया है कि आज वह मानव क्रियाओं के प्रायः प्रत्येक पहलू को प्रभावित करता है। सरकारें अपनी नीतियाँ निर्धारित करने में और अपने निर्णयों के समर्थन में समंकों को आधार के रूप में प्रयुक्त करती हैं। सामूहिक सौदेबाजी में प्रबन्धक और श्रमिक दोनों ही समंक उद्धृत करते हैं। प्रतियोगी प्रमण्डल अपनी-अपनी वस्तुओं की किस्म की उत्कृष्टता को सिद्ध करने के लिए समंक प्रस्तुत करते हैं। हम पर निरन्तर दैनिक समाचार-पत्रों, रेडियो और दूरदर्शन (T.V.) द्वारा संख्यात्मक तथ्यों और सांख्यिकीय विश्लेषण व निर्वचन की बौछार की जाती है। वास्तव में हमारा युग सांख्यिकी का युग है।'[5]

[1] 'Economists depend upon statistics to measure economic aggregates, such as the Gross National Product, consumption, savings, investment expenditures and changes in the value of money. They also use statistical method to verify economic theory and to test hypotheses.'—Ya-Lun Chou, *op. cit.*, p. 4.

[2] 'Statistical methods are used to-day in almost every branch of learning and enquiry—from the graphic arts to astrophysics—and in nearly every sort of application—from musical composition to missile guidance.'—Edward J. Kane.

[3] 'Statistics affects everybody and touches life at many points.'—Tippett, *op. cit.*, p. 1.

[4] 'A knowledge of statistics is like a knowledge of foreign languages or of algebra: it may prove of use at any time under any circumstances.'—*Dr.* Bowley, *op. cit.*, p. 4.

[5] 'Indeed, its adoption has became so extensive that it affects every phase of human activities today.... Governments use statistics as a basis for formulating many of their

सांख्यिकी की परिसीमाएँ
(Limitations of Statistics)

एक महत्त्वपूर्ण विज्ञान होते हुए भी सांख्यिकी की कुछ सीमाएँ हैं। संकलित समंकों का विश्लेपण व निर्वचन करते समय उन सीमाओं को ध्यान मे रखना परमावश्यक है अन्यथा निष्कर्ष भ्रमात्मक हो सकते हैं। न्यूज़होम के शब्दों में 'सांख्यिकी को अनुसन्धान का एक अत्यन्त मूल्यवान साधन समझना चाहिए परन्तु इसकी कुछ गम्भीर सीमाएँ हैं जिन्हे दूर किया जाना सम्भव नहीं है और इसीलिए इन पर हमे सावधानी से विचार करना चाहिए।'[1] सांख्यिकी की निम्नलिखित परिसीमायें हैं—

(1) **सांख्यिकी केवल संख्यात्मक तथ्यो का ही अध्ययन करती है, गुणात्मक तथ्यों का नहीं**—केवल उन्ही समस्याओं का सांख्यिकी के अन्तर्गत अध्ययन किया जा सकता है जिनको सख्याओं मे रूप मे व्यक्त किया जा सके जैसे आयु, ऊँचाई, उत्पादन, मूल्य, मजदूरी इत्यादि। गुणात्मक स्वरूप मे प्रकट किये जाने वाले तथ्य जैसे स्वास्थ्य, बौद्धिक स्तर, गरीबी, आदि का प्रत्यक्ष रूप से सांख्यिकीय विश्लेपण नही किया जा सकता। अतः इन समस्याओ के अध्ययन में सांख्यिकीय विधि को केवल सहायक रीति के रूप में प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, विद्यार्थियो के बौद्धिक स्तर का अनुमान परीक्षा के प्राप्तांकों के आधार पर लगाया जा सकता है, दो नगरो की स्वास्थ्य-सम्बन्धी स्थिति की तुलना उनकी औसत मृत्यु-दर ज्ञात करके की जा सकती है। परन्तु यह इन समस्याओ का केवल अप्रत्यक्ष विवेचन ही होगा।

(2) **सांख्यिकी समूहों का अध्ययन करती है, व्यक्तिगत इकाइयों को महत्त्व नहीं देती**—सांख्यिकी मे संख्यात्मक तथ्यो की सामूहिक विशेषताओ का विवेचन किया जाता है। किसी देश की औसत प्रति व्यक्ति आय, उस देश के निवासियो की आय के समंको के जोड़ को उनकी संख्या से भाग देने पर ज्ञात की जाती है। परन्तु यह औसत आय केवल सामूहिक विशेषताओं पर ही प्रकाश डालती है। इससे अलग-अलग व्यक्तियो जैसे निर्धन या भिखारी और लखपति आदि की व्यक्तिगत आय का आभास नही मिलता। इसी प्रकार, औसत वस्त्र-उपभोग की मात्रा से किसी निर्धन व्यक्ति द्वारा अनुभव की जाने वाली वस्त्र की कमी का अनुमान नही लगाया जा सकता। अतः सांख्यिकीय निष्कर्ष व्यक्तिगत इकाइयो पर लागू न होकर इकाइयो के समूह पर औसत रूप से लागू होते है।

(3) **सांख्यिकीय रीति किसी समस्या के अध्ययन की एकमात्र रीति नहीं है**—क्राक्सटन एवं काउडेन के अनुसार 'यह नही मान लेना चाहिए कि सांख्यिकीय रीति ही अनुसन्धान कार्य में प्रयोग की जाने वाली एकमात्र रीति है; न ही इस रीति को प्रत्येक प्रकार की समस्या का सर्वोत्तम हल समझना चाहिए।'[2] सांख्यिकीय विवेचन द्वारा प्राप्त परिणामो को अन्तिम रूप से सत्य तभी मानना चाहिए जब वे अन्य रीतियो जैसे प्रयोग, अन्वरावलोकन, निगमन आदि की सहायता तथा अन्य प्रमाणो द्वारा पुष्ट हो जाये। इतना होते हुए भी, किसी समस्या के अध्ययन और समाधान में सांख्यिकीय विधि अत्यन्त उपयोगी है। जैसा कि डा० बाउले ने कहा है, 'य

policies and to support their decisions.... Statistics are cited by both management and labour in collective bargaining. Rival companies furnish statistics to prove the alleged superior quality of their respective products. Statistical data and statistical interpretation and analysis are fed to us continuously by daily newspapers, by the radio, and by television. Ours is indeed the Statistical Age.'—Ya-Lun Chou, *op. cit.*, p. 3.

[1] 'It (statistics) must be regarded as an instrument of research of great value but having severe limitations which are not possible to overcome and as such they need our careful attention.' —Newsholme.

[2] 'It must not be assumed that the statistical method is the only method to use in ; *neither* should this method be considered the best attack for every problem.' Cowden, *Applied General Statistics*, p. 12.

(सांख्यिकीय माप) किसी समस्या के समाधान के लिए उतना ही आवश्यक है जितना एक भवन-निर्माण के लिए यथार्थ माप ।'[1]

(4) सांख्यिकी के निष्कर्ष भ्रमात्मक हो सकते हैं यदि उनका विश्लेषण बिना सन्दर्भ के किया जाय—सांख्यिकीय निष्कर्षों को भली-भाँति समझने के लिए उनके सन्दर्भ का भी अध्ययन करना आवश्यक है अन्यथा वे असत्य सिद्ध हो सकते हैं । उदाहरण के लिए, तीन व्यापारिक संस्थाओं के गत कुछ वर्षो के लाभों की औसत समान होने पर यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि तीनों में एक-सी प्रवृत्ति पाई जा रही है जबकि उनके सन्दर्भ के पूरे समकों अर्थात् अलग-अलग वर्षों के लाभ के आँकड़ो के आधार पर यह उचित निष्कर्ष निकल सकता है कि एक संस्था उन्नति की ओर अग्रसर है, दूसरी में अवनति हो रही है तथा तीसरी में लाभ सभी वर्षों मे लगभग समान है ।

(5) सांख्यिकीय नियम केवल औसत रूप से और दीर्घकाल में ही सत्य होते हैं—सांख्यिकी के नियम भौतिकी, रसायन-विज्ञान या खगोलशास्त्र के नियमों की भाँति पूर्ण रूप से सत्य नही होते । वे हमेशा तथा सभी परिस्थितियों में लागू नही होते । वे केवल दीर्घकाल में औसत रूप से तथा समूहों पर ही पूरे उतरते हैं । उदाहरण के लिए, भौतिकशास्त्र में गुरुत्वाकर्षण का नियम हमें यह बताया है कि प्रत्येक वस्तु जो ऊपर से गिराई जाती है सदैव पृथ्वी की ओर ही आती है । यह नियम सदा के लिए प्रत्येक सम्बन्धित परिस्थिति में सत्य होता है । इसी प्रकार, रसायन-विज्ञान में यह नियम है कि 'सोडियम के टुकड़े को पानी मे डालने से उसमे आग लग जाती है ।' यह नियम सोडियम के प्रत्येक टुकड़े पर लागू होता है । चिकित्सा-शास्त्र के अनुसार, 'किसी मनुष्य को एनाफिलीस मच्छर के काटे बिना मलेरिया नही हो सकता । ये नियम पूर्णरूप से यथार्थ है । परन्तु सांख्यिकी में प्रायिकता सिद्धान्त (Theory of Probability) इतना दृढ़, पूर्ण और सत्य नहीं है । इस सिद्धान्त के अनुसार यदि हम एक सिक्का उछालें तो वह आधी बार चित (Head) गिरेगा और आधी बार पट (Tail), अर्थात् चित या पट गिरने की सम्भावना $\frac{1}{2}$ है । परन्तु यह तभी सच है जब सिक्का अधिकाधिक बार उछाला जाय । दस बार उछालने पर यह हो सकता है कि वह 7 बार चित गिरे और 3 बार पट, परन्तु दस हजार बार उछाले जाने पर चित और पट की संख्या लगभग आधी अर्थात् पाँच हजार होने की अत्यधिक सम्भावना है । इस प्रकार उछालों (tosses) की संख्या के बढ़न के साथ-साथ सम्भावना $\frac{1}{2}$ के निकट होती जाती है। अतः यह स्पष्ट है कि सांख्यिकीय नियम दीर्घकाल मे, अधिक संख्याओं पर तथा औसत रूप से ही सत्य होते हैं ।

(6) समकों में एकरूपता तथा सजातीयता होनी चाहिए—समंकों की आपस में तुलना करने के लिए यह आवश्यक है कि वे एकरूप और सजातीय हों । भिन्न-भिन्न जाति के तथा [illegible] तथ्यों से सम्बन्धित. समंकों की तुलना नही की जा सकती ।

(7) सांख्यिकी का उचित प्रयोग केवल विशेषज्ञ ही कर सकते हैं—केवल उन व्यक्तियों द्वारा ही समकों का उचित रूप से संकलन, विश्लेषण व निर्वचन किया जा सकता है जो सांख्यिकीय रीतियों का विशेष ज्ञान रखते हैं । अयोग्य और अनभिज्ञ व्यक्ति प्राप्त समंकों से न तो कोई निष्कर्ष नही निकाल सकते या बिल्कुल गलत और भ्रमपूर्ण परिणाम निकालते हैं। यूल और केन्डाल के शब्दों में 'अयोग्य व्यक्ति के हाथ मे सांख्यिकीय रीतियाँ बहुत खतरनाक अस्त्र हैं ।' जिस प्रकार एक अयोग्य चिकित्सक के हाथ में दवा जहर का काम कर सकती है और उसी प्रकार अयोग्य व्यक्ति समंकों का दुरुपयोग करके उनसे गलत परिणाम निकाल सकता है । [illegible] ने ठीक ही कहा है, 'समंक केवल एक आवश्यक किन्तु अपूर्ण औजार प्रदान करते हैं जो उनके हाथों में खतरनाक हैं जो उनकी प्रयोग-विधि और कमियों से परिचित नहीं हैं ।'

सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग करते समय सांख्यिकी-शास्त्र की परिसीमाओं को ध्यान में रखना नितान्त आवश्यक है। इन सीमाओं की उपेक्षा करने से ही समंकों से भ्रमात्मक निष्कर्ष निकलते हैं जिनके कारण सांख्यिकी को सन्देह की दृष्टि से देखा जाता है।

समंकों के प्रति अविश्वास
(Distrust of Statistics)

सामान्य व्यक्तियों में समंकों के प्रति दो प्रकार की परस्पर-विरोधी धारणाएँ प्रचलित हैं। कुछ व्यक्ति, समंकों पर अत्यधिक विश्वास करते हैं। उनका कहना है कि 'संख्याएँ झूठ नहीं बोलतीं', 'यदि संख्याओं के आधार पर एक निष्कर्ष निकलता है तो वह प्रामाणिक व अन्तिम रूप से सत्य है।' इसके विपरीत अधिकांश व्यक्ति समंकों को घृणा और सन्देह की दृष्टि से देखते हैं। उनके अनुसार समंक 'झूठ के तन्तु' (tissues of falsehood) हैं, 'सांख्यिकी झूठ का इन्द्रधनुष है।' डिजराएली ने तो यहाँ तक कहा है 'झूठ तीन प्रकार के होते हैं—झूठ, सफेद झूठ और 'समंक'।[1] डैरेल हफ ने बड़ी व्यंग्यपूर्ण भाषा में कहा है, 'एक भली-भाँति लपेटा हुआ सांख्यिकीय तथ्य हिटलर के 'महान् असत्य' से भी अच्छा होता है। वह भ्रम उत्पन्न करता है, फिर भी वह आप पर थोपा नहीं जा सकता।'[2] स्टीफेन लीकॉक ने एक बार लिखा था, 'प्राचीन काल में मनुष्यों के पास समंक नहीं होते थे; और इसीलिए उन्हें झूठ पर निर्भर रहना पड़ता था। इसी कारण प्राचीन साहित्य में काफी अतिशयोक्तियाँ पायी जाती थी—जैसे दानव, चमत्कार, जादू आदि की घटनाओं का वर्णन। उन्होंने यह सब कुछ झूठ से किया था और हम यह सब (बढ़ा-चढ़ा कर या तोड़-मरोड़ कर तथ्यों को प्रस्तुत करना) समंकों की सहायता से करते हैं। परन्तु बात बिल्कुल एक-सी ही है।'[3]

ला गार्दिया के अनुसार 'समंक उन्माद रोग के चिकित्सकों की भाँति होते हैं—वे दोनों ओर की बातें प्रमाणित कर सकते हैं',[4] अर्थात् 'समंक कुछ भी सिद्ध कर सकते हैं।' आँकड़ों के आधार पर सत्ताधारी दल यह सिद्ध कर सकता है कि पंचवर्षीय योजनाओं से भारत में प्रत्येक क्षेत्र में आशातीत प्रगति हुई है जबकि विरोधी दलों के सदस्य समंकों से यह सिद्ध कर सकते हैं कि योजनाकाल में सामान्य व्यक्ति की स्थिति पहले से भी अधिक खराब हो गई है। वास्तव में, समंक अत्यन्त शक्तिशाली साधन हैं जिनका दुरुपयोग करके असत्य को सत्य और सत्य को गलत सिद्ध किया जा सकता है। 'सांख्यिकी की उस गुप्त भाषा को, जो तथ्यों के प्रति सचेत सभ्यता में बहुत अधिक आकर्षक हो गई है, उत्तेजना उत्पन्न करने में, तथ्यों को बढ़ा-चढ़ा कर प्रस्तुत करने, उनसे भ्रम उत्पन्न करने तथा उन्हें आवश्यकता से अधिक सरल बनाने में प्रयुक्त किया जाता है।'[5] इसीलिए समंकों पर अविश्वास किया जाता है। सांख्यिकी से अनभिज्ञ सामान्य व्यक्ति पहले तो आँकड़ों पर अति-विश्वास कर लेता है परन्तु बाद में जब उसे यह पता चलता है कि जिन निष्कर्षों को वह सत्य समझता था वे वास्तव में भ्रमात्मक हैं तो वह समंकों पर अविश्वास करने लगता है।

अविश्वास के कारण—समंकों के प्रति अविश्वास के निम्नलिखित प्रमुख कारण हैं—

(1) **सामान्य व्यक्तियों की अज्ञानता**—सामान्य व्यक्ति विभिन्न सांख्यिकीय रीतियों से अधिकतर अनभिज्ञ होते हैं। आरम्भ में वे समंकों द्वारा प्रमाणित निष्कर्ष को अन्तिम रूप से सत्य मान लेते हैं परन्तु बाद में जब उन्हें यह ज्ञात होता है कि वास्तविक स्थिति कुछ और है तो वे

[1] 'There are three degrees of lies—lies, damned lies and *statistics*.' —Disraeli.

[2] 'A well-wrapped statistic is better than Hitler's 'big lie', it misleads, yet it cannot be pinned on you!' —Darrell Huff, *How to Lie with Statistics*, p. 9.

[3] 'In earlier times they had no statistics, and so they had to fall back on lies. Hence the huge exaggerations of primitive literature—giants, or miracles or wonders! They did it with lies and we do it with statistics; but it is all the same.' —Stephen Leacock, quoted by Wallis and Roberts, *op. cit.*, p. 64.

[4] 'Statistics are like alienists—they will testify to either side.' —La Guardia.

[5] 'The secret language of statistics, so appealing in a fact-minded culture is employed to sensationalise, inflate, confuse and oversimplify.' —Darrell Huff, *op. cit.*, p. 8.

समंकों के प्रति अविश्वास करने लगते हैं।

(2) **सांख्यिकी की सीमाओं की उपेक्षा**—सांख्यिकी की अनेक सीमाएँ हैं। उदाहरणार्थ, सांख्यिकीय रीति किसी समस्या के अध्ययन की एकमात्र रीति नहीं है; सांख्यिकीय निष्कर्ष व्यक्तिगत इकाइयों पर लागू नहीं होते; सदर्भ से अलग आँकड़े अर्थहीन होते हैं। निर्वचन करते समय यदि इन सीमाओं की उपेक्षा की जाये तो भ्रमपूर्ण नतीजे निकलते हैं और समंकों के प्रति अविश्वास होने लगता है।

(3) **विशेष ज्ञान का अभाव**—संकलित आँकड़ों से उचित निष्कर्ष निकालने में यथेष्ट ज्ञान, योग्यता और अनुभव की आवश्यकता होती है। यदि सांख्यिक में ये गुण नहीं हैं तो असत्य परिणाम निकाले जा सकते हैं जिनके कारण सांख्यिकी को सन्देहयुक्त माना जाने लगता है। एक अयोग्य व्यक्ति के हाथों में सांख्यिकी अत्यन्त खतरनाक औजार है।

(4) **समंकों की शुद्धता की पहचान न होना**—यह ठीक-ठीक नहीं कहा जा सकता कि प्रस्तुत आँकड़े यथोचित रूप से शुद्ध हैं या वे काल्पनिक हैं। समंकों की सबसे बड़ी कमी यह है कि उनके स्वरूप पर सदैव उनके गुणों की कोई छाप नहीं होती। एक सामान्य व्यक्ति की कल्पना पर आधारित अशुद्ध सारणी भी उतनी ही महत्त्वपूर्ण प्रतीत होती है जितनी कुशल सांख्यिकों द्वारा सन्तोषजनक आधार पर कठोर परिश्रम से बनी सारणी। उनमें ठीक-ठीक पहचान करना अत्यन्त कठिन है। अतः विभिन्न व्यक्तियों में समंकों के प्रति सन्देह रहता है।

(5) **समंकों का दुरुपयोग**—समंकों के प्रति अविश्वास का सबसे महत्त्वपूर्ण कारण पक्षपातपूर्ण सांख्यिकों द्वारा किया जाने वाला समंकों का दूषित प्रयोग है। कभी-कभी सांख्यिक जान-बूझकर सांख्यिकी की विशेषताओं और सीमाओं की उपेक्षा करते हैं और आँकड़ों से अवास्तविक तथा एकांगी परिणाम निकालते हैं जिससे सांख्यिकी पर से जनता का विश्वास उठ जाता है।

संक्षेप में, समंकों के प्रति अविश्वास सामान्य व्यक्तियों की अज्ञानता और सांख्यिकों द्वारा उनके दुरुपयोग के कारण होता है। समंक सर्वथा निर्दोष हैं। दोष तो उनसे गलत निष्कर्ष निकालने वालों का है। 'समंक गीली मिट्टी के समान हैं जिससे आप देवता या दानव जो भी चाहें बना सकते हैं।'[1] समंक स्वयं कुछ भी सिद्ध नहीं कर सकते। वे तो सांख्यिक के हाथों में औजार या साधन मात्र हैं जिनसे वस्तुस्थिति का यथार्थ प्रस्तुतीकरण किया जाता है। यदि सांख्यिक अज्ञानतावश या पक्षपात के कारण उसका दुरुपयोग करके भ्रमात्मक निष्कर्ष निकालता है तो इसमें समंकों का कोई दोष नहीं है, दोष उस सांख्यिक का है। योग्य चिकित्सक दवा का सदुपयोग करके रोग दूर कर सकते हैं परन्तु अयोग्य चिकित्सकों के हाथ में पड़कर वही दवा जहर का काम कर सकती है। इसमें दोष दवा का नहीं वरन् अयोग्य चिकित्सक का है। अणु-शक्ति का प्रयोग उद्योग, कृषि, चिकित्सा आदि के क्षेत्र में रचनात्मक कार्यों में किया जा सकता है या विभिन्न प्रकार के घातक शस्त्र बनाकर संसार के विनाश के लिए। अणु-शक्ति सर्वथा निर्दोष है। उसका दुरुपयोग करने वाले ही पूर्ण रूप से उत्तरदायी हैं। इसी प्रकार समंकों के दुरुपयोग से उत्पन्न अविश्वास के लिए सांख्यिक ही उत्तरदायी हैं, समंकों का कोई दोष नहीं है। किसी ने ठीक ही कहा है, 'संख्याएँ स्वयं असत्य नहीं बोलतीं वरन् असत्यवादी ही अशुद्ध चित्रण करते हैं।'[2]

इस प्रकार, सांख्यिकी पर अत्यधिक भरोसा कर लेना तथा उस पर पूर्णतया अविश्वास करना—ये दोनों ही दृष्टिकोण अनुचित प्रतीत होते हैं। वॉलिस तथा रोबर्ट्स का कथन है, 'जो व्यक्ति समंकों को बिना सोचे-समझे स्वीकार कर लेता है, वह प्रायः अनावश्यक रूप से धोखा खा जाता है; परन्तु जो उन पर विचार किये बिना ही अविश्वास करता है वह अक्सर अनावश्यक रूप से अनभिज्ञ रह जाता है।'[3] अर्थात् समंकों पर अति विश्वास और अविश्वास करने वाले व्यक्ति

[1] 'Statistics are like clay of which you can make a God or a devil, as you please.'

[2] 'Figures won't lie, but liars figure.'

[3] 'He who accepts statistics indiscriminately will often be duped unnecessarily. But he who distrusts statistics indiscriminately will often be ignorant unnecessarily.'—Wallis and Roberts, *op. cit.*, p. 17.

वास्तविक स्थिति के ज्ञान से वंचित रह जाते हैं। बहुत अधिक विश्वास करने वाले व्यक्ति समंक की यथार्थता, उद्गम, पर्याप्तता आदि पर विचार किये बिना ही उनसे निकाले गये परिणामों को सत्य मान बैठते हैं और इस प्रकार स्वार्थी और पक्षपातपूर्ण सांख्यिकों के छल-कपट के शिकार हो जाते हैं। इसके विपरीत, समकों पर सन्देह करने वाले व्यक्ति, आरम्भ में ही उन्हें मिथ्या मान लेते हैं और उनका आलोचनात्मक और तर्कपूर्ण विवेचन किये बिना ही उन्हें अस्वीकार कर देते हैं। अतः वे वस्तु-स्थिति की आवश्यक जानकारी भी नही कर पाते। इस प्रकार समकों पर न तो बिना सोचे-समझे भरोसा ही कर लेना चाहिए और न ही उन पर एकदम अविश्वास करना चाहिए। 'अन्धे विश्वास और अन्धे अविश्वास के मध्य एक सुलभ विकल्प है—वह यह कि समकों का कुशलतापूर्वक निर्वचन किया जा सकता है। वास्तव में, आप स्वयं यह कार्य कर सकते हैं। निर्वचन की कला पर सांख्यिकों का एकाधिकार आवश्यक नहीं यद्यपि, निस्सन्देह उसमें तान्त्रिक सांख्यिकीय ज्ञान सहायक होता है।'[1] समकों से उचित निष्कर्ष निकालने के लिए यह आवश्यक है कि उनके प्रयोग और निर्वचन में सतर्कता और सावधानी से काम लिया जाये, तभी सांख्यिकी के प्रति प्रचलित भ्रामक धारणाएँ दूर हो सकती हैं।

अविश्वास दूर करने के उपाय—समकों के प्रति अविश्वास को दूर करने तथा दुरुपयोग से बचने के लिए निम्नलिखित सावधानियां ली जानी चाहिएँ—

(1) **सांख्यिकी की सीमाओं का ध्यान रखना**—समंकों से परिणाम निकालते समय सांख्यिकी की सीमाओं को ध्यान में रखना चाहिए। उदाहरणार्थ, यह देख लेना चाहिए कि समंक सन्दर्भ से अलग करके तो प्रस्तुत नहीं किये गये हैं; उनमें सजातीयता और तुलना-योग्यता है या नहीं, तथा अन्य रीतियों द्वारा भी उक्त निष्कर्ष सिद्ध हो रहा है या नहीं।

(2) **विवेकपूर्ण प्रयोग**—मिल्स के अनुसार, 'साधन के रूप में सांख्यिकीय रीति का बुद्धिमत्तापूर्ण प्रयोग आवश्यक है और सांख्यिकीय विश्लेषण द्वारा प्राप्त परिणामों का बुद्धिमानी से निर्वचन करने की अत्यधिक आवश्यकता है।'[2] समंकों पर पूर्ण रूप से आश्रित नहीं हो जाना चाहिए। किसी ने ठीक कहा है, 'सांख्यिकी का प्रयोग इस प्रकार नहीं किया जाना चाहिए जिस प्रकार एक अन्धा आदमी प्रकाश के खम्भे को प्रकाश के लिए प्रयोग न करके सहारे के लिए करता है।'[3] एक अन्धा आदमी प्रकाश के खम्भे का प्रयोग प्रकाश के लिए नहीं कर सकता, वह खम्भे का सहारा लेकर आगे बढ़ता है। सांख्यिकी का प्रयोग सहारे के लिए नहीं करना चाहिए। समंकों पर पूर्ण रूप से निर्भर नहीं हो जाना चाहिए वरन् उनकी सहायता से सत्य-असत्य की पहचान करके वास्तविक निष्कर्ष निकालना चाहिए। यह तभी हो सकता है जब सांख्यिक को सांख्यिकीय विधियों का यथेष्ट ज्ञान हो और वह उन रीतियों का बुद्धिमानी और निष्पक्षता से प्रयोग करे।

(3) **आत्म-संयम**—यूल व कैण्डाल के शब्दों में, 'सांख्यिकी उन विज्ञानों में से है जिनके विशेषज्ञों को एक कलाकार की भांति आत्म-संयम का प्रयोग करना चाहिए।'[4] यदि एक कलाकार अपनी पूर्व-धारणाओं को नियन्त्रण में रखकर निष्पक्ष भाव से कला का अभ्यास करता है तो वह वास्तविक स्थिति का शुद्ध चित्रण कर सकता है। इसी प्रकार सांख्यिक भी समकों का निष्पक्ष प्रयोग करके वस्तुस्थिति को स्पष्ट कर सकता है। पक्षपातपूर्ण निर्वचन के कारण ही अधिकतर समकों के प्रति अविश्वास उत्पन्न होता है।

[1] 'There is an accessible alternative between blind gullibility and blind distrust. It is possible to interpret statistics skillfully. In fact, you can do it yourself. The art of interpretation need not be monopolized by statisticians, though, of course, technical statistical knowledge helps.' —*Ibid.*, p. 17.

[2] 'As a tool, statistical method requires intelligent usage and that the results secured through statistical analysis require intelligent interpretations.' —F. C. Mills, *Statistical Methods*.

[3] 'Statistics should not be used as a blind man does a lamp-post for support instead of for illumination.'

[4] 'Statistics is one of those sciences whose adepts must exercise the self-restraint of an artist.' —Yule and Kendall, *op. cit.*

(4) स्पष्ट व स्वतन्त्र विचार-विमर्श—प्रस्तुत समंकों पर स्पष्ट रूप से विचार करके उनका तर्कपूर्ण विश्लेषण करना चाहिए। वॉलिस तथा रोबर्ट्स के अनुसार, 'सांख्यिकीय निर्वचन केवल सांख्यिकीय धारणाओं पर ही निर्भर नहीं होता, परन्तु वह 'सामान्य' स्पष्ट विचारधारा पर भी आधारित है। समंकों का निर्वचन करने में स्पष्ट विचारधारा केवल अनिवार्य ही नहीं है वरन् वह स्पष्ट सांख्यिकीय ज्ञान के अभाव मे, निर्वचन के लिए पर्याप्त भी है।'[1] स्वतन्त्र विचार-विमर्श से अनेक साख्यिकीय भ्रान्तियाँ दूर हो जाती है।

(5) अन्य सावधानियाँ—समंकों के दुरुपयोग से बचने और अविश्वास को दूर करने के लिए यह भी देख लेना चाहिए कि समंक उचित रीति द्वारा उचित साधनों से निष्पक्षतापूर्वक एकत्र किये गये हैं या नहीं, प्रस्तुत समस्या के लिए वे पर्याप्त एव उद्‌देश्यानुकूल हैं या नहीं, उनका विश्लेषण व निर्वचन सांख्यिक ने निपुणता, अनुभव व निष्पक्ष भावना से किया है अथवा नही।

इस प्रकार समंकों के दुरुपयोग से बचने के लिए लगातार सतर्कता एवं सावधानी अपेक्षित है। वॉलिस व रोबर्ट्स ने तो यहाँ तक कहा है कि 'निरन्तर सतर्कता ही गम्भीर सांख्यिकीय त्रुटियों से मुक्ति पाने का मूल्य है।'[2] अतएव, समंको के प्रति अविश्वास के लिए न तो समंक दोषी है और न सांख्यिकी विज्ञान ही। सांख्यिकीय रीतियों व सीमाओ से अपरिचित व्यक्ति तथा स्वार्थी और पक्षपातपूर्ण सांख्यिक ही समकों के दूषित प्रयोग द्वारा सांख्यिकी के प्रति सन्देह की भावना उत्पन्न करते हैं। किंग ने ठीक ही कहा है, 'साख्यिकी विज्ञान एक अत्यन्त उपयोगी सेवक है परन्तु उसका मूल्य केवल उन्ही के लिए है जो उसका उचित प्रयोग जानते हैं।'[3]

समंकों का दुरुपयोग : कुछ उदाहरण
(Misuse of Statistics : Some Examples)

हम पहले देख चुके हैं कि अधिकतर समकों का दुरुपयोग करके उनसे असत्य और भ्रमात्मक निष्कर्ष निकाले जाते हैं। समंकों का दुरुपयोग या तो जान-बूझकर किया जा सकता है या वह सामान्यकरण (generalisation) की त्रुटियों के कारण उत्पन्न हो सकता है। अधिकतर निम्न प्रकार से समकों का दुरुपयोग होता है—

(1) अनुपयुक्त तुलना—यदि अतुलनीय या विजातीय समकों में परस्पर तुलना की जाये तो परिणाम गलत निकलते हैं। कोहेन और नेजेल ने अनुपयुक्त तुलना का एक रोचक उदाहरण दिया है। स्पेनिश-अमेरिकन युद्ध-काल मे *अमरीकी नौसेना में मृत्यु-दर 9 प्रति हजार थी जबकि* उसी अवधि में न्यूयार्क नगर में मृत्यु-दर 16 प्रति हजार थी। अतः न्यूयार्क मे रहने की अपेक्षा अमरीकी नौसेना मे भरती हो जाना अधिक सुरक्षित है। यह स्पष्ट है कि ये दोनों मृत्यु-दरें तुलना-योग्य नही हैं। नौसेना मे स्वस्थ युवक ही चुने जाते हैं और उनकी अत्यधिक देखभाल की जाती है। इसके विपरीत, न्यूयार्क नगर मे सभी प्रकार के लोग—स्त्री, बच्चे, बूढ़े, बीमार आदि—रहते हैं, तथा उनकी रहन-सहन की स्थिति भी भिन्न है। इस प्रकार की अनुपयुक्त तुलनाओं द्वारा समकों से बहुधा असत्य निष्कर्ष निकाले जाते है।

(2) अस्पष्ट व परिवर्तनशील परिभाषाएँ—समंकों के सकलन व निर्वचन में प्रयुक्त धारणाओं और इकाइयो की स्पष्ट और स्थिर परिभाषा न होने के कारण भी अनेक सांख्यिकीय भ्रान्तियाँ उत्पन्न हो जाती हैं। यदि दो भिन्न-भिन्न देशों या अवधियो मे बेरोजगारी के सम्बन्ध मे

[1] 'Statistical interpretation depends not only on statistical ideas, but also on 'ordinary' clear thinking. Clear thinking is not only indispensable in interpreting statistics, but is often sufficient even in the absence of specific statistical knowledge.' —Wallis & Roberts, *op. cit.*, p. 17.

[2] 'But eternal vigilance is the price of freedom from serious statistical blunders.' —*Ibid.*, p. 89.

[3] 'The science of statistics, then, is a most useful servant, but only of great value to those who understand its proper use.' —King, *Elements of Statistical Methods*, p. 33.

आँकड़े एकत्रित किये जा रहे हैं तो यह देख लेना चाहिए कि 'बेरोजगार व्यक्ति' की परिभाषा दोनों परिस्थितियों में स्पष्ट, समान और स्थिर है या नहीं। यदि परिभाषाओं में अन्तर है, तो परिणाम भ्रान्तिपूर्ण होंगे।

(3) **प्रतिशतों का गलत प्रयोग**—सांख्यिकी में प्रतिशतों का भी बहुत दुरुपयोग किया जाता है। दो समूहों की तुलना में गलत आधार के प्रयोग द्वारा प्रतिशत-रीति से भ्रमपूर्ण परिणाम निकलते हैं। एक उत्पादक का यह कथन[1] कि उसके कारखाने में वस्तुओं का उत्पादन गत अवधि की तुलना में 150% घट गया है सर्वथा गलत है क्योंकि 100% की कमी होने पर उत्पादन शून्य हो जाता है। वास्तव में, उसके कारखाने में उत्पादन 87,500 इकाइयों से घटकर 35,000 इकाइयाँ रह गया और 52,500 इकाइयों की कमी हुई जो 35,000 के आधार पर 150% है, परन्तु प्रतिशत का यह आधार (35,000) गलत है। सच तो यह है कि 87,500 पर 52,500 की कमी हुई जो 60% है। प्रतिशत परिवर्तन मूल संख्या के आधार पर निकालने चाहिएँ। मजदूरी के 80 रु० से 100 रु० हो जाने पर 25% की वृद्धि होती है परन्तु यदि वह 100 रु० से घटकर 80 रु० हो जाय तो कमी की दर 20% होगी।

(4) **सांख्यिकीय विधियों का अनुचित प्रयोग**—अक्सर माध्य, सूचकांक, रेखाचित्र, सह-सम्बन्ध आदि सांख्यिकीय विधियों के अनुचित प्रयोग द्वारा अनेक भ्रान्तिपूर्ण धारणाएँ उत्पन्न हो जाती हैं। कभी-कभी इन रीतियों के दुरुपयोग द्वारा वास्तविक स्थिति छिपा ली जाती है और भ्रमात्मक निष्कर्षों को बढ़ा-चढ़ा कर प्रस्तुत किया जाता है। डैरेल हफ के कथनानुसार, 'माध्य और सम्बन्ध, प्रवृत्तियाँ और रेखाचित्र वस्तुतः सदा वे नहीं होते जो वे ऊपर से प्रतीत होते हैं। जितना स्पष्ट रूप से दृष्टिगोचर है, उनमें उससे कुछ अधिक हो सकता है, और उससे बहुत कुछ कम भी हो सकता है।'[2] उदाहरणार्थ, यदि किसी कक्षा के दो विद्यार्थियों के गत तीन परीक्षाओं के औसत प्रतिशत प्राप्तांक समान हों तो यह परिणाम निकालना उचित नहीं होगा कि दोनों समान बौद्धिक स्तर के हैं। विस्तृत विश्लेषण से यह पता चल सकता है कि एक विद्यार्थी तो प्रगति की ओर अग्रसर है जबकि दूसरा अवनति कर रहा है। एक ही परिस्थिति में विभिन्न प्रकार के माध्य का प्रयोग करके दूषित परिणाम निकाले जा सकते हैं। अपकिरण की उपेक्षा द्वारा भी सांख्यिकीय भ्रम उत्पन्न हो जाते हैं। रेखाचित्रों के मापदण्ड में परिवर्तन करके वास्तविक स्थिति को छिपाया जा सकता है। बहुधा सह-सम्बन्ध और कारण-परिणाम सम्बन्ध में भेद न करने से भी गलत सामान्यन हो जाता है। यदि दो समूहों में परस्पर घनिष्ठ सम्बन्ध हो तो अधिकतर यह मान लिया जाता है कि उनमें से एक कारण है और दूसरा परिणाम जबकि यह आवश्यक नहीं है। दोनों समूह किसी तीसरे तथ्य-समूह से समान रूप से प्रभावित हो सकते हैं या उनका सम्बन्ध केवल दैव (chance) पर आधारित हो सकता है।

(5) **एकपक्षीय तर्क**—कभी-कभी एक तर्क के अनुकूल पक्ष के आँकड़े देकर एक निश्चित परिणाम निकाला जा सकता है जो वास्तव में असत्य होता है। उदाहरणार्थ, यदि यह कहा जाय कि शराब पीने वालों में से 90% व्यक्तियों की मृत्यु 80 साल की आयु से पूर्व हो जाती है तो इस तर्क के आधार पर यह कहा जा सकता है कि शराब पीना दीर्घ-जीवन के लिए अहितकर है। परन्तु केवल इन एकपक्षीय तथ्यों के आधार पर यह नतीजा निकाल लेना सर्वथा अनुचित है। सही निष्कर्ष के लिए यह भी जानना जरूरी है कि शराब न पीने वालों में से कितने प्रतिशत व्यक्तियों की मृत्यु 80 वर्ष से पहले हो जाती है। यदि शराब न पीने वालों में से 95% की मृत्यु 80 वर्ष से पहले हो जाती है तो शराब पीना दीर्घ-जीवन के लिए हितकर हुआ। यदि उनमें भी 90% 80 वर्ष से पहले मर जाते हैं तो शराब पीने या न पीने का दीर्घ-जीवन से कोई सम्बन्ध नहीं है। इसके विपरीत, यदि शराब न पीने वालों में केवल 85% ही 80 वर्ष से पहले मरते हैं तो

[1] See Neiswanger, *Elementary Statistical Methods*, p. 45.

[2] "Averages and relationships and trends and graphs are not always what they seem. There may be more in them than meets the eye, and there may be a good deal less." Darrel Huff, *op. cit.*, p. 8.

शराब पीना दीर्घायु होने के लिए अहितकर माना जायेगा। इस प्रकार, उचित परिणाम निकालने के लिए तर्क के सभी पहलुओं पर विचार किया जाना चाहिए।

(6) अप्रतिनिधि और अपर्याप्त सामग्री—ऐसे समंकों के आधार पर निकाले गये निष्कर्ष अधिकतर भ्रमात्मक होते हैं जो पूरे क्षेत्र का प्रतिनिधित्व न करते हों और समुचित निर्वचन के लिए अपर्याप्त हों। 1948 में अमरीकी राष्ट्रपति के चुनाव के सम्बन्ध में गैलप मतसंग्रह संस्था (Gallup Poll) द्वारा कुछ प्रतिदर्श समंकों के आधार पर यह भविष्यवाणी की गई थी कि टॉमस ड्यूई विजयी होंगे जबकि वास्तव में विजय डैमोक्रेट उम्मीदवार हैरी ट्रूमैन की हुई। इस गलत अनुमान का मुख्य कारण यह था कि बहुत कम व्यक्तियों से पूछताछ की गई थी तथा वे अधिकांश मतदाताओं का प्रतिनिधित्व भी नहीं करते थे।

(7) अभिनति—सांख्यिक की अभिनति या पक्षपात (bias) की भावना समंकों के दुरुपयोग का मुख्य कारण है। यदि कोई अनुसन्धानकर्ता पहले से ही कुछ धारणाएँ बना लेता है तो वह समंकों को इस प्रकार से प्रस्तुत करेगा कि उसकी पूर्व-धारणाओं के अनुकूल ही निष्कर्ष निकलें।

(8) अन्य दुरुपयोग—भ्रान्तिपूर्ण आगमन व निगमन, भ्रामक कथन, तान्त्रिक तथा गणना-सम्बन्धी त्रुटियों के आधार पर भी असत्य निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। डा० बाउले के अनुसार 'मिथ्या सांख्यिकीय तर्क उत्पन्न करने के कुछ सामान्य तरीके इस प्रकार हैं—(i) समंकों को सन्दर्भ से अलग करके प्रस्तुत करना, (ii) ऐसी घटनाओं के समूह पर उन्हें लागू करना जिनसे वे वास्तव में सम्बन्धित नहीं हैं, (iii) केवल एक भाग से सम्बन्धित अनुमानों को ही सम्पूर्ण मानना, (iv) तर्क के अनुकूल पक्ष की घटनाओं का ही वर्णन करना, और (v) लापरवाही से परिणाम से कारण की ओर तर्क प्रस्तुत करना।'[1]

इस प्रकार, व्यवहार में, समंकों से त्रुटिपूर्ण सामान्यकरण करके तथा उनके दुरुपयोग द्वारा अनेक सांख्यिकीय भ्रम उत्पन्न किये जाते हैं और गलत निष्कर्षों द्वारा सामान्य व्यक्तियों को धोखा देने की चेष्टा की जाती है। इन त्रुटियों से बचने के लिए निरन्तर सतर्कता परमावश्यक है।

प्रश्न

1. उचित उदाहरणों सहित सांख्यिकी के कार्यों का वर्णन कीजिए।
   Describe with the help of suitable illustrations the functions of statistics.
   [B. Com., Meerut, 1970]
2. 'वास्तव में सांख्यिकी का उचित कार्य मनुष्य के व्यक्तिगत अनुभव में वृद्धि करना है।' उक्त कथन की समीक्षा कीजिए और एक सांख्यिक के कार्यों की भी स्पष्ट व्याख्या कीजिए।
   'The proper function of statistics, indeed, is to enlarge individual experience.' Comment on the above statement and also explain the functions of a statistician.
   [B. Com., Agra, 1964]
3. यह बात समझाइये कि आधुनिक युग में सांख्यिकी किस प्रकार मानव-कल्याण का विज्ञान है।
   Explain how in modern age, Statistics can be treated as the science of human welfare.
   [B. Com., Vikram, 1971]

[1] 'Some of the common ways of producing a false statistical argument are—to quote figures without their context..., or to apply them to a group of phenomena quite to that to which they in reality relate; to take estimates referring to only part of a as complete; to enumerate the events favourable to an argument...; and to argue from effect to cause.' —Dr. Bowley, *Elements of Statistics*, pp. 12-13.

4. 'आधुनिक समाज में सांख्यिक के योगदान' पर एक निबन्ध लिखिए।
Write an essay on 'The Role of the Statistician in Contemporary Society.' [M. A., Punjab, 1969]

5. 'विभिन्न क्षेत्रों की समस्याओं की व्यावहारिक आवश्यकताओं से सांख्यिकी का उदय हुआ और ऐसी समस्याओं के विश्लेषण में ही इसका उपयोग निहित है।' उपयुक्त उदाहरण देते हुए विवेचना कीजिए।
'Statistics arose from practical requirements of problems in various spheres and its importance is due to its use in treating such problems.' Discuss giving suitable examples. [M. A., Meerut, 1970]

6. 'सांख्यिकी राज्य की सेवा में' पर एक निबन्ध लिखिए।
Write an essay on 'Statistics in the service of State.' [B. Com., Meerut, 1971]

7. 'समंक वे तृण हैं जिनसे अन्य किसी अर्थशास्त्री के समान मैं ईंटें तैयार करता हूँ।' (मार्शल) इस वाक्यांश को समझाइये और भारत की आर्थिक योजनाओं में समंकों का उपयोग बताइए।
'Statistics are the straw out of which, I, like every other economist, have to make bricks.' (Marshall) Elucidate this statement and indicate the utility of Statistics in Economic Planning in India. [B. Com., Kanpur, 1971]

8. 'अपर्याप्त व अशुद्ध समंकों के आधार पर किया गया नियोजन, बिल्कुल नियोजन न होने से भी बुरा है।' (तृतीय पंचवर्षीय योजना) इस कथन की व्याख्या कीजिए और भारत के नियोजित आर्थिक विकास में सांख्यिकी के महत्त्व का विवेचन कीजिए।
'Planning on the basis of inadequate and inaccurate statistics is worse than no planning at all.' (Third five year plan) Explain this statement and discuss the importance of statistics in the planned economic development of India. [B. Com., Vikram, 1968 ; Agra, 1967 ; Banaras, 1962]

9. 'समंकों के बिना आर्थिक नियोजन एक पतवार एवं दिशा-सूचक यन्त्र-रहित जहाज के समान है।' इस कथन के प्रकाश में भारतीय राष्ट्रीय नियोजन में समंकों की प्रभावपूर्ण सहायता के महत्त्व को समझाइये।
'Planning without statistics is a ship without rudder and compass.' In the light of this statement, explain the importance of statistics as an effective aid to national planning in India. [M. Com., Agra, 1964 ; Banaras, 1958]

10. 'सांख्यिकी का न केवल अर्थशास्त्र तथा वाणिज्य के अध्ययन में महत्त्वपूर्ण योगदान है वरन् प्रत्यक्ष व्यवसाय में भी है।' इसे भली प्रकार समझाइए।
'Statistics plays an important part not only in the study of Economics and Commerce but also in actual business.' Explain fully. [B. Com., T. D. C. (Final), Raj., 1971]

11. सांख्यिकी क्या है ? व्यापार में सांख्यिकीय विधियों का महत्त्व स्पष्ट कीजिए।
What is Statistics ? Explain the importance of statistical methods in business. [B. Com., Gorakhpur, 1970]

12. सांख्यिकी विज्ञान की परिभाषा दीजिए। सांख्यिकी किस प्रकार (क) एक व्यापारी के लिए, (ख) एक योजना आयोग के लिए, तथा (ग) एक बीमा कम्पनी के लिये उपयोगी सिद्ध हो सकती है।
Give a definition of the science of Statistics. In what ways can statistics be of service to (a) a businessman, (b) planning commission, and (c) an insurance company. [B. Com., Agra, 1969]

13. व्यापार एवं वाणिज्य में सांख्यिकी के उपयोग को उदाहरण सहित समझाइए।
Explain, with examples, the utility of statistics in business and commerce. [B. Com., Gorakhpur, 1969 ; Agra, 1960]

14. 'सांख्यिकी का ज्ञान विदेशी भाषा अथवा बीजगणित के ज्ञान की भाँति है, वह किसी भी समय और किसी भी परिस्थिति में उपयोगी सिद्ध हो सकता है।' व्याख्या कीजिए।
'A knowledge of statistics is like the knowledge of foreign language or of algebra. It may prove of use at any time, under any circumstances.' Explain. [B. Com., Vikram, 1967, 61]

15. सांख्यिकी का क्षेत्र तथा उसकी सीमाओं का विवेचन कीजिए।
Discuss the scope and limitations of Statistics. [B. Com., Gorakhpur, 1972 ; Meerut, 1970]

16. निम्नलिखित का वर्णन कीजिए—
(क) सांख्यिकी के कार्य तथा महत्त्व (Functions and Importance of Statistics)।

(ख) सांख्यिकी की परिसीमाएँ (Limitations of Statistics)। *[B. Com., Meerut, 1972]*

17. सांख्यिकी किसे कहते है ? इसकी सीमाओ का विवेचन कीजिए।
What is Statistics ? Discuss its limitations ? *[B. Com., Meerut, 1968]*

18. सांख्यिकी की परिसीमाएँ बतलाइए। कहाँ तक आप समझते है कि वे वास्तविक हैं ?
Describe the limitations of statistics. How far do you think, they are real ?
[B. Com., Meerut, 1973 ; Alld., 1969]

19. 'समक अनुसन्धान के किसी विभाग से सम्बन्धित तथ्यो के संख्यात्मक विवरण है जिन्हे एक-दूसरे के सम्बन्ध मे रखा जा सके।' (बाउले) इस कथन की समीक्षा कीजिए और आर्थिक विश्लेषण मे सांख्यिकी की सीमाओं की व्याख्या कीजिए।
'Statistics are numerical statements of facts in any department of enquiry, placed in relation to each other.' (Bowley) Comment on this statement and explain the limitations of statistics in economic analysis.
[B. Com., Vikram, 1970, 68, Gorakhpur, 1961 ; M. A., Agra and Vikram, 1962]

20. 'सांख्यिकी अनुमानो और सम्भाविताओ का विज्ञान है।' (बाडिंगटन) सांख्यिकी की सीमाओं को दर्शाते हुए विवेचन कीजिए।
'Statistics is the science of estimates and probabilities.' (Boddington). Discuss indicating the limitations of statistics. *[B. Com., Vikram, 1972]*

21. 'सांख्यिकी का प्रयोग उस प्रकार नही किया जाना चाहिए जैसे एक अन्धा व्यक्ति प्रकाश-स्तम्भ को प्रकाश के लिये प्रयोग न करके सहारे के लिये प्रयोग करता है।' इस कथन के अनुसार सांख्यिकी के मुख्य उपयोग एव सीमाओ को समझाइये।
'Statistics must not be used as a blindman does a lamp-post for support instead of for illumination.' In the light of this statement, explain the chief uses and limitations of statistics. *[B Com., T. D. C. (I yr), Raj., 1970]*

22. सांख्यिकी के दुरुपयोग एव अविश्वास पर टिप्पणी लिखिए।
Write a note on the misuse and distrust of statistics.
[B. Com. Agra, 1970, 66 ; Gorakhpur, 1962]

23. सांख्यिकी मे अविश्वास के क्या कारण है ? अविश्वास पैदा करने वाली अशुद्धियों के स्रोतो को बताइए और अविश्वास दूर करने के उपायो का सुझाव दीजिए।
What are the causes of distrust in Statistics ? Describe the sources of errors which create distrust and suggest remedies for removing distrust.
[B. Com., Gorakhpur, 1971]

24. 'सांख्यिकीय विधियां एक अनभिज्ञ के हाथो मे खतरनाक हथियार हैं।' उक्त कथन की महत्ता की पूर्ण व्याख्या कीजिए।
'Statistical methods are most dangerous tools in the hands of the inexpert.' Explain fully the significance of the above statement.
[B. Com., Meerut, 1972 ; M. Com., Agra, 1964 ; M. A., Agra, 1963]

25. 'अंक कभी झूठ नही बोलते।' 'समक कुछ भी सिद्ध कर सकते हैं।' दोनो कथनो को समझाइए।
'Figures do not lie.' 'Statistics can prove anything.' Explain and reconcile the two statements. *[B Com., Vikram, 1969 ; Gorakhpur, 1961]*

26. 'जो व्यक्ति समको को बिना सोचे-समझे स्वीकार कर लेता है, वह बहुधा अनावश्यक रूप से धोखा खा जाता है, परन्तु जो समको पर बिना विचार किये अविश्वास कर लेता है, वह अक्सर अनावश्यक रूप से अनभिज्ञ रह जाता है।' समीक्षा कीजिए।
'He who accepts statistics indiscriminately will often be duped unnecessarily ; but he who distrusts statistics indiscriminately will often be ignorant unnecessarily.' Comment.
[B. A. II Econ., Raj., 1970 ; B. Com., Kanpur, 1970 ; M. Com., Agra, 1966]

27. निम्नलिखित कथनो की व्याख्या कीजिए—
(क) झूठ तीन प्रकार के होते हैं—'झूठ, सफेद झूठ और समक।'
(ख) 'समक गीली मिट्टी के समान है जिससे आप देवता या दानव जो भी चाहे बना सकते हैं।'
(ग) 'संख्याएँ असत्य नही बोलती वरन् असत्यवादी ही अशुद्ध चित्रण करते हैं।'
(घ) 'समक उस लागत और श्रम के योग्य नहीं होते जो सामान्य व्यापार मे उनके संकलन और निर्वाह में व्यय होता है।'

(ङ) 'सांख्यिकी विज्ञान एक अत्यन्त उपयोगी सेवक है किन्तु उसका अधिक मूल्य केवल उन्हीं के लिए है जो उसका उचित प्रयोग जानते हैं।' —किंग

(च) 'निरन्तर सतर्कता गम्भीर सांख्यिकीय त्रुटियों से मुक्ति प्राप्त करने का मूल्य है।'

—वालिस व रोबर्ट्स

Comment on the following statements—

(a) 'There are three degrees of lies—lies, damned lies and statistics.' *[B. Cpm., Agra, 1965]*

(b) 'Statistics are like clay of which you can make a God or Devil as you please.' *[B. Com., Meerut, 1969 ; Agra, 1965]*

(c) 'Figures won't lie but liars figure.' *[B. Com., Agra, 1968, 65]*

(d) 'Statistics are not worth the cost and labour involved in their collection and maintenance in ordinary business.' *[B. Com., T. D. C. (Final), Raj., 1970 ; B. Com., Agra, 1968]*

(e) 'The science of statistics then is a most useful servant but only of great value to those who understand its proper use.' *[B. Com., Agra, 1965]*

(f) 'External vigilance is the price of freedom from serious statistical blunders.' (Wallis and Roberts)

28. निम्नलिखित कथनों की समीक्षा कीजिये—

(क) 'समंक विवाह-प्रस्तावों के समान हैं—उनके सभी गुणों के आधार पर बहुत सोच-समझकर, उनका अध्ययन और विवेचन किया जाना चाहिए, परन्तु ऐसा बहुत कम होता है।'

(ख) 'समंक स्नान-वस्त्र की भांति हैं, वे जो कुछ आकर्षक है उसका प्रदर्शन करते हैं और जो कुछ महत्त्वपूर्ण है उसको छिपा देते हैं।'

Comment on the following statements—

(a) 'Statistics are like proposals of marriage—they should be, but rarely are, studied and considered, very deliberately, upon their all-round merits.'

(b) 'Statistics are like bikinis. They reveal what is interesting and conceal what is vital.'

29. सांख्यिकी-शास्त्र की प्रमुख परिसीमाएँ बताइए। क्या इन कमियों को दूर किया जा सकता है ?
What are the main limitations of Statistics ? Can these shortcomings be overcome ? *[B. Com., Rajasthan, 1973]*

30. (क) सांख्यिकी क्या है ? उसके क्षेत्र और परिसीमाओं का विवेचन कीजिए।

(ख) निम्नलिखित विषय पर एक निबन्ध लिखिए—
'व्यापार एवं वाणिज्य की सेवा में सांख्यिकी'।

(a) What is Statistics ? Discuss its scope and limitations.

(b) Write an essay on :
'Statistics in the service of Trade and Commerce.' *[B. Com., Punjab, 1973]*

3.

सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन
(PLANNING OF STATISTICAL INQUIRY)

आजकल सभी क्षेत्रों मे विभिन्न समस्याओं के संख्यात्मक अध्ययन तथा विश्लेषण के लिए सांख्यिकीय अनुसन्धानों का प्रयोग होता है। इन अनुसन्धानों से उपलब्ध आवश्यक समको के आधार पर ही आर्थिक, सामाजिक और व्यावसायिक विषयों पर विवेकपूर्ण निर्णय लिए जाते हैं।

सांख्यिकीय अनुसंन्धान का अर्थ
(Meaning of Statistical Inquiry)

सामान्यतः 'अनुसन्धान' शब्द का अर्थ है, 'ज्ञान की खोज'। 'सांख्यिकीय अनुसन्धान' ज्ञान की वह खोज है जो सांख्यिकीय रीतियों द्वारा की जाये। दूसरे शब्दों में, किसी क्षेत्र में संख्यात्मक विश्लेषण द्वारा समस्या का उचित निर्वचन करने के उद्देश्य से आवश्यक समंकों के वैज्ञानिक संकलन की क्रिया को सांख्यिकीय अनुसन्धान कहते हैं। यह स्पष्ट है कि सांख्यिकीय अनुसन्धान केवल उन समस्याओं से ही सम्बन्धित होता है जिनका संख्यात्मक विवेचन किया जा सके। उदाहरणार्थ, किसी देश की जनसंख्या, औद्योगिक मजदूरों की आर्थिक स्थिति, विद्यार्थियों का मासिक व्यय, शिक्षित वर्ग की बेरोजगारी आदि के सम्बन्ध में तर्कपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिए आवश्यक सांख्यिकीय सामग्री के संकलन व विश्लेषण की क्रियाएँ सांख्यिकीय अनुसन्धान हैं।

सांख्यिकीय अनुसन्धान के प्रमुख चरण
(Main Stages of Statistical Inquiry)

सांख्यिकीय अनुसन्धान एक व्यापक क्रिया है। आयोजन से लेकर अन्तिम रिपोर्ट तैयार करने तक उसे अनेक स्थितियों में से गुजरना पड़ता है। संक्षेप में, सांख्यिकीय अनुसन्धान की निम्नलिखित प्रमुख अवस्थाएँ या चरण (stages) हैं—

(1) **अनुसन्धान का आयोजन**—सर्वप्रथम, अनुसन्धान के क्षेत्र व उद्देश्य, उसकी *प्रकृति*, *सूचना के उद्गम*, *इकाइयों का निर्धारण तथा यथार्थता के स्तर को ध्यान में* रखते हुए अनुसन्धान की एक स्पष्ट योजना बना ली जाती है।

(2) **समंकों का संकलन**—अनुसन्धान-योजना बना लेने के बाद समस्या से सम्बन्धित समकों को उपयुक्त रीति द्वारा एकत्रित किया जाता है।

(3) **प्रश्नावली व अनुसूची की रचना**—सही सूचना उपलब्ध करने के लिए सूचकों से पूछे जाने वाले प्रश्नो की एक सूची तैयार कर ली जाती है।

(4) **संकलित समंकों का सम्पादन**—संकलन के उपरान्त विभिन्न अशुद्धियो को दूर करके, समको मे यथोचित संशोधन किये जाते हैं।

(5) **समंक-व्यवस्था**—समकों का सम्पादन करने के बाद उन्हे विभिन्न वर्गों व [illegible] में बांटा जाता है और सारणियों में प्रस्तुत किया जाता है जिससे उनका उचित प्रकार से [illegible]

किया जा सके।

(6) विश्लेषण—आँकडों को प्रस्तुत करने के बाद विभिन्न गणितीय मापों द्वारा उनका विश्लेषण किया जाता है जिससे निर्वचन का आधार प्राप्त किया जा सके। माध्य, अपकिरण, सह-सम्बन्ध इत्यादि विश्लेषण की प्रमुख विधियाँ हैं।

(7) निर्वचन एवं अन्तिम प्रतिवेदन—अनुसन्धान-क्रिया का अन्तिम चरण है—समकों से उचित और निष्पक्ष निष्कर्ष निकालना तथा उनके आधार पर अन्तिम रिपोर्ट तैयार करना।

सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन
(Planning of Statistical Inquiry)

समंक सांख्यिकीय अनुसन्धान के मूल आधार हैं। किसी क्षेत्र में सांख्यिकीय रीतियों द्वारा उचित निष्कर्ष निकालने के लिए यह अत्यावश्यक है कि समस्या से सम्बन्धित यथोचित, पर्याप्त और यथार्थ समंक उपलब्ध हों। अतः समंकों को उचित रीति द्वारा संकलित किया जाना चाहिए। परन्तु संकलन से पूर्व अनुसन्धान की एक निश्चित योजना बना लेना अनिवार्य है। वास्तव में, सांख्यिकीय अनुसन्धान में नियोजन आवश्यक है। यदि कुछ प्रारम्भिक बातों को ध्यान में रखकर अनुसन्धान का आयोजन नहीं किया जाता है तो समय, श्रम व धन का अपव्यय होगा, अशुद्ध समंक प्राप्त होंगे और उनसे भ्रामक निष्कर्ष ही निकाले जा सकेंगे।

संकलन से पूर्व अनुसन्धान का आयोजन करते समय निम्नांकित बातों पर स्पष्ट रूप से विचार कर लेना चाहिए—

(1) अनुसन्धान का उद्देश्य और क्षेत्र,
(2) सूचना के स्रोत,
(3) अनुसन्धान का स्वरूप व प्रकार,
(4) सांख्यिकीय इकाइयों का निर्धारण,
(5) शुद्धता की मात्रा।

(1) **उद्देश्य और क्षेत्र (Object and Scope)**—सबसे पहले समस्या की स्पष्ट रूप से व्याख्या करके, अनुसन्धान का उद्देश्य और क्षेत्र निश्चित कर लेना चाहिए। नीस्वैंगर ने ठीक ही लिखा है कि 'उद्देश्यों का स्पष्ट विवरण आधारभूत महत्त्व रखता है क्योंकि उससे यह निश्चित किया जा सकता है कि कौन से समंक एकत्र करने हैं, सम्बद्ध समंकों की क्या-क्या विशेषताएँ हैं, किन सम्बन्धों की खोज करनी है, किन प्रविधियों द्वारा अनुसन्धान करना है और अन्तिम रिपोर्ट की विषय-सामग्री और रूपरेखा क्या होगी।'[1] रॉबर्ट वेसेल एवं एडवर्ड विलेट के अनुसार 'अनुसन्धान-परियोजना का उद्देश्य यथासम्भव परिशुद्ध रूप से स्पष्ट किया जाना चाहिए। इससे उचित सूचना का ही संग्रह सुनिश्चित हो जाएगा और प्रसंगहीन आँकड़ों के संकलन व प्रहस्तन के खर्च और कष्ट से छुटकारा मिल जाएगा।'[2] यदि पहले से उद्देश्य और क्षेत्र निश्चित न किया जाये तो बाद में अनेक कठिनाइयाँ उपस्थित हो जाती हैं, बहुत से अनावश्यक समंकों का संकलन हो जाता है तथा समय, धन व श्रम का अपव्यय होता है।

सांख्यिकीय अनुसन्धान किसी सिद्धान्त की जाँच करने, नये नियमों की खोज करने, वर्तमान स्थिति के बारे में जानकारी प्राप्त करने या किसी समस्या का अध्ययन व समाधान करने के उद्देश्य से किया जा सकता है। उसका उद्देश्य सामान्य या विशिष्ट हो सकता है। सामान्य उद्देश्य से किया जाने वाला अनुसन्धान सर्वसाधारण के लाभ के लिए बड़े पैमाने पर किया जाता

[1] W. A. Neiswanger, *Elementary Statistical Method*, p. 61.

[2] 'The purpose of the project should always be spelled out as precisely as possible. will insure the collection of the proper information and spare the expense and handling irrelevant data.' —Robert H. Wessel & Edward R. Willett, *Statistics as Business*, pp. 7–8.

है—जैसे जनगणना, उत्पादन संगणना आदि। विशिष्ट उद्देश्य वाला अनुसन्धान किसी विशेष उद्देश्य की पूर्ति के लिए छोटे पैमाने पर तथा विशेष वर्ग के लाभार्थ किया जाता है जैसे पश्चिमी उत्तर प्रदेश के चीनी मिल श्रमिकों की नकद मजदूरी का सर्वेक्षण।

अनुसन्धान का क्षेत्र, राजनीतिक अथवा प्रशासनिक सभाग जैसे ग्राम, जिला, प्रदेश आदि; आर्थिक सभाग जैसे उद्योग, कृषि, बैंकिंग आदि; तथा प्राकृतिक भाग जैसे पर्वतीय क्षेत्र, जंगल इत्यादि के आधार पर निर्धारित कर लेना चाहिए। उदाहरणार्थ, यदि बेकारी की समस्या का सांख्यिकीय अध्ययन करना है तो यह पहले ही निर्णय कर लेना चाहिए कि किस प्रकार की बेकारी का अनुसन्धान करना है, शिक्षित वर्ग की या औद्योगिक बेकारी का और किस क्षेत्र मे—मेरठ नगर में, मेरठ जिले में या समस्त उत्तर प्रदेश में। क्षेत्र की स्पष्ट व्याख्या हो जाने पर आगे कोई कठिनाई नही आएगी तथा अनावश्यक समको का सकलन नही हो पाएगा।

उद्देश्य व क्षेत्र के साथ-साथ अनुसन्धान की अवधि या समय पर भी ध्यान देना चाहिए। यथासम्भव, थोड़े समय मे लगातार आँकड़े प्राप्त करके यदि अनुसन्धान-कार्य पूर्ण कर लिया जाता है तो समंकों में सजातीयता बनी रहती है। जहाँ तक हो सके सामान्य अनुसन्धान कार्य किसी असाधारण समय में नही करना चाहिए।

(2) सूचना के स्रोत (Sources of Information)—सूचना-प्राप्ति के साधनो या स्रोतो के बारे में भी उचित निर्णय कर लेना परमावश्यक है। सूचना का स्रोत प्राथमिक (primary) हो सकता है या द्वितीयक (secondary)। प्राथमिक साधनों द्वारा अनुसन्धान करने मे अनुसन्धान-कर्त्ता योजना बनाकर नये सिरे से मौलिक समको का संग्रह करता है जबकि द्वितीयक साधनो के अन्तर्गत वह अन्य व्यक्तियो या संस्थाओं द्वारा पहले मे एकत्रित तथा पत्र-पत्रिकाओं या अन्य प्रकाशनों में उपलब्ध सामग्री का उपयोग मात्र करता है। उदाहरण के लिए, यदि कोई अनुसन्धान-कर्त्ता नये सिरे से, मोदीनगर के औद्योगिक मजदूरों से उनके आय-व्यय के बारे में सूचना प्राप्त करता है तो वह प्राथमिक अनुसन्धान कहलायेगा। इसके विपरीत, यदि उसी क्षेत्र मे श्रम-मन्त्रालय द्वारा एकत्रित और प्रकाशित आय व्यय समंकों का उपयोग किया जाता है तो वह द्वितीयक अनुसन्धान होगा। स्रोत का निर्णय अनुसन्धान की प्रकृति, उद्देश्य एवं क्षेत्र के आधार पर ही किया जा सकता है।

(3) अनुसन्धान का प्रकार (Type of Inquiry)—सांख्यिकीय अनुसन्धान अनेक प्रकार के होते है। अलग-अलग प्रकृति के अनुसन्धान अलग-अलग परिस्थितियों में उपयुक्त होते है। अतः अनुसन्धान के उद्देश्य, क्षेत्र व लागत आदि के आधार पर यह निश्चय कर लेना आवश्यक है कि वह किस प्रकार का होगा। विभिन्न आधारों पर अनुसन्धान निम्न प्रकार के होते है—

(i) सगणना अथवा प्रतिदर्श (Census or Sample)—अनुसन्धान सगणना पद्धति से किया जा सकता है या प्रतिचयन प्रणाली द्वारा। संगणना या सम्पूर्ण गणना के अन्तर्गत सम्पूर्ण क्षेत्र या समग्र (Universe or Population) की प्रत्येक इकाई के सम्बन्ध मे सूचना प्राप्त की जाती है, किसी भी इकाई को छोडा नही जाता। इसके विपरीत, प्रतिचयन अनुसन्धान मे पूरे क्षेत्र में से कुछ इकाइयो को नमूने के रूप मे छाँटकर उनके बारे में आँकड़े प्राप्त किये जाते हैं। उदाहरणार्थ, यदि किसी कॉलिज के सभी 5000 विद्यार्थियों के मासिक व्यय के समंक प्राप्त किये जायें तो वह संगणना अनु-सन्धान कहलायेगा। इसके विपरीत यदि कुल 5000 विद्यार्थियों में से किसी आधार पर 500 विद्यार्थी नमूने के रूप में छाँट लिए जायें और उन 500 के मासिक व्यय का सख्यात्मक विवरण प्राप्त किया जाये तो वह प्रतिदर्श अनुसन्धान होगा। आजकल प्रतिदर्श सर्वेक्षण अधिक लोकप्रिय हैं क्योंकि उनमे समय, श्रम और धन की बचत होती है तथा अशुद्धियों का न्यायोचित माप किया जा सकता है।

(ii) प्रत्यक्ष अथवा अप्रत्यक्ष (Direct or Indirect)—प्रत्यक्ष अनुसन्धान उसे कहते हैं जिसमें तथ्यों का प्रत्यक्ष सख्याओं के रूप मे माप सम्भव है, जैसे व्यक्तियो की आय, ऊँचाई, भार, वस्त्र का उत्पादन, निर्यात इत्यादि। अप्रत्यक्ष अनुसन्धान ऐसे तथ्यों से सम्बन्धित होता है जिनका प्रत्यक्ष सख्यात्मक माप नही किया जा सकता जैसे बौद्धिक-स्तर, स्वास्थ्य-स्थिति आदि। ऐसी परिस्थिति मे घटना को अप्रत्यक्ष रीति से सख्यात्मक रूप देना पड़ता है। उदाहरणार्थ, विद्यार्थियो

के बौद्धिक-स्तर के माप के लिए उनकी परीक्षाओं के प्राप्तांकों को ही आधार मानना पड़ेगा।

(iii) गुप्त अथवा खुला अनुसन्धान (Confidential or Open)—गोपनीय अनुसंधान सरकार द्वारा राजकीय प्रयोग के लिए या व्यापारिक संस्थाओं द्वारा निजी उपयोग के लिए गुप्त रूप से कराये जाते है। इनसे प्राप्त समकों का प्रकाशन नहीं किया जाता और ये सार्वजनिक उपयोग के लिए उपलब्ध नही होते। अ-गोपनीय या खुले अनुसन्धान जनता के उपयोग के लिए कराये जाते हैं तथा इनके परिणामों को प्रकाशित कर दिया जाता है।

(iv) प्रारम्भिक अथवा पुनरावर्ती (Initial or Repetitive)—प्रारम्भिक अनुसन्धान वह है जो किसी क्षेत्र में प्रथम बार किया जा रहा है। उसके लिए अनुसन्धान-योजना नये ढंग से बनानी पड़ेगी। इसके विपरीत, एक पुनरावर्ती अनुसन्धान किसी पिछले अनुसन्धान के सम्बन्ध में ही किया जाता है। अतः इसके लिए पिछली ही अनुसन्धान योजना का आवश्यक परिवर्तनों सहित प्रयोग किया जाता है।

(v) क्रमिक अथवा सामयिक (Regular or Ad-hoc)—क्रमिक अनुसन्धान में नियमित रूप से समय-समय पर स्थायी विभागों द्वारा आँकड़े एकत्रित किये जाते हैं। उदाहरणार्थ, सरकार द्वारा प्रति सप्ताह कुछ चुनी हुई वस्तुओं के मूल्य ज्ञात किये जाते हैं और उनके आधार पर थोक मूल्य-सूचकांक बनाये जाते हैं। इसके विपरीत, सामयिक अनुसन्धान कभी एक बार किसी विशेष समय पर किया जाता है जैसे भारत में ग्रामीण ऋणग्रस्तता की जाँच, तथा नियोजन काल में आय-वितरण सम्बन्धी असमानताओं का सर्वेक्षण।

(vi) डाक द्वारा अथवा वैयक्तिक (Postal or Personal)—डाक द्वारा अनुसन्धान में अनुसूचियाँ (schedules) या प्रश्नावलियाँ सूचना देने वाले व्यक्तियों के पास डाक से भेज दी जाती हैं जो निश्चित तिथि से पूर्व उन्हें भर कर वापस भेज देते हैं। इस प्रकार की जाँच सरल और कम खर्चीली होती है परन्तु यदि सूचना देने वालों का सहयोग प्राप्त न हो तो विश्वसनीय एवं पर्याप्त आँकड़े उपलब्ध नही होते। व्यक्तिगत अनुसन्धानकर्ताओं के द्वारा अनुसन्धान के अन्तर्गत योग्य तथा अनुभवी प्रगणक (enumerators) अनुसूचियाँ लेकर स्वयं संसूचकों के पास जाते हैं और पूछताछ द्वारा आँकड़े एकत्रित करते हैं। ऐसे अनुसन्धान का क्षेत्र अधिक विस्तृत होता है और अशिक्षित व्यक्ति भी सूचना प्रदान करने में योग दे सकते हैं।

(vii) सरकारी, अर्द्धसरकारी अथवा गैर-सरकारी (Official, Semi-official or Unofficial)—सरकारी अनुसन्धान केन्द्रीय अथवा राज्य सरकारों द्वारा कराये जाते हैं जैसे जनगणना। अर्द्धसरकारी अनुसन्धान ऐसी संस्थाओं द्वारा कराये जाते हैं जिन्हें सरकारी संरक्षण प्राप्त हो, जैसे नगर निगम, विश्वविद्यालय आदि द्वारा की जाने वाली जाँच। गैर-सरकारी अनुसन्धान गैर-सरकारी संस्थाओं, जैसे व्यापार संघ, औद्योगिक संस्था या निजी अन्वेषकों द्वारा किये जाते हैं। तीनो प्रकार के अनुसन्धानों में काफी अन्तर है। सरकार व्यक्तियों को सूचना प्रदान करने के लिए कानून द्वारा बाध्य कर सकती है। अर्द्धसरकारी संस्थाएँ सूचना प्राप्त करने के लिए व्यक्तियों से केवल प्रार्थना ही कर सकती है जबकि गैर-सरकारी संस्थाओं या निजी अनुसन्धानकर्ताओं को सूचना के लिए व्यक्तियो की याचना करनी पड़ती है।

उपर्युक्त प्रकार के अनुसन्धान विभिन्न परिस्थितियों में विभिन्न समस्याओं के लिए प्रयोग किये जाते हैं। उदाहरणार्थ, भारतीय जनगणना सरकारी, वैयक्तिक, नियमित, पुनरावर्ती, सार्वजनिक, प्रत्यक्ष तथा संगणना प्रकृति का अनुसन्धान है जबकि आकाशवाणी द्वारा आयोजित श्रोता-सम्मति सर्वेक्षण, प्रतिचयन पर आधारित, अप्रत्यक्ष, गुप्त, सामयिक तथा डाक द्वारा किया जाने वाला अनुसन्धान है।

(4) सांख्यिकीय इकाइयों का निर्धारण (Determination of Statistical Units)—संख्यात्मक माप का एक सुनिश्चित आधार होना आवश्यक है। सांख्यिकीय इकाई वह माप का आधार है जिसके अनुसार समंक एकत्रित किए जाते हैं, उनका विश्लेषण तथा निर्वचन होता है। प्रत्येक अनुसन्धान में उपयुक्त सांख्यिकीय इकाइयों का स्पष्ट निर्धारण बहुत आवश्यक है। इकाइयाँ ... होने पर संकलित समकों में एकरूपता और तुलनीयता नहीं रहती, संकलन में अनेक

कठिनाइयाँ उत्पन्न हो जाती हैं तथा बहुत से अनावश्यक आँकड़े एकत्र हो जाते हैं।

सांख्यिकीय इकाई का निर्धारण एक कठिन कार्य है जिसे पूरी सावधानी से करना चाहिए। आदर्श सांख्यिकीय इकाई में निम्न विशेषताएँ होनी चाहिएँ—

(i) **स्पष्ट परिभाषा**—इकाई की परिभाषा स्पष्ट, सुनिश्चित, सरल और संक्षिप्त होनी चाहिए जिससे विभिन्न व्यक्ति उसका भिन्न-भिन्न अर्थ न लगा सकें। उदाहरणार्थ, 'मूल्य', 'मजदूरी', 'बेकारी', 'निरक्षरता', 'आय' इत्यादि शब्दों की स्पष्ट और भ्रमरहित परिभाषा आरम्भ में ही निश्चित कर दी जानी चाहिए।

(ii) **स्थिर व प्रमापित होना**—इकाई ऐसी होनी चाहिए जिसके मूल्य में शीघ्रता से परिवर्तन न होते हों, जो सर्वमान्य एवं प्रमापित हो तथा अनुसन्धान में आरम्भ से अन्त तक जिसका एक ही अर्थ में प्रयोग किया जाये। भारत में मैट्रिक प्रणाली के समारम्भ से पूर्व देश के विभिन्न भागों में नाप-तौल के विभिन्न आधारों का प्रयोग किया जाता था। इस विविधता के कारण अनुसन्धानों में अनेक त्रुटियाँ और भ्रम उत्पन्न हो जाते थे। परन्तु अब नाप-तौल का प्रमापीकरण हो गया है।

(iii) **उपयुक्तता**—अनुसन्धान के उद्देश्य के अनुकूल ही इकाई का निर्धारण किया जाना चाहिए। यदि जाँच बड़े पैमाने पर की जा रही है तो इकाई बड़ी होनी चाहिए जैसे मैट्रिक टन, किलोमीटर आदि। यदि अनुसन्धान छोटे पैमाने पर हो रहा है तो इकाई छोटी होनी चाहिए जैसे किलोग्राम, ग्राम, मीटर, सेन्टीमीटर आदि। जाँच के उद्देश्य के अनुसार मूल्य का अर्थ 'थोक मूल्य', 'फुटकर मूल्य', 'नियन्त्रित मूल्य', 'लागत मूल्य', आदि हो सकता है। सूती वस्त्र उद्योग में सर्वेक्षण करते समय 'मजदूर' का तात्पर्य उद्योग के सभी विभाग के मजदूरों से होगा जबकि बुनाई विभाग के सम्बन्ध में अनुसन्धान करते समय 'मजदूर' शब्द का अर्थ बुनाई विभाग में लगे मजदूर तक ही सीमित होगा।

(iv) **सजातीयता व एकरूपता**—यदि समंक सजातीय या एकरूप नहीं हैं तथा उनमें विभिन्न विशेषताओं का समावेश है तो पहले उन्हें किसी पूर्व-निश्चित आधार पर अलग-अलग सजातीय वर्गों-उपवर्गों में बाँट लेना चाहिए। फिर उन वर्गों, उपवर्गों को विभिन्न स्पष्ट इकाइयों द्वारा प्रकट करना चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि किसी ऐसे कारखाने के मजदूरों की औसत मजदूरी के तथ्य प्राप्त करने हैं जिसमें प्रौढ़ तथा अल्पवयस्क, स्त्री तथा पुरुष आदि सभी प्रकार के मजदूर काम करते हैं, तो पहले मजदूरों को कुछ सजातीय वर्गों में बाँटा जायेगा जैसे 'प्रौढ़ पुरुष मजदूर', 'प्रौढ़ स्त्री मजदूर', तथा 'अल्पवयस्क मजदूर'। इसके बाद ही प्रत्येक वर्ग की मजदूरी की अलग-अलग जाँच की जायेगी। अतः यह स्पष्ट है कि अनुसन्धान की इकाइयों में सजातीयता होनी चाहिए ताकि तुलना करने में कोई कठिनाई न हो।

इकाइयों के प्रकार—सांख्यिकीय इकाइयाँ निम्न प्रकार की होती हैं—

सांख्यिकीय इकाई

- (क) संकलन व आगणन की इकाई
  - (i) सरल इकाई,
  - (ii) संयुक्त या मिश्रित इकाई।
- (ख) विश्लेषण व निर्वचन इकाई
  - (i) दर,
  - (ii) अनुपात,
  - (iii) गुणांक।

(क) संकलन व आगणन इकाइयाँ (Units of Collection and Enumeration)—संकलन व आगणन की इकाइयाँ वे इकाइयाँ हैं जिनके आधार पर माप किये जाते हैं और समंकों को एकत्रित किया जाता है, जैसे वस्त्र उत्पादन के माप के लिए मीटर, चीनी उत्पादन के लिए मीट्रिक टन आदि।

संकलन व आगणन इकाइयाँ भी निम्न दो प्रकार की होती हैं—

(i) सरल (Simple)—ये इकाइयाँ सरल होती हैं और अधिकतर एक ही शब्द द्वारा व्यक्त की जाती हैं जैसे टन, यात्री, दुर्घटना, बेरोजगारी, घण्टे आदि। इनमें अशुद्धि की सम्भावना कम रहती है और क्षेत्र कुछ व्यापक होता है।

(ii) संयुक्त या मिश्रित (Composite)—संयुक्त इकाई दो या अधिक सरल इकाइयों के सम्मिश्रण से बनायी जाती है अर्थात् यह सरल इकाई से पहले विशेषण जोड़ देने से बनती है जिससे इसका क्षेत्र सीमित हो जाता है। उदाहरणार्थ रेल यात्री, औद्योगिक दुर्घटना, श्रम-घण्टे, किलोवाट-घण्टे इत्यादि संयुक्त या मिश्रित इकाइयाँ हैं।

(ख) विश्लेषण व निर्वचन की इकाइयाँ (Units of Analysis and Interpretation)—विश्लेषण व निर्वचन की इकाइयाँ वे इकाइयाँ हैं जिनकी सहायता से समंकों की तुलना सुगमतापूर्वक की जा सकती है। इनके आधार पर आँकड़ों का विश्लेषण व निर्वचन किया जाता है। उदाहरणार्थ, यदि यह कहा जाये कि कॉलिज 'क' में एम० कॉम० में 50 में से 45 विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए और कॉलिज 'ख' में उसी परीक्षा में 60 में से 45 छात्र पास हुए तो इन तथ्यों की उचित तुलना नहीं हो पाती। इसके विपरीत यदि इन्हीं समंकों को 90% तथा 75% दर के रूप में प्रकट किया जाये तो तुलना सरल हो जाती है।

विश्लेषण व निर्वचन की निम्न इकाइयाँ होती हैं—

(i) दर (Rate)—इस इकाई द्वारा किसी संख्या को प्रतिशत या प्रति सहस्र या प्रति लाख आदि के आधार पर व्यक्त किया जाता है, जैसे प्रतिशत ब्याज दर, प्रतिशत लाभ की दर, प्रति हजार मृत्यु दर आदि। दरों में अंश और हर की संख्याएँ भिन्न प्रकार की होती हैं जैसे मृत्यु संख्या व जनसंख्या।

(ii) अनुपात (Ratio)—दो सजातीय व समान संख्याओं में पारस्परिक सम्बन्ध को अनुपात द्वारा व्यक्त किया जाता है। अनुपात, दो सजातीय समंकों को आपस में भाग देने से प्राप्त हो जाता है। जैसे, 1 अप्रैल, 1971 को भारत की कुल जनसंख्या 54·7 करोड़ में से 28·3 करोड़ पुरुष थे और 26·4 करोड़ स्त्रियाँ, तो पुरुष-स्त्री अनुपात (Sex Ratio) 1000 : 932 हुआ।

(iii) गुणांक (Coefficient)—सजातीय अंश और हर की पारस्परिक तुलना के लिए प्रयोग की जाने वाली निर्वचन इकाई गुणांक कहलाती है। वस्तुतः यह प्रति इकाई दर होती है। यह एक ऐसी तुलनात्मक संख्या होती है जिसे कुल संख्या या योग से गुणा करने पर आधारभूत संख्या ज्ञात हो जाती है। इसे निम्न सूत्र (Formula) द्वारा ज्ञात किया जाता है—

$$C=\frac{Q}{N}$$

इस सूत्र में C, Coefficient या गुणांक है Q, Quantity या वह मात्रा है जिसका गुणांक ज्ञात करना है और N, Number या कुल आधार-संख्या है। यदि किसी स्थान की जनसंख्या (N) 10,000 हो, और एक वर्ष में उत्पन्न बच्चों की संख्या (Q) 410 हो, तो जन्म-गुणांक ·041 होगा।

$$C=\frac{410}{10000}=\cdot041$$

यह प्रति इकाई जन्म-दर है। यदि जनसंख्या से इस गुणांक को गुणा की जाये तो उन बच्चों की संख्या ज्ञात हो जायेगी जिनका इस अवधि में जन्म हुआ है—

$$Q=C\times N=\cdot041\times10{,}000 \text{ or } 410$$

गुणांक द्वारा समय, स्थान या परिस्थिति के आधार पर तुलना की जा सकती है। सांख्यिकीय विश्लेषण में गुणांकों का बहुत प्रयोग होता है।

(5) शुद्धता की मात्रा—अनुसन्धान योजना बनाते समय यह भी निर्णय कर लेना आवश्यक है कि प्रस्तावित जाँच में शुद्धता की कितनी मात्रा रहेगी। सांख्यिकीय अनुसन्धानों में पूर्ण शुद्धता न तो आवश्यक है और न सम्भव ही। इसलिए यथोचित शुद्धता के लक्ष्य को ही प्राप्त करने का ... करना चाहिए। उचित शुद्धता की मात्रा समस्या की प्रकृति, अनुसन्धान का उद्देश्य व क्षेत्र

तथा उपलब्ध साधनों पर निर्भर होती है। उसका निर्धारण अनुभव व परिस्थितियों के आधार पर ही किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, कच्चे लोहे के उत्पादन के आँकड़े प्राप्त करने में मेट्रिक टनों तक यथार्थता होनी चाहिए, किलोग्राम इत्यादि की उपेक्षा की जा सकती है परन्तु सोने का भार करते समय ग्राम तक को नहीं छोड़ा जा सकता। अतः अनुसन्धानकर्ता को अनेक बातों का ध्यान रखते हुए यथोचित शुद्धता का स्तर निश्चित कर लेना चाहिए तथा अनुसन्धान के आरम्भ से अन्त तक उस स्तर का पालन करना चाहिए।

इस प्रकार, समंकों को एकत्र करने से पूर्व अनुसन्धानकर्त्ता को उपर्युक्त सभी प्रारम्भिक बातों को ध्यान में रखकर सांख्यिकीय अनुसन्धान की एक निश्चित योजना बना लेनी चाहिए तथा उस योजना के अनुसार ही उसे सकलन-कार्य करना चाहिए जिससे यथार्थ और पर्याप्त समंक उपलब्ध हो जायें और उनके आधार पर विश्वसनीय निष्कर्ष निकाले जा सकें।

प्रश्न

1. 'सांख्यिकीय अनुसन्धान' से आप क्या समझते हैं ? एक सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन करते समय आप जिन प्रारम्भिक बातों पर विचार करेंगे उनका वर्णन कीजिए।
What is a 'Statistical Investigation'? Describe the preliminary steps you would take into consideration while planning a statistical investigation.
[B. Com., Vikram, 1972 ; Indore, 1971 ; Banaras, 1961, 1957 ; M. Com., Agra, 1962]

2. सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन करने के अन्तर्गत जिन बातों पर विचार करना चाहिए उनका विवेचन कीजिये।
Discuss the various points that should be considered in planning a statistical investigation. *[B. Com., Meerut, 1968]*

3. किसी कॉलिज या विश्वविद्यालय में विद्यार्थियों के व्यय सम्बन्धी सर्वेक्षण के सचालन की आप जो व्यवस्था करेंगे उसका क्रमबद्ध वर्णन कीजिए।
Describe, step by step, the procedure that you would adopt in conducting a survey of student expenditures in a college or univeraity. *[B. Com., Banaras, 1961]*

4. 'सांख्यिकीय इकाई' से आप क्या समझते हैं ? उनके प्रकार बतलाइए तथा उपयुक्त उदाहरण दीजिए।
What do you understand by a 'Statistical Unit'? State their kinds and give suitable examples. *[B. Com., Allahabad, 1970, 1967, 1963]*

5. सांख्यिकीय इकाई या एकक से क्या तात्पर्य है ? क्या आँकड़ों में सजातीयता होनी आवश्यक है ?
What do you understand by 'Statistical Unit'? Is homogeneity in statistical data necessary? *[B. Com., Gorakhpur, 1971]*

6. 'सांख्यिकीय अनुसन्धान में नियोजन आवश्यक है।' इस कथन की व्याख्या कीजिए और उपयुक्त उदाहरण देते हुए विभिन्न प्रकार के सांख्यिकीय अनुसन्धानों का वर्णन कीजिए।
'Planning is essential in statistical investigation.' Explain this statement, and describe the various kinds of statistical investigations, giving suitable illustrations.

7. किसी औद्योगिक नगर में पारिवारिक आय-व्यय सम्बन्धी जाँच का सचालन करते समय जिन मुख्य बातों को ध्यान में रखना आवश्यक है उनका विवेचन कीजिए।
Discuss the main steps necessary to conduct a family budget inquiry in an industrial town. *[M. A., Vikram, 1962 ; M. A., Agra, 1957]*

8. सांख्यिकीय इकाइयाँ क्या हैं ? उनका महत्त्व समझाइए।
What are statistical units? Explain and illustrate their significance.
[B. Com., Allahabad, 1973]

4

समंकों का संग्रहण
(COLLECTION OF DATA)

सांख्यिकीय अनुसन्धान की व्यापक योजना बनाने के बाद उपयुक्त रीति द्वारा समंकों को एकत्रित करने का कार्य आरम्भ किया जाता है। समकों का संग्रहण सांख्यिकी-विज्ञान की मूलभूत क्रिया है। वास्तव में, संकलन-क्रिया की शुद्धता और व्यापकता पर ही समंकों के विश्लेषण एवं निर्वचन की आगामी क्रियाओं की सफलता आधारित है। यदि संग्रहीत समंक अशुद्ध और अपर्याप्त होते हैं, तो उनसे निकाले जाने वाले निष्कर्ष भी भ्रमात्मक होंगे। अतः समंकों के संग्रह की क्रिया में सतर्कता और सावधानी बहुत आवश्यक है।

प्राथमिक तथा द्वितीयक समंक
(Primary and Secondary Data)

समंक दो प्रकार के होते हैं—(क) प्राथमिक, तथा (ख) द्वितीयक।

(क) प्राथमिक समंक (Primary data)—उन समंकों को प्राथमिक समंक कहते हैं जो अनुसन्धानकर्त्ता द्वारा पहली बार आरम्भ से अन्त तक बिल्कुल नये सिरे से एकत्रित किये जाते हैं। उदाहरण के लिए, उत्तर प्रदेश में खेतिहर मजदूरों की रहन-सहन की स्थिति के बारे में यदि कोई अनुसन्धानकर्त्ता नये सिरे से मौलिक रूप में समंक एकत्र करता है तो वे उसके लिए प्राथमिक समंक कहलायेंगे।

(ख) द्वितीयक समंक (*Secondary data*)—द्वितीयक समंक वे हैं जो पहले ही अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा एकत्रित व प्रकाशित किये जा चुके हैं और अनुसन्धानकर्त्ता केवल उनका प्रयोग करता है। उदाहरणार्थ, यदि अनुसन्धानकर्त्ता, सरकार द्वारा कृषि श्रम अनुसन्धान के अन्तर्गत संकलित और प्रकाशित समकों को प्राप्त कर लेता है तो वे समंक उसके लिए द्वितीयक समंक होंगे।

अन्तर—प्राथमिक समक मौलिक (original) होते हैं तथा वे सांख्यिकीय विधियों के लिए कच्चे माल की भाँति हैं। इसके विपरीत, द्वितीयक समंक सांख्यिकीय यन्त्र में से एक बार गुजर जाते हैं और निर्मित माल की भाँति होते हैं। दूसरे, प्राथमिक समक अनुसन्धानकर्त्ता द्वारा प्राथमिक रीति के अनुसार विभिन्न व्यक्तियों से एकत्रित किये जाते हैं जबकि द्वितीयक समंक अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा पूर्व संकलित होते हैं। तीसरे, प्राथमिक समंकों के सकलन में अधिक समय, परिश्रम व धन की आवश्यकता होती है परन्तु द्वितीयक समक अधिकतर पत्र-पत्रिकाओं, विवरणों, सरकारी व गैर-सरकारी प्रकाशनों में सरलता से उपलब्ध हो जाते हैं। चौथे, प्राथमिक समक अनुसन्धान के उद्देश्य के सर्वथा अनुकूल होते हैं और उनमें अधिक संशोधन करने की आवश्यकता नहीं होती जबकि द्वितीयक समकों का प्रयोग करने से पहले उनकी आलोचनात्मक जांच करनी पड़ती है और अनेक संशोधन करने पड़ते हैं।

वास्तव में, प्राथमिक और द्वितीयक समकों का अन्तर केवल मात्रा का है, प्रकृति का नहीं। एक प्रकार के समक जो एक व्यक्ति के हाथों में प्राथमिक हैं दूसरे व्यक्ति के लिए

द्वितीयक हो जाते हैं। जनगणना अधिकारियों के लिए जनसंख्या के आँकड़े प्राथमिक हैं, परन्तु वही आँकड़े सामान्य व्यक्तियों के लिये द्वितीयक हैं।

प्राथमिक समंकों का संग्रहण
(Collection of Primary Data)

प्राथमिक समंको का संग्रहण निम्नलिखित रीतियों द्वारा किया जा सकता है। ये रीतियाँ प्राथमिक रीतियाँ (primary methods) कहलाती हैं—

(1) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान (Direct Personal Investigation)।

(2) अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान (Indirect Oral Investigation)।

(3) सम्वाददाताओं से सूचना-प्राप्ति (Information through Correspondents)।

(4) सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति (Information through Schedules to be filled in by Informants)।

(5) प्रगणकों द्वारा सूचना-प्राप्ति (Information through Schedules in charge of Enumerators)।

(1) **प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान (Direct Personal Investigation)**—इस रीति के अनुसार अनुसन्धानकर्त्ता स्वयं अनुसन्धान क्षेत्र में जाकर सूचना देने वालो से प्रत्यक्ष रूप से व्यक्तिगत सम्पर्क स्थापित करता है और निरीक्षण तथा अनुभव द्वारा आँकड़े सकलित करता है। यह रीति ऐसे अनुसन्धानों के लिए उपयुक्त है जिनका क्षेत्र सीमित या स्थानीय प्रकृति का हो, तथा जहाँ समंको की मौलिकता, शुद्धता व गोपनीयता का अधिक महत्त्व हो। सीमित क्षेत्र में पारिवारिक आय-व्ययक, मजदूरों की रहन-सहन की स्थिति, शिक्षित बेरोजगारी आदि से सम्बन्धित अनुसन्धान अधिकतर इसी रीति द्वारा किए जाते हैं। यूरोपीय देशों में ली प्ले (Le Play) ने मजदूरों के आय-व्यय सम्बन्धी आँकड़े एकत्र करने मे तथा आर्थर यंग (Arthur Young) ने कृषि उत्पादन के अध्ययन मे इस रीति का ही प्रयोग किया था। यदि अनुसन्धानकर्त्ता धैर्य, विनम्रता, निष्पक्षता व दूरदर्शिता से काम ले तो इस रीति द्वारा विश्वसनीय समंक प्राप्त हो जाते हैं। उसे सूचना देने वालो की भाषा, रहन-सहन का स्तर व रीति-रिवाज का भी यथेष्ट ज्ञान होना चाहिए जिससे वह उनका पर्याप्त सहयोग प्राप्त कर सके।

गुण—प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान के निम्नलिखित गुण हैं—

(i) **शुद्धता**—इस प्रणाली में अनुसन्धानकर्त्ता स्वय कार्य-क्षेत्र में उपस्थित रहता है, अतः मौलिक और शुद्ध आँकड़े उपलब्ध हो जाते हैं।

(ii) **विस्तृत एवं विश्वसनीय सूचना की प्राप्ति**—इस रीति के द्वारा मुख्य सूचना के अतिरिक्त अन्य बहुत-सी सम्बन्धित सूचनाएँ विश्वस्त रूप से प्राप्त हो जाती हैं। उदाहरणार्थ, श्रमिको की आय-व्यय सम्बन्धी जाँच करते समय, उनकी कार्य-सम्बन्धी स्थिति, रहन-सहन की स्थिति, उनको प्राप्त सुविधाएँ, आदि के बारे में भी महत्त्वपूर्ण तथ्य प्राप्त किए जा सकते हैं।

(iii) **सजातीयता**—इस रीति द्वारा उपलब्ध समको मे सजातीयता पर्याप्त मात्रा में पाई जाती है क्योकि आँकड़े एक ही व्यक्ति द्वारा एकत्र किये जाते है। एकरूपता के कारण उनकी आसानी से तुलना की जा सकती है।

(iv) **लचनशीलता**—यह प्रणाली लोचदार है। अनुसन्धानकर्त्ता आवश्यकता पड़ने पर प्रश्नों में थोड़ा बहुत संशोधन करके अभीष्ट सूचना उपलब्ध कर सकता है।

दोष—इस प्रणाली मे निम्न दोष हैं—

(i) **सीमित क्षेत्र**—यह रीति विस्तृत क्षेत्र के लिए सर्वथा अनुपयुक्त है।

(ii) **पक्षपात**—इस रीति में अनुसन्धानकर्त्ता के व्यक्तिगत पक्षपात के कारण परिणामों के दूषित और एकांगी हो जाने की आशका रहती है।

(iii) **अपव्यय**—इसमे समय, धन व श्रम का अपव्यय होता है।

(iv) भ्रामक निष्कर्ष—सीमित क्षेत्र होने से यह सम्भव है कि संकलित समंक पूरे समग्र का सही प्रतिनिधित्व न करें और इस कारण भ्रामक निष्कर्ष प्राप्त हों।

(2) अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान (Indirect Oral Investigation)—इस प्रणाली के अनुसार समस्या से प्रत्यक्ष सम्बन्ध रखने वाले व्यक्तियों से सूचना प्राप्त नहीं की जाती वरन् तृतीय पक्ष वाले ऐसे व्यक्तियों या साक्षियों (witnesses) से मौखिक पूछ-ताछ द्वारा समंक प्राप्त किए जाते हैं जो स्थिति से अप्रत्यक्ष रूप से ही सम्बन्धित हों। जिन व्यक्तियों के बारे में सूचना प्राप्त करनी है उनसे प्रत्यक्ष सम्पर्क स्थापित नहीं किया जाता। उदाहरणार्थ, इस रीति में मजदूरों के रहन-सहन से सम्बन्धित सूचना स्वयं मजदूरों से प्राप्त न करके श्रम-संघों या मि... मौखिक पूछ-ताछ के आधार पर प्राप्त की जाती है। यह रीति तब प्रयोग की जाती है जब अनुसन्धान-क्षेत्र अधिक व्यापक हो, प्रत्यक्ष सूचना देने वालों से व्यक्तिगत सम्पर्क सम्भव न हो या वे अज्ञानता व रुचि-हीनता के कारण सूचना देने में असमर्थ हों या समंक ही कुछ जटिल प्रकृति के हों। सामान्यतः सरकार द्वारा नियुक्त समितियाँ व आयोग इस रीति का प्रयोग करते हैं।

गुण—इस प्रणाली के निम्नलिखित गुण हैं—

(i) मितव्ययिता—इस पद्धति में समय, धन व परिश्रम कम लगते हैं। कार्य शीघ्रता से हो जाता है और अधिक परेशानी नहीं उठानी पड़ती।

(ii) विशेषज्ञों की सम्मति—इस रीति में अनुसन्धान के विषय पर विशेषज्ञों की राय तथा उनके सुझाव प्राप्त हो जाते हैं। पक्ष और विपक्ष के व्यक्तियों से पूछताछ करने से समस्या के विभिन्न पहलुओं का विवेचन हो जाता है

(iii) निष्पक्षता—इस रीति के अनुसार संकलित आँकड़े अनुसन्धानकर्त्ता के व्यक्तिगत पक्षपात से प्रभावित नहीं होते।

(iv) विस्तृत क्षेत्र—यह रीति विस्तृत क्षेत्र में तथा ऐसे अनुसन्धानों में उपयुक्त है जहाँ सूचकों से प्रत्यक्ष सम्पर्क सम्भव या लाभप्रद न हो।

दोष—इसमें निम्नलिखित दोष हैं—

(i) अप्रत्यक्ष सूचना—इस रीति द्वारा अनुसन्धानकर्त्ता को अप्रत्यक्ष सूचना उपलब्ध होती है क्योंकि वह समस्या से प्रत्यक्ष सम्बन्ध रखने वाले व्यक्तियों के सम्पर्क में नहीं आता। अतः परिणाम अशुद्ध होने की सम्भावना रहती है।

(ii) साक्षियों के दोष—जिन साक्षियों से समंक प्राप्त किए जाते हैं उनकी लापरवाही, अज्ञानता व पक्षपात के कारण समंक दूषित हो जाते हैं।

इस रीति का सफल प्रयोग करने के लिए निम्न सावधानियाँ लेनी आवश्यक हैं—

(i) सूचना देने वाले साक्षियों की संख्या पर्याप्त होनी चाहिए।

(ii) ऐसे व्यक्तियों से सूचना प्राप्त करनी चाहिए जो सम्बन्धित तथ्यों की यथेष्ट जानकारी रखते हैं और सूचना देने में उदासीन व लापरवाह नहीं हैं।

(iii) जहाँ तक सम्भव हो चुने हुए साक्षियों में पक्षपात का तत्त्व नहीं होना चाहिए। पक्ष और विपक्ष दोनों के व्यक्तियों से सूचना उपलब्ध करनी चाहिए।

(iv) यह भी देख लेना चाहिए कि सूचना देते समय सूचक की मानसिक स्थिति ठीक है या नहीं।

(v) अनुसन्धानकर्ता को साक्षियों से पूछताछ करने में धैर्य, विनम्रता, चतुराई व निष्पक्षता से काम लेना चाहिए।

प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान व अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान में काफी अन्तर है। प्रथम, पहली रीति में समस्या से प्रत्यक्ष सम्बन्ध रखने वालों से व्यक्तिगत सम्पर्क स्थापित किया जाता है जबकि दूसरी रीति के अन्तर्गत समस्या से अप्रत्यक्ष सम्बन्ध रखने वाले साक्षियों से सूचना उपलब्ध की जाती है। दूसरे, प्रथम प्रणाली में अनुसन्धानकर्त्ता स्वयं क्षेत्र में जाकर निरीक्षण व अनुभव के आधार पर आँकड़े प्राप्त करता है। दूसरी रीति में मौखिक पूछताछ से सूचना एकत्र की जाती है। तीसरे, पहली रीति सीमित क्षेत्र में उपयुक्त है, दूसरी रीति विस्तृत क्षेत्र में प्रयोग की जाती

है। चौथे, प्रथम रीति का प्रयोग अधिकतर निजी अनुसन्धानकर्त्ता करते हैं जबकि दूसरी रीति साधारणतः जाँच समितियों या आयोगों द्वारा अपनाई जाती हैं। पाँचवें, पहली रीति में समय, धन व श्रम का अपव्यय होता है; इसके विपरीत, दूसरी रीति मे इन सबकी बचत होती है।

(3) स्थानीय स्रोतों व सम्वाददाताओं से सूचना-प्राप्ति (Information through Local Sources or Correspondents)—इस रीति के अन्तर्गत अनुसन्धानकर्त्ता द्वारा विभिन्न स्थानों पर स्थानीय व्यक्ति या विशेष सम्वाददाता नियुक्त कर दिए जाते हैं जो समय-समय पर अधिकतर अपने अनुभव के आधार पर अनुमानतः सूचना भेजते रहते हैं। सम्वाददाताओं के व्यक्तिगत अनुमानों में प्रायः अनेक अशुद्धियाँ रहती हैं परन्तु सामूहिक रूप से सभी सम्वाददाताओं द्वारा भेजे गए आँकड़ों में दोनों दिशाओं की क्षतिपूरक त्रुटियों के कारण कुल अशुद्धि की मात्रा काफी कम हो जाती है। इस रीति का प्रयोग अधिकतर समाचार-पत्र, पत्रिकाओं द्वारा किया जाता है। सरकार भी विभिन्न मण्डियों से वस्तुओं के बाजार भाव ज्ञात करने तथा फसल आदि का अनुमान प्राप्त करने के लिए इस रीति को अपनाती है। यह रीति ऐसे अनुसन्धानों के लिए उपयुक्त है जहाँ अधिक शुद्धता की आवश्यकता नही होती, केवल अनुमान और प्रवृत्तियाँ ही ज्ञात करनी होती है।

गुण—इस रीति द्वारा आँकड़े एकत्र करने से निम्न लाभ हैं—

(i) मितव्ययिता—इस रीति में समय, धन और परिश्रम की बचत होती है। सूचना शीघ्रता से और कम खर्च पर ही प्राप्त हो जाती है।

(ii) विस्तृत क्षेत्र—दूर-दूर के स्थानों से लगातार सूचना प्राप्त की जा सकती है।

दोष—इस रीति में निम्नलिखित दोष पाए जाते हैं—

(i) शुद्धता व मौलिकता में कमी—इस रीति द्वारा एकत्र आँकड़ों में शुद्धता और मौलिकता कम होती है क्योंकि इसमे अनुमानों को अधिक महत्त्व दिया जाता है।

(ii) एकरूपता का अभाव—आँकड़े भिन्न-भिन्न सम्वाददाताओ द्वारा एकत्रित किये जाते है जो अलग-अलग विधियों का प्रयोग करते हैं तथा विभिन्न शब्दो के भी अलग-अलग अर्थ लगाते हैं। अतः समंकों में एकरूपता नहीं आ पाती।

(iii) पक्षपात—अधिकांश सम्वाददाताओं में एक ही प्रकार की पूर्व-धारणायें होने पर समंक पक्षपातपूर्ण और एकांगी हो जाते हैं।

(4) सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर सूचना-प्राप्ति (Information through Schedules to be filled in by Informants)—इस रीति के अनुसार अनुसन्धानकर्त्ता, सर्वप्रथम जाँच से सम्बन्धित प्रश्नों की एक अनुसूची (प्रश्नावली) तैयार करता है। फिर वह उसकी अनेक प्रतियाँ डाक द्वारा सूचना-देने वालों के पास भेज देता है जो उसको भरकर निश्चित तिथि तक लौटा देते हैं। सूचकों का सहयोग व विश्वास प्राप्त करने के लिए वह उन्हें सूचना को गुप्त रखने का आश्वासन देता है तथा अनुसूची से सलग्न अनुरोध-पत्र द्वारा वह जाँच का उद्देश्य स्पष्ट कर देता है।

अनुसूची तैयार करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि प्रश्न सरल, स्पष्ट और छोटे हों, सख्या मे कम हों, उत्तेजना, शंका या विरोध उत्पन्न करने वाले न हो, अनुसन्धान से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित हो और उत्तर अधिकतर 'हाँ' या 'ना' या किसी 'अंक' के रूप में प्राप्त किया जा सके। इस प्रकार की सावधानियाँ लेने पर यह रीति उपयोगी सिद्ध होती है।

समंक सग्रहण की यह प्रणाली ऐसे विस्तृत क्षेत्र के लिए उपयुक्त है जहाँ सूचना देने वाले शिक्षित हों। अधिकतर मत-सर्वेक्षण (Opinion Surveys), उपभोक्ताओ की रुचियो का अनुसन्धान आदि इस रीति द्वारा किये जाते हैं। भारत में सरकार द्वारा उद्योगों के वार्षिक सर्वेक्षण के लिए यह रीति अपनाई जाती है।

लाभ—इस रीति के निम्नलिखित लाभ हैं—

(i) मितव्ययिता—इस रीति में कम समय में कम खर्च से विशाल क्षेत्र की सूचनायें उपलब्ध हो जाती हैं।

(ii) मौलिकता—सूचनाएँ स्वयं सूचकों द्वारा दी जाती हैं, अतः इनमें मौलिकता होती है।

(iii) विस्तृत क्षेत्र—यह विस्तृत क्षेत्र के लिए उपयुक्त रीति है।

दोष—इस रीति में अनेक दोष भी हैं जो निम्नलिखित हैं—

(i) अपर्याप्त व अपूर्ण सूचना—अधिकतर सूचक अनुसूचियाँ वापस ही नहीं भेजते। जो अनुसूचियाँ वापस आ जाती हैं उनमें से अनेक अपूर्ण होती हैं। उदासीनता या शंका के कारण अनेक प्रश्नों के उत्तर ही नहीं दिये जाते। इस प्रकार बहुत से व्यक्तियों के प्रत्युत्तर न देने के कारण अनुसन्धान में अभिनति का अंश आ जाता है जिससे भ्रमात्मक निष्कर्ष निकलते हैं।

(ii) शुद्धता की कमी—कई कारणों से इस रीति द्वारा प्राप्त समंकों में शुद्धता की मात्रा कम होती है। यदि अनुसूची सावधानी से तैयार नहीं की जाती है, प्रश्नों के गलत अर्थ लगाये जाते हैं और सूचकों में पक्षपात की भावना होती है तो अशुद्ध सूचनाएँ ही उपलब्ध होती हैं।

(iii) लचनशीलता का अभाव—यह रीति लोचदार नहीं है। अपर्याप्त सूचना प्राप्त होने पर, प्रश्नावली में आवश्यक संशोधन करके अनुपूरक प्रश्न नहीं शामिल किये जा सकते।

(iv) सीमित रीति—यह रीति शिक्षित व्यक्तियों तक ही सीमित है। अशिक्षित व्यक्तियों से इस पद्धति द्वारा सूचना नहीं प्राप्त की जा सकती।

इतने दोष होते हुए भी, यह प्रणाली बड़े क्षेत्र में शिक्षित व्यक्तियों से अति शीघ्र सूचना प्राप्त करने में सर्वथा उपयोगी है। इस रीति को सफल बनाने के लिए अनुसूची सावधानीपूर्वक तैयार करनी चाहिए तथा सूचकों का सहयोग और विश्वास प्राप्त करने के उचित उपाय करने चाहिएँ।

(5) प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति (Information through Schedules in charge of enumerators)—सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर सूचना प्राप्त करने में अनेक कठिनाइयाँ आती हैं तथा सूचना भी अपूर्ण, अपर्याप्त व अशुद्ध होती है। इन कठिनाइयों को दूर करने के लिए यह रीति अपनाई जाती है। इस रीति के अनुसार अनेक बातों का ध्यान रखते हुए सम्बन्धित प्रश्नों की अनुसूची तैयार की जाती है। परन्तु इन अनुसूचियों को प्रत्यक्ष रूप से सूचकों के पास नहीं भेजा जाता वरन् कुछ प्रगणक (enumerators) नियुक्त कर दिये जाते हैं जो घर-घर जाकर सूचकों से पूछताछ करके स्वयं अनुसूचियाँ भरते हैं। प्रगणकों की नियुक्ति करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि वे निपुण, धैर्यवान्, निष्पक्ष, ईमानदार, अनुभवी और व्यवहार-कुशल हों, वे अपने कार्य में विशेष रुचि रखते हों तथा अपने क्षेत्र के सूचकों की भाषा, रीति-रिवाज व उनके स्वभाव से भली-भाँति परिचित हों। उनका उपयुक्त प्रशिक्षण आयोजित किया जाना चाहिए जिससे उन्हें अनुसूची भरने का अभ्यास हो जाए और वे सम्भावित कठिनाइयों से परिचित हो जाएँ। प्रगणकों के कार्य के निरीक्षण की भी समुचित व्यवस्था होनी चाहिए। इन सावधानियों को ध्यान में रखने से ही इस प्रणाली द्वारा शुद्ध व व्यापक समंक उपलब्ध हो सकते हैं। यह रीति अत्यधिक विस्तृत क्षेत्र के लिए उपयुक्त है। अधिक खर्चीली होने के कारण अधिकतर सरकार ही इस प्रकार के अनुसन्धान द्वारा आँकड़े उपलब्ध कराती है। भारतीय जनगणना में यही रीति अपनाई जाती है।

गुण—इस प्रणाली के निम्नलिखित गुण हैं—

(i) विशाल क्षेत्र—इस प्रणाली द्वारा अत्यन्त विशाल क्षेत्र में सूचना प्राप्त की जा सकती है।

(ii) शुद्धता—इस रीति में शुद्धता की काफी मात्रा रहती है क्योंकि योग्य, प्रशिक्षित तथा अनुभवी प्रगणकों द्वारा ही अनुसन्धान किया जाता है।

(iii) व्यक्तिगत सम्पर्क—प्रगणकों का सूचकों से व्यक्तिगत सम्पर्क रहता है जिससे जटिल प्रश्नों के भी शुद्ध और विश्वसनीय उत्तर प्राप्त हो सकते हैं।

(iv) निष्पक्षता—इसमें व्यक्तिगत पक्षपात का विशेष प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि प्रगणक अधिकतर पक्ष और विपक्ष दोनों ही प्रकार के होते हैं।

दोष—इस रीति में निम्नलिखित दोष पाए जाते हैं—

(i) अधिक व्यय—इस प्रणाली में खर्च बहुत अधिक होता है तथा समय भी काफी लग

जाता है । इसलिए केवल सरकार ही इसे अपनाती है ।

(ii) अन्य कठिनाइयाँ—इस प्रकार के अनुसन्धान का संगठन करने में अनेक कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है। उदाहरणार्थ, योग्य प्रगणकों की नियुक्ति, उनका प्रशिक्षण और उनके कार्य का निरीक्षण सरल नहीं है ।

सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर सूचना-प्राप्ति तथा प्रगणकों की सहायता से अनुसन्धान, दोनो ही अनुसूचियो या प्रश्नावलियों पर आधारित हैं और विस्तृत क्षेत्र के लिए उपयुक्त हैं। परन्तु दोनों रीतियों मे मुख्य अन्तर यह है कि सूचकों वाली रीति में अनुसूचियाँ डाक द्वारा सूचकों के पास भेज दी जाती हैं जबकि प्रगणकों वाली रीति मे
हैं और पूछताछ द्वारा सूचना उपलब्ध कर लेते हैं।
उपयुक्त और सस्ती है । इसके विपरीत अन्तिम रीति बहुत खर्चीली है तथा अशिक्षित सूचकों के लिए अधिक उपयुक्त है ।

उपयुक्त रीति का चुनाव
(Choice of a Suitable Method)

प्राथमिक समंकों के सकलन की रीतियों मे से किसी एक को सभी परिस्थितियों में सर्वश्रेष्ठ नही कहा जा सकता । परिस्थितियों की भली-भाँति जाँच करके ही आवश्यकतानुसार उपयुक्त रीति का चुनाव करना चाहिए। सामान्यतः सकलन की उपयुक्त रीति का चुनाव करने में निम्नलिखित बातो का ध्यान रखना चाहिए—

(i) अनुसन्धान की प्रकृति—यदि अनुसन्धान की प्रकृति ऐसी है कि सूचना देने वालो से प्रत्यक्ष सम्पर्क रखना आवश्यक है, जैसे निरक्षर व अशिक्षित मजदूरों की रहन-सहन की स्थिति का अध्ययन करने में, तो प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान उपयुक्त है । यदि प्रत्यक्ष सम्पर्क सम्भव या आवश्यक न हो तो अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान अपेक्षित होता है । यदि लिखित रूप में शिक्षित व्यक्तियो से सूचना प्राप्त करनी है तो उनसे अनुसूचियाँ भरवाकर डाक द्वारा प्राप्त कर ली जायेंगी । इसके विपरीत, यदि सूचक अधिकतर अशिक्षित हैं या जनगणना आदि करनी है तो प्रगणको की सहायता लेना आवश्यक है ।

(ii) उद्देश्य व क्षेत्र—अनुसन्धान के उद्देश्य व क्षेत्र के आधार पर अनुकूल रीति का चुनाव किया जाना चाहिए । एक सीमित क्षेत्र मे अनेक विषयों पर सूचना उपलब्ध करने के लिए प्रत्यक्ष अनुसन्धान का उपयोग वांछनीय है । बड़े क्षेत्र में पत्र-पत्रिकाओं द्वारा लगातार समंक प्राप्त करने के लिए संवाददाताओं से सूचनाएँ एकत्र की जाती हैं । एक अत्यन्त विशाल क्षेत्र में व्यापक अनुसन्धान के लिए प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर आँकड़े एकत्रित किये जाते हैं ।

(iii) शुद्धता की मात्रा पर भी ध्यान देना चाहिए । सीमित क्षेत्र मे अत्यधिक शुद्ध समंक प्राप्त करने के लिए प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान उपयुक्त होता है । अप्रत्यक्ष अनुसन्धान रीति में अधिक शुद्धता नही होती । संवाददाताओं द्वारा केवल अनुमान ही प्राप्त होते हैं । प्रगणकों द्वारा अनुसन्धान मे शुद्धता का स्तर ऊँचा होता है परन्तु सूचको द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर आँकड़े प्राप्त करने मे अधिकतर अपर्याप्त व अपूर्ण सूचना ही उपलब्ध होती है ।

(iv) आर्थिक साधन—प्रत्यक्ष अनुसन्धान तथा प्रगणको द्वारा अनुसन्धान मे सबसे अधिक व्यय होता है जबकि अन्य रीतियाँ अपेक्षाकृत सस्ती हैं । सूचको द्वारा अनुसूचियाँ भरवाने में सबसे कम खर्च होता है ।

(v) उपलब्ध समय—यदि सूचनाएँ शीघ्रातिशीघ्र प्राप्त करनी हैं तो संवाददाताओं से अनुमान प्राप्त किये जा सकते हैं या सूचको से प्रश्नावलियाँ भरवाकर समंक एकत्रित किये जा सकते हैं । इसके विपरीत यदि अनुसन्धानकर्त्ता के पास पर्याप्त समय है तो बाकी तीनों रीतियों में से कोई एक अपनाई जा सकती है ।

उपर्युक्त बातों को ध्यान मे रखकर संग्रह की उपयुक्त रीति का चुनाव करना चाहिए

जिससे उद्देश्यानुकूल शुद्ध प्राथमिक समंक एकत्रित किये जा सकें। संकलन-क्रिया की सफलता बहुत कुछ अनुसन्धानकर्त्ता की योग्यता व अनुभव पर निर्भर होती है। डा॰ बाउले ने ठीक ही कहा है, 'संग्रहण''''मे सामान्य विवेक प्रमुख आवश्यकता है तथा अनुभव मुख्य शिक्षक है।'[1]

अनुसूची तथा प्रश्नावली
(Schedule and Questionnaire)

प्राथमिक सांख्यिकीय अनुसन्धानों मे अधिकतर सूचकों द्वारा या प्रगणकों की सहायता से अनुसूचियाँ भरवाकर आवश्यक सामग्री उपलब्ध की जाती है।

कुछ व्यक्तियों के अनुसार अनुसूची तथा प्रश्नावली मे अन्तर है। 'अनुसूची' (schedule) प्रश्नों की वह सूची है जो प्रशिक्षित प्रगणकों द्वारा सूचकों से पूछताछ करके भरी जाती है। इसके विपरीत 'प्रश्नावली' (questionnaire), स्वयं सूचकों द्वारा भरी जाती है। परन्तु व्यवहार में अधिकतर इन दोनों शब्दों का एक ही अर्थ लगाया जाता है। वास्तव मे, अनुसूचियाँ दो प्रकार की होती हैं जो निम्नांकित है—

(क) रिक्त फार्म (Blank Form)—यह प्रश्नों की ऐसी सूची है जिसमें प्रत्येक प्रश्न के आगे या नीचे की ओर उत्तर के लिए रिक्त स्थान होता है। इस प्रकार के फार्म मे सूचक और सांख्यिक दोनों को सुविधा रहती है।

(ख) प्रश्नावली (Questionnaire)—यह भी प्रश्नों की एक सूची है। परन्तु इसमें प्रश्नों के उत्तर के लिए रिक्त स्थान नहीं होता। उत्तर सूचकों द्वारा अलग कागज पर लिखे जाते हैं। इसके विश्लेषण व सारणीयन मे कठिनाई होती है। यह उस स्थिति में अधिक उपयुक्त होती है जहाँ प्रश्नों के उत्तर बड़े हो या विभिन्न विषयों पर सुझाव माँगे गये हो।

उत्तम प्रश्नावली के गुण— सांख्यिकीय अनुसन्धान की सफलता प्रश्नावली की उत्तमता पर निर्भर होती है। अतः प्रश्नावली तैयार करने में निम्नलिखित बातों का विशेष रूप से ध्यान रखना चाहिए—

(i) **कम प्रश्न**—प्रश्नों की संख्या कम से कम होनी चाहिए। परन्तु प्रश्न इतने कम भी न हो कि पर्याप्त सूचना ही प्राप्त न हो सके।

(ii) **सरलता व स्पष्टता**—प्रश्नों में सरलता और स्पष्टता होनी चाहिए। वे लम्बे, जटिल और दो अर्थों वाले नहीं होने चाहिएँ। यदि सूचक प्रश्नों को समझ ही नहीं पायेंगे तो वे उनके सही उत्तर नहीं दे सकेंगे। अतः प्रश्नावली में यथासम्भव अप्रचलित व जटिल शब्द, असम्मानसूचक शब्द जैसे 'नौकर', अनिश्चित शब्द जैसे 'शायद', 'अक्सर', 'कभी-कभी' आदि का प्रयोग नहीं करना चाहिए।

(iii) **संक्षिप्तता**—प्रश्न ऐसे होने चाहिएँ जिनके उत्तर 'हाँ' या 'ना' या किसी संक्षिप्त शब्द या अंक के रूप में दिये जा सकें।

(iv) **प्रश्नों के स्वरूप**— रॉबर्ट वैसेल एवं एडवर्ड विलेट[2] ने चार प्रकार के प्रश्नों का उल्लेख किया है—

(क) विविध विकल्प वाले प्रश्न (multiple choice questions)—जिनके सामने उनके सभी सम्भाव्य उत्तर लिख दिए जाते हैं और उत्तर देने वाले से यह अपेक्षा की जाती है कि वह उपयुक्त उत्तर पर निशान लगा देगा, उदाहरणार्थ—

(1) आपकी वैवाहिक स्थिति क्या है ?—अविवाहित / विवाहित / विधुर / पृथक् / तलाक प्राप्त।

[1] 'In collection (and tabulation) commonsense is the chief requisite, and experience the chief teacher.' —Dr. Bowley, *Elements of Statistics*, p. 14.

[2] 'See Robert Wessell & Edward Willett, *Statistics as Applied to Economics and* ..., pp. 23-25.

(2) आप सिनेमा किस उद्देश्य से देखते हैं ?—मनोरंजन / ज्ञान-वृद्धि / कलात्मक रुचि / चिन्ता से मुक्त होने / समय बिताने के लिए।

(3) आप अपने कार्य करने के स्थान पर कैसे जाते हैं ?—पैदल / साइकिल से / स्कूटर द्वारा / अन्य निजी वाहन से / बस से / टैक्सी द्वारा / स्थानीय रेल द्वारा / अन्य किराये की सवारी से।

उत्तर सीमित विकल्पों के रूप में होने पर इस प्रकार के प्रश्न उत्तम माने जाते हैं।

(ख) 'हाँ' या 'ना' में उत्तर वाले प्रश्न ('Yes' or 'No' questions)—इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर में सरल विकल्प—'हाँ' या 'नहीं', 'गलत' या 'सही'—होते हैं। ये श्रेष्ठ माने जाते हैं। 'क्या आपके पास स्कूटर है ?' का उत्तर 'हाँ' या 'ना' में ही होगा।

(ग) विशिष्ट सूचना वाले प्रश्न (specific information questions)—जैसे 'आपके पास कौन-सा स्कूटर है ?' 'आपकी आयु क्या है ?' 'आपके कितने बच्चे हैं ?' आदि। इस प्रकार के प्रश्न सरल और प्रत्यक्ष होते हैं।

(घ) खुले प्रश्न (open questions)—जो सूचकों के विचार जानने के लिए पूछे जाते हैं। इनमें कोई विकल्प नहीं दिया जाता, न ही विशिष्ट सूचना की याचना की जाती। उदाहरणार्थ—'मूल्य-स्तर की वृद्धि को रोकने के लिए क्या उपाय अपनाये जायें ?' 'रुपये के और अधिक अवमूल्यन के बारे में आपकी क्या राय है ?'

(v) वर्जित प्रश्न—ऐसे प्रश्न अनुसूची में सम्मिलित नहीं करने चाहिएँ जो सूचना देने वालों के आत्मसम्मान तथा उनकी धार्मिक व सामाजिक भावनाओं को ठेस पहुँचाएँ या जिनसे सूचकों के मन में शंका, विरोध या उत्तेजना उत्पन्न हो। यदि बार-बार किसी विषय पर गहन सूचना माँगी जाती है तो उत्तर देने वाले चिढ़ जाते हैं और अपना सहयोग प्रदान नहीं करते। कोई भी व्यक्ति अपने चरित्र, आय, सामाजिक स्तर, बीमारी इत्यादि के बारे में खोद-खोद कर पूँछे जाने वाले प्रश्नों के उत्तर देना पसन्द नहीं करेगा। व्यक्तिगत मामलों पर प्रश्न पूछने यदि आवश्यक हो तो उनकी भाषा ऐसी रखनी चाहिए जिससे सूचकों में विरोध, उत्तेजना, सन्देह, अपमान आदि भावनाएँ उत्पन्न न हों। उत्तर को गुप्त रखने का आश्वासन देना चाहिए। उदाहरणार्थ, ये प्रश्न उचित नहीं हैं—'क्या आपका स्वास्थ्य अच्छा है ?', 'क्या आप क्षय रोग से पीड़ित हैं ?', 'क्या आप चरित्रवान् हैं ?' इत्यादि।

(vi) सत्यता की जाँच—साधारणतः ऐसे प्रश्नों का भी प्रश्नावली में समावेश होना चाहिए जिनके उत्तरों की यथार्थता की परस्पर जाँच की जा सके।

(vii) प्रत्यक्ष सम्बन्ध—प्रश्न अनुसन्धान से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित होने चाहिएँ ताकि आवश्यक सूचना एकत्र करने में समय व धन का अपव्यय न हो।

(viii) क्रम—प्रश्नों का एक निश्चित, तर्कपूर्ण और सुव्यवस्थित क्रम होना चाहिए तथा उनमें आपस में सम्बन्ध भी होना चाहिए।

(ix) निर्देश—प्रश्नावली को भरने के लिए उसमें स्पष्ट, संक्षिप्त और निश्चित निर्देश होने चाहिएँ जिनसे सूचकों का पथ-प्रदर्शन हो सके।

(x) पूर्व-परीक्षण व संशोधन—अनुसूची अथवा प्रश्नावली बनाने के बाद एक बार कुछ सूचकों में विभिन्न प्रश्नों का पहले ही परीक्षण कर लेना चाहिए और उसमें आवश्यकतानुसार सुधार कर लेने चाहिएँ।

प्रश्नावली का उदाहरण
(Example of a Questionnaire)

मध्यम-वर्गीय परिवारों के रहन-सहन के व्यय से सम्बन्धित अनुसन्धान में साधारणतः अग्रलिखित प्रकार की प्रश्नावली का प्रयोग किया जाना चाहिए—

जीवन-निर्वाह-व्यय की जाँच
(Inquiry into Cost of Living)

कोड संख्या (Code Number) ....

प्रथम खण्ड—सामान्य

1. परिवार के अध्यक्ष का नाम ... ...
2. पूरा पता ... ...
3. पेशा या व्यवसाय ... ...
   (क) स्वतन्त्र कर्मचारी ... ...
   (ख) कर्मचारी ... ...
   (ग) नियोक्ता ... ...
   (घ) अन्य ... ...
4. उद्योग ... ...
5. निवास स्थान ... ...
   (अ) अलग मकान ... ...
   (ब) बिना सजे कमरे ... ...
   (स) सजे कमरे ... ...

द्वितीय खण्ड—परिवार-रचना

विवरण	पुरुष	स्त्री	योग
परिवार का अध्यक्ष			
पत्नी			
आश्रित बच्चे			
आयु 0—5 वर्ष			
5—15 ,,			
15 से ऊपर			
अनाश्रित बच्चे			
अन्य व्यक्ति			

योग

तृतीय खण्ड—पारिवारिक आय

विवरण	1973	
	Rs.	Rs.
पारिवारिक आय—		
परिवाराध्यक्ष		
मुख्य व्यवसाय		
अतिरिक्त आय		
पत्नी द्वारा उपार्जित आय		
अन्य उपार्जित आय		
विनियोग से आय		
मकान-सम्पत्ति से आय		
अन्य आय		
आकस्मिक या अनावर्तक मदें		
योग		

चतुर्थ खण्ड—पारिवारिक व्यय

विवरण	1973	
	Rs.	Rs.
खाद्य सामग्री—		
अनाज		
दालें		
तेल		
अन्य		
वस्त्र		
ईंधन व प्रकाश		
मकान-किराया		
स्वास्थ्य एवं मनोरंजन		
अन्य मदें—स्पष्ट कीजिए		
असामान्य या अनावर्तक व्यय—स्पष्ट कीजिये		
योग		

पाँचवाँ खण्ड—बचत या घाटा

	Rs.	Rs.
बचत (किस प्रकार उपयोग किया गया)		
घाटा (किस प्रकार पूरा किया गया)		

अन्य विवरण—

द्वितीयक सामग्री का संग्रहण
(Collection of Secondary Data)

यह पहले स्पष्ट किया जा चुका है कि द्वितीयक समंक अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा एकत्रित व प्रकाशित किये जाते हैं। अनुसन्धानकर्त्ता तो अनेक बातों को ध्यान में रखकर उनका केवल प्रयोग ही करता है।

द्वितीय समंकों के स्रोत (Sources of Secondary data)—द्वितीयक समंक प्रकाशित अथवा अप्रकाशित स्रोतों से उपलब्ध किये जा सकते हैं—

(क) प्रकाशित स्रोत—विभिन्न विषयों पर सरकारी व गैर-सरकारी संस्थाएँ तथा अन्य अनुसन्धानकर्ता प्राथमिक अनुसन्धान द्वारा महत्त्वपूर्ण समंक एकत्रित करके समय-समय पर प्रकाशित करते रहते हैं जिनका विभिन्न व्यक्तियो द्वारा उपयोग किया जाता है। प्रकाशित समंकों के निम्न प्रमुख स्रोत हैं—

(1) **अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन**—विदेशी सरकारो तथा अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाओ के प्रकाशनों का द्वितीयक समंको के रूप में प्रयोग किया जाता है। The U. N. Statistical Year Book, Demographic Year Book, Annual Reports of the I. M. F., ECAFE, etc. अन्तर्राष्ट्रीय संगठनों के कुछ महत्त्वपूर्ण प्रकाशन हैं।

(2) **सरकारी प्रकाशन**—केन्द्रीय सरकार तथा राज्य सरकारों के अनेक विभागों और मन्त्रालयो की ओर से समय-समय पर विभिन्न क्षेत्रो से सम्बन्धित समंक प्रकाशित होते रहते हैं। ये अधिक विश्वसनीय और उपयोगी होते हैं। कुछ प्रमुख सरकारी प्रकाशन इस प्रकार हैं—

Statistical Abstract of India (Annual), Five Year Plan Progress Reports, Census of India, 1971, Reserve Bank of India Bulletin, Statistical Abstract of Uttar Pradesh, etc.

(3) **अर्द्ध-सरकारी प्रकाशन**—अर्द्ध-सरकारी संस्थाएँ जैसे नगरपालिकाएँ, नगर निगम, जिला परिषद्, पंचायतें आदि भी समय-समय पर जन्म-मरण सम्बन्धी, सार्वजनिक स्वास्थ्य व शिक्षा से सम्बन्धित रिपोर्ट प्रकाशित करती रहती हैं।

(4) **समितियों व आयोगों की रिपोर्ट**—सरकार विभिन्न विषयों पर जांच कराने तथा विशेषज्ञों की राय प्राप्त करने के लिए जाँच समितियाँ तथा आयोग नियुक्त करती है जिनके प्रतिवेदनों से अत्यन्त उपयोगी समंक प्राप्त होते हैं, जैसे आय वितरण जांच समिति (Income Distribution Committee), वित्त आयोग (Finance Commission), एकाधिकार आयोग (Monopolies Commission) आदि की रिपोर्ट।

(5) **व्यापारिक संस्थाओं व परिषदों के प्रकाशन**—बड़ी-बड़ी व्यापारिक संस्थाएँ व परिषदें जैसे General Motors Inc., Hindustan Lever Ltd., स्कन्ध विपणि, भारतीय वाणिज्य उद्योग संघ (F. I. C. C. I.), श्रम-संघ, इत्यादि अपने सांख्यिकी व शोध विभागो द्वारा एकत्रित समंक प्रकाशित करती रहती हैं।

(6) **अनुसन्धान संस्थाओं के प्रकाशन**—अनेक अनुसन्धान संस्थाएँ तथा विश्वविद्यालय समय-समय पर अपने शोध-कार्य के परिणामों को प्रकाशित कराते रहते हैं। भारत में विश्वविद्यालय के विभिन्न विभागों, भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (Indian Statistical Institute), व्यावहारिक आर्थिक शोध की राष्ट्रीय परिषद् (National Council of Applied Economic Research), आर्थिक विकास की शोध-संस्था, आदि द्वारा प्रकाशित समंकों से उपयोगी सूचनाएँ प्राप्त होती हैं।

(7) **पत्र-पत्रिकाएँ**—समाचार-पत्र तथा सामयिक पत्रिकाएँ जैसे Economics Times (Daily), Commerce (Weekly), Transport (Monthly) आदि भी द्वितीयक समंकों के महत्त्वपूर्ण साधन हैं। इनमे दैनिक बाजार भाव व अन्य महत्त्वपूर्ण आँकड़े प्रकाशित होते रहते हैं।

(8) **व्यक्तिगत अनुसन्धानकर्ता**—ये भी विभिन्न विषयो पर आवश्यक समंक एकत्रित करके

सार्वजनिक उपयोग के लिए प्रकाशित करवाते रहते है।

(ख) अप्रकाशित स्रोत—अप्रकाशित रूप से भी द्वितीयक समंक उपलब्ध हो जाते है। अनेक अनुसन्धानकर्ता, विभिन्न उद्देश्यों से सामग्री संकलित करते हैं जो प्रकाशित नही कराई जाती। अधिकतर अप्रकाशित सामग्री व्यक्तियों या व्यापारिक संघों के सदस्यों के निजी उपयोग के लिए ही होती है।

द्वितीयक समंकों की जाँच और प्रयोग (Scrutiny and Use of Secondary Data)—द्वितीयक समंकों का प्रयोग करने से पूर्व आलोचनात्मक जाँच द्वारा उनका विस्तृत सम्पादन कर लेना नितान्त आवश्यक है। द्वितीयक सामग्री में कई कमियां होती हैं अतः उसका उपयोग सावधानी से करना चाहिए। कोनर के अनुसार, 'समंक, विशेष रूप से अन्य व्यक्तियों द्वारा एकत्रित समंक, प्रयोगकर्ता के लिए अनेक त्रुटियों से पूर्ण होते हैं।'[1] ये त्रुटियाँ अनेक कारणों से हो सकती हैं जैसे सांख्यिकीय इकाई में परिवर्तन, सूचना की अपर्याप्तता व अपूर्णता, पक्षपात, उद्देश्य व क्षेत्र की भिन्नता आदि। अतः प्रयोग करने से पूर्व अनुसन्धानकर्ता को यह भली-भाँति देख लेना चाहिए कि प्रस्तुत द्वितीयक सामग्री में विश्वसनीयता (reliability), अनुकूलता (suitability) तथा पर्याप्तता (adequacy) आदि आवश्यक गुण पर्याप्त मात्रा में पाये जाते हैं या नही।

सावधानियाँ – द्वितीयक सामग्री की विश्वसनीयता, उपयुक्तता व पर्याप्तता की जाँच करने के लिए निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए—

(1) **पिछले अनुसन्धानकर्ता की योग्यता**—सर्वप्रथम, यह देखना चाहिए कि द्वितीयक सामग्री पहले किस अनुसन्धानकर्ता द्वारा प्राथमिक रूप से एकत्र की गई थी। उसकी योग्यता, ईमानदारी, अनुभव व निष्पक्षता यदि सन्तोषजनक है तो उन समंकों का प्रयोग किया जा सकता है।

(2) **संग्रहण रीति**—संग्रहण की जो रीति पहले अपनाई गई थी वह समंकों के वर्तमान प्रयोग के लिए कहाँ तक उपयुक्त और विश्वसनीय है ? यदि प्रतिदर्श अनुसन्धान किया गया हो तो यह निश्चित कर लेना चाहिए कि प्रतिदर्श यथेष्ट है और पूर्ण रूप से समग्र का प्रतिनिधित्व करता है अथवा नही। इन सब बातों के बारे में सन्तुष्ट हो जाने पर ही द्वितीयक समंको का प्रयोग करना चाहिए।

(3) **उद्देश्य व क्षेत्र**—यह भी देख लेना चाहिए कि प्राथमिक रूप से जब प्रस्तुत समंक एकत्रित किये गये थे तो अनुसन्धान के उद्देश्य व क्षेत्र वही थे जिनके लिए उनका अब द्वितीयक समंको के रूप में प्रयोग किया जाना है। यदि उद्देश्य व क्षेत्र में अन्तर है तो समंक अनुपयुक्त और अविश्वसनीय होगे।

(4) **जाँच का समय और उसकी परिस्थितियाँ**—यह भी निश्चय कर लेना चाहिए कि उपलब्ध सामग्री किस समय से सम्बन्धित है तथा किन परिस्थितियों में एकत्र की गई थी। युद्ध-कालीन जाँच के समंक शान्तिकाल में प्रयोग नही किये जा सकते। आँकड़ों के प्रारम्भिक संग्रहण और उनके उपयोग के समय की परिस्थितियों में अन्तर होने के कारण उनकी उपयोगिता कम हो सकती है। अतः लोगों के रहन-सहन व रीति-रिवाज में होने वाले परिवर्तन, मूल्यों में अन्तर आदि को ध्यान में रखकर ही प्रकाशित समंको का प्रयोग करना चाहिए।

(5) **इकाई की परिभाषा**—यह भी देख लेना चाहिए कि पूर्व-अनुसन्धान में प्रयुक्त सांख्यिकीय इकाइयों के अर्थ वर्तमान प्रयोग के अनुकूल हैं या नही।

(6) **शुद्धता की मात्रा**—इस बात पर भी विचार करना आवश्यक है कि प्रस्तुत समंको में शुद्धता का स्तर क्या रखा गया था और उसे प्राप्त करने में कहाँ तक सफलता प्राप्त हुई। समंको में जितनी अधिक शुद्धता होगी वे उतने ही विश्वसनीय होगें। यह भी देख लेना चाहिए कि आँकड़ों में अत्यधिक सन्निकटन (approximation) तो नही किया गया है। जितनी कम मात्रा में सन्निकटन होता है उतनी ही अधिक शुद्धता होती है।

[1] 'Statistics, especially other people's statistics, are full of pitfalls for the user.' —Connor, *Statistics*, p. 8.

(7) तुलना—यदि एक ही विषय पर अनेक स्रोतों से द्वितीयक समंक प्राप्त होते है तो उनकी सत्यता की जांच करने के लिए उनमें तुलना कर लेनी चाहिए। यदि उनमें अन्तर काफी है तो सबसे अधिक विश्वसनीय स्रोत से प्राप्त समंक ही ग्रहण करने चाहिएँ या फिर नये सिरे से अनुसन्धान करना चाहिए।

(8) परीक्षात्मक जांच—अनुसन्धानकर्ता को प्रस्तुत समंकों में से कुछ की परीक्षात्मक जांच करके यह देख लेना चाहिए कि वे विश्वसनीय हैं या नहीं।

इस प्रकार, उपर्युक्त बातों का ध्यान रखकर द्वितीयक समंकों की आलोचनात्मक जांच कर लेनी चाहिए। यदि परीक्षण के बाद द्वितीयक सामग्री विश्वसनीय, उपयुक्त व यथेष्ट प्रतीत हो तभी उसका प्रयोग प्रस्तुत अनुसन्धान के लिए करना चाहिए। जांच किये बिना द्वितीयक समंकों का प्रयोग करना सर्वथा अनुचित है। डा० बाउले का कथन है 'प्रकाशित समंकों को ऊपर से ही देखकर उनके बाह्य मूल्य पर ग्रहण कर लेना कभी सुरक्षित नहीं है जब तक उनका अर्थ व उनकी सीमाएँ अच्छी तरह ज्ञात न हो जाएँ; और यह सदैव आवश्यक है कि उन तर्कों की आलोचनात्मक समीक्षा की जाए जो उन पर आधारित हैं।'[1]

प्रश्न

1. प्राथमिक तथा द्वितीयक समंकों में अन्तर स्पष्ट कीजिए। प्राथमिक समंक संग्रह करने की विभिन्न रीतियों को समझाइए और उनके सापेक्ष गुण तथा दोष बताइए।
   Distinguish clearly between primary and secondary data. Explain the various methods of collecting primary data and point out their relative merits and demerits.
   [B. Com., T. D. C. (I yr), Raj., 1970; B. Com., Gorakhpur, 1970; Agra, 1966]
2. प्राथमिक समंकों के संग्रहण की मुख्य रीतियों की आलोचनात्मक व्याख्या कीजिए। क्या किसी एक रीति को सभी परिस्थितियों में सर्वश्रेष्ठ कहा जा सकता है?
   Examine critically the important methods of collection of primary data. Can any one method be called the best under all circumstances? *[B. Com, Agra, 1963]*
3. सांख्यिकीय सामग्री के संग्रहण में प्रयुक्त विभिन्न रीतियों को समझाइए। इनमें से आप किसको ठीक समझते हैं और क्यों?
   Explain the various methods used in the collection of statistical data. Of these, which would you prefer and why? *[B. Com., Vikram, 1970; M. A., Vikram, 1963]*
4. सांख्यिकीय सामग्री के संग्रहण में सामान्यतः प्रयुक्त रीतियों को वर्गीकृत कीजिए और उनके लाभ-दोषों का संक्षिप्त वर्णन कीजिए।
   Classify the methods generally employed in the collection of statistical data and state briefly their respective merits and demerits.
   [M. A., Meerut, 1972; B. Com., Alld., 1971, 1964; Saugar, 1964; Alld., 1964; Gorakhpur, 1961; Agra, 1956, 1955]
5. सांख्यिकीय सामग्री के संकलन की विभिन्न रीतियाँ कौन-सी हैं? इनमें से सबसे विश्वसनीय रीति कौन-सी है और क्यों?
   What are the various methods of collecting statistical data? Which of these is most reliable and why? *[B. Com, Gorakhpur, 1972; Nagpur, 1963]*
6. प्राथमिक समंकों के संग्रह में अपनाई जाने वाली किन्हीं तीन विधियों की उनके गुण तथा दोष बताते हुए विवेचना कीजिए।

[1] 'It is never safe to take published statistics at their face value, without knowing their meaning and limitations, and it is always necessary to criticize arguments that can be based on them.'—Dr. Bowley, *An Elementary Manual of Statistics*, p. 64.

Discuss the merits and limitations of any three methods of collecting primary data.
[*B. Com., Meerut, 1970*]

7. प्राथमिक और द्वितीयक प्रदत्तों में भेद कीजिए। प्राथमिक प्रदत्तों के संग्रह की किन्हीं दो रीतियों को स्पष्ट कीजिए।
Distinguish between primary and secondary data. Explain any two methods of collecting primary data. [*B. Com., Kanpur, 1969*]

8. समकों के 'प्राथमिक स्रोत' एवं 'द्वितीयक स्रोत' में अन्तर बतलाइये। द्वितीयक स्रोत द्वारा संकलित समकों के प्रयोग के पूर्व आप क्या-क्या सावधानियाँ ध्यान में रखेंगे ?
Distinguish between 'primary source' and 'secondary source' of statistical data. What precautions would you take before using data from secondary source ?
[*B. Com., Kanpur, 1971*]

9. (क) प्रकाशित सांख्यिकीय सामग्री के प्रयोग में आप क्या सावधानियाँ बरतेंगे ?
(ख) प्रश्नावली तैयार करने में ध्यान रखने वाली बातों का वर्णन कीजिए।
(a) What precautions would you observe in making use of published statistics ?
(b) Describe the points that you would consider in drafting a questionnaire.
[*B. Com., Meerut, 1971*]

10. यह क्यों आवश्यक है कि द्वितीयक सामग्री के उपयोग के पूर्व उसकी समीक्षा एवं सम्पादन किया जाए ? ऐसे आँकड़ों के उपयोग के पूर्व आप क्या सावधानी प्रयोग में लायेंगे ?
Why is it necessary that secondary data must be scrutinised and edited before use ? What precautions would you take before making use of such statistical data ?
[*B. Com., Vikram, 1971*]

11. प्राथमिक समकों को सकलित करने की विभिन्न रीतियों के तुलनात्मक गुणों का विवेचन कीजिए। निम्नलिखित के लिए आप कौन-सी रीति का सुझाव देंगे ?—
(अ) एक कॉलिज के प्राध्यापकों की पारिवारिक आय-व्यय सम्बन्धी जाँच।
(ब) एक नगर के कुटीर व लघु उद्योगों के श्रमिकों की आर्थिक स्थिति का सर्वेक्षण।
(स) बाजार-सूचना की नियमित प्राप्ति।
Discuss the comparative merits of various methods of collecting primary data. Which method would you recommend for the following ?—
(a) Family budget enquiry for the teachers of a college.
(b) Survey of the economic conditions of the workers in the cottage and small scale industries of a town.
(c) Regular supply of market intelligence. [*M. A., Agra, 1964*]

12. शुद्धता, श्रम तथा लागत का ध्यान रखते हुए आप समक-सकलन की कौन-सी रीतियाँ अपनाएँगे, यदि अनुसन्धान का क्षेत्र (अ) छोटा हो, (ब) बड़ा हो, और (स) बहुत बड़ा हो ?
What methods would you employ in the collection of data when the field of enquiry is (a) small, (b) fairly large, and (c) very large, and with regard to accuracy, labour and cost ?

13. 'प्रश्नावली' किसे कहते हैं ? उसमें व रिक्त फार्म (प्रारूप) में क्या अन्तर है ? प्रश्नावली बनाते समय किन सावधानियों का ध्यान रखना चाहिए ?
What is a 'Questionnaire' ? How does it differ from a 'Blank Form' ? What precautions should be taken in drafting questionnaire ?

14. एक उत्तम प्रश्नावली के क्या आवश्यक गुण हैं ? प्रगणकों का चुनाव करते समय किन बातों का ध्यान रखना चाहिए ?
What points should be taken into
[*B. Com., Kanpur, 1970 ; B. Com., T. D. C. (II yr.) Raj., 1962*]

15. एक महाविद्यालय के विद्यार्थियों के खर्चों के अध्ययन हेतु एक प्रश्नावली तैयार कीजिए।
Prepare a questionnaire for studying the expenditures of students in a college.
[*B. Com., T. D. C. (Final), Raj., 1971*]

16. 'समक, मुख्य रूप से अन्य व्यक्तियों के समक, यदि सावधानी से प्रयोग न किए जाएँ तो प्रयोगकर्ता के लिए अनेक अशुद्धियों से पूर्ण होते हैं।' इस कथन को स्पष्ट कीजिए और यह भी बताइए कि द्वितीयक सामग्री के क्या स्रोत हैं ?

'Statistics, especially other people's statistics, are full of pitfalls for the user unless used with caution.' Elucidate the above statement and mention what are the sources of secondary data. [*B. Com., T. D. C (I yr.), Raj., 1965, 1961 ; M. Com., Agra, 1960*]

17. 'प्रकाशित समंकों को जैसे का तैसा मान लेना कभी खतरे से खाली नहीं है जब तक उनका अर्थ व सीमाएँ ज्ञात न हो जाएँ और जो तर्क उन पर आधारित हैं उनकी आलोचना करना सदैव आवश्यक है।' इस कथन की व्याख्या कीजिए।

'It is never safe to take published statistics at their face value without knowing their meaning and limitations and it is always necessary to criticise arguments that can be based on them.' Discuss the above statement.

[*B. Com., Meerut-Agra, 1968 ; M. Com., Agra, 1965*]

18. समंकों के स्रोतों का चुनाव करने में आर्थिक सांख्यिकी के विशेषज्ञ को जिन सामान्य नियमों का पालन करना चाहिए तथा उसे जिन सावधानियों का ध्यान रखना चाहिए उनका विवेचन कीजिए।

Discuss the general rules which an economic statistician should follow and the precautions which he should bear in mind while choosing the sources of his data.

[*M. Com., Lucknow, 1962*]

19. 'समंक संकलन में सामान्य बुद्धि मुख्य आवश्यकता तथा अनुभव मुख्य शिक्षक है।' इस कथन की आलोचनात्मक व्याख्या कीजिए।

'In collection (of statistical data), commonsense is the chief requisite and experience the chief teacher.' Discuss this statement with comments.

20. अपने कॉलिज के छात्रों के 'व्यवसाय–महत्वाकांक्षा के सन्दर्भ में विषयों के चुनाव' के बारे में आप एक सर्वेक्षण का आयोजन किस प्रकार करेंगे ? एक उपयुक्त प्रश्नावली का प्रारूप भी तैयार कीजिये।

How would you plan a survey in regard to choice of subjects *vis-a-vis* career aspiration of students in your college ? Draw up an appropriate questionnaire.

[*M. A. (Prev.), Agra, 1966*]

21. कानपुर नगर में 1967 में बेकारी की स्थिति का शीघ्र सर्वेक्षण करने के लिये एक योजना बनाइए। महत्वपूर्ण शब्दों की परिभाषा देते हुए इस अवसर पर प्रयुक्त की जाने वाली एक प्रश्नावली दीजिए।

Draft a plan for making a quick survey of the unemployment situation in the city of Kanpur in 1967. Give a short questionnaire to be used on the occasion indicating the definition of important terms. [*M. A., Meerut, 1968*]

22. अच्छी प्रश्नावली का निर्माण करने में किन-किन बातों का ध्यान रखना चाहिये ? निम्न प्रश्नों की आलोचनात्मक समीक्षा कीजिये तथा उनमें सुधार सुझाइए—

(अ) मकानों के सर्वेक्षण में—

क्या यह मकान अच्छी हालत में है ?

यह किस सामग्री का बना हुआ है ?

क्या यह नगर के एक वांछित भाग में स्थित है ?

(ब) स्वास्थ्य-सम्बन्धी सर्वेक्षण में—

क्या आपका स्वास्थ्य अच्छा है ?

क्या आप क्षय रोग से पीड़ित हैं ?

What points should be considered in drafting a good questionnaire ? Criticise the following questions and suggest improvements :

(a) In a housing survey—

Is this house in good condition ?

Of what material is it made ?

Is it located in a desirable section of town ?

(b) In a health survey—

Are you in good health ?

Do you have tuberculosis ?

23. प्राथमिक समंकों के संग्रह के लिए उपयोग में लाई जाने वाली विभिन्न प्रणालियों का वर्णन कीजिए।

Explain the various methods used in the collection of primary data.

[*B. Com., Rajasthan, 1973*]

5

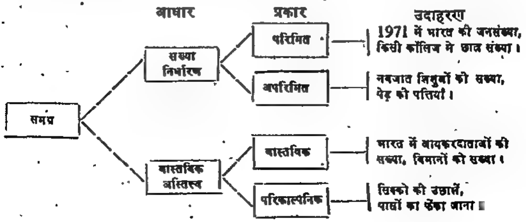
संगणना तथा प्रतिदर्श अनुसन्धान
(CENSUS AND SAMPLE INVESTIGATION)

सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन करते समय अनुसन्धानकर्त्ता को यह भी निर्णय करना पड़ता है कि प्रस्तुत समस्या के अध्ययन के लिए वह अनुसन्धान-क्षेत्र की प्रत्येक इकाई के बारे में सांख्यिकीय सूचना उपलब्ध करेगा या क्षेत्र की सभी इकाइयों के समग्र (Universe or population) में से कुछ प्रतिनिधि इकाइयाँ छाँटकर केवल उनके बारे में ही आवश्यक समंक एकत्रित करेगा। यह पहले ही निश्चय कर लिया जाता है कि समकों का संकलन संगणना या समग्र अनुसन्धान (Census Investigation) के अनुसार किया जायेगा या प्रतिदर्श अनुसन्धान (Sample Investigation) के आधार पर।

समग्र या समष्टि
(Universe or Population)

सांख्यिकी में 'समग्र' या 'समष्टि' का तात्पर्य किसी अनुसन्धान-क्षेत्र की सभी इकाइयों के समुदाय से है जिनमें कुछ सामान्य विशेषताएँ हों।[1] 'विचाराधीन विषय-वस्तुओं के सम्पूर्ण समूह' (totality of objects under consideration) को ही 'समग्र' कहते हैं। उदाहरणार्थ, यदि किसी विश्वविद्यालय के 10,000 छात्रों की आयु, लम्बाई व मासिक व्यय के सम्बन्ध में अनुसन्धान करना हो तो सभी छात्रों का समूह समग्र या समष्टि कहलाएगा। भारत के सूती वस्त्र मिलों में काम करने वाले सभी मजदूर, तत्सम्बन्धी, आर्थिक व सामाजिक सर्वेक्षण के लिए समग्र के तत्त्व (elements) या एकक (units) होंगे। देश में चीनी मिलों की कुल संख्या, एक पुस्तकालय में पुस्तकों की संख्या आदि समग्र या समष्टि के उदाहरण हैं।

समग्र के प्रकार (Types of Universe)—समग्र कई प्रकार के होते हैं। अधिकतर समग्रों का वर्गीकरण निम्न आधार पर किया जाता है—



[1] 'A universe or population may be defined as an aggregate of items possessing a

परिमित एवं अपरिमित समग्र (Finite and Infinite Universe)—परिमित समग्र ऐसे समग्र को कहते हैं जिसमें इकाइयों की संख्या सुनिश्चित होती है जैसे 1 अप्रैल 1971 को भारत की जनसंख्या, किसी कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या, देश में 1972 मे छपी पुस्तकों की संख्या इत्यादि। अपरिमित या अनन्त समग्र (infinite population) में इकाइयों की संख्या अनन्त अथवा अनिश्चित होती है। नवजात शिशुओं की संख्या, बोल गये शब्दों की संख्या आदि अपरिमित समग्र हैं। कभी-कभी समग्र की इकाइयों की संख्या इतनी अधिक होती है कि उसे व्यवहार में अपरिमित मानना ही अधिक उचित होता है। अनेक बार हमें यह ठीक प्रकार ज्ञात नहीं होता कि समग्र परिमित है या अपरिमित जैसे आकाश में तारों की संख्या, पेड़ों पर पत्तियों की संख्या आदि।

वास्तविक एवं परिकाल्पनिक समग्र (Real and Hypothetical Universe)—यथार्थता या वास्तविक अस्तित्व के आधार पर समग्र वास्तविक हो सकता है अथवा काल्पनिक। वास्तविक समग्र (real or existent universe) मे सभी इकाइयाँ मूर्त्त रूप मे या यथार्थ रूप में विद्यमान होती हैं जैसे भारत में आय कर-दाताओ की संख्या, निश्चित पृष्ठो वाली पुस्तको की संख्या, विमानों का समग्र आदि। परिकाल्पनिक अथवा सैद्धान्तिक समग्र (hypothetical universe) वह समग्र है जो ठोस या मूर्तरूप में विद्यमान नही होता और जिसकी इकाइयों की केवल कल्पना ही की जा सकती है, जैसे सिक्के को उछालने के आधार पर 'चित' (Head) व 'पट' (Tail) के परिणामों की संख्या लिखकर बना एक समग्र। सांख्यिकीय सर्वेक्षणों में प्रतिरूप या मॉडल (Model) के रूप में इनका प्रयोग होता है।

संगणना अनुसन्धान
(Census Inquiry)

जब किसी समस्या से सम्बन्धित पूरे समूह या समग्र की प्रत्येक व्यक्तिगत इकाई का विस्तारपूर्वक अध्ययन किया जाता है तो इस प्रकार का अनुसन्धान सम्पूर्ण गणना या संगणना अनुसन्धान (Complete enumeration or Census investigation) कहलाता है। उदाहरणार्थ, यदि किसी कॉलिज के 4000 विद्यार्थियो में से प्रत्येक विद्यार्थी के मासिक व्यय के बारे में आंकड़े एकत्रित किये जाएँ तो यह संगणना अनुसन्धान कहलाएगा। जनगणना (Population Census) तथा उत्पादन-संगणना (Census of Production) का आयोजन संगणना अनुसन्धान के आधार पर ही किया जाता है।

उपयुक्तता—संगणना प्रणाली ऐसे अनुसन्धानों के लिए उपयुक्त है जिनका क्षेत्र सीमित हो, जिनमें विविध गुणो वाली इकाइयां हों, प्रत्येक इकाई का गहन अध्ययन करना हो तथा जहां शुद्धता की अत्यधिक मात्रा अपेक्षित हो।

लाभ—संगणना अनुसन्धान के निम्नलिखित लाभ हैं—

(i) **अधिक विश्वसनीयता**—संगणना विधि द्वारा प्राप्त समंकों में अत्यधिक शुद्धता और और विश्वसनीयता होती है क्योंकि इस रीति में समग्र के प्रत्येक भाग का व्यक्तिगत रूप में गहन निरीक्षण किया जाता है।

(ii) **विस्तृत सूचना**—संगणना अनुसन्धान मे समग्र की प्रत्येक इकाई के बारे में अनेक बातों का पता चल जाता है। उदाहरणार्थ, जनगणना में केवल व्यक्तियो की कुल संख्या ही ज्ञात नही होती बल्कि उनकी आयु, वैवाहिक स्थिति, व्यवसाय, आय इत्यादि के सम्बन्ध मे भी जानकारी प्राप्त हो जाती है।

(iii) **उपयुक्तता**—यह रीति सीमित क्षेत्र मे तथा विविध विशेषताओं वाले समग्र के लिए उपयुक्त है।

---

common trait or traits. A universe is the complete group of items about which knowledge is sought; each and every item has some certain specified attribute or attributes.'—Simpson Kafka, *Basic Statistics*, p. 384.

दोष—इस प्रणाली में निम्न दोष हैं—

(i) **अधिक व्यय**—संगणना प्रणाली में बहुत खर्च होता है। यही कारण है कि इसका प्रयोग अधिकतर सरकार जनगणना, उत्पादन-संगणना आदि के लिए करती है और इन कार्यों के लिए उसे अलग विभाग स्थापित करने पड़ते है।

(ii) **अधिक समय और परिश्रम**—इस प्रकार के अनुसन्धान मे समय भी अधिक लग जाता है और परिश्रम भी बहुत करना पड़ता है।

(iii) **अनेक परिस्थितियों में असम्भव**—अनेक परिस्थितियों में संगणना अनुसन्धान सम्भव ही नही होता। उदाहरणार्थ, यदि समग्र अनन्त (infinite) हो, क्षेत्र की प्रत्येक इकाई से सम्पर्क स्थापित न किया जा सके या सभी इकाइयों की जाँच करने से वे समाप्त ही हो जाएँ, तो सम्पूर्ण गणना नही की जा सकती।

प्रतिदर्श अनुसन्धान
(Sample Inquiry)

प्रतिदर्श अनुसन्धान उस अनुसन्धान को कहते हैं जिसके अनुसार समग्र में से किसी आधार पर कुछ प्रतिनिधि इकाइयां चुन ली जाती है और उन चुनी हुई इकाइयों के गहन अध्ययन से निष्कर्ष निकाले जाते हैं। समग्र में से छाँटी हुई इकाइयों को प्रतिनिधि समंक (Representative data) अथवा प्रतिदर्श (Sample) कहते हैं। वास्तव मे, प्रतिदर्श, समग्र की इकाइयों का वह अंश है जो पूर्ण समग्र के अध्ययन हेतु चुना जाता है।[1] यदि किसी कॉलिज के 4000 विद्यार्थियों में से 400 विद्यार्थी छाँट लिए जाएँ और उनके मासिक व्यय का अध्ययन किया जाए तो यह प्रतिदर्श अनुसन्धान होगा। उन 400 विद्यार्थियों के व्यय के प्रतिदर्श अध्ययन के आधार पर 4000 विद्यार्थियों के व्यय के बारे मे निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। यदि प्रतिदर्श यथेष्ट है और समुचित रीति से छाँटा गया है तो उसके परिणाम पर्याप्त मात्रा में समग्र पर लागू होंगे।

वर्तमान युग में प्रतिचयन प्रणाली (Sampling Method) सांख्यिकीय अनुसन्धान की बहुत महत्त्वपूर्ण और लोकप्रिय रीति है। अधिकांश क्षेत्रों में इस पद्धति का ही प्रयोग किया जाता है। यहाँ तक कि अपने दैनिक जीवन में भी हम किसी वस्तु को खरीदने से पहले थोड़ा-सा नमूना देखकर पूरी मात्रा की किस्म का सही-सही अनुमान लगा लेते हैं। उदाहरणार्थ, गेहूँ, घी, दालें, कपड़ा आदि वस्तुएँ अधिक मात्रा में खरीदने से पहले उनका नमूना देखकर उनकी किस्म की जाँच कर ली जाती है। स्नेडेकॉर के अनुसार 'केवल कुछ ही पौण्ड कोयले की जाँच करने से प्राप्त साक्ष्य आधार पर एक गाड़ी कोयला स्वीकृत या अस्वीकृत कर दिया जाता है। केवल एक बूंद रक्त की जाँच करके चिकित्सक रोगी के रक्त के बारे मे निष्कर्ष निकाल लेता है। प्रतिदर्श कुछ ही इकाइयों के निरीक्षण द्वारा बड़ी मात्राओं के बारे मे जानकारी प्राप्त करने की युक्तियाँ हैं।'[2] वस्तुतः एक छोटे प्रतिदर्श के आधार पर हम पूरे क्षेत्र के बारे में निर्णय कर सकते हैं।[3] यही नही, निदर्शन सिद्धान्त के द्वारा अनुमानों की शुद्धता की भी परख की जा सकती है।[4]

गुण—प्रतिदर्श अनुसन्धान का महत्त्व उसके अग्रलिखित गुणों के कारण है—

[1] 'A sample is that part of the universe which we select for the purpose of investigation.' —*Ibid.*, p. 385.

[2] 'A carload of coal is accepted or rejected on the evidence gained from testing only a few pounds. The physician makes inferences about a patient's blood through examination of a single drop. Samples are devices for learning about large masses by observing a few individuals.' —Snedecor.

[3] 'By a *small sample* we may judge of the whole piece.' —Miguel De Cervantes.

[4] 'The theory of sampling is concerned, first, with estimating the properties of the population from those of the sample, and secondly, with gauging the precision of the estimates.' —Weatherburn.

(i) बचत—प्रतिचयन रीति में धन, समय व श्रम की बचत होती है क्योंकि इसमें समग्र की कुछ छाँटी हुई इकाइयों का ही अध्ययन किया जाता है।

(ii) विस्तृत जाँच—कम होने के कारण उनकी अधिक विस्तृत जाँच की जा सकती है।

(iii) विश्वसनीयता—यदि प्रतिदर्श समुचित आधार पर यथेष्ट मात्रा में छाँटा जाए तो प्रतिदर्श अनुसन्धान के परिणाम लगभग वही होंगे जो संगणना अनुसन्धान द्वारा प्राप्त होते हैं।

(iv) उपयुक्तता—सामाजिक, आर्थिक व व्यापारिक समस्याओं के अध्ययन के लिए प्रतिचयन प्रणाली ही उपयुक्त है क्योंकि इसमे समय कम लगता है। इसके अतिरिक्त यदि समग्र अनन्त या अति विशाल हो या उसमें सभी इकाइयों को परखने से उनका विनाश हो जाय तो प्रतिदर्श अनुसन्धान ही उपयुक्त विधि होती है।

(v) अधिक वैज्ञानिक रीति—प्रतिदर्श रीति अधिक वैज्ञानिक मानी जाती है क्योंकि उपलब्ध समकों की अन्य प्रतिदर्शों द्वारा जाँच की जा सकती है। यदि याद्दच्छिक प्रतिचयन (Random Sampling) के आधार पर प्रतिदर्श छाँटा जाता है तो अशुद्धियों का पर्याप्त सीमा तक अनुमान लगाया जा सकता है।

रौनेल्ड फिशर[1] ने प्रतिदर्श पद्धति के चार प्रमुख गुणों का वर्णन किया है। वे चार गुण हैं—अनुकूलता, गति, मितव्ययिता और वैज्ञानिक प्रकृति। उनके अनुसार, अशुद्धियों या विभ्रमों के गणितीय सिद्धान्त पर आधारित होने के कारण प्रतिदर्श में परिशुद्धता की धारणा आरम्भ से ही सर्वोपरि रहती है।

दोष—प्रतिदर्श प्रणाली मे अधिक शुद्धता का अभाव रहता है। जहाँ इकाइयाँ विभिन्न गुणों वाली व विजातीय हों तथा उनकी सख्या में लगातार परिवर्तन होते रहते हों वहाँ प्रतिदर्श रीति अनुपयुक्त होगी। यदि प्रतिदर्श निकालने की रीति निष्पक्ष न हो तो परिणाम भ्रमात्मक निकलते हैं। इसके अतिरिक्त, प्रतिनिधि प्रतिदर्श निकालने के लिए विशिष्ट ज्ञान की आवश्यकता होती है।

उपयुक्तता—निम्न परिस्थितियों में संगणना रीति की तुलना मे प्रतिचयन प्रणाली का प्रयोग उपयुक्त होता है—

(i) विशाल क्षेत्र तथा कम शुद्धता—जब अनुसन्धान का क्षेत्र बहुत विस्तृत हो और उच्च-स्तर की शुद्धता अपेक्षित न हो तो प्रतिदर्श प्रणाली का प्रयोग उचित होता है। उदाहरणार्थ, यदि उपभोक्ताओं की रुचि ज्ञात करनी हो और वे विशाल क्षेत्र में दूर-दूर तक फैले हुए हों तो प्रत्येक उपभोक्ता से सम्पर्क स्थापित करके संगणना जाँच करना असम्भव है। ऐसी स्थिति में प्रतिदर्श विधि ही उपयुक्त है।

(ii) अनन्त समग्र—यदि समग्र की इकाइयाँ अनन्त हों तो प्रतिदर्श रीति वाछनीय है। उदाहरणार्थ, नवजात शिशुओं का औसत भार ज्ञात करने मे प्रतिचयन विधि ही अपनानी पड़ेगी क्योंकि शिशुओं का जन्म तो अनन्त काल तक चलता रहेगा और सभी शिशुओं के बारे में सूचना प्राप्त करना असम्भव होगा।

(iii) समग्र की समाप्ति या विनाश—कुछ क्षेत्रों मे यदि समग्र की प्रत्येक इकाई की जाँच की जाये तो सभी इकाइयाँ समाप्त या नष्ट हो जाती हैं। उदाहरण के लिए, यदि किसी खाद्य-वस्तु को चखकर उसके स्वाद का पता लगाना हो तो यह कार्य केवल उसके एक भाग की परख करके ही किया जाता है क्योंकि पूरी वस्तु को चखने से वह समाप्त हो जाएगी। कपड़े की तनाव-शक्ति व दृढ़ता की जाँच करने के लिए उसके थोड़े से अंश को ही फाड़कर देखा जाता है। दियासलाई या बल्ब आदि की किस्म की जाँच करने के लिए यदि सभी इकाइयों की परख की

[1] 'I have made four claims for the sampling procedure. About the first three—*adaptability, speed and economy,* I need say nothing further. But why do I say that it is *more scientific* than...the complete enumeration ?...Rooted as it is, in the mathematical theory of the errors of random sampling, the idea of precision is, from the first, in the fore-t.' —Ronald Fisher.

जाए तो वे सभी नष्ट हो जाएँगी, अतः उनमें से कुछ को चुनकर जाँच की जाती है।

(iv) संगणना जाँच का असम्भव होना—कुछ क्षेत्रों में संगणना द्वारा जाँच करना असम्भव होता है। उदाहरणस्वरूप, यदि यह ज्ञात करना हो कि भारत की कोयले की खानों मे कुल कितना और किस श्रेणी का कोयला है तो संगणना रीति द्वारा सभी खानों को खोदकर ही यह पता लगाया जा सकता है जो कि असम्भव और अवांछनीय है। यहाँ प्रतिदर्श अनुसन्धान ही उपयुक्त है।

(v) एकरूपता—प्रतिदर्श प्रणाली तभी अपनानी चाहिए जब समग्र की सभी इकाइयो मे एकरूपता या सजातीयता का तत्त्व पाया जाता हो।

संगणना तथा प्रतिदर्श प्रणालियों का अन्तर—संगणना तथा प्रतिदर्श अनुसन्धानों में बहुत अन्तर है। प्रथम, संगणना रीति मे समग्र की प्रत्येक इकाई के बारे में सूचना प्राप्त की जाती है जबकि प्रतिदर्श रीति में समग्र से कुछ चुनी हुई प्रतिनिधि इकाइयों के विषय में आँकड़े उपलब्ध किये जाते हैं। दूसरे, संगणना अनुसन्धान मे धन, समय और श्रम का अधिक व्यय होता है जबकि प्रतिदर्श अनुसन्धान में इन सबकी बचत होती है। तीसरे, संगणना रीति सीमित क्षेत्र मे अधिक यथार्थ समंक प्राप्त करने के लिए प्रयोग की जाती है। इसके विपरीत, विशाल क्षेत्र में समंक उपलब्ध करने के लिए प्रतिदर्श विधि उपयुक्त है। चौथे, विविध गुणों वाली विजातीय इकाइयों के समग्र की जाँच सम्पूर्ण गणना द्वारा की जाती है जबकि सजातीय व एक-सी इकाइयों वाले समग्र का अध्ययन अधिकतर प्रतिदर्श निकालकर ही किया जाता है। पाँचवें, ऐसे क्षेत्रों मे जहाँ प्रत्येक इकाई का विस्तृत अध्ययन करना आवश्यक हो संगणना रीति ही उपयुक्त है, जैसे जनगणना। इसके विपरीत, जब समय अनन्त या अत्यन्त विशाल हो या जब सम्पूर्ण गणना रीति अपनाने से समग्र की सभी इकाइयाँ नष्ट हो जायें तब संगणना रीति नहीं अपनाई जा सकती। आजकल प्रतिदर्श रीति अत्यन्त लोकप्रिय है। यहाँ तक कि जनगणना के परिणामों की शुद्धता की परख करने के लिए भी प्रतिदर्श जाँच की जाती है।

प्रतिचयन के आवश्यक तत्त्व
(Essentials of Sampling)

निष्पक्ष और यथार्थ निष्कर्ष निकालने के लिए प्रतिचयन मे निम्न बातों का होना आवश्यक है—

(क) प्रतिनिधित्व (Representativeness)—प्रतिदर्श ऐसा होना चाहिए जो समग्र की सभी विशेषताओं का पूर्ण प्रतिनिधित्व करे। यह तभी हो सकता है जब समग्र की प्रत्येक इकाई को प्रतिदर्श में शामिल होने का समान अवसर प्राप्त हो।

(ख) स्वतन्त्रता (Independence)—समग्र की सभी इकाइयाँ आपस में स्वतन्त्र होनी चाहिएँ अर्थात् किसी इकाई या पद का प्रतिदर्श में शामिल होना समग्र की किसी अन्य इकाई के सम्मिलित होने पर निर्भर नहीं होना चाहिए।

(ग) सजातीयता (Homogeneity)—यदि एक ही समग्र मे से दो या अधिक प्रतिदर्श छाँटे जाएँ तो उनमें परस्पर सजातीयता होनी चाहिए। उनमे होने वाले विचरण निर्धारित सीमाओं में होने चाहिएँ।

(घ) पर्याप्तता (Adequacy)—प्रतिदर्श पर्याप्त होना चाहिए। उसमें जितनी अधिक इकाइयों का समावेश होगा उतनी ही शुद्धता होगी।

प्रतिचयन के उद्देश्य
(Objects of Sampling)

प्रतिदर्श का अध्ययन निम्न उद्देश्यों की पूर्ति के लिए किया जाता है—

(i) समग्र के सम्बन्ध में सूचना प्राप्त करना—प्रतिदर्श का अध्ययन करके पूरे समग्र के

बारे में कम से कम समय में और कम खर्च से अधिकाधिक यथार्थ सूचना उपलब्ध करना प्रतिचयन का प्रमुख उद्देश्य है। समग्र की मूलभूत विशेषताओं का पता लगाने के लिए प्रतिदर्श अनुसन्धान किये जाते हैं।

(ii) समग्र के स्थिरांकों का अनुमान लगाना—प्रतिदर्श इकाइयों के सांख्यिकीय माप जैसे प्रतिदर्श-माध्य, प्रतिदर्श-प्रमाप विचलन आदि की सहायता से पूरी समष्टि के अभिलक्षणों के सांख्यिकीय मापों के अनभिनत अनुमान लगाये जाते हैं। प्रतिदर्श इकाइयों के सांख्यिकीय मापों को प्रतिदर्शज (statistic) कहते हैं और तत्सम्बन्धी समग्र के सांख्यिकीय माप स्थिरांक या प्राचल (parameter) कहलाते हैं। संक्षेप में, प्रतिदर्शज की सहायता से प्राचल का सर्वोत्कृष्ट अनुमान लगाना प्रतिचयन का महत्त्वपूर्ण उद्देश्य है।

(iii) विश्वसनीयता की जाँच करना—एक ही समग्र से चुने गये अनेक दैव प्रतिदर्शों के सांख्यिकीय माप (प्रतिदर्शज) आपस में भी भिन्न होते हैं और उनका समष्टि के सांख्यिकीय माप (प्राचल) से भी अन्तर होता है। इन अन्तरों की जाँच करना प्रतिचयन का उद्देश्य है। ये अन्तर या तो केवल प्रतिचयन के उच्चावचनों के कारण हो सकते हैं या अन्य कारणों से उत्पन्न हो सकते हैं। प्रतिचयन सिद्धान्त के अन्तर्गत अन्तरों की सार्थकता की परख की जाती है।

(iv) संगणना अनुसन्धान की सत्यता की जाँच करना—संगणना अनुसन्धान से उपलब्ध परिणामों की सत्यता की जाँच करने के उद्देश्य से भी प्रतिदर्श अनुसन्धान किये जाते हैं। लगभग सभी देशों में जनगणना के परिणामों का परीक्षण करने के लिए जनगणना के पश्चात् प्रतिदर्श आधार पर अध्ययन (post-enumeration sample check) आयोजित किये जाते हैं।

प्रतिचयनों से सूक्ष्मता
(Precision in Sampling)

प्रतिचयन का आधारभूत उद्देश्य कुछ चुनी हुई प्रतिदर्श इकाइयों के अध्ययन से सम्पूर्ण समग्र के अभिलक्षणों के बारे में विस्तृत जानकारी प्राप्त करना है। प्रश्न यह है कि 'कुछ चुनी हुई इकाइयों के विश्लेषण द्वारा हम समग्र की सभी इकाइयों के बारे में विश्वसनीय जानकारी कैसे प्राप्त कर सकते हैं अर्थात् प्रतिदर्श के आधार पर सम्पूर्ण क्षेत्र के सम्बन्ध में हमारे अनुमान कहाँ तक विश्वसनीय हैं ? यही मूल प्रश्न प्रतिचयन सिद्धान्त का आधार है। प्रतिचयन में विश्वसनीयता या सूक्ष्मता की समस्या का अत्यन्त सावधानी से विश्लेषण किया जाना चाहिए। इस सम्बन्ध में यह ध्यान रखना आवश्यक है कि प्रतिदर्श अध्ययन पर आधारित परिणाम सुनिश्चित (certain) नहीं होते वरन् वे प्रायिकता अथवा सम्भाविता (probability) पर आधारित होते हैं। प्रतिदर्श अनुसन्धानों के परिणामों की सूक्ष्मता या विश्वसनीयता तत्सम्बन्धी प्रायिकता पर आधारित होती है। यदि घटना की सम्भाविता अत्यधिक होती है तो प्रतिचयन अध्ययन की परिशुद्धता भी अधिक होगी। उदाहरणार्थ, यदि 10,000 विद्यार्थियों में से 9995 विद्यार्थियों की आयु 16 वर्ष से कम नहीं है तो यह अत्यधिक विश्वास के साथ कहा जा सकता है कि शेष 5 विद्यार्थियों में से भी प्रत्येक की आयु 16 वर्ष से कम नहीं होगी। परन्तु यदि 10,000 विद्यार्थियों में से केवल 10 विवाहित हों, तो विद्यार्थियों के विवाहित होने की सम्भावना बहुत कम होगी, अतः हम विद्यार्थियों के विवाहित होने के सम्बन्ध में दृढ़ विश्वास के साथ कोई निष्कर्ष प्रस्तुत नहीं कर सकते।

प्रतिचयन सिद्धान्त के आधार पर ऐसी सीमाएँ निर्धारित की जा सकती हैं जिनके बीच प्रतिदर्श-मापों और समग्र-माप के पाये जाने की सुनिश्चित सम्भावनाएँ होती हैं। प्रतिदर्श-अध्ययन के आधार पर यदि यह कहा जाए कि भारतीय विश्वविद्यालयों के छात्रों की आयु 16 वर्ष से 30 वर्ष तक होने की सम्भाविता 99·7% है, तो स्पष्ट है कि इस कथन में विश्वसनीयता की मात्रा बहुत अधिक है और 1000 छात्रों में से केवल 3 (0·3%) की आयु इन सीमाओं से बाहर होने की सम्भावना है। विश्वास्यता सीमाओं का विस्तार अधिक होने पर विश्वसनीयता की मात्रा भी अधिक हो जाएगी और सीमाओं का विस्तार कम होने पर विश्वसनीयता कम होगी। उक्त उदाहरण में

21 वर्ष से 25 वर्ष तक की आयु के छात्रों की सम्भाविता 99·7% से बहुत कम होगी।

प्रतिदर्श अध्ययनों की सूक्ष्मता निम्न तीन तत्त्वों पर निर्भर होती है—

(i) **प्रतिचयन रीति**—प्रतिदर्श अनुसन्धानों की विश्वसनीयता प्रतिदर्श इकाइयाँ चुनने की रीति पर निर्भर होती है। सामान्यतया याहच्छिक प्रतिचयन (Random Sampling) रीति द्वारा निकाले गये प्रतिदर्श समग्र के अनभिनत प्रतिनिधि माने जाते हैं।

(ii) **आकलन विधि**—प्रतिदर्श अनुसन्धान की विश्वसनीयता इस बात पर भी आधारित होती है कि प्रतिदर्श इकाइयों से पूरे समग्र के सम्बन्ध में अनुमान किस प्रकार लगाये जाते हैं। अधिकतर अन्तराल-आकलनों (interval estimates) का ही प्रयोग किया जाता है जिनमें अनुमान, विभिन्न सीमाओं के अन्तर्गत प्रस्तुत किये जाते हैं और ये विश्वास्यता-सीमाएँ सम्भाविता पर आधारित होती हैं।

(iii) **प्रतिदर्श आकार**—प्रतिदर्श का आकार भी विश्वसनीयता का महत्त्वपूर्ण निर्धारक तत्त्व है। सामान्यतः यदि प्रतिदर्श बड़े आकार का है तो सूक्ष्मता या विश्वसनीयता का स्तर भी अधिक होगा। इसके विपरीत, प्रतिदर्श का आकार छोटा होने पर प्रतिदर्श अध्ययन पर अधिक विश्वास नहीं किया जा सकता। आकार के साथ-साथ चयन विधि और समग्र इकाइयों की प्रकृति का भी विशेष ध्यान रखना आवश्यक है।

प्रतिचयन की रीतियाँ
(Methods of Sampling)

समग्र में से प्रतिदर्श चुनने की निम्नलिखित प्रमुख रीतियाँ है—

(1) सविचार प्रतिचयन या सोद्देश्य प्रतिचयन (Deliberate Sampling or Purposive Selection),

(2) दैव प्रतिचयन अथवा याहच्छिक प्रतिचयन (Random Sampling or Chance Selection),

(3) स्तरित या मिश्रित प्रतिचयन (Stratified or Mixed Sampling),

(4) अन्य रीतियाँ (Other Methods)।

(1) **सविचार प्रतिचयन (Deliberate Sampling)**—इस रीति के अनुसार अनुसन्धानकर्त्ता सम्पूर्ण क्षेत्र में से अपनी इच्छानुसार ऐसी इकाइयाँ चुन लेता है जो उसके विचार में समग्र का प्रतिनिधित्व करती हों। प्रतिदर्श में किन पदों को शामिल करना है यह पूर्णतया छाँटने वाले की स्वेच्छा पर ही निर्भर होता है। इस प्रकार छाँटी हुई प्रतिदर्श इकाइयो के गहन अध्ययन से प्राप्त परिणामो के आधार पर वह पूरे समग्र के बारे मे निष्कर्ष निकाल लेता है। उदाहरण के लिए, यदि औद्योगिक मजदूरो के रहन-सहन की स्थिति के बारे में प्रतिदर्श अनुसन्धान करना हो तो सविचार प्रतिचयन रीति के अनुसार अनुसन्धानकर्त्ता ऐसे मजदूरों को प्रतिदर्श मे शामिल करेगा जो उसके विचार में सभी मजदूरो का प्रतिनिधित्व करते हों।

गुण-दोष—सविचार प्रतिचयन रीति अत्यन्त सरल है और ऐसे क्षेत्रों के लिए उपयुक्त है जिनमें लगभग एक-सी इकाइयाँ हों या जहाँ कुछ इकाइयाँ इतनी महत्त्वपूर्ण हों कि उनका शामिल करना आवश्यक हो। इस प्रणाली का प्रमुख दोष यह है कि इसके अनुसार प्रतिदर्श छाँटने में अनुसन्धानकर्त्ता की व्यक्तिगत धारणाओ और पक्षपात का पूरा प्रभाव पड़ जाता है, जिससे परिणाम एकांगी और अशुद्ध हो जाते हैं। यदि अनुसन्धानकर्त्ता पहले से ही यह धारणा रखता है कि मजदूरों की स्थिति अच्छी है तो वह जान-बूझकर ऐसे परिवारों को ही प्रतिदर्श मे शामिल करेगा जिनकी आर्थिक-स्थिति उत्तम होगी। अतः इस प्रणाली की सफलता पूर्णरूप से प्रतिदर्श छाँटने वाले की मानदारी, ज्ञान, अनुभव और निष्पक्षता पर निर्भर है।

(2) **दैव प्रतिचयन (Random Sampling)**—प्रतिदर्श निकालने की यह सबसे अच्छी है क्योंकि इसमें पक्षपात का प्रभाव नहीं होता वरन् इकाइयाँ अवसर या सम्भावना के आधार

पर छांटी जाती हैं। इस रीति के अनुसार समग्र में से इकाइयाँ इस प्रकार छांटी जाती हैं कि प्रत्येक इकाई के प्रतिदर्श में सम्मिलित होने की बराबर सम्भावना होती है। प्रतिदर्श में कौन-सी इकाई शामिल की जायेगी कौन-सी नहीं इस बात का निर्णय अनुसन्धानकर्ता स्वेच्छानुसार नहीं करता बल्कि प्रतिदर्श इकाइयाँ चुनने की क्रिया पूर्णरूप से दैव (chance) पर छोड़ दी जाती है। इकाइयों का चयन सम-सम्भावित होता है।

दैव प्रतिचयन के अनुसार प्रतिदर्श चुनने की निम्न रीतियाँ हैं—

(क) लॉटरी रीति (Lottery method)—इस रीति के अनुसार समग्र की सभी इकाइयों की पर्चियाँ या गोलियाँ बनाकर उनमें से किसी निष्पक्ष व्यक्ति द्वारा या स्वयं आँखें बन्द करके (blind-folded) उतनी पर्चियाँ उठा ली जाती हैं जितनी इकाइयाँ प्रतिदर्श में शामिल करनी हों। यह आवश्यक है कि सभी पर्चियाँ या गोलियाँ बिल्कुल एक-सी बनाई जायें। छांटने से पहले उन्हें अच्छी तरह हिलाकर मिला लेना चाहिए और निष्पक्ष व्यक्ति से पर्चियाँ निकलवानी चाहिएँ।

(ख) ढोल घुमाकर (By rotating the drum)—इस रीति के अनुसार एक ढोल में समान आकार के लोहे या लकड़ी के गोल टुकड़े होते हैं जिन पर 0, 1, 2....9 आदि अंक लिखे रहते हैं। ढोल को हाथ से या बिजली से घुमाकर उन अंकों को अच्छी तरह मिला-जुला लिया जाता है और फिर किसी निष्पक्ष व्यक्ति द्वारा एक-एक टुकड़ा निकाल लिया जाता है और उसके अंक को अलग लिख लिया जाता है। इकाई, दहाई, सैंकड़ा आदि के लिए अलग-अलग टुकड़े प्रयोग किये जाते हैं।

(ग) निश्चित क्रम द्वारा (By systematic arrangement)—समग्र की इकाइयों को संख्यात्मक, भौगोलिक अथवा वर्णात्मक (Alphabetical) आधार पर क्रमबद्ध करके उनमें से सुविधानुसार आवश्यक संख्या में प्रतिदर्श पद चुन लिए जाते है। उदाहरणार्थ, यदि 50 विद्यार्थियों में से 10 चुनने हों तो उन्हे संख्यात्मक आधार पर क्रमबद्ध करके प्रत्येक पाँचवें विद्यार्थी को प्रतिदर्श में शामिल कर लिया जायेगा। प्रथम संख्या या तो 5 हो सकती है या इससे कम जैसे 3। यदि 5 है तो 5, 10, 15, 20...50 क्रम-संख्याओं वाले विद्यार्थियों को शामिल किया जायेगा। यदि 3 है तो 3, 8, 13....48 आदि क्रम-संख्या वाले विद्यार्थी प्रतिदर्श में सम्मिलित होंगे। इस रीति को व्यवस्थित दैव प्रतिचयन (Systematic Random Sampling) भी कहते है।

(घ) टिप्पेट की दैव संख्याएँ (Tippett's Random Numbers)—टिप्पेट ने अनेक देशों की जनसंख्या रिपोर्टों के आधार पर चार-चार अंकों वाली 10,400 संख्याओं की सारणी तैयार की है। इनमें से प्रथम चौबीस संख्याएँ इस प्रकार हैं—

2952	6641	3992	9792	7969	5911
3170	5624	4167	9524	1545	1396
7203	5356	1300	2693	2370	7483
3408	2762	3563	1089	6913	7691

टिप्पेट की सारणी के आधार पर यदि 5000 विद्यार्थियों में से 12 छांटने हों तो पहले 5000 विद्यार्थियों को 1 से 5000 तक क्रम संख्याओं में क्रमबद्ध किया जायेगा फिर उपर्युक्त सारणी में से आरम्भ से ऐसे 12 अंक छांट लिए जायेंगे जो 5000 से अधिक न हों। ये 12 अंक इस प्रकार हैं—

2952	3992	3170	4167	1545	1396
1300	2693	2370	3408	2762	3563

इन क्रम संख्याओं वाले 12 विद्यार्थी प्रतिदर्श में शामिल किये जायेंगे।

यदि समग्र की इकाइयाँ 100 से कम हों तो चार अंकों वाले दैव-अंकों को दो-दो अंकों में लिख दिया जायेगा। फिर इन दो-दो अंकों की क्रम संख्या वाली इकाइयाँ चुन ली जाएँगी। उदाहरणार्थ, 60 इकाइयों में से 6 चुनने के लिए 29, 52, 39, 31, 41 और 15 क्रम संख्याओं वाली इकाइयाँ प्रतिदर्श में शामिल कर ली जाएँगी।

फिशर एवं येट्स (Fisher and Yates) तथा कैन्डाल एवं स्मिथ (Kendall and

Smith) ने भी अलग-अलग दैव संख्याओं की सारणियों की रचना की है।

लाभ—दैव प्रतिचयन के निम्नलिखित लाभ हैं—

(i) **पक्षपात-रहित रीति**—दैव प्रतिदर्श छाँटने में व्यक्तिगत पूर्व धारणाओं या पक्षपात का कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि इकाइयाँ अवसर या सम्भावना के आधार पर चुनी जाती हैं। सभी इकाइयों के चुने जाने का समान अवसर होता है।

(ii) **बचत**—इस रीति मे समय, धन व श्रम की बचत होती है।

(iii) **समग्र का वास्तविक दिग्दर्शन**—इस रीति का एक विशेष लाभ यह है कि इसमें प्रतिदर्श इकाइयों द्वारा समग्र की वास्तविक विशेषताओं का समुचित और स्पष्ट दिग्दर्शन हो जाता है। यही कारण है कि दैव प्रतिदर्श समग्र का यथोचित प्रतिनिधि माना जाता है। वास्तव में वह समग्र का एक संक्षिप्त चित्र है।

(iv) **प्रतिचयन विभ्रम का माप**—इस प्रणाली में प्रतिचयन विभ्रमो का माप किया जा सकता है। सुनिश्चित सीमाओं के अन्तर्गत आने वाले प्रतिदर्श परिणामों को यथार्थ माना जाता है। इसके अतिरिक्त विभिन्न दैव प्रतिदर्शों की शुद्धता परखी जा सकती है।

सीमाएँ—दैव प्रतिचयन प्रणाली की निम्न परिसीमाएँ हैं—

(i) यदि प्रतिदर्श का आकार बहुत छोटा है या समग्र मे विविध प्रकार की इकाइयाँ हैं तो दैव प्रतिदर्श समग्र का यथोचित रूप से प्रतिनिधित्व नही करता।

(ii) जब समग्र बहुत छोटा हो या कुछ इकाइयाँ इतनी महत्त्वपूर्ण हो कि उनको प्रतिदर्श में शामिल करना अनिवार्य हो तो यह रीति उपयुक्त नही होती।

(iii) समग्र की इकाइयाँ एक-दूसरे से स्वतन्त्र होनी चाहिएँ।

मान्यताएँ—दैव प्रतिचयन प्रणाली की सफलता के लिए यह आवश्यक है कि इकाइयों का चयन निष्पक्षता से हो, प्रत्येक इकाई के प्रतिदर्श में शामिल होने का बराबर अवसर हो, विभिन्न इकाइयों का चयन परस्पर स्वतन्त्र हो और चुनाव के बाद प्रतिदर्श इकाइयों में परिवर्तन न किया जाए।

सविचार प्रतिचयन और दैव (याहच्छिक) प्रतिचयन में बहुत अन्तर है। प्रथम, सविचार प्रतिचयन मे जानबूझ कर स्वेच्छा (choice) से इकाइयाँ छाँटी जाती हैं जबकि दैव प्रतिचयन में इकाइयाँ दैव (chance) के आधार पर अर्थात् याहच्छिक रूप से चुनी जाती हैं। दूसरे, सविचार प्रतिचयन पक्षपात से अत्यधिक प्रभावित है जबकि दैव प्रतिचयन पक्षपात-रहित है। तीसरे, सविचार प्रतिचयन मे एक ही दिशा की सचयी विभ्रम होती है। इसके विपरीत, दैव प्रतिदर्श की विभ्रम सम और विषम होने के कारण क्षतिपूरक प्रकृति की होती है और प्रायिकता सिद्धान्त के आधार पर उनका अनुमान लगाया जा सकता है। चौथे, सविचार प्रतिचयन ऐसे अनुसन्धानों के लिए उपयुक्त है जहाँ समग्र मे लगभग एक ही प्रकार की इकाइयाँ हों तथा कुछ इकाइयाँ इतनी महत्त्वपूर्ण हो कि उनको प्रतिदर्श मे शामिल करना आवश्यक हो। इसके विपरीत, दैव प्रतिचयन प्रणाली अधिकांश क्षेत्रो में उपयुक्त है। यह रीति आजकल बहुत लोकप्रिय है।

(3) **स्तरित या मिश्रित प्रतिचयन (Stratified or Mixed Sampling)**—यह रीति उपर्युक्त दोनों रीतियों का सम्मिश्रण है तथा विविध गुणों वाले समग्र में से प्रतिदर्श छाँटने के लिए उपयुक्त है। इस रीति के अनुसार पहले, समग्र को उसकी विभिन्न विशेषताओ के आधार पर सविचार प्रतिचयन द्वारा अनेक सजातीय खण्डों या स्तरों (strata) में बाँट दिया जाता है। तत्पश्चात् उन स्तरों में से अलग-अलग दैव प्रतिचयन रीति द्वारा इकाइयाँ छाँट ली जाती हैं। उदाहरणार्थ, यदि किसी कारखाने में 5000 मजदूर काम करते हैं तो पहले उन्हें निश्चित विशेषताओ के आधार पर विभिन्न वर्गों मे बाँटा जायेगा और फिर प्रत्येक वर्ग में आनुपातिक रूप से दैव प्रतिदर्श छाँट लिया जायेगा। मान लीजिए, चार वर्गों मे, 1000, 500, 3200 और 300 मजदूर है और 20 प्रतिशत प्रतिदर्श निकालना है तो चारों वर्गों में से दैव-आधार पर क्रमशः 200, 100, 640 और 60 मजदूर चुन लिए जायेंगे। यह आनुपातिक स्तरित चयन होगा। उक्त उदाहरण मे यदि चारो वर्गों में से बराबर संख्या मे प्रतिदर्श इकाइयाँ चुनी जायें तो वह गैर-

ानुपातिक चयन कहलाएगा।

इस रीति में सविचार चयन और दैव-चयन दोनों के ही गुणों का समावेश है। विविध विशेषताओं वाले समग्र में से प्रतिदर्श छाँटने के लिए यह रीति अधिक प्रतिनिधित्व करने वाली और अधिक परिशुद्ध है।

(4) अन्य रीतियाँ (Other Methods)—उपर्युक्त तीन प्रमुख रीतियों के अतिरिक्त प्रतिचयन की अन्य कई प्रणालियाँ भी प्रचलित है जिनमें से निम्नलिखित उल्लेखनीय हैं—

(क) विस्तृत चयन (Extensive Sampling)—यह रीति संगणना पद्धति के समान है। इसमें अधिकाधिक इकाइयाँ छाँट ली जाती है। केवल उन्ही इकाइयों को छोड़ा जाता है जिनके बारे में समंक एकत्रित करना कठिन या असम्भव हो। इस प्रकार समग्र के बहुत बड़े भाग का अध्ययन हो जाता है।

(ख) बहु-स्तरीय दैव प्रतिचयन (Multi-stage Random Sampling)—इस रीति में प्रतिदर्श चुनने का कार्य अनेक स्तरों मे किया जाता है। प्रत्येक स्तर में दैव-चयन प्रतिदर्श द्वारा इकाइयाँ छाँटी जाती है। उदाहरणार्थ, उत्तर प्रदेश मे गेहूँ की प्रति एकड़ उपज ज्ञात करने के लिए यदि इस रीति द्वारा प्रतिदर्श चुनकर सर्वेक्षण किया जाये तो पहले दैविक आधार पर कुछ (मान लीजिए 5) जिले छाँट लिए जायेंगे, फिर उन 5 जिलों मे से 10-10 गांव छाँट लिए जायेंगे, फिर 50 गांवों में से 2-2 खेत चुन लिए जायेंगे। इस प्रकार कुल 100 छांटे हुए खेतों में फसल कटाई प्रयोग द्वारा गेहूँ की प्रति एकड़ उपज का यथोचित अनुमान लगाया जा सकता है।

(ग) अभ्यंश प्रतिचयन (Quota Sampling)—इसके अनुसार समग्र को कई भागों में बाँटा जाता है और प्रगणकों को यह निर्देश दे दिया जाता है कि उन्हें किस भाग में से कितनी इकाइयों का चुनाव करना है। अन्त में, प्रत्येक भाग में से प्रगणकों द्वारा अभ्यंश इकाइयों का चुनाव अपनी इच्छानुसार कर लिया जाता है। यह प्रणाली प्रगणकों की ईमानदारी, योग्यता व निष्पक्षता पर निर्भर है।

(घ) सुविधानुसार निदर्शन (Convenience Sampling)—इस रीति में सांख्यिक अपनी सुविधा के अनुसार प्रतिदर्श इकाइयाँ चुन लेता है, जैसे टेलीफोन-निर्देशिका में से नाम छाँट लेना, विश्वविद्यालय विवरण-पत्रिका में प्रकाशित प्राध्यापकों की सूची मे से प्रतिदर्श लेना, आदि। यह रीति सरल है किन्तु अत्यन्त अवैज्ञानिक और अविश्वसनीय है।

उपर्युक्त चयन रीति का चुनाव, समग्र की प्रकृति, इकाइयों की विशेषता, समग्र का आकार, शुद्धता की मात्रा, आदि पर निर्भर होता है। अधिकांश परिस्थितियों में दैव चयन तथा स्तरित प्रतिचयन प्रणालियाँ ही प्रयोग की जाती हैं।

प्रतिदर्श का आकार
(Size of Sample)

प्रतिदर्श की यथार्थता अधिकतर उसके आकार पर निर्भर होती है। सामान्यतः प्रतिदर्श जितना बड़ा होगा उतनी ही अधिक मात्रा में वह समग्र का प्रतिनिधित्व करेगा। परन्तु बहुत बड़े प्रतिदर्श का आयोजन करना अत्यन्त कठिन और खर्चीला होता है। इसके विपरीत, यदि समंक बहुत छोटा है तो वह पूर्ण रूप से समग्र की सभी विशेषताओं का प्रतिनिधित्व नहीं करेगा। अतः प्रतिदर्श यथोचित आकार का होना चाहिए। प्रतिदर्श का उचित आकार, समग्र के आकार, उसकी प्रकृति (सजातीय या विजातीय), इकाइयों की प्रकृति, शुद्धता के अपेक्षित स्तर, चयन विधि इत्यादि पर निर्भर होता है। यदि समग्र बड़े आकार का हो या उसमें विभिन्न विशेषताओं वाली इकाइयाँ पाई जाती हों या उच्च स्तर की शुद्धता अपेक्षित हो तो प्रतिदर्श भी बड़े आकार का ही होना चाहिए। इसके विपरीत, छोटे और समान इकाइयों वाले समग्र का प्रतिनिधित्व एक छोटे आकार के प्रतिदर्श द्वारा भली-भाँति हो सकता है। अतः प्रतिदर्श की शुद्धता का उसके आकार से ...त सम्बन्ध है। एक दैव प्रतिदर्श की शुद्धता उसके आकार की वृद्धि के वर्गमूल के

अनुपात में बढ़ती है।

प्रतिदर्श की शुद्धता उसके आकार और चयन-रीति दोनों पर निर्भर होती है। क्राक्सटन तथा काउडेन ने ठीक कहा है, 'वास्तव में, एक प्रतिदर्श में केवल आकार से ही प्रतिनिधित्व का आश्वासन नहीं हो जाता। एक बड़े किन्तु दूषित रीति द्वारा चुने गये प्रतिदर्श की तुलना में एक छोटे दैविक या स्तरित प्रतिदर्श के कहीं उत्तम होने की सम्भावना होती है।'[1] दूसरे शब्दों में, एक प्रतिदर्श बड़ा होते हुए भी व्यर्थ हो सकता है यदि वह दैव-चयन पर आधारित नहीं है अथवा दैव-चयन पर आधारित हुए भी वह अविश्वसनीय हो सकता है यदि वह छोटा है।

प्रतिदर्श में विश्वसनीयता की जांच (Test of Reliability of Sample)—प्रतिदर्शों की विश्वसनीयता की जांच दो रीतियों से की जा सकती है। प्रथम रीति के अनुसार समग्र में से पहले प्रतिदर्श के आकार के बराबर अन्य प्रतिदर्श निकाले जाते हैं तथा उनके परिणामों की आपस में तुलना की जाती है यदि परिणामों में समानता होती है तो प्रतिदर्श विश्वसनीय है अन्यथा नहीं। दूसरी रीति के अन्तर्गत, चुने हुए प्रतिदर्शों को दो बराबर भागों में बाँटकर उनकी अलग-अलग विशेषताओं का अध्ययन किया जाता है। यदि दोनों भागों की विशेषताओं में समानता पाई जाये तो प्रतिदर्श निश्चित रूप से विश्वसनीय माना जाता है। प्रतिदर्श की इस प्रकार की जाँच को स्थायित्व-परीक्षण (stability test) भी कहते हैं।

प्रतिचयन में अभिनति
(Bias in Sampling)

प्रतिचयन की किसी रीति द्वारा चुना गया प्रतिदर्श अभिनति (bias) से प्रभावित हो सकता है। एक अभिनति-पूर्ण प्रतिदर्श समग्र का वास्तविक प्रतिनिधि नहीं हो सकता। अभिनति वास्तव में प्रतिदर्श की उपयोगिता को समाप्त कर देती है। अतः प्रतिदर्श सर्वेक्षणों में अभिनति के स्रोतों को स्पष्ट रूप से पहचानना और उन्हें दूर करना अनुसन्धान की परिशुद्धता के लिए परमावश्यक है।

चेतन तथा अवचेतन अभिनति (Conscious and Sub-conscious Bias)—अभिनति (bias) अवलोकन की उन त्रुटियों का समूह है जो प्रतिदर्श-इकाइयों के चयन को प्रभावित करती हैं और संचयी (cumulative) प्रकृति की होती हैं। अभिनति चेतन (conscious) अथवा अवचेतन *(sub-concious) हो सकती है। चेतन अभिनति पूर्व आयोजित होती है और अनुसन्धानकर्ता की* व्यक्तिगत पूर्व-धारणाओं के कारण उत्पन्न होती है। उदाहरणार्थ, मोदीनगर के औद्योगिक मजदूरों की रहन-सहन की स्थिति के बारे में सर्वेक्षण करने के लिए अन्वेषक ऐसे मजदूरों को प्रतिदर्श में छाँट सकता है जिनकी आर्थिक स्थिति कुछ अच्छी हो। ऐसे 'अभिनत प्रतिदर्श' (biassed sample) से वह *यह सिद्ध कर सकता है कि मोदीनगर में मजदूरों की रहन-सहन की स्थिति अच्छी है।* इसके विपरीत, एक साम्यवादी दृष्टिकोण रखने वाला अन्वेषक जानबूझकर ऐसे मजदूरों को अपने प्रतिदर्श में शामिल करेगा जिनकी मजदूरी, आर्थिक स्थिति आदि औसत से भी कम हो ताकि वह अपनी पूर्व-धारणा के अनुसार यह निष्कर्ष निकाल सके कि मोदीनगर के औद्योगिक मजदूरों की *रहन-सहन की स्थिति बहुत खराब है। इस प्रकार अपनी मानसिक प्रवृत्ति और पूर्वाग्रहों के अनुसार* अभिनत अन्वेषक प्रतिदर्श को विकृत कर देता है। कभी-कभी अन्वेषक द्वारा पूर्ण रूप से निष्पक्ष दृष्टिकोण अपनाये जाने पर भी प्रतिदर्श-चयन की क्रिया में अनजाने में अभिनति का समावेश हो जाता है जिसे अवचेतन अभिनति (sub-conscious or unconscious bias) कहते हैं। अवचेतन अभिनति के उतने गम्भीर परिणाम नहीं होते जितने चेतन अभिनति के होते हैं। उक्त अभिनति की रोकथाम का प्रमुख उपाय यह है कि चयन-प्रक्रिया में मानव-अंश को हटाकर यन्त्रों की सहायता

[1] Mere size, of course, does not assure representativeness in a sample. A small random or stratified sample is apt to be much superior to a larger but badly selected sample. —Croxton and Cowden, *Applied General Statistics*, p. 32.

लेनी चाहिए।

अभिनति के स्रोत (Sources of Bias)—प्रतिदर्श अनुसन्धानों में अभिनति के अनेक स्रोत होते हैं जिनको निम्न तीन वर्गों में बाँटा जा सकता है—

प्रतिचयन में अभिनति

(क) दोषपूर्ण चयन	(ख) दोषपूर्ण सूचना सकलन	(ग) दोषपूर्ण विश्लेषण व निर्वचन
(i) सविचार चयन	(i) अपूर्ण अन्वेषण व अप्राप्त उत्तर	(i) अनुपयुक्त सांख्यिकीय रीति
(ii) दैव चयन मे अभिनति	(ii) दोषपूर्ण प्रश्नावली	(ii) अन्वेषक के पूर्वाग्रह
(iii) इकाइयों का प्रतिस्थापन	(iii) अन्वेषक की पूर्व-धारणाएँ	
	(iv) संमूचकों में अभिनति	

(क) प्रतिदर्श का दोषपूर्ण चयन (Faulty Selection of Sample)—प्रतिदर्श के चयन की प्रक्रिया मे जाने-अनजाने अनेक त्रुटियाँ उत्पन्न हो सकती हैं जिनसे प्रतिदर्श समग्र का वास्तविक प्रतिनिधि नही रह पाता। अभिनतिपूर्ण चयन के तीन प्रमुख स्रोत हैं—

(i) सविचार प्रतिचयन में इकाइयाँ अनुसन्धानकर्त्ता स्वेच्छा से चुनता है, अतः प्रतिदर्श पर उसकी व्यक्तिगत धारणाओं का पूरा प्रभाव पड़ जाता है। स्पष्ट है कि इस प्रकार मानव अभिनति से प्रभावित प्रतिदर्श समष्टि का सही-सही प्रतिनिधित्व नही कर सकता।

(ii) दैव-प्रतिचयन में चेतन मानव-अभिनति की सम्भावना अपेक्षाकृत कम रहती है। परन्तु एक पूर्णतः दैविक प्रतिदर्श का चयन अत्यन्त कठिन है। मानव-कारको से उसमें अवचेतन-अभिनति हो सकती है क्योकि दैव-चयन मे मनुष्य एक अपूर्ण और असन्तोषजनक साधन है।

(iii) प्रतिदर्श इकाइयों का प्रतिस्थापन (substitution) भी दोषपूर्ण चयन का एक स्वरूप है। कभी-कभी किसी कारणवश याहच्छिक रूप से चुनी गई प्रतिदर्श इकाई के स्थान पर कोई दूसरी इकाई शामिल कर ली जाती है जिससे अभिनति उत्पन्न हो जाती है। उदाहरण के लिए, यदि किसी गली का दसवाँ मकान प्रतिदर्श मे दैविक आधार पर चुन लिया जाए परन्तु बाद मे उसके स्थान पर ग्यारहवें मकान में रहने वालो से सूचना प्राप्त की जाए तो परिणाम पूर्णतः याहच्छिक नहीं होगे वरन् उनमें प्रतिस्थापन के कारण अभिनति हो जाएगी।

(ख) दोषपूर्ण सूचना-संकलन (Faulty Collection of Information)—समंकों के संकलन मे जो त्रुटियाँ रह जाती हैं उनसे सगणना और प्रतिदर्श—दोनों प्रकार के सर्वेक्षण प्रभावित होते हैं परन्तु आकार अपेक्षाकृत छोटा होने के कारण इन त्रुटियों का प्रतिदर्श-अनुसन्धानों पर अत्यधिक प्रभाव पड़ता है। प्रतिदर्श अन्वेषण द्वारा समक संकलन मे अभिनति बहुधा निम्न कारणों से उत्पन्न होती है—

(i) **अपूर्ण अन्वेषण व उत्तरों की अप्राप्ति**—यदि प्रतिदर्श में सम्मिलित सभी इकाइयों के सम्बन्ध में सूचना उपलब्ध नही की जाती तो अभिनति का अंश आ जाता है। अधिकतर डाक द्वारा अनुसूचियाँ भेजने पर उनमें से अधिकाश वापस ही नही आतीं; जो आती है वे अपूर्ण रहती है। उत्तरों की अप्राप्ति (non-response) या अपूर्ण व अपर्याप्त उत्तरो की प्राप्ति अभिनति का महत्त्वपूर्ण स्रोत है।

(ii) **दोषपूर्ण प्रश्नावली**—यह भी प्रतिचयन मे अभिनति का एक कारण है। यदि प्रश्न सरल स्पष्ट व असंदिग्ध न हों तो सही उत्तर प्राप्त होना बहुत कठिन हो जाता है। एक उत्तम प्रश्नावली मे अनेक आवश्यक तत्त्व होने चाहिएँ जिनका पिछले अध्याय मे उल्लेख किया गया है।

(iii) **अन्वेषक की पूर्व धारणाएँ**—ये प्रतिदर्श अनुसन्धान को अभिनति-पूर्ण बना देती हैं। का एकांगी और पक्षपातपूर्ण दृष्टिकोण वास्तविक व शुद्ध उत्तर प्राप्त करने मे सबसे बड़ा होता है। वह अपने मतानुसार समंकों को विकृत और अभिनत करके एकत्र कर सकता है।

(iv) संसूचकों में अभिनति—अन्वेषक की सावधानी के बावजूद भी सूचना देने वाले कभी-कभी पक्षपातपूर्ण समंक देते हैं। उदाहरणार्थ, लड़कियों द्वारा अपनी आयु और व्यापारियों द्वारा अपनी आय अधिकतर कम ही बतलाई जाती है।

(ग) दोषपूर्ण विश्लेषण व निर्वचन (Faulty Analysis and Interpretation)—संग्रहीत समकों के विश्लेषण और निर्वचन की क्रियाओं में सांख्यिकीय रीतियों का गलत प्रयोग करके तथा व्यक्तिगत पूर्वाग्रहों के कारण भी प्रतिचयन अनुसन्धानों में अभिनति का समावेश हो जाता है।

(i) अनुपयुक्त सांख्यिकीय रीति—इसका प्रयोग विश्लेषण व निर्वचन में अभिनति का मुख्य स्रोत है। भारांकित समान्तर माध्य के स्थान पर यदि सरल समान्तर माध्य का प्रयोग किया जाए तो परिणाम अभिनतिपूर्ण होंगे। प्रत्येक सांख्यिकीय रीति की कुछ मान्यताएँ और परिसीमाएँ होती हैं जिनकी उपेक्षा करने से अभिनति का समावेश हो जाता है।

(ii) अन्वेषक के पूर्वाग्रह—समंकों का निर्वचन मनुष्य द्वारा किया जाता है, अतः उसकी पूर्व-धारणाएँ, अभिरुचियाँ व मनोवृत्ति का परिणामों के अर्थ-निर्वचन पर पूरा प्रभाव पड़ता है जिसके कारण निष्कर्ष यथार्थता से दूर हो जाते हैं।

वर्नर हर्श[1] ने अभिनति के दस प्रधान स्रोतों का उल्लेख किया है जो इस प्रकार हैं—(i) अप्रतिनिधि संसूचक (unrepresentative respondents); (ii) सर्वेक्षण-अधिकारी के प्रति पूर्वाग्रह (prejudices toward survey sponsor); (iii) प्रश्नावली अभिनति (questionnaire bias); (iv) अन्वेषक अभिनति (interviewer bias); (v) संसूचक की बदलती हुई मनोवृत्ति (changing disposition of respondent); (vi) अप्रतिनिधि सर्वेक्षण समय (unrepresentative survey time); (vii) अन्तिम तिथि के बाद प्राप्त समकों की उपेक्षा (handling of late reports); (viii) उत्तर की अप्राप्ति (non-response); (ix) अनुपयुक्त सांख्यिकीय रीति (inappropriate statistical method); (x) अन्वेषक की पूर्व धारणाएँ और पक्षपात (Investigator's predilections and partiality)। प्रतिदर्श में अभिनति होने से परिणाम, अशुद्ध, निरर्थक और भ्रान्तिपूर्ण हो जाते हैं।[2]

अभिनति की रोकथाम (Avoidance of Bias)—प्रतिदर्श अनुसन्धान में अभिनति का अंश होने पर उससे पूर्णतया निष्पक्ष परिणाम नहीं निकाले जा सकते। अतः अभिनति के विभिन्न स्रोतों को दूर करना परमावश्यक है। प्रथम, प्रतिदर्श का चयन पूर्णतया यादृच्छिक (*wholly random*) रूप में किया जाना चाहिए अर्थात् यन्त्रों या दैविक अंकों की सहायता से इस प्रकार प्रतिदर्श इकाइयों का चुनाव करना चाहिए कि समग्र की प्रत्येक इकाई के प्रतिदर्श में शामिल होने की बराबर सम्भाविता हो। चयन प्रक्रिया में मानव कारकों के समावेश से अभिनति हो जाती है। अतः अभिनति-रहित चुनाव के लिए प्रतिदर्श को मानव-कारकों से मुक्त रखना चाहिए। दूसरे, एक बार चुने हुए प्रतिदर्श की इकाइयों में कोई प्रतिस्थापन या परिवर्तन नहीं करना चाहिए। **तीसरे,** प्रतिदर्श की किसी इकाई को यथासम्भव कभी छोड़ना नहीं चाहिए। चौथे, प्रश्नावली इतनी सरल, स्पष्ट व उत्तम होनी चाहिए कि ठीक-ठीक उत्तर प्राप्त हो सकें। पाँचवे, अन्वेषक पूर्णतया निष्पक्ष, योग्य व अनुभवी होने चाहिएँ जिससे अन्वेषक अभिनति और संसूचक अभिनति की रोकथाम हो सके। अन्त में, विश्लेषण की उपयुक्त विधि अपनायी जानी चाहिए और निष्पक्ष ढंग से समंकों का निर्वचन होना चाहिए। उक्त सावधानियाँ लेने पर अभिनति के स्रोत नियन्त्रित किये जा सकते हैं और प्रतिदर्श-चयन, सर्वेक्षण व निर्वचन की क्रियाओं में अभिनति को दूर किया जा सकता है।

[1] See Werner Z. Hirsch, *Introduction to Modern Statistics*, pp. 105-108.

[2] 'Any bias that may creep into the sample data may make the results inaccurate, useless or worse, misleading.' *Ibid.*, p. 105.

प्रायिकता-सिद्धान्त
(Theory of Probability)

प्रतिदर्श अनुसन्धान प्रायिकता या सम्भावना सिद्धान्त (Theory of Probability) पर आधारित है। प्रायिकता एक गणितीय धारणा है। कोनर के अनुसार, 'प्रायिकता हमारी इस प्रत्याशा का माप है कि एक घटना होगी या नहीं होगी।'[1] प्रायिकता सिद्धान्त किसी अनिश्चित घटना के होने या न होने पर प्रकाश डालता है। यदि किसी घटना के होने के 'm' ढंग हैं और न होने के 'n' ढंग हैं तो उस घटना के होने या न होने की प्रायिकता निम्न प्रकार ज्ञात की जा सकती है—

$p = \frac{m}{m+n}$, जहाँ p घटना के घटित होने की प्रायिकता है।

$q = \frac{n}{m+n}$, जहाँ q घटना के न होने की प्रायिकता है।

उदाहरण के लिए, यदि किसी सिक्के को हवा में उछाला जाये तो वह या तो 'चित' (head) गिरेगा या 'पट' (tail)। चित गिरने की सम्भावना $\frac{1}{2}$ है और इसी प्रकार उसके पट गिरने की सम्भावना भी $\frac{1}{2}$ है। यदि सिक्के को 1000 बार उछाला जाये तो लगभग 500 बार वह चित गिरेगा तथा 500 बार पट। इसी प्रकार, ताश की पूरी गड्डी में से कोई पत्ता खींचने पर उसके 'पान की बेगम' निकलने की सम्भावना $\frac{1}{52}$ है। 'हुकुम का बादशाह' निकाले जाने की सम्भावना भी $\frac{1}{52}$ है। किसी एक इक्के (any ace) के निकाले जाने की सम्भावना $\frac{4}{52}$ या $\frac{1}{13}$ है। इस प्रकार निम्न सूत्रानुसार प्रायिकता ज्ञात की जा सकती है—

$$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल घटनाओं की संख्या}}{\text{समस्त घटनाओं की कुल संख्या}}$$

प्रायिकता एक अनुपात है। निश्चितता की स्थिति में उसका मान 1 होता है और असम्भव घटना के लिए उसका मूल्य शून्य (0) होता है।

प्रायिकता-सिद्धान्त से यह स्पष्ट हो जाता है कि यदि किसी समग्र में से विभिन्न इकाइयों के चुने जाने की समान सम्भावना हो और उसमें से यादृच्छिक आधार पर कुछ इकाइयाँ छाँटी जायें, तो चुने हुए प्रतिदर्श में विभिन्न विशेषताओं वाली इकाइयाँ उसी अनुपात में होंगी जिसमें वे पूरे समग्र में पाई जाती है। इस सिद्धान्त के आधार पर यह कहा जा सकता है कि दैव प्रतिदर्श पर्याप्त रूप से समग्र की विशेषताओं का प्रतिनिधित्व करता है। बीमा व्यवसाय तथा स्कन्ध व उपज विपणि के व्यवहार अधिकतर प्रायिकता-सिद्धान्त के आधार पर ही किये जाते हैं। इसी सिद्धान्त से सांख्यिकीय नियमितता नियम तथा महांक जड़ता नियम उद्धृत किये गये हैं।

सांख्यिकीय नियमितता नियम
(Law of Statistical Regularity)

सांख्यिकीय नियमितता नियम प्रायिकता सिद्धान्त पर आधारित है। किंग ने इस नियम की व्याख्या इन शब्दों में की है—'यदि किसी बहुत बड़े समूह में से दैव प्रतिचयन द्वारा यथोचित रूप से बड़ी संख्या में, पदों या इकाइयों को चुन लिया जाये, तो यह लगभग निश्चित है कि इन इकाइयों में, औसत रूप से, उस बड़े समूह के गुण आ जायेंगे।'[2] यह प्रवृत्ति ही सांख्यिकीय नियमितता

[1] 'Probability is a measure of our expectation that an event will (or will not) happen.' —Connor, *Statistics*, p. 114.

[2] 'A moderately large number of items chosen *at random* from among a very large up are almost sure, *on the average*, to have the characteristics of the large group.' ing, *Elements of Statistical Methods*, p. 28.

नियम कहलाती है। उदाहरणार्थ, यदि किसी कॉलिज के 4000 विद्यार्थियों में से दैविक आधार पर 400 विद्यार्थी चुन लिए जायें और उनकी ऊँचाई का अध्ययन किया जाये तो प्रतिदर्श में सम्मिलित विद्यार्थियों की औसत ऊँचाई लगभग वही होगी जो पूरे समग्र के विद्यार्थियों की है।

नियम की सीमाएँ—इस नियम की निम्नलिखित सीमाएँ हैं—

(i) **दैव प्रतिचयन**—यह नियम तभी लागू होता है जब इकाइयाँ दैव प्रणाली के अनुसार चुनी जायें जिससे समग्र की प्रत्येक इकाई को प्रतिदर्श में शामिल होने का समान अवसर प्राप्त हो जाए। सविचार चयन पर यह नियम लागू नहीं होगा।

(ii) **यथोचित आकार**—प्रतिदर्श पर्याप्त रूप से बड़ा होना चाहिए। बहुत बड़ा प्रतिदर्श समग्र का प्रतिनिधित्व नही करता। प्रतिदर्श का यथोचित आकार, समग्र के आकार, उसकी इकाइयो की प्रकृति आदि पर निर्भर होता है।

(iii) **औसत रूप से सत्य**—यह नियम एक प्रवृत्ति की ओर संकेत करता है जो औसत रूप से ही सत्य है। दैव प्रतिदर्श के परिणाम पूर्ण रूप से समग्र पर लागू नहीं होते। प्रतिदर्श और समग्र के परिणामों में कुछ अन्तर हो सकता है।

उपयोगिता—सांख्यिकी के क्षेत्र में यह नियम बहुत उपयोगी है। वास्तव में यह नियम याहच्छिक प्रतिचयन का आधार है। इस नियम से ही यह सम्भव हुआ है कि पूरे समग्र का अध्ययन न करके उसमें से निकाले गये एक बड़े दैव प्रतिदर्श का विश्लेषण करके समग्र के बारे में निष्कर्ष निकाले जायें तथा आन्तरगणन व बाह्यगणन द्वारा समुचित सांख्यिकीय अनुमान लगाये जायें। दैव पर आधारित घटनाओं जैसे जुए के खेल, बीमा-व्यवसाय, अपराधों, आत्महत्याओं, दुर्घटनाओं आदि पर यह नियम लागू होता है। इस प्रकार, यह नियम व्यावहारिक जगत् में बहुत उपयोगी है।

महांक जड़ता नियम
(Law of Inertia of Large Numbers)

महांक जड़ता नियम सांख्यिकी नियमितता नियम का उपप्रमेय (corollary) है। इस नियम के अनुसार बड़ी संख्याएँ छोटी संख्याओं की अपेक्षा अधिक स्थिर होती हैं अर्थात् बड़ी संख्याओं में अपेक्षाकृत बहुत कम परिवर्तन होते हैं। छोटी संख्याओं में अनेक कारणों से दोनों दिशाओं में परिवर्तन होते रहते हैं जिनकी आपस में एक-दूसरे से क्षतिपूर्ति हो जाती है। परिणाम यह होता है कि अनेक छोटी संख्याओं को मिलाकर जब बड़ी संख्या प्राप्त की जाती है तो उसमें कुल परिवर्तन की मात्रा बहुत कम हो जाती है और एक प्रकार की स्थिरता दृष्टिगोचर होने लगती है। उदाहरण के लिए, उत्तर प्रदेश के विभिन्न जिलो में गन्ने या गेहूँ के उत्पादन में गत वर्ष की तुलना में अत्यधिक परिवर्तन होते रहते हैं परन्तु वे परिवर्तन सम और विषम दोनों प्रकार के होते हैं। कुछ जिलों में बाढ़ या सूखे के कारण फसल बहुत कम हो सकती है। साथ ही साथ, कुछ जिलों में अनुकूल परिस्थितियों के कारण उपज अधिक भी हो सकती है। दोनों प्रकार के परिवर्तन एक-दूसरे से कट जाते हैं और समस्त उत्तर प्रदेश की उपज पर उनका अधिक प्रभाव नहीं पड़ता। वह लगभग स्थिर रहती है। इसी प्रकार भारत के विभिन्न प्रदेशों में मृत्यु-दर में कमी या वृद्धि हो सकती है परन्तु पूरे देश की मृत्यु-दर में अधिकतर स्थिरता रहती है।

महांकों में स्थिरता की प्रवृत्ति से यह अनुमान नही लगा लेना चाहिए कि बड़ी संख्याओं में कभी परिवर्तन ही नही होते। वास्तव में अति-दीर्घकाल में बड़ी मात्रा के समंकों में एक निश्चित दिशा मे परिवर्तन हो सकते हैं परन्तु वे परिवर्तन अल्पांकों या छोटी संख्याओं की अपेक्षा बहुत कम होते हैं।

सांख्यिकी में महांक-जड़ता नियम एक महत्त्वपूर्ण स्थान रखता है। *मुख्यतः दैव प्रतिचयन* मे यह नियम अत्यन्त उपयोगी है। इस सिद्धान्त के कारण ही बड़ी मात्रा के दैव प्रतिदर्शों में अत्यधिक शुद्धता होती है। दैव प्रतिदर्श में जितनी अधिक इकाइयाँ होंगी उसमें उतनी ही अधिक शुद्धता होगी क्योंकि विपरीत गुणों वाली इकाइयो की परस्पर सम्पूर्ति हो जायगी और इस प्रकार

समग्र का वास्तविक चित्र स्पष्ट हो जायगा । अतः महांक-जड़ता नियम का सांख्यिकी में बहुत महत्त्व है । वास्तव में, जैसा कि डा० बाउले ने कहा है, 'बड़ी संख्याओं में अत्यधिक जड़ता होती है''''इस स्थिरता के कारण ही सांख्यिकीय माप सम्भव होता है ।'[1] यदि बड़ी संख्याओं में स्थिरता न हो तो भावी अनुमान विश्वसनीय नहीं हो सकते ।

प्रश्न

1. 'समष्टि' और 'प्रतिदर्श' से आप क्या समझते हैं ? विभिन्न प्रकार के समग्रों के विशेष लक्षण उदाहरण सहित बताइए ।
   What do you understand by 'Universe' and 'Sample' ? Describe, with examples, the special features of the different types of universes.
2. संगणना व प्रतिदर्श अनुसन्धानों का अन्तर बताइये और संक्षेप में उनके तुलनात्मक लाभों का वर्णन कीजिए । उन परिस्थितियों को स्पष्ट कीजिए जिनके अन्तर्गत इनमें से प्रत्येक रीति का प्रयोग लाभदायक हो सकता है ।
   Distinguish between a census and a sample inquiry and discuss briefly their comparative advantages. Explain the conditions under which each of these methods may be used with advantage.
   [B. Com., Banaras, 1962 and 1956 ; B. Com., Raj., 1955]
3. सामाजिक व आर्थिक अनुसन्धानों में प्रयुक्त सम्पूर्ण गणना रीति (संगणना) तथा दैव प्रतिचयन रीति के लाभ और दोषों की तुलना कीजिए ।
   Compare the relative advantages and disadvantages of the method of complete enumeration (census) and the method of random sampling in social and economic inquiries. *[B. Com., Kanpur, 1970 ; Agra, 1969, 1966; Jabalpur, 1962]*
4. संगणना सर्वेक्षण तथा प्रतिदर्श सर्वेक्षण के बीच अन्तर स्पष्ट कीजिए । दोनों के गुण एवं दोषों का तुलनात्मक विवरण दीजिए ।
   Distinguish between a Census survey and a Sample survey. What are their relative merits and defects ? *[B. Com., Vikram, 1971 ; Meerut, 1970]*
5. आर्थिक विश्लेषण में प्रतिचयन का क्या अर्थ है इसकी विवेचना कीजिए ।
   Discuss the role of sampling in economic analysis. *[M. A., Meerut, 1969]*
6. समंक-संकलन की संगणना विधि तथा प्रतिदर्श विधि में भेद कीजिए । प्रतिदर्श कितने प्रकार के होते हैं और उनकी क्या विशेषताएँ हैं ? उनका महत्त्व समझाइए ।
   Distinguish between a census and a sample method of collecting statistics. What are the various kinds of a sample and what are their essentials ? Discuss their importance. *[B. Com., Meerut, 1972]*
7. प्रतिदर्श चुनने की विभिन्न विधियों का वर्णन कीजिए । उदाहरण देते हुए प्रत्येक के गुणों और दोषों को बताइए ।
   Describe the various methods of selecting a sample. State the merits and demerits of each, giving examples. *[B. Com., Gorakhpur, 1971]*
8. सम्पूर्ण गणना तथा दैव प्रतिदर्श सर्वेक्षण के गुणों की तुलना कीजिए । क्या संगणना का परीक्षण प्रतिचयन द्वारा किया जा सकता है ? यदि हाँ, तो क्या आप भारत में प्रयुक्त ऐसी किसी योजना का विवेचन कर सकते हैं ?
   Compare the merits of a census enumeration and a random sample survey. Can a census count be verified through sampling ? If so, can you discuss any such plan used in India ? *[B. Com., T. D. C. (Final), Rajasthan, 1962]*

[1] 'Great numbers...have great inertia. It is this constancy of great numbers that makes statistical measurement possible.' —Dr. Bowley, *Elements of Statistics*, p. 64.

9. 'एक अच्छा प्रतिदर्श दैव चयन पर आधारित होना चाहिए।' विवेचन कीजिए।
'A good sample must be based on random selection.' Discuss.
[B. Com., Vikram, 1970 ; M. A., Agra, 1962]

10. 'कुछ निश्चित परिस्थितियों में प्रतिचयन एक आवश्यकता है।' एक उपयुक्त उदाहरण द्वारा इस कथन को समझाइए। प्रतिचयन की अधिक प्रचलित विधियाँ कौन-कौन सी हैं? दैव प्रतिदर्श की तुलना में स्तरित प्रतिदर्श के कुछ लाभों की व्याख्या कीजिए।
'Sampling is a necessity under certain conditions.' Illustrate this by a suitable example. What are the well-known methods of sampling ? Indicate some of the advantages of stratified sampling over random sampling. *[I. A. S., 1963]*

11. 'एक प्रतिदर्श बड़ा होते हुए भी व्यर्थ हो सकता है क्योंकि वह दैव चयन पर आधारित नहीं; अथवा दैव चयन पर आधारित होते हुए भी अविश्वसनीय हो सकता है, क्योंकि वह छोटा है।' इस कथन की समीक्षा कीजिए और दैनिक जीवन में प्रतिचयन के महत्त्व को समझाइए।
'A sample may be large yet worthless, because it is not random ; or it may be random but unreliable, because it is small.' Comment upon this statement, and explain the importance of sampling in our daily life. *[B. Com , Agra, 1962]*

12. सांख्यिकीय अनुसन्धानों में प्रतिचयन क्यों आवश्यक है? प्रतिचयन की अधिक प्रचलित महत्त्वपूर्ण रीतियों को समझाइए।
Why is sampling necessary in statistical investigations ? Explain the important methods of sampling commonly used.
[B. Com., T. D. C. (Final), Raj., 1971 ; M. Com . Agra, 1966 ; Vikram, 1961]

13. 'किसी प्रतिदर्श सर्वेक्षण में विभ्रम के अनेक स्रोत होते हैं। एक पूर्ण रूप से यथार्थ सर्वेक्षण कल्पना मात्र है।' इस कथन का विवेचन कीजिए।
'In any sample survey, there are many sources of error. A perfect survey is a myth.' Discuss this statement.

14. दैव प्रतिचयन का क्या अर्थ है? प्रतिदर्श का चुनाव करने में अभिनति की रोकथाम करने की रीतियों का विवेचन कीजिए।
What is meant by 'random sample.' Discuss the methods of avoiding bias in selecting a sample. *[M. A., Raj., 1965]*

15. 'वास्तव में एक प्रतिदर्श में केवल आकार से ही प्रतिनिधित्व का आश्वासन नहीं होता। एक बड़े किन्तु दूषित रीति द्वारा चुने गए प्रतिदर्श की तुलना में एक छोटे दैव या स्तरित प्रतिदर्श के कहीं उत्तम होने की सम्भावना होती है।' उक्त कथन की व्याख्या करते हुए प्रतिचयन रीति के गुण, दोष व सीमाओं पर प्रकाश डालिए।
'Mere size of course does not assure representativeness in a sample. A small random or stratified sample is apt to be much superior to a larger but badly selected sample.' Discuss this statement pointing out the advantages, disadvantages and limitations of a sample method. *[B. Com., T. D. C. (Final), Raj., 1970]*

16. उपयुक्त उदाहरण देते हुए निम्न नियमों को समझाइए—
(अ) सांख्यिकीय नियमितता नियम।
(ब) महांक जड़ता नियम।
Explain with the help of suitable example—
(a) The Law of Statistical Regularity,
(b) The Law of Inertia of Large Numbers. *[B. Com., Meerut, 1968]*

17. सांख्यिकीय नियमितता नियम और महांक जड़ता नियम को स्पष्ट रूप से समझाइए।
State and explain the law of statistical regularity and the law of inertia of large numbers. *[B. Com., Agra, 1965, 1950 ; Raj., 1954]*

18. सांख्यिकीय अनुसन्धानों के परिणाम किस सीमा तक शुद्ध प्रतिचयन पर निर्भर होते हैं? प्रतिनिधि सामग्री उपलब्ध करने की विभिन्न रीतियों की तुलना कीजिए।
How far do the results of statistical investigations depend upon correct sampling ? Compare the different methods used to secure representative data.
[B. Com., Indore, 1965]

19 प्रतिदर्श-अनुसन्धानों में 'सूक्ष्मता' से आप क्या समझते हैं? उदाहरण देकर बताइए। सूक्ष्मता किन-किन तत्त्वों पर निर्भर होती है?

What do you understand by 'Precision in sampling inquiries' ? Explain with examples. What are the factors upon which precision depends ?

20. 'प्रतिचयन में अभिनति' से आप क्या समझते हैं ? अभिनति के कौन-कौन से स्रोत हैं ? प्रतिचयन में अभिनति को किस प्रकार कम किया जा सकता है ?
What do you understand by the term 'bias in sampling.' What are its sources ? How can bias in sample studies be reduced ?

21. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए—
Write short notes on the following—
(क) प्रायिकता सिद्धान्त (Theory of Probability) ।
(ख) प्रतिनिधि समंक (Representative Data) ।
(ग) बहुस्तरीय दैव चयन (*Multi-stage Area Random Sampling*) ।
(घ) टिप्पेट के दैव अंक (Tippett's Random Numbers) ।
(च) प्रतिचयन के उद्देश्य (Objects of Sampling) ।

22. सांख्यिकी में प्रतिदर्श तथा प्रतिचयन का क्या महत्व है ? उपयुक्त उदाहरण सहित उत्तर दीजिए ।
What is the importance of *Sample* and *Sampling* in Statistics ? Answer with suitable examples. *[M. A., Allahabad, 1973]*

23. सांख्यिकीय अनुसन्धानों के परिणाम किस सीमा तक शुद्ध प्रतिचयन पर निर्भर होते हैं ? प्रतिनिधि समंक प्राप्त करने की विभिन्न प्रतिचयन विधियों की तुलना कीजिये ।
How far do the results of statistical investigations depend upon correct sampling ? Compare the different methods of sampling used to secure representative data.
[B. Com. (II), Rajasthan, Optional Paper, 1973]

24. प्रतिदर्श की विभिन्न रीतियों को बतलाइये ।
Give an account of the different techniques of sampling.
[B. Com., T. D. C. (Final), Raj., 1973]

25. स्तरित और बहुचरण यादृच्छिक प्रतिचयनों की परिभाषा दीजिए । ये प्रतिचयन कब आवश्यक होते हैं ?
Define stratified and multi-stage random sampling. When are these techniques of sampling necessary ? *[M. A., Rajasthan, 1973]*

6

समंकों का सम्पादन
(EDITING OF STATISTICAL DATA)

प्राथमिक तथा द्वितीयक रीतियों द्वारा संकलित समंको में प्रायः अनेक अशुद्धियाँ और अनियमितताएँ पाई जाती हैं। समंकों का विश्लेषण व निर्वचन करने से पूर्व यथासम्भव उन त्रुटियों की जाँच करना नितान्त आवश्यक है ताकि शुद्ध समंकों के आधार पर सही निष्कर्ष निकाले जा सकें। संकलित सांख्यिकीय सामग्री में अशुद्धियों व त्रुटियों की विधिवत् जाँच करके उनमें आवश्यक संशोधन करने की क्रिया को समंक-सम्पादन (Editing of Data) कहते हैं। शुद्ध समंक उपलब्ध करने के लिए विशेष योग्यता, अनुभव व सावधानी आवश्यक है। क्रम, पैटन व टैबट के अनुसार, 'सम्पादन की क्रिया, किसी भी रूप में, एक महत्त्वहीन और नैत्यिक क्रिया नहीं है। वस्तुतः इस क्रिया के लिए विशिष्ट योग्यता, सतर्कतापूर्ण सावधानी और वैज्ञानिक निष्पक्षता के दृढ़ पालन की आवश्यकता होती है।'[1]

प्राथमिक समंकों का सम्पादन
(Editing of Primary Data)

प्राथमिक या मौलिक समंको का संकलन अधिकतर अनुसूचियों या प्रश्नावलियों के आधार पर किया जाता है। अनुसूचियाँ या तो सूचकों द्वारा भरकर भेज दी जाती हैं या प्रगणकों द्वारा उनके आधार पर सूचना एकत्र की जाती है। प्रत्येक स्थिति मे अनेक अशुद्धियों की सम्भावना रहती है। सूचकों की लापरवाही, भ्रम या उदासीनता के कारण अनेक प्रश्नों के उत्तर अस्पष्ट, अपूर्ण और भ्रमात्मक होते हैं। कभी-कभी कुछ प्रश्नों का अर्थ गलत लगाया जाता है जिसके कारण अशुद्ध सूचना प्राप्त होती है। प्रगणकों की असावधानी और पक्षपात के कारण भी उत्तर पक्षपातपूर्ण हो सकते हैं। इन सब परिस्थितियों मे, त्रुटिपूर्ण अनुसूचियों की गहन जाँच करके उनमें अनुसन्धानकर्ता को स्वय आवश्यक संशोधन कर देने चाहिएँ या उन्हें सुधार के लिए सूचकों के पास दोबारा भेज देना चाहिए। कभी-कभी संकलित प्राथमिक समंकों में इतने अधिक दोष आ जाते हैं कि उनका विस्तृत विश्लेषण करना असम्भव हो जाता है। ऐसी स्थिति में, त्रुटिपूर्ण अनुसूचियों को अस्वीकृत करके नये सिरे से प्राथमिक अनुसन्धान करना चाहिए।

सम्पादन-प्रक्रिया—बेले तथा कमिंग्स[2] ने चार प्रकार के सम्पादन-कार्यों का उल्लेख किया है जो निम्नलिखित हैं—

(1) संगति के लिए सम्पादन (Editing for Consistency)—अनुसूची में कुछ प्रश्न ऐसे होते हैं जिनके उत्तरों की सत्यता की आपस में जाँच हो जाती है। ऐसे उत्तरों का आपस मे

[1] 'The process of editing is by no means an unimportant and routine operation; rather it requires marked ability, scrupulous care, and a rigid adherence to scientific objectivity.'—Crum, Patton and Tebbutt.

[2] W. B. Bailey and John Cummings in 'Statistics' quoted by Crum, Patton and Tebbutt.

मिलान कर लेना चाहिए। यदि उत्तर परस्पर विरोधी प्रतीत हों तो यह निर्णय करना आवश्यक है कि उनमें से कौन-सा उत्तर विश्वसनीय है। यदि अधिकांश प्रश्नावलियों में असगत उत्तर हों तो उन्हें अस्वीकार कर देना चाहिए क्योंकि परस्पर-विरोधी समकों से सही निष्कर्ष नहीं निकाले जा सकते।

(2) **एकरूपता की जाँच (Editing for Consistency)**—कभी-कभी प्रश्नों के उत्तरों मे एकरूपता का अभाव होता है। उदाहरण के लिए, उत्तर भिन्न-भिन्न इकाइयों के रूप में व्यक्त किये जा सकते हैं, जैसे भार क्विंटल की बजाय 'मनों' में प्रकट किया जाय या वित्तीय वर्ष की आय के बारे में सूचना देने के स्थान पर कैलेंडर या सम्वत् वर्ष की आय का उल्लेख किया जाये। उपलब्ध सामग्री में एकरूपता व सजातीयता लाने के लिए इस प्रकार की अशुद्धियों को सुधारना अनिवार्य है।

(3) **पूर्णता की जाँच (Editing for Completeness)**—यह भी भली-भाँति देख लेना चाहिए कि अनुसूचियाँ पूर्ण हैं अथवा नहीं। यदि किसी महत्त्वपूर्ण प्रश्न को छोड़ दिया गया है तो बाद में उसका उत्तर अवश्य प्राप्त कर लेना चाहिए। इसके अतिरिक्त, कभी-कभी यान्त्रिक सारणीकरण (mechanical tabulation) के लिए संकलित समको को पूर्व-निश्चित सकेताकों (code numbers) के रूप में व्यक्त किया जाता है। अनुसन्धानकर्त्ता को इस बात की ध्यानपूर्वक जाँच कर लेनी चाहिए कि ये सभी क्रियायें सन्तोषजनक ढंग से पूरी हो गई हैं अथवा नहीं।

(4) **परिशुद्धता की जाँच के लिए सम्पादन (Editing for Accuracy)**—संकलित सामग्री की यथार्थता का परीक्षण करना सम्पादन की सबसे कठिन क्रिया है। अनुसूचियों के आलोचनात्मक विश्लेषण द्वारा सांख्यिक को यह भली-भाँति ज्ञात कर लेना चाहिए कि संकलित प्राथमिक सामग्री परिशुद्धता के पूर्व-निर्धारित स्तर के अनुरूप है या नहीं। इस कार्य मे बहुत सावधानी, कुशलता और अनुभव अपेक्षित हैं।

समंक-सम्पादन में परिशुद्धता का स्तर, सन्निकटन की मात्रा और सांख्यिकीय त्रुटियों के विश्लेषण का समावेश होता है।

परिशुद्धता
(Accuracy)

पूर्ण परिशुद्धता (perfect accuracy) का अर्थ है किसी वस्तु या घटना को ठीक उसी रूप में प्रकट करना जिस रूप में वह वास्तव में है। अनुसन्धानकर्त्ता की असावधानी व अभिनति तथा माप-यन्त्रों की अपूर्णता के कारण सांख्यिकी मे पूर्ण परिशुद्धता की प्राप्ति सर्वथा असम्भव है। वास्तव में, भौतिक विज्ञानों में भी पूर्ण शुद्धता सम्भव नही है। परखनलियों (test-tubes) मे किसी द्रव का स्तर एक सेण्टीमीटर के सहस्रवें भाग तक घट-बढ़ सकता है। इसी प्रकार, कोण के माप में एक डिग्री के सौवें भाग के बराबर अन्तर हो सकता है। सांख्यिकीय अनुसन्धानों में तो अशुद्धियों के अनेक स्रोत होते हैं। सांख्यिक एक रसायनशास्त्री की भाँति प्रयोग नही कर सकता क्योंकि परिस्थितियाँ उसके नियन्त्रण के बाहर होती हैं। अतः सांख्यिकी में पूर्ण परिशुद्धता एक कल्पनामात्र है।

सांख्यिकीय मापों में पूर्ण शुद्धता न तो आवश्यक है और न वांछनीय। अनेक परिस्थितियों में तो पूर्ण शुद्धता प्राप्त करने का प्रयत्न करना मूर्खतापूर्ण और हास्यास्पद माना जाता है। किंग के अनुसार 'शुद्धता का अधिकतम सम्भव स्तर प्राप्त करने के प्रयत्न प्रायः समय का अपव्यय मात्र होते हैं।'[1] उदाहरणार्थ, यदि भारत के कुल वार्षिक निर्यात का मूल्य रुपये और पैसे तक शुद्ध रूप में प्रकट किया जाये तो उससे कोई लाभ नहीं होगा बल्कि समझने मे जटिलता आ जायेगी। यह मूल्य केवल करोड़ या लाख रुपयों तक सन्निकट करके प्रस्तुत करना अधिक उपयुक्त है। इसी

[1] 'Attempts to obtain the greatest possible degree of accuracy are, frequently, merely of time.' —King, *Elements of Statistical Methods*, p. 65.

प्रकार जहाँ लाखों या हजारों किलोमीटर या टन के रूप मे माप किये जा रहे हैं वहाँ मीटर या किलोग्राम तक का कोई महत्त्व नहीं है। वास्तव में, सांख्यिकी में तो केवल यथोचित या सापेक्ष शुद्धता (reasonable or relative accuracy) ही अपेक्षित है।

यथोचित परिशुद्धता एक सापेक्ष धारणा है। यह अनुसन्धान की प्रकृति व उद्देश्य, संकलन की रीति तथा शुद्धता की सम्भावित मात्रा आदि पर निर्भर होती है। कहीं अत्यधिक शुद्धता की आवश्यकता होती है तथा कहीं अनुमान-मात्र ही पर्याप्त होते हैं। उदाहरणार्थ, व्यक्तियों की ऊँचाई नापने में सेण्टीमीटर के अंशों तक को नहीं छोड़ा जा सकता, जबकि दो नगरों के बीच का फासला नापने मे किलोमीटर के भागों को छोड़ा जा सकता है और पृथ्वी से सूर्य की दूरी का अनुमान लगाने में हजारों किलोमीटर तक की उपेक्षा की जा सकती है। परिणाम यथोचित रूप से शुद्ध ही माने जायेंगे। अतः सांख्यिकी में केवल सापेक्ष शुद्धता ही होनी चाहिए और उसका स्तर पहले ही निर्धारित कर लेना चाहिए। मापयन्त्रों मे नित्यप्रति सुधार होते रहने से सापेक्ष शुद्धता का स्तर भी निरन्तर बढ़ता ही जाता है।

सन्निकटन अथवा उपसादन
(Approximation)

बड़ी संख्यायें अधिकतर भ्रमात्मक और जटिल होती हैं। उन्हें समझना और स्मरण रखना लगभग असम्भव होता है। अतः सरल और बुद्धिगम्य बनाने के उद्देश्य से उन्हें उनकी निकटतम सरल संख्या के रूप में व्यक्त कर दिया जाता है। इससे परिणाम में कोई विशेष अन्तर नहीं पड़ता और समकों का विश्लेषण तथा निर्वचन सरल हो जाता है। वास्तविक और सरल संख्याओं को किसी स्थानीयमान के आधार पर निकटतम सरल संख्याओं के रूप में व्यक्त करने की क्रिया को सन्निकटन या उपसादन (approximation) कहते हैं। यह क्रिया इस प्रकार सम्पन्न की जाती है कि परिणाम में कोई अन्तर न पड़े, स्थिति को आसानी से समझा जा सके और समंक विश्लेषण के योग्य हो जायें। सन्निकटन जटिलताओं को सरल बनाने तथा समकों में यथोचित परिशुद्धता प्राप्त करने के उद्देश्य से किया जाता है।

लाभ—सन्निकटन के निम्न लाभ हैं—

(i) सरलता—सन्निकटन से जटिल संख्याएँ सरल और आसानी से स्मरण रखने योग्य हो जाती है। उदाहरणार्थ, यदि यह कहा जाये कि 1971 में भारत की कुल जनसंख्या 54,73,67,926 थी तो इस संख्या को याद रखने में निश्चित रूप से कठिनाई होगी परन्तु उपसादित संख्या अर्थात् 54·7 करोड़ सरल व बुद्धिगम्य है।

(ii) तुलना की सुविधा—सन्निकट संख्याओं की तुलना, वास्तविक और जटिल संख्याओं की पारस्परिक तुलना की अपेक्षा अधिक सुविधाजनक होती है। 28,32,52,214 और 26,41,15,712 की तुलना करने से 28·3 करोड़ तथा 26·4 करोड़ की तुलना कहीं अधिक सरल है।

(iii) गणन-क्रियाओं की सरलता—सन्निकटन से संख्याओं का जोड़ना, घटाना, गुणा करना आदि गणितीय क्रियायें अत्यन्त सरल हो जाती हैं।

सन्निकटन की रीतियाँ—पहले यह निर्णय कर लेना चाहिए कि परिशुद्धता की प्रस्तावित मात्रा को ध्यान मे रखते हुए सन्निकटन का स्थानीयमान क्या रखना है अर्थात् किस अंक तक सन्निकटन करना है, जैसे दो दशमलव बिन्दुओं तक अथवा इकाई, दहाई, सैकड़ा या हजार तक। यह निर्धारित कर लेने के बाद निम्न रीतियों मे से किसी एक रीति द्वारा सन्निकटन किया जा सकता है—

(1) संख्या में कुछ जोड़कर (By adding figures)—इस रीति के अनुसार सन्निकट की जाने वाली संख्या के बाद में आने वाली पूर्ण संख्या को लिया जाता है। जिस अंक तक सन्निकटन करना है उसके बाद के अंकों को हटाकर उसमें एक बढ़ा दिया जाता है। उदाहरणार्थ,

25,68,128·69 का विभिन्न बिन्दुओं तक निम्न प्रकार सन्निकटन किया जायेगा—

एक दशमलव अंक तक सन्निकट संख्या				25,68,128·7
इकाई	"	"	"	25,68,129
दहाई	"	"	"	25,68,130
सैकड़ा	"	"	"	25,68,200
हजार	"	"	"	25,69,000
दस हजार	"	"	"	25,70,000
लाख	"	"	"	26,00,000

यह रीति सरल है परन्तु इसमें यह दोष है कि उपसादित संख्या वास्तविक संख्या से सदैव अधिक होती है अर्थात् अशुद्धि एक ही दिशा की तथा संचयी प्रकृति की होती है।

(2) कुछ अंकों को छोड़कर (By discarding figures)—इस रीति में, पूर्वनिर्धारित स्थानीयमान तक अंको को रखकर बाकी अंकों को छोड़ दिया जाता है, अर्थात् वास्तविक संख्या से पहले आने वाली पूर्ण संख्या को ही उपसादित संख्या माना जाता है। इस रीति द्वारा 25,68,128·69 को विभिन्न स्थानीय मानों तक निम्न रूप में सन्निकट किया जायेगा—

एक दशमलव अंक तक उपसादित मूल्य				25,68,128·6
इकाई	"	"	"	25,68,128
दहाई	"	"	"	25,68,120
सैकड़ा	"	"	"	25,68,100
हजार	"	"	"	25,68,000
दस हजार	"	"	"	25,60,000
लाख	"	"	"	25,00,000

इस रीति द्वारा उपसादित संख्या वास्तविक संख्या से सदैव कम होती है। संख्या जितनी छोटी होगी उसके उपसादन में अशुद्धि की मात्रा उतनी ही कम होगी। इस विधि में भी अशुद्धियाँ संचयी प्रकृति की होती हैं।

(3) निकटतम पूर्ण संख्या तक सन्निकटन (Approximation to the nearest whole number)—उपसादन की यह विधि सर्वोत्तम मानी जाती है क्योंकि इसमें अशुद्धि की मात्रा सबसे कम होती है। इस रीति में, जिस अंक तक उपसादन करना है उसके बाद की बाकी संख्या की तुलना उस स्थानीय मान के आधे से की जाती है। यदि बाकी संख्या सन्निकटन सीमा के अंक के आधे से अधिक या आधे के बराबर है तो उस अंक में एक जोड़कर संख्या बढ़ा दी जाती है। इसके विपरीत यदि बाकी संख्या स्थानीयमान के आधे से कम है तो उसे छोड़ दिया जाता है। इस प्रकार वास्तविक संख्या की निकटतम पूर्ण संख्या को ही सन्निकट मूल्य मान लिया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि 32,761 को हजार तक सन्निकट बनाना हो तो 33,000 उपसादित संख्या होगी क्योंकि हजार के बाद की संख्या 761, एक हजार के आधे अर्थात् 500 से अधिक है। इसी प्रकार 32,167 की निकटतम हजार तक उपसादित संख्या 32,000 होगी। इस रीति के आधार पर 25,68,128 69 का उपसादन इस प्रकार होगा—

एक दशमलव अंक तक उपसादित संख्या				25,68,128·7
इकाई	"	"	"	25,68,129
दहाई	"	"	"	25,68,130
सैकड़ा	"	"	"	25,68,100
हजार	"	"	"	25,68,000
दस हजार	"	"	"	25,70,000
	"	"	"	26,00,000

यह सबसे अधिक वैज्ञानिक और न्यायोचित रीति है। इसमें कुल अशुद्धि की मात्रा कम होती है क्योंकि अशुद्धियाँ क्षतिपूरक (compensating) होती हैं।

अन्तर—सन्निकटन की इन तीनों रीतियों में बहुत अन्तर है। प्रथम, 'अंक जोड़कर' तथा 'अंक छोड़कर' सन्निकट करने से सचयी अशुद्धियाँ होती हैं अर्थात् इन रीतियों द्वारा जितनी अधिक संख्याओं का उपसादन होगा उतनी ही कुल अशुद्धि की मात्रा बढ़ती जाएगी जबकि निकटतम पूर्ण संख्या तक सन्निकटन करने से अशुद्धियों की आपस में क्षतिपूर्ति हो जाती है। अतः इस रीति मे, जितनी अधिक सख्याओं का सन्निकटन होगा कुल अशुद्धि उतनी ही कम होगी। दूसरे, प्रथम रीति में उपसादित मूल्य सदा वास्तविक मूल्य से अधिक होता है, दूसरी में वह सदा कम होता है किन्तु तीसरी रीति मे वह वास्तविक संख्या के निकटतम होता है। निकटतम पूर्णांक तक सन्निकटन वाली रीति सर्वोत्तम मानी जाती है।

निम्न सारणी से यह अन्तर स्पष्ट हो जाता है—

विभिन्न रीतियों द्वारा उपसादन
(Approximation by Various Methods)

मूल-संख्या	उपसादित संख्या (हजारों में)					
	पहली रीति द्वारा	त्रुटि	दूसरी रीति द्वारा	त्रुटि	तीसरी रीति द्वारा	त्रुटि
12,105	13,000	−895	12,000	+105	12,000	+105
15,880	16,000	−120	15,000	+880	16,000	−120
11,965	12,000	− 35	11,000	+965	12,000	− 35
18,230	19,000	−770	18,000	+230	18,000	+230
10,850	11,000	−150	10,000	+850	11,000	−150
69,030	71,000	−1970	66,000	+3030	69,000	+ 30

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि पहली रीति मे त्रुटि सदा ऋणात्मक होती है। दूसरी मे वह सदैव धनात्मक होती है तथा तीसरी मे वह किसी प्रकार की हो सकती है। इसके अतिरिक्त, तीसरी रीति में क्षतिपूरक होने के कारण कुल अशुद्धि की मात्रा बहुत कम हो जाती है।

युग्मांक नियम (Even-digit rule)—इस नियम का प्रयोग वहाँ किया जाता है जहाँ संख्या में दशमलव के बाद दो या अधिक अंक हो तथा अन्तिम अंक 5 हो। इस रीति द्वारा यदि अन्तिम स्थान वाले 5 से पहले वाला अंक युग्म (even) अर्थात 2 से विभाज्य है तो उस 5 को छोड़ दिया जाता है। यदि अन्तिम 5 से पहला अंक विषम (odd) है तो इसमें 1 जोड़ दिया जाता है और अन्तिम 5 को हटा दिया जाता है। निम्न उदाहरण से यह रीति स्पष्ट हो जायेगी—

वास्तविक संख्या	उपसादित सख्या
124·85	124·8
124·35	124·4

सावधानियाँ—समंकों का सन्निकटन करते समय कुछ बातों का विशेष ध्यान रखना चाहिए। प्रथम, यथासम्भव इस क्रिया का बहुत कम प्रयोग करना चाहिए। दूसरे, सन्निकटन कम से कम अंकों तक करना चाहिए। यह भी ध्यान रखना चाहिए कि उससे अंकों का स्वभाव ही न बदल जाये। तीसरे, सन्निकटन-सीमा पहले ही निर्धारित कर लेनी चाहिए। स्थानीयमान निश्चित करते समय अनुसन्धान की प्रकृति व उद्देश्य, यथोचित शुद्धता की मात्रा, माप के उपलब्ध साधन,

वास्तविक संख्या के मूल्य, इत्यादि पर ध्यान देना चाहिए। चौथे, उपसादित संख्याओं की आपस मे गुणा करने, भाग देने, वर्गमूल आदि निकालने में काफी सावधानी बरतनी चाहिए। सन्निकटन का प्रयोग गणितीय क्रियाओं के अन्तिम चरण में ही करना चाहिए : अन्त में, प्रतिशत संख्याओं का उत्पादन करते समय उनके आधारों का ध्यान रखना परमावश्यक है।

सांख्यिकीय विभ्रम (त्रुटियाँ)
(Statistical Errors)

सम्पादन की क्रिया मे सांख्यिकीय विभ्रमों (त्रुटियों) का अध्ययन, खोज तथा सुधार महत्वपूर्ण स्थान रखते हैं। सांख्यिकी में विभ्रम (error) का तात्पर्य 'अशुद्धि या गलती' (mistake) से नहीं है। *सांख्यिकीय विभ्रम समंकों के वास्तविक मूल्य और अनुमानित मूल्य के अन्तर को कहते है।* सांख्यिकीय रीतियों के गलत प्रयोग या दूषित गणन-क्रिया से उत्पन्न भूल, अशुद्धि या गलती कहलाती है।

अन्तर—सांख्यिकीय त्रुटि (विभ्रम) तथा अशुद्धि में निम्नलिखित अन्तर है—

(i) उत्पत्ति—सांख्यिकीय विभ्रम, अनुमानित मूल्य के वास्तविक मूल्य से भिन्न होने के कारण उत्पन्न होता है जबकि अशुद्धि, गलत रीतियों का प्रयोग करने या गलत गणना-क्रिया के कारण प्रकट होती है।

(ii) प्रकृति—त्रुटि (विभ्रम) अनैच्छिक होती है। वह जान-बूझकर नही की जाती। इसके विपरीत, अशुद्धि अधिकतर जान-बूझकर की जाती है।

(iii) रोकथाम—विभ्रमों को पूर्ण रूप से रोका नहीं जा सकता क्योंकि वे माप की प्रकृति मे निहित होती है जबकि अशुद्धियों की रोकथाम सम्भव है।

***(iv) अनुमान**—विभ्रम का अनुमान लगाया जा सकता है परन्तु अशुद्धि को अनुमानित करना* कठिन है।

विभ्रम के स्रोत—सांख्यिकीय विभ्रम निम्न स्रोतों या कारणों से उत्पन्न होते हैं—

(1) **मूल त्रुटियाँ** (Errors of Origin)—समंकों के संकलन करने में विभिन्न कारणों से *उत्पन्न त्रुटियाँ, मूल त्रुटियाँ कहलाती है।* मूल त्रुटियाँ अधिकतर अनुपयुक्त सांख्यिकीय इकाई, सूचकों या प्रगणकों के पक्षपात, प्रश्नावली के दोष, अनुपयुक्त प्रतिचयन आदि के कारण होती हैं। सुनियोजित एवं निष्पक्ष संकलन-क्रिया से इन विभ्रमों को कम किया जा सकता है।

(2) **अपर्याप्तता त्रुटियाँ** (Errors of Inadequacy)—बहुत छोटे आकार के प्रतिदर्श तथा अपर्याप्त सूचना के कारण होने वाली त्रुटियाँ अपर्याप्त त्रुटियाँ कहलाती है। इनको रोकने के लिए प्रतिदर्श के आकार में वृद्धि तथा विधि में सुधार करना चाहिए और अपर्याप्त सूचना को अधिक पूर्ण बनाना चाहिए।

(3) **प्रहस्तन त्रुटियाँ** (Errors of Manipulation)—सांख्यिकीय सामग्री की विवेचना करने में होने वाली त्रुटियाँ प्रहस्तन त्रुटियाँ कहलाती है। ये अधिकतर गणना, माप तथा वर्गीकरण करने में, माध्यों व प्रतिशतों का गलत प्रयोग करने या अत्यधिक सन्निकटन के कारण उत्पन्न होती है। *आँकड़ो के विश्लेषण में अधिक से अधिक सावधानी रखने से ही* इस प्रकार की त्रुटियाँ कम हो सकती है।

(4) **निर्वचन विभ्रम** (Errors of Interpretation)—समंकों से उचित निष्कर्ष निकालते समय सांख्यिक की असावधानी, अभिनति व अनुभवहीनता के कारण उत्पन्न त्रुटियाँ निर्वचन विभ्रम कहलाती हैं। इनकी रोकथाम करने के लिए, सांख्यिक को अनेक बातों का ध्यान रखना पड़ता है।

सांख्यिकीय विभ्रमों के प्रकार—सांख्यिकीय विभ्रम प्रमुख रूप से दो प्रकार के होते हैं—

(क) अभिनत या पक्षपातपूर्ण विभ्रम (Biased Errors),

(ख) अनभिनत या पक्षपातहीन विभ्रम (Unbiased Errors)।

(क) **अभिनत विभ्रम**—उन विभ्रमों को अभिनत विभ्रम कहते हैं जो प्रगणकों या सूचकों

के पक्षपात या माप-यन्त्रों के दोषों के कारण उत्पन्न होते हैं। ये त्रुटियाँ एक ही दिशा में बढ़ती जाती है, अतः इन्हें सचयी विभ्रम (cumulative errors) भी कहते है। इकाइयों की सख्या बढ़ने के साथ-साथ अभिनत त्रुटि की कुल मात्रा भी बढ़ती जाती है। उदाहरणार्थ, यदि किसी व्यापारी के एक क्विटल के बाँट में 100 ग्राम की कमी है तो 1 क्विटल तोलने में 100 ग्राम की त्रुटि होगी। मीट्रिक टन तोलने में 1 किलोग्राम और इसी प्रकार अधिक तोलने में विभ्रम की मात्रा बढ़ती ही जायेगी।

अभिनत विभ्रम* मुख्यतः निम्न कारणों से उत्पन्न होते हैं—

(i) **सूचना देने वालों का पक्षपात**—अनेक विषयों पर सूचक जान-बूझकर पक्षपातपूर्ण सूचना प्रदान करते हैं। उदाहरणार्थ, अशिक्षित वृद्ध व्यक्ति अधिकतर अपनी आयु अधिक बतलाने मे गौरव का अनुभव करते हैं। नवयुवतियाँ प्रायः अपनी उम्र कम ही बतलाती हैं। प्रत्येक व्यक्ति अपनी आय कम बताने की चेष्टा करता है। ये सब अभिनत विभ्रम है।

(ii) **प्रगणकों का पक्षपात**—प्रगणकों की पूर्व-धारणाओं के कारण भी अभिनत त्रुटियाँ हो जाती हैं। उदाहरण के लिए, यदि प्रगणकों की यह धारणा है कि अमुक क्षेत्र मे किसानों की आर्थिक स्थिति अच्छी है तो वे इस प्रकार के समक एकत्रित करेंगे जिनसे उनकी राय के अनुकूल ही निष्कर्ष निकलें।

(iii) **मापदण्ड की त्रुटियाँ**—सांख्यिकीय माप के लिए जिस यन्त्र का प्रयोग किया जा रहा है यदि उसमे दोष है तो अभिनत त्रुटियाँ उत्पन्न हो जायेंगी। यदि किसी मीटर के माप में 5 मिलीमीटर की कमी है तो 1 मीटर नापने में 5 मिलीमीटर की त्रुटि होगी, 10 मीटर नापने मे 5 सेण्टीमीटर की कमी होगी, 100 मीटर नापने में 50 सेण्टीमीटर अर्थात् आधे मीटर की कमी होगी। इस प्रकार अभिनत त्रुटि की मात्रा बढ़ती ही जायेगी।

(iv) **दोषपूर्ण प्रतिचयन**—सविचार प्रतिचयन मे भी अभिनत त्रुटि हो जाती है। अनुसन्धानकर्ता अपनी इच्छा और पूर्व धारणाओं के अनुकूल ही प्रतिदर्श छाँटेगा जिससे प्रतिदर्श-इकाइयों पर उसकी अभिनति का प्रभाव आ जायेगा।

अभिनत त्रुटि की रोकथाम के लिए, उपर्युक्त स्रोतों की जाँच करके उन कारणों को दूर करने का प्रयत्न करना चाहिए जिनसे पक्षपात उत्पन्न होता है। सूचकों व प्रगणकों मे निष्पक्षता होनी चाहिए, माप-यन्त्र में त्रुटि नही होनी चाहिए तथा यथेष्ट प्रतिनिधि समक दैव चयन के आधार पर चुने जाने चाहिएँ। इस प्रकार, अभिनत या सचयी विभ्रमों से बचा जा सकता है।

(ख) **अनभिनत विभ्रम**—जो त्रुटियाँ किसी पक्षपात के कारण उत्पन्न नही होती वरन् प्रगणकों या सूचकों की असावधानी के कारण, समंकों मे संयोगवश हो जाती हैं वे अनभिनत त्रुटियाँ कहलाती हैं। इन त्रुटियों की प्रमुख विशेषता यह है कि ये दोनों दिशाओं मे होती हैं, अतः एक-दूसरे से कटती रहती हैं। यही कारण है कि इन्हें क्षतिपूरक त्रुटियाँ (compensating errors) भी कहते हैं। ये त्रुटियाँ जितनी अधिक होती हैं उतनी ही अधिक शुद्धता रहती है। उदाहरण के लिए, यदि व्यापारी के क्विटल के बाँट मे तो कोई कमी न हो परन्तु वह असावधानी से तोले, तो एक क्विटल में 10 ग्राम भार अधिक हो सकता है परन्तु 10 बार एक-एक क्विटल तोलने मे कभी कुछ कम और कभी कुछ अधिक तोले जाने के कारण कुल त्रुटि नगण्य होगी।

अन्तर—अभिनत तथा अनभिनत विभ्रम मे निम्नलिखित अन्तर है—

(i) **उत्पत्ति**—अभिनत त्रुटि सूचकों, गणकों या मापयन्त्रों के पक्षपात के कारण उत्पन्न होती हैं। इसके विपरीत, अनभिनत त्रुटि पक्षपात के कारण उत्पन्न नही होती। वे तो गणना में स्वाभाविक रूप से सयोगवश प्रकट होती हैं।

(ii) **त्रुटि की दिशा**—अभिनत त्रुटियाँ अधिकतर एक ही दिशा मे बढ़ने वाली होती हैं। परन्तु अनभिनत त्रुटियाँ दोनों दिशाओं की होती हैं। उनमें से कुछ धनात्मक और कुछ ऋणात्मक होती हैं।

(iii) **प्रकृति**—अभिनत त्रुटियाँ संचयी प्रकृति की होती हैं जबकि अनभिनत त्रुटियाँ क्षति-

* पिछले अध्याय मे अभिनति के अनेक स्रोतों का सविस्तार वर्णन किया गया है।

पूरक अर्थात् समकारी होती है। अतः समक जितने अधिक होंगे कुल अभिनत त्रुटि उतनी ही कम हो जायेगी क्योंकि धनात्मक और ऋणात्मक त्रुटियाँ आपस में एक-दूसरे से कट जायेंगी।

(iv) रोकथाम—अभिनत त्रुटि की रोकथाम करने के लिए पहले यह देखना चाहिए कि पक्षपात के किस स्रोत से वह उत्पन्न हुई है। फिर उस कारण को दूर करने की चेष्टा करनी चाहिए। अनभिनत त्रुटि को कम करने के लिए सकलित इकाइयों की संख्या में वृद्धि कर देनी चाहिए।

संक्षेप में, अभिनत त्रुटियाँ संचयी होने के कारण समकों पर अत्यधिक दूषित प्रभाव डालती है। अतः उनसे बचना परमावश्यक है। अभिनत त्रुटियाँ समकारी होने के कारण आंकड़ों को अधिक प्रभावित नहीं करती। यही कारण है कि सांख्यिकों का कहना है—'अभिनत त्रुटियों में से सांख्यिक को एक भी त्रुटि नहीं चाहिए, किन्तु अनभिनत त्रुटियाँ जितनी ही अधिक हों उतनी ही प्रसन्नता की बात है, यद्यपि ये भी त्रुटियाँ ही हैं।'[1]

निम्न सारणी से इन त्रुटियों का अन्तर स्पष्ट हो जाता है—

वास्तविक मूल्य और अभिनत व अनभिनत अनुमान

(True Values and Biased and Unbiased Estimates)

औसत मजदूरी	वास्तविक मूल्य (रु०)	अभिनत अनुमान	अनभिनत अनुमान
कारखाना A	72	75	73
,, B	70	74	75
,, C	78	81	76
,, D	81	85	80
,, E	84	90	86
योग	385	405	390
औसत	77	81	78
त्रुटि		−4	−1
प्रतिशत त्रुटि		4.94%	1.28%

विभ्रमों का मापन (Measurement of Errors)—विभ्रमों का माप (i) निरपेक्ष रूप में, या (ii) सापेक्ष रूप में किया जा सकता है।

(i) **निरपेक्ष त्रुटि (Absolute Error)**—वास्तविक मूल्य और अनुमानित मूल्य के अन्तर को निरपेक्ष त्रुटि कहते हैं। इसे निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है—

$$A.\ E. = a - e$$

जहाँ पर A. E. का अर्थ है Absolute Error (निरपेक्ष त्रुटि),
a ,, ,, actual value (वास्तविक मूल्य),
e ,, ,, estimated value (अनुमानित मूल्य)।

यदि तीन व्यक्तियों की वास्तविक मासिक आय क्रमशः Rs. 260, Rs. 510 और Rs. 1010 है तथा अनुमानित आय क्रमशः Rs. 250, Rs. 500 और Rs. 1000 मासिक है तो तीनों स्थितियों में निम्नांकित निरपेक्ष त्रुटि होगी—

I	II	III
निरपेक्ष त्रुटि = Rs. (260−250) = +10	Rs. (510−500) = +10	Rs. (1010−1000) = +10

[1] 'Of the biased errors, the statistician should have none, but of the unbiased ones, the merrier, notwithstanding that they are also errors.'

तीनों दशाओं में निरपेक्ष त्रुटियाँ समान हैं परन्तु निरपेक्ष त्रुटियों की आपस में तुलना नहीं की जा सकती। प्रथम स्थिति में यह त्रुटि 250 पर है दूसरी में 500 और तीसरी में 1000 पर आधारित है। अतः निरपेक्ष त्रुटि को अनुमानित मूल्य के अनुपात में व्यक्त करके ही सही परिणाम निकाले जा सकते हैं।

(ii) सापेक्ष त्रुटि (Relative Error)—निरपेक्ष त्रुटि का अनुमानित मूल्य से अनुपात *सापेक्ष त्रुटि कहलाता है। यह निरपेक्ष त्रुटि को अनुमानित मूल्य से भाग देने पर ज्ञात होता है।* इसका सूत्र इस प्रकार है—

$$R.\ E. = \frac{A.E.}{e} \quad \text{or} \quad R.\ E. = \frac{a-e}{e}$$

R. E., Relative Error (सापेक्ष त्रुटि) के लिए प्रयुक्त किया गया है। त्रुटियों की तुलना करने के लिए सापेक्ष त्रुटि का ही प्रयोग किया जाता है।

पिछले उदाहरण में, सापेक्ष त्रुटि निम्न प्रकार निर्धारित होगी—

	I	II	III
सापेक्ष त्रुटि	$=\frac{260-250}{250}=+\cdot04$	$\frac{510-500}{500}=+\cdot02$	$\frac{1010-1000}{1000}=+\cdot01$

सापेक्ष त्रुटियों की तुलना करने से यह परिणाम निकलता है कि तीसरी स्थिति में त्रुटि सबसे कम (·01) है, दूसरी में उसकी दोगुनी (·02) और प्रथम स्थिति में तीसरी की चार गुनी (·04) त्रुटि है।

प्रतिशत त्रुटि (Percentage Error)—तुलनात्मक निर्वचन को सुविधाजनक बनाने के लिए सापेक्ष त्रुटि को 100 से गुणा करके प्रतिशत रूप में परिवर्तित कर लिया जाता है। सापेक्ष त्रुटि के प्रतिशत रूप को ही प्रतिशत त्रुटि कहते हैं। इसका सूत्र इस प्रकार है—

$$\text{Percentage Error} = R.\ E. \times 100 \quad \text{or} \quad Pc.\ E. = \frac{a-e}{e} \times 100$$

उपर्युक्त तीन परिस्थितियों में प्रतिशत त्रुटि इस प्रकार हैं—

	I	II	III
प्रतिशत त्रुटि	$=\cdot04\times100=4\%$	$\cdot02\times100=2\%$	$\cdot01\times100=1\%$

धनात्मक तथा ऋणात्मक त्रुटियाँ (Positive and Negative Errors)—निरपेक्ष तथा सापेक्ष त्रुटियाँ धनात्मक हो सकती हैं या ऋणात्मक। जब वास्तविक मूल्य, अनुमानित मूल्य से अधिक होता है तो त्रुटि धनात्मक होती है। इसके विपरीत, वास्तविक मूल्य के अनुमानित मूल्य से कम होने पर त्रुटि ऋणात्मक कहलाती है। निम्न उदाहरण द्वारा ये त्रुटियाँ स्पष्ट हो जाती हैं—

एक व्यक्ति की आय Rs. 260 मासिक है जबकि अनुमानित आय Rs. 250 है तथा दूसरे की वास्तविक मासिक आय और अनुमानित आय क्रमशः Rs. 990 व 1000 हैं। दोनों अनुमानों की त्रुटियाँ इस प्रकार होंगी—

त्रुटि (Error)	I	II
निरपेक्ष (Absolute)	Rs. $(260-250)=+10$	Rs. $(990-1000)=-10$
सापेक्ष (Relative)	$\frac{+10}{250}=+\cdot04\%$	$\frac{-10}{1000}=-\cdot01$
प्रतिशत (Percentage)	$+\cdot04\times100=+4\%$	$-\cdot01\times100=-1\%$

प्रथम दशा में त्रुटि धनात्मक तथा दूसरी स्थिति में ऋणात्मक है।

यदि किसी स्थिति में निरपेक्ष तथा सापेक्ष त्रुटियाँ ज्ञात हैं तो R. E. के सूत्र का प्रयोग

करके वास्तविक तथा अनुमानित मूल्य ज्ञात किये जा सकते हैं—

I	II
यदि A. E. $= +5$, R. E. $= +\cdot 02$	यदि A. E. $= -9$, R. E. $= -\cdot 03$
तो वास्तविक मूल्य बताइए।	तो वास्तविक मूल्य बताइए।
R. E. $= \frac{A.\ E.}{e}$ or $+\cdot 02 = \frac{+5}{e}$	R. E. $= \frac{A.\ E.}{e}$ or $-\cdot 03 = \frac{-9}{e}$
$+\cdot 02 \times e = +5$	$-\cdot 03 \times e = -9$
$\therefore\ e = \frac{+5}{+\cdot 02} = 250$	$\therefore\ e = \frac{-9}{-\cdot 03} = 300$
$a = e +$ A. E. $= 250 + 5$	$a = e +$ A. E. $= 300 + (-9)$
∴ वास्तविक मूल्य $= 255$	∴ वास्तविक मूल्य $= 291$

शक्य त्रुटि (Possible Error)—उन अधिकतम और न्यूनतम सीमाओं से सम्बन्धित त्रुटि, शक्य त्रुटि कहलाती है, जिनके अन्तर्गत वास्तविक मूल्य के होने की सम्भावना रहती है। शक्य त्रुटि द्वारा वास्तविक मूल्य की ऊपरी और निचली सीमाएँ निर्धारित होती हैं। यदि एक सांख्यिक का अनुमान 12,820 है जिसके वास्तविक मूल्य से 50 अधिक या 50 कम होने की सम्भावना है तो शक्य त्रुटि ± 50 होगी और उस समक का वास्तविक मूल्य अधिकतम सीमा, 12870 और न्यूनतम सीमा 12770 के अन्तर्गत ही होगा।

त्रुटियों का अनुमान (Estimation of Errors)—अनेक अनुसन्धानों में समंकों के वास्तविक मूल्य ज्ञात नहीं होते। अतः निरपेक्ष और सापेक्ष त्रुटियों का मापन नहीं किया जा सकता। परन्तु उनके उचित अनुमान लगाये जा सकते हैं।

सांख्यिकीय त्रुटियों के अनुमान लगाने की बॉडिंगटन तथा बाउले द्वारा अलग-अलग रीतियाँ प्रस्तुत की गई हैं जो निम्न प्रकार हैं—

(क) बॉडिंगटन[1] द्वारा दी गई रीतियाँ—बॉडिंगटन के अनुसार जब त्रुटि अनभिनत प्रकृति की हो, तो कुल निरपेक्ष त्रुटि का अनुमान लगाने के लिए औसत निरपेक्ष त्रुटि को इकाइयों की संख्या के वर्गमूल से गुणा करना चाहिए तथा सापेक्ष त्रुटि अनुमानित करने के लिए कुल निरपेक्ष त्रुटि को कुल अनुमानित मूल्य से भाग दे देना चाहिए। इन त्रुटियों के सूत्र के निम्न प्रकार हैं—

जब त्रुटि अभिनत हो—

$$\text{कुल निरपेक्ष त्रुटि} = \text{औसत निरपेक्ष त्रुटि} \times \sqrt{N}$$

$$\text{कुल सापेक्ष त्रुटि} = \frac{\text{औसत निरपेक्ष त्रुटि} \times \sqrt{N}}{\text{अनुमानित मूल्य}}$$

'N' पदों की संख्या के लिए प्रयुक्त किया गया है।

जब त्रुटि अभिनत प्रकृति की होती है तो औसत निरपेक्ष त्रुटि को इकाइयों की संख्या से गुणा करके कुल निरपेक्ष त्रुटि की मात्रा तथा कुल निरपेक्ष त्रुटि को कुल अनुमानित मूल्य से भाग देकर सापेक्ष त्रुटि अनुमानित कर ली जाती है।

जब त्रुटि अभिनत हो—

$$\text{कुल निरपेक्ष त्रुटि} = \text{औसत निरपेक्ष त्रुटि} \times N$$

$$\text{कुल सापेक्ष त्रुटि} = \frac{\text{औसत निरपेक्ष त्रुटि} \times N}{e}$$

(ख) डा० बाउले[2] के अनुसार—जब त्रुटि अभिनत होती है तो अग्र सूत्र द्वारा उसका

[1] See Boddington, *Statistics and their Application to Commerce*, pp. 56–59.
[2] See Bowley, *Elements of Statistics*, pp. 191–192.

निरपेक्ष माप किया जाता है—

$$\text{कुल निरपेक्ष त्रुटि} = \frac{2}{3} \times \frac{\text{औसत निरपेक्ष त्रुटि}}{\sqrt{N}}$$

कुल सापेक्ष त्रुटि ज्ञात करने के लिए कुल निरपेक्ष त्रुटि को अनुमानित मूल्य से भाग दे देना चाहिए।

द्वितीयक समंकों का सम्पादन
(Editing of Secondary Data)

द्वितीयक समंकों को विश्लेषण और निर्वचन के योग्य बनाने के लिए उनका यथोचित सम्पादन बहुत आवश्यक होता है। इन समंकों मे अनेक अशुद्धियाँ और अनियमिततायें होती हैं जिनके प्रति अनुसन्धानकर्त्ता को सचेत रहना चाहिए। द्वितीयक सामग्री के सम्पादन द्वारा इस बात की जाँच की जाती है कि उसमें विश्वसनीयता, अनुकूलता और पर्याप्तता के गुण विद्यमान हैं अथवा नहीं। इन तत्त्वों की जाँच करने के लिए सांख्यिक को अनेक सावधानियाँ लेनी चाहिएँ। उसे निम्न बातों पर विशेष ध्यान रखकर द्वितीयक समंकों का सम्पादन करना चाहिए—

(1) संकलित समंकों के उद्गम।
(2) संकलन की रीति।
(3) मौलिक अनुसन्धान की प्रकृति, उद्देश्य व क्षेत्र।
(4) अनुसन्धान की अवधि।
(5) अनुसन्धानकर्त्ता व प्रगणकों की योग्यता और ईमानदारी।
(6) शुद्धता का प्रस्तावित और उपलब्ध स्तर।
(7) माप की इकाइयाँ।
(8) विभिन्न स्रोतों से प्राप्त समंकों की तुलना और परीक्षण-जाँच।

उपर्युक्त आधार पर सम्पादित द्वितीयक सामग्री यदि विश्वसनीय, सजातीय, पर्याप्त और उपयुक्त हो तभी उसका प्रयोग करना चाहिए।

प्रश्न

1. प्राथमिक और द्वितीयक सामग्री के विश्लेषण तथा निर्वचन करने के सम्बन्ध में सामग्री-सम्पादन पर एक निबन्ध लिखिए।
Write a note on the editing of primary and secondary data for purposes of analysis and interpretation. [B. Com., Agra, 1960]

2. सांख्यिकीय अनुसन्धानों मे शुद्धता के किस स्तर की आवश्यकता है ? सन्निकटन के विभिन्न तरीके और सांख्यिकी मे उनकी उपयोगिता बतलाइये।
What standard of accuracy is needed in statistical investigations ? State the various methods of approximation and their utility in statistics. [B. Com., Agra, 1968]

3. सांख्यिकी मे सन्निकटन के लाभों का उल्लेख कीजिए। प्रत्येक सांख्यिकीय अनुसन्धान में सामान्यतः शुद्धि की मात्रा कितनी होनी चाहिए ?
State the advantages of approximation in statistics. Ordinarily what should be the degree of accuracy in every statistical investigation ? [B. Com., Vikram, 1968]

4. सांख्यिकीय विभ्रम क्या है ? गलतियों से इनका आप किस प्रकार भेद करेंगे ?
What are statistical errors ? How will you distinguish them from mistakes ?
[B. Com., Kanpur,

5. सांख्यिकीय विभ्रम अशुद्धि से किस प्रकार भिन्न हैं ? विभ्रम कितने प्रकार के होते हैं और उनका माप किस प्रकार किया जाता है ?
In what way does a statistical error differ from a mistake ? What classes of errors are there and how may they be measured ?
[B. Com., Agra, 1969 ; Raj, 1961 ; Alld., 1961]

6. सांख्यिकीय विभ्रम क्या हैं ? वे कितने प्रकार की होती हैं ? वे गलतियों से किस प्रकार भिन्न होती हैं ?
What are statistical errors ? What are their various kinds ? How do they differ from mistakes ? *[B. Com., Meerut, 1972]*

7. सांख्यिकीय त्रुटियाँ क्यों उत्पन्न होती हैं ? यदि समंकों में अपर्याप्तता और प्रहस्तन त्रुटियाँ विद्यमान हों तो विश्लेषण व निर्वचन से पहले आप उन्हें किस प्रकार दूर करेंगे ?
Why do statistical errors arise ? If there are errors of inadequacy and manipulation in the collected data, how would you eliminate them before analysis and interpretation ? *[B. Com., Lucknow, 1965]*

8. सांख्यिकीय त्रुटि क्या है ? सांख्यिकीय त्रुटि और अशुद्धि में अन्तर स्पष्ट कीजिए। सांख्यिकीय त्रुटियों के विभिन्न मापों का वर्णन कीजिए।
What is statistical error ? Explain the difference between a statistical error and a mistake. Describe the various measures of statistical errors. *[B. Com., Alld., 1968]*

9. 'अभिनत त्रुटि में से सांख्यिक को एक भी नहीं चाहिए; परन्तु अनभिनत त्रुटि जितनी ही अधिक हो उतनी ही प्रसन्नता की बात है यद्यपि वे भी त्रुटि हैं।' स्पष्ट कीजिए।
'Of the biased errors, the statistician should have none ; but of the unbiased ones, the more the merrier, notwithstanding that they are also errors.' Elucidate.

10. अभिनत तथा अनभिनत विभ्रम में आप किस प्रकार भेद करेंगे ? अभिनत और अनभिनत विभ्रमों को निरपेक्ष तथा सापेक्ष दोनों प्रकार से अनुमानित करने की विभिन्न रीतियों का विवेचन कीजिए।
How would you distinguish between biased and unbiased errors ? Discuss the various methods of estimating biased and unbiased errors both absolutely and relatively. *[M. A, Agra, 1963]*

11. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए—
Write short notes on the following—
(क) सांख्यिकीय त्रुटियाँ (Statistical errors)।
[B. Com., Meerut, 1973 ; Vikram, 1972 ; Gorakhpur, 1972, 1969 ; Raj., (I yr.), 1970 ; Alld., 1970, 1969, 1965 ; Kanpur, 1969]
(ख) अभिनत तथा अनभिनत त्रुटियाँ (Biased and Unbiased errors)।
[B. Com., Rajasthan, 1972 ; Vikram, 1967]
(ग) निरपेक्ष तथा सापेक्ष त्रुटियाँ (Absolute and Relative errors)।
(घ) धनात्मक एवं ऋणात्मक त्रुटियाँ (Positive and Negative errors)।

12. प्राथमिक और द्वितीयक समंकों में अन्तर स्पष्ट कीजिये। प्रत्येक प्रकार के समंकों के सम्पादन में आने वाली विशेष समस्याएँ कौनसी हैं ?
Distinguish between primary and secondary data. What are the special problems involved in editing each type of data ? *[B. Com., Punjab, 1973]*

7

वर्गीकरण तथा सारणीयन
(CLASSIFICATION AND TABULATION)

संकलित समंक अत्यन्त जटिल एवं अव्यवस्थित रूप में होते हैं। उन्हें सरलता से समझना और उनसे उचित परिणाम निकालना लगभग असम्भव है। अतः 'सांख्यिक का प्रथम कार्य विस्तृत विवरणों को इस प्रकार संक्षिप्त और सरल करना होता है कि (समंकों की) प्रमुख विशेषताएँ स्पष्ट रूप से दृष्टिगोचर हो जायें और साथ ही संग्रहीत सामग्री का निर्वचन भी सुविधाजनक हो जाए। यह प्रक्रिया समंकों का वर्गीकरण एवं सारणीकरण कहलाती है।'[1] संग्रहीत समंकों का विधिवत् विश्लेषण और निष्पक्ष निर्वचन करने के लिए यह नितान्त आवश्यक है कि उन्हें संक्षिप्त तथा सुव्यवस्थित सारणियों के रूप में प्रस्तुत किया जाये। परन्तु सारणियाँ बनाने से पूर्व समंकों को कुछ समान विशेषताओं के आधार पर अलग-अलग सजातीय वर्गों में बाँटना पड़ता है। इस प्रकार के विभाजन से सांख्यिकीय सामग्री सरल, बुद्धिगम्य एवं सुव्यवस्थित हो जाती है। सांख्यिकी में समंकों को विभिन्न वर्गों में बाँटने की क्रिया को वर्गीकरण (Classification) तथा वर्गीकृत आँकड़ों को संक्षिप्त और सुव्यवस्थित सारणियों के रूप में प्रस्तुत करने की क्रिया को सारणीयन (Tabulation) कहते हैं।

वर्गीकरण
(Classification)

अर्थ—कौनर के शब्दों में 'वर्गीकरण, तथ्यों को (वास्तविक या कल्पित रूप से), उनकी समानता तथा सादृश्यता के अनुसार, समूहों या वर्गों में क्रमबद्ध करने की क्रिया है और इसमें व्यक्तिगत इकाइयों की विविधता में पाई जाने वाली गुणों की एकता व्यक्त हो जाती है।'[2] इस परिभाषा के अनुसार वर्गीकरण के मुख्य लक्षण (main features) निम्नांकित हैं—

(i) वर्गीकरण के अन्तर्गत, एकत्रित समंकों को विभिन्न वर्गों में बाँटा जाता है। उदाहरण के लिए, आयु के अनुसार व्यक्तियों को 0–9 वर्ष, 10–19 वर्ष, 20–29 वर्ष, 30–39 वर्ष इत्यादि आयु-वर्गों में विभाजित किया जा सकता है। साक्षरता के आधार पर, 'साक्षर' व 'निरक्षर'—दो वर्गों में बाँटा जा सकता है।

(ii) समानता तथा सजातीयता के आधार पर तथ्यों का विभाजन किया जाता है अर्थात् एक प्रकार की विशेषता रखने वाले समंक एक वर्ग में रखे जाते हैं।

[1] 'The statistician's first task is to reduce and simplify the details into such a form that the salient features may be brought out, while still facilitating the interpretation of the assembled data. This procedure is known as classifying and tabulating the data.'

—A. R. Ilersic

[2] 'Classification is the process of arranging things (either actually or notionally) in groups or classes according to their resemblances and affinities, and gives expression to the unity of attributes that may subsist amongst a diversity of individuals.'—Connor, *Statistics*, p. 16.

(iii) वर्गीकरण वास्तविक रूप से अथवा काल्पनिक रूप से किया जाता है। तथ्यों के प्राकृतिक गुणों के आधार पर वर्ग बनाये जा सकते हैं या सांख्यिक की स्वेच्छा से किसी काल्पनिक आधार पर।

(iv) वर्गीकरण इस प्रकार किया जाता है कि इकाइयों की विभिन्नता में उनकी एकता (unity in diversity) स्पष्ट हो जाये।

वर्गीकरण के उद्देश्य (Objects of Classification)—वर्गीकरण निम्न उद्देश्यों की पूर्ति के लिए किया जाता है—

(1) **सरल एवं संक्षिप्त बनाना**—वर्गीकरण का मुख्य उद्देश्य सांख्यिकीय सामग्री की जटिलता को दूर करके उसे सरल व संक्षिप्त बनाना है। वर्गीकृत तथ्यों को समझने में अधिक मानसिक परिश्रम नहीं करना पड़ता। यदि किसी कालिज के 4000 विद्यार्थियों में से प्रत्येक की अलग-अलग ऊँचाई प्रस्तुत की जाये तो उससे कोई नतीजा नहीं निकाला जा सकता लेकिन ऊँचाई को 150–152 सेण्टीमीटर, 152–154 सेण्टीमीटर, इत्यादि वर्गों में प्रस्तुत करने से समझने में सरलता होती है।

(2) **समानता व असमानता को स्पष्ट करना**—वर्गीकरण से सांख्यिकीय तथ्यों की समानता स्पष्ट हो जाती है। समान गुण वाले समक एक साथ रखे जाते हैं जैसे 'साक्षर', 'निरक्षर', 'विवाहित', 'अविवाहित' इत्यादि।

(3) **तुलना में सहायक होना**—वर्गीकरण से समकों का तुलनात्मक विवेचन सरल हो जाता है। यदि दो कॉलिजो के बी० कॉम० कक्षा के विद्यार्थियो के अलग-अलग प्राप्तांक दिए जायें तो उनके बौद्धिक स्तर के बारे में निष्कर्ष निकालना कठिन हो जाता है। परन्तु प्राप्तांकों के आधार पर विद्यार्थियों को विभिन्न श्रेणियों में उत्तीर्ण एवं अनुत्तीर्ण वर्गों में बाँटकर तुलना करने से यह परिणाम निकाला जा सकता है कि किस कॉलिज के विद्यार्थियों का बौद्धिक स्तर अच्छा है।

(4) **तर्कपूर्ण व्यवस्था करना**—वर्गीकरण एक तर्कसंगत क्रिया है जिससे आँकड़े नियमित और वैज्ञानिक ढग से प्रस्तुत किये जाते हैं। उदाहरणार्थ, विद्यार्थियो की संख्या को बिना किसी आधार के लिखने की अपेक्षा उन्हें आयु, कक्षा आदि के वर्गों मे बाँटकर व्यक्त करना निस्सन्देह एक अधिक वैज्ञानिक और तर्कपूर्ण क्रिया है।

(5) **सारणीयन का आधार प्रस्तुत करना**—वर्गीकरण द्वारा सारणीयन तथा विश्लेषण की अन्य क्रियाओ का आधार प्रस्तुत किया जाता है।

उपर्युक्त उद्देश्यों तथा कार्यों के कारण ही सांख्यिकी में वर्गीकरण का महत्त्वपूर्ण स्थान है। इस क्रिया के बिना संग्रहीत समकों का विश्लेषण और प्रस्तुतीकरण असम्भव सा प्रतीत होता है। बिना वर्गीकरण के न तो विशाल समकों को समझा जा सकता है, न उनकी तुलना की जा सकती है और न ही उनसे सही निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। अतः वर्गीकरण एक अनिवार्य और महत्त्वपूर्ण क्रिया है।

आदर्श वर्गीकरण के आवश्यक तत्त्व (Elements of an Ideal Classification)—एक आदर्श वर्गीकरण मे निम्न तत्त्वो का होना अत्यन्त आवश्यक है—

(i) **व्यापकता**—वर्गीकरण इतना व्यापक होना चाहिए कि प्रत्येक इकाई किसी न किसी वर्ग में अवश्य सम्मिलित हो जाये। कोई इकाई छूटनी नहीं चाहिए। यदि कुछ इकाइयाँ किसी निश्चित वर्ग में न आ सके तो उनके लिए एक 'विविध' वर्ग का आयोजन कर देना चाहिए। यदि 'वैवाहिक स्थिति' के आधार पर 'विवाहित', 'अविवाहित' केवल दो वर्ग बनाये जाते हैं तो बहुत से विधुर, विधवा, तलाक-प्राप्त आदि का इस प्रकार के वर्गीकरण मे समावेश नहीं होगा और वह अपूर्ण माना जायेगा। अतः वर्गीकरण करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि वर्ग पूर्ण और व्यापक हो।

(ii) **असंदिग्धता व स्पष्टता**—विभिन्न वर्ग इस प्रकार निर्धारित किये जाने चाहिएँ कि उनमे स्पष्टता, सरलता तथा असंदिग्धता के गुण मौजूद हों। कोई इकाई किस वर्ग में रखी जाये सम्बन्ध में कोई अनिश्चितता या दुविधा नहीं होनी चाहिए। प्रत्येक पद केवल एक ही वर्ग में

शामिल होना चाहिए।

(iii) स्थिरता—स्थिरता भी उत्तम वर्गीकरण का आवश्यक तत्त्व है। यदि प्रत्येक जाँच के साथ वर्गीकरण का आधार बदल जाये तो आँकड़े तुलना-योग्य नहीं रहते। उदाहरणार्थ, विभिन्न भारतीय जनगणनाओं में भिन्न-भिन्न आधारों पर जनसंख्या का पेशेवार वर्गीकरण किया गया है जिससे कारण जनसंख्या के समक पूर्ण रूप से तुलनीय नहीं हैं।

(iv) अनुकूलता—वर्ग-रचना अनुसन्धान के उद्देश्यानुकूल होनी चाहिए। मजदूरों की आर्थिक स्थिति ज्ञात करने के लिए आयु या वैवाहिक स्थिति के अनुसार उनका वर्गीकरण व्यर्थ रहेगा। ऐसी स्थिति में आय के अनुसार वर्ग बनाने चाहिएँ।

(v) सजातीयता—प्रत्येक वर्ग की इकाइयों में सजातीयता होनी चाहिए। एक वर्ग की सभी इकाइयाँ उस गुण के अनुसार होनी चाहिएँ जिसके आधार पर वर्गीकरण किया गया है।

(vi) लचनशीलता—एक आदर्श वर्गीकरण लोचदार भी होना चाहिए जिससे नवीन परिस्थितियों के अनुसार विभिन्न वर्गों में संशोधन किये जा सकें।

वर्गीकरण की रीतियाँ
(Methods of Classification)

सांख्यिकीय तथ्य दो प्रकार के होते हैं—(i) वर्णनात्मक (descriptive) तथा (ii) अंकात्मक (numerical)। वर्णनात्मक तथ्यों का प्रत्यक्ष माप नहीं किया जा सकता। केवल उपस्थिति व अनुपस्थिति के आधार पर उनकी गणना की जा सकती है। उदाहरणार्थ, साक्षरता, बेकारी, वैवाहिक स्थिति आदि वर्णनात्मक तथ्य हैं जिनका प्रत्यक्ष माप सम्भव नहीं है। केवल यह निर्धारित किया जा सकता है कि एक क्षेत्र में कितने 'साक्षर' हैं तथा कितने 'निरक्षर', कितने 'विवाहित' हैं और कितने 'अविवाहित'। ऐसे तथ्यों को गुण (attributes) कहते हैं। इसके विपरीत, अंकात्मक तथ्य वे तथ्य हैं जिनका प्रत्यक्ष माप सम्भव है जैसे आय, आयु, ऊँचाई, भार, आदि। ऐसे तथ्यों को चर-मूल्य (variables) भी कहते हैं।

इन दो प्रकार के तथ्यों के आधार पर वर्गीकरण की निम्न दो रीतियाँ हैं—

(क) गुणात्मक वर्गीकरण (Qualitative Classification or Classification according to Attributes)।

(ख) संख्यात्मक वर्गीकरण या वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकरण (Quantitative Classification or Classification according to Class-intervals)।

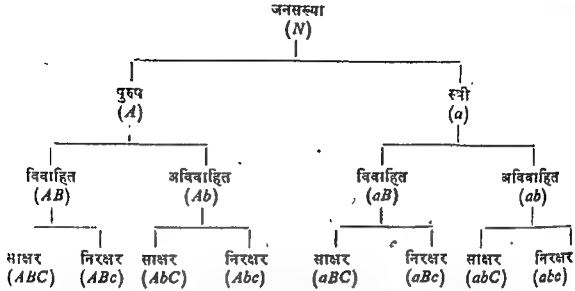
(क) गुणात्मक वर्गीकरण—जब तथ्यों को वर्णनात्मक विशेषताओं या गुणों जैसे साक्षरता, धर्म, व्यवसाय, आदि के आधार पर विभिन्न वर्गों में बाँटा जाता है तो वह विभाजन, गुणात्मक वर्गीकरण कहलाता है। यह निम्न दो प्रकार का होता है—

(i) द्वन्द्व-भाजन वर्गीकरण (Classification according to Dichotomy)—जब एक गुण की उपस्थिति या अनुपस्थिति के आधार पर तथ्यों को दो वर्गों में विभाजित किया जाता है तो ऐसे विभाजन को द्वन्द्व-भाजन या साधारण वर्गीकरण (simple classification) कहते हैं। गुणों की उपस्थिति को बड़े वर्णाक्षरों (A, B, C, etc.) द्वारा तथा अनुपस्थिति को वर्णमाला के छोटे अक्षरों (a, b, c, etc.) या ग्रीक वर्णाक्षरों जैसे α (ऐल्फा), β (बीटा), γ (गामा) आदि द्वारा प्रकट किया जाता है। साक्षरता के आधार पर 'साक्षर' (A) तथा 'निरक्षर' (a) वर्गों में विभाजन सरल या द्वन्द्व-भाजन वर्गीकरण कहलायेगा।

(ii) बहुगुण वर्गीकरण (Manifold Classification)—बहुगुण-वर्गीकरण में तथ्यों को एक से अधिक गुणों के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है जिससे दो से अधिक वर्ग बनते हैं। पहले एक गुण के अनुसार दो वर्ग बनाये जाते हैं फिर किसी अन्य गुण के आधार पर प्रत्येक वर्ग के दो उपवर्ग बनाये जाते हैं और इस प्रकार दो से अधिक वर्ग और उपवर्ग बन जाते हैं। किसी स्थान की जनसंख्या का तीन गुणों—(A) लिंग (sex), (B) वैवाहिक स्थिति (marital status) और

(*C*) साक्षरता (*literacy*) के आधार पर किया गया वर्गीकरण बहुगुण-वर्गीकरण कहलायेगा।

उदाहरण :



एक गुण के आधार पर तथ्यों को दो से अधिक वर्गों में बाँटने से भी बहुगुण-वर्गीकरण किया जा सकता है, जैसे भाषा (A) के आधार पर हिन्दी-भाषी (A_1), उर्दू-भाषी (A_2), गुजराती-भाषी (A_3), पंजाबी-भाषी (A_4), तमिल-भाषी (A_5), बंगला-भाषी (A_6) तथा अन्य भाषा-भाषी (A_7), आदि वर्ग बनाना।

गुणानुसार वर्गीकरण सरल होता है परन्तु इसमें दो बातों का विशेष ध्यान रखना पड़ता है—एक तो गुणों की स्पष्ट परिभाषा होनी चाहिए जिससे उनकी उपस्थिति अनुपस्थिति का आधार भ्रम-रहित हो। दूसरे, गुणों में होने वाले परिवर्तन जैसे अविवाहित या विवाहित होना, पर्याप्त रूप से ज्ञात होने चाहिएँ।

(ख) **वर्गान्तरों के अनुसार या संख्यात्मक वर्गीकरण**—अंकात्मक तथ्यों का वर्गीकरण सामान्यतः वर्गान्तरों (class-intervals) के अनुसार किया जाता है। सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या का ध्यान रखते हुए सभी समंकों को सुविधानुसार अलग-अलग वर्गों में बाँट दिया जाता है। यदि किसी कक्षा के 40 विद्यार्थियों की ऊँचाई 150 तथा 179 सेन्टीमीटर के अन्तर्गत है तो पाँच-पाँच सेन्टीमीटरों के वर्गान्तरों में निम्न रूप में वर्गीकरण होगा—

ऊँचाई (सेन्टीमीटर में)	विद्यार्थियों की संख्या
150—155	2
155—160	6
160—165	16
165—170	9
170—175	4
175—180	3
योग	40

संख्यात्मक वर्गीकरण में निम्न पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया जाता है—

(i) **वर्ग-सीमाएँ** (Class-limits)—प्रत्येक वर्ग दो अंकों से बनता है जिन्हें वर्ग-सीमाएँ कहते हैं। पहली सीमा, लोअर या निचली सीमा (lower limit) तथा दूसरी सीमा अपर या ऊपरी सीमा (upper limit) कहलाती है। निचली सीमा को l_1 तथा ऊपरी सीमा को l_2

संकेताक्षर (symbol) द्वारा व्यक्त किया जाता है। उपर्युक्त उदाहरण में पहले वर्ग की l_1 150 है तथा l_2 155 है।

(ii) वर्ग-विस्तार (Magnitude of the class-interval)—ऊपरी और निचली सीमा के अन्तर को वर्ग-विस्तार कहते है। इसे i द्वारा प्रकट किया जाता है। इस प्रकार, $i=l_2-l_1$. उक्त उदाहरण मे प्रत्येक वर्ग का विस्तार 5 है।

(iii) मध्य-मूल्य या मध्य-बिन्दु (Mid-value or Mid-point)—वर्ग-सीमाओ के मध्य-स्थान को मध्य-मूल्य या मध्य-बिन्दु कहते हैं। इसे ज्ञात करने के लिए दोनों सीमाओ के जोड़ का आधा कर दिया जाता है, अर्थात्—

$$\text{मध्य-बिन्दु (Mid-point)} = \frac{l_1+l_2}{2}.$$

उक्त उदाहरण में प्रथम मध्य-बिन्दु $\frac{150+155}{2}$ या 152.5 सेण्टीमीटर है, तथा अन्य मध्य-मूल्य क्रमशः 157.5, 162.5, 167.5, 172.5, 177.5 हैं। सांख्यिकीय गणन-क्रिया मे मध्य-मूल्य का बहुत महत्त्व है। एक वर्ग में आने वाली सभी इकाइयो का माप मध्य-मूल्य के बराबर माना जाता है।

(iv) वर्ग-आवृत्ति (Class-frequency)—संख्यात्मक वर्गीकरण मे यह जानना आवश्यक होता है कि कुल समग्र के कितने पद या अवलोकित मूल्य (observation) किसी वर्ग-विशेष की सीमाओ के अन्तर्गत आते हैं। इन इकाइयो की संख्या उस वर्ग की आवृत्ति या बारंबारता (frequency) कहलाती हैं। उपर्युक्त उदाहरण मे, 150—155 सेण्टीमीटर की ऊँचाई वाले विद्यार्थियों की संख्या 2 है जो कि इस वर्ग की आवृत्ति है। इसी प्रकार 6, 16, 9, 4 और 3 अगले वर्गों की आवृत्तियाँ हैं।

आवृत्ति वंटन
(Frequency Distribution)

विभिन्न वर्गों में आवृत्तियों का विन्यास (arrangement of frequencies) करने के लिए *मिलान-चिह्नों (tallies) का प्रयोग किया जाता है। प्रत्येक वर्ग में आने वाले एक पद या* इकाई के लिए एक तिरछी रेखा (/) उस वर्ग के सामने लगा दी जाती है। पाँचवी इकाई के लिए पिछली चार रेखाओं को काटती हुई विपरीत रेखा लगा दी जाती है। इस प्रकार, पाँच-पाँच के समूहों मे आवृत्ति की गणना करने से वर्गीकरण का कार्य सरल हो जाता है। इस रीति को अनुमेलन विधि ('Four and Cross' Method) कहते हैं। अन्त मे इन रेखाओ को गिनकर वह संख्या (आवृत्ति), सम्बन्धित वर्ग के सामने लिख दी जाती है। इस प्रकार, मूल्यो या वर्गों और उनकी आवृत्तियों के क्रमबद्ध विन्यास को आवृत्ति वितरण या आवृत्ति वंटन (frequency distribution) कहते हैं। अतः यह ऐसी व्यवस्था है जिसमे पदों के मान और उनकी आवृत्तियाँ दी हों।

खण्डित और अखण्डित चर (Discrete and Continuous Variables)—आवृत्ति वंटन की रचना के दो आधारभूत तत्त्व हैं—(i) चर, और (ii) आवृत्ति। वे संख्यात्मक अभिलक्षण जिनका माप भिन्न-भिन्न व्यक्तियों के लिए भिन्न होता है और जो मात्रा अथवा आकार मे घटते-बढ़ते रहते हैं चर (variables) कहलाते हैं जैसे व्यक्तियों की ऊँचाई, आयु, आय, परिवार मे बच्चो की संख्या, मूल्य, मजदूरी, आयात-निर्यात, परीक्षा मे प्राप्तांक इत्यादि। चर दो प्रकार के होते हैं—खण्डित और अखण्डित। खण्डित चर (discrete variable) वे चर हैं जिनके मूल्य निश्चित और खण्डित होते हैं; एक मूल्य से दूसरे मूल्य के बीच कुछ सुनिश्चित अन्तर (definite break) होता है। ये अधिकतर पूर्णांकों में होते हैं। उदाहरणार्थ, परिवार मे बच्चो की संख्या 0, 1, 2, 3, 4…ही होगी, दशमलव बिन्दुओं में नहीं। क्रिकेट मंच मे बने रनों (runs) की संख्या, विद्यार्थियों के प्राप्तांक, दुर्घटनाएँ, मकानों के कमरो की संख्या आदि खण्डित चर हैं। इसके विपरीत, अखण्डित

या अविच्छिन्न या सतत चर (continuous variables) वह चर है जिसका निश्चित सीमाओं के अन्तर्गत कोई भी मूल्य हो सकता है जैसे किसी विश्वविद्यालय के छात्रों की लम्बाई 160 सेण्टीमीटर से 180 सेण्टीमीटर तक के विस्तार में हो तो यह सम्भव है कि इन सीमाओं के बीच लगभग प्रत्येक माप का छात्र मिल सके। किसी छात्र की लम्बाई 170·3509 सेण्टीमीटर हो सकती है। जब छात्र की लम्बाई 160 सेण्टीमीटर से बढ़कर मान लीजिए कालान्तर में 172 सेण्टीमीटर हो जाती है तो वह इन दोनों मापों के बीच के प्रत्येक माप से होकर गुजरेगा। अतः निश्चित सीमाओं के अन्तर्गत मापों में अविच्छिन्नता (continuity) रहेगी, निश्चित अन्तर नहीं होंगे। खण्डित व अखण्डित चरों पर आधारित निम्न आवृत्ति वंटनों की तुलना से इनका अन्तर स्पष्ट हो जायेगा—

खण्डित आवृत्ति वंटन (Discrete frequency distribution)

बच्चों की संख्या	परिवारों की संख्या
0	3
1	15
2	37
3	85
4	109
5	51
योग	300

अखंडित आवृत्ति वंटन (Continuous frequency distribution)

लम्बाई (से० मी० में)	छात्रों की संख्या
160—164	215
164—168	585
168—172	105
172—176	76
176—180	17
180—184	2
योग	1000

आवृत्ति वंटन की रचना (Construction of a Frequency Distribution)—आवृत्ति वंटन की रचना करने के लिए सर्वप्रथम अव्यवस्थित या अवर्गित समंकों (raw data) को आरोही या अवरोही विन्यास (ascending or descending array) में क्रमबद्ध किया जाता है। फिर क्रमबद्ध पदों को गिनकर उपयुक्त मूल्यों या वर्गान्तरों के समक्ष लिखते जाते हैं। सुविधा के लिए मिलान-चिह्नों का प्रयोग किया जाता है।

खण्डित आवृत्ति वंटन (Discrete frequency distribution) वह वितरण होता है जिसमें खण्डित चर-मूल्यों के अनुसार आवृत्तियों का विन्यास किया जाता है। इसमें प्रत्येक पद-मूल्य के सामने वह संख्या (आवृत्ति) लिख दी जाती है जितनी बार उस पद की आवृत्ति होती है। पदमूल्यों को क्रमबद्ध करने के बाद मिलान-चिह्नों की सहायता से आवृत्ति वंटन की रचना की जाती है।

उदाहरण (Illustration) 1 :

किसी कक्षा के 20 विद्यार्थियों ने सांख्यिकी की परीक्षा में निम्न अंक प्राप्त किए—

5,	7,	1,	4,	3,	5,	6,	4,	7,	2
6,	3,	4,	6,	5,	7,	1,	8,	5,	6

उपर्युक्त प्राप्तांकों की सहायता से एक खण्डित आवृत्ति वंटन (discrete frequency distribution) की रचना कीजिए।

हल (Solution) :

प्राप्तांक (Marks)	मिलान-रेखाएँ (Tally-bars)	आवृत्ति (Frequency)
1	//	2
2	/	1
3	//	2
4	///	3
5	////	4
6	////	4
7	///	3
8	/	1
	योग	20

निचली सीमा के अन्तर का आधा करके उसे निचली सीमाओं में से घटा दिया जाता है और ऊपरी सीमाओं में जोड़ दिया जाता है। इस परिवर्तन से गणना-क्रिया में आसानी हो जाती है। उपर्युक्त समावेशी वर्गान्तरों को निम्न रूप में अपवर्जी बनाया जायेगा—

I	II
149·5–154 5	150·5–155 5
154·5–159·5	155·5–160·5
159·5–164·5	160 5–165·5
164·5–169·5	165.5–170·5
169·5–174 5	170·5–175·5
174·5–179·5	175·5–180 5

अन्तर—अपवर्जी व समावेशी रीतियों में बहुत अन्तर है। प्रथम, अपवर्जी रीति में एक वर्ग की अपर सीमा अगले वर्ग की अधर सीमा होती है परन्तु समावेशी रीति के अन्तर्गत इन दोनों सीमाओं में अन्तर (अधिकतर 1 का) होता है। दूसरे, अपवर्जी वर्गान्तरों में एक वर्ग की अपर सीमा के बराबर मूल्य की इकाई उस वर्ग में शामिल नहीं की जाती जबकि समावेशी विधि में ऊपरी सीमा के बराबर मूल्य भी उसी वर्ग में सम्मिलित रहता है। तीसरे, गणना-क्रिया को सरल करने के लिए समावेशी रीति को पहले अपवर्जी रीति में परिणत कर लिया जाता है। चौथे, जहाँ मूल्य पूर्णांकों में हों, वहाँ समावेशी विधि उपयुक्त होती है तथा अन्य स्थितियों में अपवर्जी विधि उत्तम मानी जाती है।

उदाहरण (Illustration) 2 :

30 विद्यार्थियों के सांख्यिकी में निम्नलिखित प्राप्तांक हैं—

11	27	30	14	30	4
25	16	18	33	47	35
18	14	20	25	10	18
9	39	14	29	20	25
29	15	22	20	29	29

उक्त प्राप्तांकों की सहायता से अपवर्जी व समावेशी रीतियों द्वारा 10–10 के वर्ग-विस्तार वाले अविच्छिन्न आवृत्ति बटन (continuous frequency distributions using exclusive and inclusive class-intervals) बनाइए।

हल (Solution) :

सर्वप्रथम, प्राप्तांकों को आरोही क्रम में अर्थात् इस प्रकार क्रमबद्ध किया जायेगा कि सबसे कम मूल्य सबसे पहले, उससे अधिक उसके बाद तथा सबसे अधिक अन्त में लिखा जाये।

आरोही क्रम

4	14	18	22	29	30
9	14	18	25	29	33
10	15	20	25	29	35
11	16	20	25	29	39
14	18	20	27	30	47

इसके बाद 10–10 के वर्गान्तरों में निम्न प्रकार वर्गीकरण किया जायेगा—

अपवर्जी रीति द्वारा

प्राप्तांक (Marks obtained)	मिलान-चिह्न (Tallies)	आवृत्ति (Frequency)
0–10	//	2
10–20	~~////~~ ~~////~~	10
20–30	~~////~~ ~~////~~ //	2
30–40	~~////~~	5
40–50	/	1
	योग	30

समावेशी रीति द्वारा

प्राप्तांक (Marks obtained)	मिलान-चिह्न (Tallies)	आवृत्ति (Frequency)
1–10	///	3
11–20	~~////~~ ~~////~~ //	12
21–30	~~////~~ ~~////~~ /	11
31–40	///	3
41–50	/	1
	योग	30

मध्य-मूल्यों से वर्ग बनाना—कभी-कभी केवल मध्य-बिन्दु और आवृत्तियाँ दी जाती है। ऐसी स्थिति मे, मध्य-मूल्यो की सहायता से वर्ग इस प्रकार बनाने चाहिएँ। पहले, मध्य-मूल्यों का पारस्परिक अन्तर ज्ञात करना चाहिए। यही वर्ग-विस्तार या i होगा; फिर उसके आधे को प्रत्येक मध्य-मूल्य में से घटाकर निचली सीमा तथा जोड़कर ऊपरी सीमा ज्ञात कर लेनी चाहिए। चिह्नों के रूप में—

$$l_1 = m - \frac{i}{2} \text{ तथा } l_2 = m + \frac{i}{2}$$

m' मध्य-मूल्य (mid-value) के लिए प्रयोग किया गया है।

खुले सिरे वाले या विवर्तमुखी वर्ग (Open-end classes)—कुछ परिस्थितियों मे प्रथम वर्ग की निचली सीमा तथा अन्तिम वर्ग की ऊपरी सीमा नही लिखी जाती। ऐसे वर्गों को खुले सिरे वाले वर्ग कहते हैं। इन वर्गों को पूरा करने के लिए इनका विस्तार वही रखा जाता है जो इनके निकटतम वर्ग का होता है। प्रथम वर्ग की ऊपरी सीमा मे से इस विस्तार को घटाकर उसकी *निचली सीमा निर्धारित कर ली जाती है तथा अन्तिम वर्ग की निचली सीमा मे वर्ग-विस्तार जोड़*कर ऊपरी सीमा निश्चित कर ली जाती है। परन्तु इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि प्रथम वर्ग की निचली सीमा ऋणात्मक न हो। यह शून्य (0) से कम नहीं होनी चाहिए। निम्न उदाहरण द्वारा यह क्रिया स्पष्ट हो जाती है—

खुले सिरे	पूर्ण वर्ग	खुले सिरे	पूर्ण वर्ग
10 से कम	0–10	10 से कम	0– 10
10–20	10–20	10–25	10– 25
20–40	20–40	25–40	25– 40
40–60	40–60	40–70	40– 70
60 से अधिक	60–80	70 से अधिक	70–100

संचयी आवृत्ति (Cumulative frequency)—कभी-कभी विभिन्न वर्गों की आवृत्तियाँ वर्गानुसार अलग-अलग नही दी जाती बल्कि उन्हें संचयी रूप मे लिखा जाता है। ऐसी स्थिति में प्रत्येक वर्ग की दोनों सीमाएँ नही लिखी जाती। केवल एक ही सीमा—ऊपरी या निचली—लिखी जाती है। *'ऊपरी सीमा' के आधार की संचयी आवृत्ति लिखते समय उनसे पहले 'से कम'* (below or under or less than) शब्द का प्रयोग किया जाता है। 'निचली सीमा' के अनुसार संचयी आवृत्ति लिखने मे 'से अधिक' (above or over or more than) का प्रयोग होता है। संचयी आवृत्तियाँ निम्न प्रकार बनाई जाती हैं—

वर्गान्तर	आवृत्ति
0-10	4
10-20	16
20-30	20
30-40	8
40-50	2
योग	50

'से कम' संचयी आवृत्ति

अपर सीमाएँ	संचयी आवृत्ति
10 से कम	4
20 ,, ,,	20 (4+16)
30 ,, ,,	40 (20+20)
40 ,, ,,	48 (40+ 8)
50 ,, ,,	50 (48+ 2)

'से अधिक' संचयी आवृत्ति

अधर सीमाएँ	संचयी आवृत्ति
0 से अधिक	50 (46+ 4)
10 ,, ,,	46 (30+16)
20 ,, ,,	30 (10+20)
30 ,, ,,	10 (2+ 8)
40 ,, ,,	2

संचयी आवृत्ति की सहायता से साधारण आवृत्ति भी निर्धारित की जा सकती है। इसके लिए *दो निकटवर्ती सीमाओं के आधार पर वर्ग बनाने* चाहिएँ तथा उन सीमाओं से सम्बन्धित संचयी आवृत्तियों के अन्तर उन वर्गों की आवृत्तियों के रूप में लिख देने चाहिएँ।

उदाहरण (Illustration) 3 :

निम्न श्रेणी को साधारण आवृत्ति बंटन (ordinary frequency distribution) में परिवर्तित कीजिए—

5 विद्यार्थी	3 से कम अंक पाते हैं
12 ,,	6 ,, ,, ,, ,, ,,
25 ,,	9 ,, ,, ,, ,, ,,
33 ,,	12 ,, ,, ,, ,, ,,

हल (Solution) :

प्राप्तांक (अपर सीमा)	विद्यार्थियों की संख्या (संचयी आवृत्ति)
3 से कम	5
6 ,, ,,	12
9 ,, ,,	25
12 ,, ,,	33

प्राप्तांक (वर्गान्तर)	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)
0–3	5
3–6	7 (12–5)
6–9	13 (25–12)
9–12	8 (33–25)
योग	33

वर्गान्तरानुसार वर्गीकरण की समस्याएँ
(Problems in Classification by Class-intervals)

वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकरण करते समय सांख्यिक को कुछ समस्याओं का सामना करना पड़ता है जिनका उचित समाधान होना बहुत आवश्यक है। मुख्य समस्याएँ निम्न प्रकार है—

(1) वर्गान्तरों की संख्या (Number of Class-intervals),

(2) वर्ग-विस्तार (Magnitude of Class-intervals),

(3) वर्ग-सीमाओं का निर्धारण (Determination of Class-limits), तथा

(4) आवृत्तियों का विन्यास (Arrangement of Frequencies)।

(1) **वर्गान्तरों की संख्या**—सर्वप्रथम यह निश्चय करना आवश्यक है कि प्रस्तुत समंकों को कितने वर्गान्तरों में बाँटा जाए। इसके लिए प्रत्येक स्थिति में लागू होने वाला कोई दृढ़ और निश्चित नियम नहीं है परन्तु इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि वर्गों की संख्या न तो बहुत कम हो और न बहुत अधिक हो। बहुत कम वर्ग होने पर उनमें आवृत्तियों का अत्यधिक जमाव हो जाता है और समूह की मौलिक विशेषताएँ छिपी रह जाती हैं। यदि वर्गों की संख्या बहुत अधिक है तो आवृत्तियाँ बहुत कम होंगी। कुछ वर्गों में शून्य आवृत्ति भी हो सकती है। इस प्रकार गणन-क्रिया में भी असुविधा होगी। अतः समंकों को इतने वर्गों में विभाजित किया जाना चाहिए कि उनके महत्त्वपूर्ण लक्षण स्पष्ट हो जाएँ और उनसे अधिकाधिक सूचना उपलब्ध हो सके। सामान्यतः एक आवृत्ति बंटन में 6 या 8 से कम और 20 से अधिक वर्गान्तर नहीं होने चाहिए।

(2) **वर्ग-विस्तार**—वर्गों का विस्तार समंकों के अधिकतम और न्यूनतम मूल्यों के अन्तर और वर्गों की संख्या पर निर्भर होता है। यदि 40 विद्यार्थियों की ऊँचाई को 15 वर्गों में बाँटना हो और अधिकतम तथा न्यूनतम ऊँचाई क्रमशः 180 और 150 सेन्टीमीटर हो तो वर्ग-विस्तार निम्न सूत्र द्वारा निश्चित किया जायेगा—

$$i=\frac{L-S}{n} \text{ अर्थात् वर्ग-विस्तार} = \frac{\text{अधिकतम मूल्य — न्यूनतम मूल्य}}{\text{वर्गों की संख्या}}$$

इस सूत्र के अनुसार—

$$i=\frac{180-150}{15} \text{ or } 2 \text{ cms.}$$

इस प्रकार वर्ग-विस्तार 2 रहेगा और वर्गान्तर 150–152, 152–154, आदि होंगे।

यदि सूत्र द्वारा ज्ञात वर्ग-विस्तार पूर्णांक नहीं होता तो उसे सन्निकटन की यथोचित रीति द्वारा सरल पूर्णांक के रूप में बदल लिया जायेगा। उपर्युक्त उदाहरण में यदि $L=179$ और $S=150{\cdot}5$ हो तो

$$i=\frac{179-150{\cdot}5}{15} \text{ or } 1{\cdot}9 \text{ अर्थात् } 2$$

व्यवहार में 2, 4, 5, 10 आदि वर्ग-विस्तार सरल और उत्तम माने जाते है। वर्गीकरण में सभी वर्गों का विस्तार समान होना चाहिए। असमान वर्गान्तरों को यथासम्भव समान बना लेना चाहिए। इसके लिए छोटे-छोटे असमान वर्गान्तरों को जोड़-जोड़कर बड़े किन्तु समान वर्गान्तर उपलब्ध कर लिए जाते है जिनके सामने सम्बन्धित असमान वर्गों की आवृत्तियों का जोड़ लिखा जाता है। यदि असमान वर्गान्तरों वाले आवृत्ति-बटन में बीच का कोई वर्गान्तर नहीं दिया होता तो उसकी सीमायें यथास्थान लिखकर आवृत्ति शून्य मान ली जाती हैं। तत्पश्चात् वर्गान्तर समान बनाये जाते हैं। असमान वर्गों में से सबसे अधिक विस्तार वाले वर्ग को ही आधार माना जाता है।

निम्न उदाहरण से यह क्रिया स्पष्ट हो जायेगी।

असमान (Unequal) वर्गान्तर

वर्ग	आवृत्ति
0-2	2
2-5	4
5-8	7
8-10	8
10-14	10
14-15	13
15-17	3
19-20	2
20-25	1

समान (Equal) वर्गान्तर

वर्ग	आवृत्ति	
0-5	6	(2+4)
5-10	15	(7+8)
10-15	23	(10+13)
15-20	5	(3+0+2)
20-25	1	
योग	50	

उक्त उदाहरण में अधिकतम वर्ग-विस्तार 5 है और ऐसे वर्गान्तर भी मौजूद है जिनकी अपर सीमायें 5 से विभाज्य है अतः 5 के विस्तार के ही वर्ग बनाये गये हैं। 17–19 वर्गान्तर की आवृत्ति शून्य है।

स्टर्जेस का नियम (Sturges' Rule)—प्रोफेसर स्टर्जेस के अनुसार वर्गों का विस्तार निम्न सूत्र से ज्ञात करना चाहिए—

$$i=\frac{L-S}{1+3{\cdot}322 \log N}$$

'N' पदों की कुल संख्या (total number of observations) के लिये प्रयोग किया गया है। $\log N$ उस संख्या का लघु-गुणक (Logarithm) है।

स्टर्जेस नियम के आधार पर वर्गों की संख्या भी निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जा सकती है—

$$n=1+3{\cdot}322 \log N$$

n वर्गों की संख्या (number of classes) के लिए प्रयुक्त हुआ है।

उदाहरण (Illustration) 4 :

50 विद्यार्थियों ने एक प्रतिस्पर्धात्मक परीक्षा दी। उनके [illegible] से) इस प्रकार हैं—

135	78	73	8	12	57	137	55
3	103	120	125	124	66	54	38
165	98	132	127	22	43	134	[illegible]
121	84	119	131	128	114	126	[illegible]
111	148	49	145	125	150	95	

Sturges' Rule का प्रयोग करते हुए उपर्युक्त प्राप्तांकों को समान अपवर्जी वर्गान्तरों में क्रमबद्ध कीजिए।

हल (Solution) :

अधिकतम मूल्य (L) 168 और न्यूनतम मूल्य (S) 3 है। कुल संख्या (N) 50 है अतः स्टर्जेस नियम के अनुसार वर्ग-विस्तार निम्न सूत्रानुसार ज्ञात किया जायेगा—

$$i = \frac{L-S}{1+3{\cdot}322 \log N}$$
$$= \frac{168-3}{1+3{\cdot}322 \times \log 50}$$
$$= \frac{165}{1+3{\cdot}322 \times 1{\cdot}6990}$$
$$= \frac{165}{1+5{\cdot}644} = \frac{165}{6{\cdot}644}$$
$$= 24{\cdot}8 \text{ या } 25$$

वर्गों की संख्या 6·644 या 7 है और वर्ग-विस्तार 24·8 या 25 है। अतः उक्त समंकों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करके आवृत्ति-वंटन के रूप में प्रस्तुत किया जायेगा—

प्राप्तांक	मिलान-चिह्न	परीक्षार्थियों की संख्या
0— 25	///	3
25— 50	////	4
50— 75	~~////~~ /	6
75—100	~~////~~ ////	9
100—125	~~////~~ ~~////~~ //	12
125—150	~~////~~ ~~////~~ /	11
150—175	~~////~~	5
	योग	50

(3) *वर्ग-सीमाओं का निर्धारण*—वर्गान्तरों की निचली और ऊपरी सीमाएँ स्पष्ट और यथासम्भव पूर्णांकों के रूप में होनी चाहिए। उनका निर्धारण इस प्रकार किया जाना चाहिए कि प्रत्येक इकाई का किसी न किसी वर्ग में समावेश हो और उस वर्ग का मध्य-मूल्य तथा उसमें आने वाली इकाइयों (आवृत्ति) के मूल्यों का औसत माप लगभग बराबर हो। सभी वर्गों की दोनों सीमाएँ स्पष्ट रूप से लिखी जानी चाहिएँ। वर्ग-सीमाएँ अपवर्जी या समावेशी रीति के अनुसार लिखी जा सकती हैं।

(4) **आवृत्तियों का विन्यास**—वर्गान्तरों की संख्या, वर्ग-विस्तार और वर्ग-सीमाओं का निर्धारण करने के बाद, प्रत्येक वर्ग में आने वाले पदों की गणना करके उनकी आवृत्ति लिखनी चाहिए। जैसा कि पहले बतलाया जा चुका है, इसके लिए विशेष मिलान-चिन्हों (Tallies) का प्रयोग किया जाता है जिससे गणना सरल हो जाती है। इस प्रकार वर्गित आवृत्ति वंटन (Grouped frequency distribution) की रचना सम्पन्न हो जाती है।

सांख्यिकीय श्रेणियाँ
(Statistical Series)

समंकीय तथ्यों को किसी निश्चित आधार पर अनुविन्यसित (arrange) करने से जो

व्यवस्थित क्रम प्राप्त होता है उसे सांख्यिकीय श्रेणी या समकमाला (Statistical Series) कहा जाता है। सिक्राइस्ट के अनुसार 'सांख्यिकी में समक-श्रेणी उन पदों या इकाइयों के गुणों को कहा जा सकता है जो किसी तर्कपूर्ण क्रम के अनुसार अनुविन्यसित किये जायें।'[1] कौनर के शब्दों में 'यदि दो चर-मूल्यों को एक साथ इस प्रकार क्रमबद्ध किया जाये कि एक के मापनीय अन्तर दूसरे के मापनीय अन्तरों से सम्बन्धित हों तो इस प्रकार उपलब्ध क्रम को सांख्यिकीय श्रेणी या समंकमाला कहते हैं।'[2] उदाहरण के लिए, यदि गत दस वर्षों में भारत के इस्पात-उत्पादन के समंक सुव्यवस्थित क्रम में रखे जायें तो ऐसा विन्यास सांख्यिकीय श्रेणी कहलायेगा।

सांख्यिकीय श्रेणियाँ निम्न प्रकार की होती है—

(क) (i) कालानुसार (Time), (ii) स्थानानुसार (Space), और (iii) परिस्थिति-अनुसार (Condition) श्रेणी।

(ख) (i) व्यक्तिगत (Individual), (ii) खण्डित (Discrete) तथा (iii) अखण्डित (Continuous) श्रेणी।

(क) (i) **कालानुसार या कालान्तर श्रेणी (Time Series)**—समय के किसी माप जैसे वर्ष, माह, सप्ताह, दिन, आदि के आधार पर वर्गीकृत समकों का व्यवस्थित क्रम, कालानुसार या ऐतिहासिक श्रेणी कहलाता है। यदि, गत आठ जनगणनाओं से उपलब्ध भारत की जनसंख्या के आँकड़ों को समयानुसार रखा जाये तो काल-श्रेणी का निर्माण होगा।

भारत की जनसंख्या (1901–1971)

वर्ष	1901	1911	1921	1931	1941	1951	1961	1971
जनसंख्या (करोड़ में)	23·8	25·2	25 1	27 9	31·9	36·1	43·9	54 8

(ii) **स्थानानुसार श्रेणी (Spatial Series)**—इसमें समंकों को स्थानिक या भौगोलिक आधार पर क्रमबद्ध किया जाता है जैसे राज्यों के अनुसार भारत की जनसंख्या का वितरण, विभिन्न देशों के राष्ट्रीय आय के समंक आदि। उदाहरणार्थ—

भारत के विभिन्न राज्यों में साक्षरता प्रतिशत (1971)
(Percentage of Literacy in Various States of India 1971)

राज्य	साक्षरता प्रतिशत	राज्य	साक्षरता प्रतिशत
आन्ध्र प्रदेश	24·6	कर्नाटक	31·5
असम	28·8	नागालैण्ड	27·3
बिहार	19·8	उड़ीसा	26·1
गुजरात	35 7	पंजाब	33·4
हरियाणा	26·7	राजस्थान	18·8
हिमाचल प्रदेश	31·3	तमिलनाडु	39·4
जम्मू व काश्मीर	18·3	उत्तर प्रदेश	21·6
केरल	60 2	पश्चिमी बंगाल	33·1
मध्य प्रदेश	22·1		
महाराष्ट्र	39·1	भारत	29·4

[1] 'A *series* as used statistically, may be defined as things or attributes of things arranged according to some logical order.' —Horace Secrist, *An Introduction to Statistical Methods*, p. 157.

[2] 'If two variable quantities can be arranged side by side so that measurable differences in the one correspond with measurable differences in the other, the result is said to form a statistical series.' —Connor, *Statistics*, p. 18.

(iii) परिस्थिति श्रेणी (Condition Series)—जब समंक-श्रेणी का निर्माण किसी परिस्थिति मे होने वाले परिवर्तनों के आधार पर किया जाता है तब उसे परिस्थिति श्रेणी कहते हैं। उदाहरणार्थ, यदि विद्यार्थियों की ऊँचाई के वर्ग बनाकर उन्हें एक श्रेणी में प्रस्तुत किया जाये या मजदूरो की आय के आंकड़ों को आय-वर्गों मे श्रेणीबद्ध करके रखा जाये तो ये परिस्थिति श्रेणियां कहलायेंगी।

(ख) रचना के आधार पर समक-श्रेणियां निम्न तीन प्रकार की होती हैं—

(i) व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series)—इसमें प्रत्येक पद का अलग-अलग व्यक्तिगत माप दिया जाता है, वह किसी वर्ग या समूह मे नही रखा जाता। यदि 50 विद्यार्थियों में से प्रत्येक के अलग-अलग प्राप्तांक लिखे जायें या 10 परिवारो मे से प्रत्येक की मासिक आय अलग-अलग लिख दी जाये तो वे व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणियां (series of individual observations) कहलायेंगी। निम्न उदाहरण इस प्रकार की श्रेणी से सम्बन्धित है—

परिवार	क	ख	ग	घ	च	छ
मासिक आय (रु०)	250	175	1800	500	1000	200

सांख्यिकीय गणन-क्रिया मे कालानुसार तथा स्थानानुसार श्रेणी को व्यक्तिगत समक-माला ही माना जाता है।

(ii) खण्डित या विच्छिन्न श्रेणी (Discrete or Discontinuous Series)—समंकों की उस श्रेणी को खण्डित या विच्छिन्न श्रेणी कहते हैं जिसमें प्रत्येक इकाई का यथार्थ माप (exact measurement) किया जा सकता है तथा विभिन्न पदों के चर-मूल्यों मे निश्चित अन्तर (definite breaks) होते हैं। इसमें पद अधिकतर पूर्णांकों (integral numbers) में होते हैं और उनके अन्य विभाग तथा उप-विभाग नही किये जा सकते। दुर्घटना, व्यक्ति, पृष्ठ-संख्या, बच्चों की संख्या, आदि खण्डित श्रेणी के रूप में प्रस्तुत किये जाते है।

कभी-कभी शब्दों के अक्षरों की गणना के आधार पर खण्डित या विच्छिन्न समक-माला का निर्माण करके विभिन्न सांख्यिकीय माप ज्ञात किये जाते हैं। ऐसी स्थिति मे, पहले, प्रस्तुत अंश के विभिन्न शब्दों के अक्षरों की गणना लिख दी जाती है; फिर उसकी आवृत्तियां लिखकर खण्डित श्रेणी बना ली जाती है।

उदाहरण (Illustration) 5 :

'In the beginning', said a Persian poet, 'Allah took a rose, a lily, a dove, a serpent, a little honey, a Dead Sea apple and a handful of clay. When he looked at the amalgam—it was a woman.'

उपर्युक्त गद्यांश से एक खण्डित आवृत्ति सारणी (discrete frequency table) की रचना कीजिए।

हल (Solution) :

सर्वप्रथम, प्रत्येक शब्द के अक्षर गिनकर (जैसे In मे 2, the में 3...) संख्याएँ लिख दी जायेंगी—

2, 3, 9, 4, 1, 7, 4, 5, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 7, 1, 6, 5, 1, 4, 3, 5, 3, 1, 7, 2, 4, 4, 2, 6, 2, 3, 7, 2, 3, 1, 5

फिर इन पदों को क्रमबद्ध करके अग्रलिखित रूप में खण्डित आवृत्ति-माला बनाई जायेगी—

अक्षरों की संख्या	शब्दों की संख्या
1	9
2	5
3	5
4	9
5	4
6	2
7	4
8	0
9	1
योग	39

(iii) **अखण्डित या अविच्छिन्न या सतत श्रेणी** (Continuous Series)—यह खण्डित श्रेणी की बिल्कुल विपरीत होती है। इसमें विभिन्न पदों के मूल्यों में निरन्तरता या अविच्छिन्नता (continuity) होती है। ये बहुत थोड़े अंश में ही बदलते हैं तथा इन्हें कुछ वर्गों में रखा जाता है। वर्गों में शामिल होने वाली संख्या को वर्ग-आवृत्ति के रूप में लिख दिया जाता है। वर्गों में प्रस्तुत किये जाने पर मूल्यों के यथार्थ माप स्पष्ट नहीं होते। प्रत्येक मूल्य को किसी एक वर्ग में स्थान प्राप्त होता है। वास्तव में, वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकरण इसी समंक-माला का उदाहरण है।

विद्यार्थियों का भार (किलोग्राम में)	विद्यार्थियों की संख्या
45-50	12
50-55	28
55-60	35
60-65	18
65-70	6
70-75	1
योग	100

खण्डित तथा अखण्डित श्रेणियों का अन्तर—खण्डित तथा अखण्डित समंक-श्रेणियों में बहुत अन्तर है। प्रथम, दोनों का स्वरूप भिन्न है। खण्डित श्रेणी में इकाइयों का मूल्य (size) और तत्सम्बन्धी आवृत्ति दी होती हैं जबकि अखण्डित श्रेणी में वर्गान्तर (classes) तथा आवृत्तियाँ लिखी जाती हैं। दूसरे, दोनों में माप का अन्तर है। खण्डित श्रेणी में यथार्थ माप होते हैं जो अधिकतर पूर्णाङ्कों के रूप में होते हैं। इसके विपरीत, अखण्डित माला में यथार्थ माप नहीं होते। तीसरे, खण्डित श्रेणी में मूल्यों में कुछ निश्चित अन्तर या विच्छिन्नता का तत्त्व होता है। इसके विपरीत, अखण्डित श्रेणी में कोई विच्छिन्नता नहीं होती। उसमें निश्चित सीमाओं के सभी मूल्यों की इकाइयाँ शामिल किये जाने की सम्भावना रहती है। चौथे, व्यक्ति, दुर्घटना, बच्चों की संख्या, पृष्ठों की संख्या आदि से सम्बन्धित समंक खण्डित माला के रूप में होते हैं, जबकि ऊँचाई, भार, आय, मजदूरी, आयु, आदि अखण्डित श्रेणी में प्रस्तुत किये जाते हैं।

सारणीयन
(Tabulation)

समंकों का विधिवत् वर्गीकरण करने के पश्चात् उन्हें व्यवस्थित ढंग से उपयुक्त सारणियों के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। सांख्यिकी में आँकड़ों का उचित प्रस्तुतीकरण बहुत आवश्यक है। इसके बिना, समंकों से प्राप्त होने वाली बहुत-सी सूचना छिपी रह जाती है, समस्या की स्पष्ट रूप में व्याख्या नहीं हो पाती तथा आँकड़ों से यथोचित निष्कर्ष नहीं निकाले जा सकते। अतः

जैसा कि क्रॉक्सटन एवं काउडेन ने कहा है, 'स्वयं अपने प्रयोग के लिए या अन्य व्यक्तियों द्वारा प्रयोग किये जाने के उद्देश्य से समंकों को किसी उपयुक्त रूप में प्रस्तुत करना चाहिए। सामान्यतः या तो समंक सारणियों में क्रमबद्ध किये जाते हैं या आरेखीय युक्तियों द्वारा उनका चित्रण किया जाता है।'[1] समंकों को निम्न तीन प्रकार से प्रस्तुत किया जा सकता है—

(अ) सारणियाँ (Tables),
(ब) चित्र (Diagrams), तथा
(स) बिन्दुरेखाचित्र (Graphs)।

यहाँ हम सारणीयन का विवेचन करेंगे।

सारणीयन का अर्थ (Meaning of Tabulation)—विस्तृत अर्थ में सारणीयन (Tabulation) समंकों की खानों (कॉलम) और पंक्तियों के रूप में कोई क्रमबद्ध व्यवस्था है।[2] कौनर के अनुसार, 'सारणीयन किसी विचाराधीन समस्या को स्पष्ट करने के उद्देश्य से किया जाने वाला सांख्यिकीय तथ्यों का क्रमबद्ध एवं सुव्यवस्थित प्रस्तुतीकरण है।'[3] वास्तव में, सारणीयन वर्गीकृत आँकड़ों को सरल और संक्षिप्त करने के लिए सारणियों में प्रस्तुत करने की क्रिया है। होरेस सिक्राइस्ट के शब्दों में, 'सारणियाँ, वर्गीकरण द्वारा किये गये विश्लेषण को स्थायी रूप में लेखबद्ध करने तथा समान व तुलनीय वस्तुओं को परस्पर निकटता की उचित स्थिति में रखने के साधन हैं।'[4]

उद्देश्य (Objects)—उपर्युक्त परिभाषाओं से सारणीयन के निम्नलिखित उद्देश्य या कार्य स्पष्ट हो जाते हैं—

(i) **व्यवस्थित प्रस्तुतीकरण**—सारणीयन का प्रमुख उद्देश्य वर्गीकृत समंकों द्वारा व्यक्त की गई सूचना को क्रमबद्ध व सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करना है।

(ii) **संक्षिप्त व स्थायी रूप**—अव्यवस्थित आँकड़ों को कम से कम स्थान में संक्षिप्त व स्थायी रूप में सारणियों द्वारा प्रकट किया जाता है जिससे विस्तृत सूचना एक ही दृष्टि में प्राप्त हो सके।

(iii) **समस्या का स्पष्टीकरण**—समंकों को सारणियों के रूप में प्रस्तुत करने से समस्या सरल व स्पष्ट हो जाती है।

(iv) **तुलना की सुविधा**—सारणीयन की सहायता से तुलनीय तथ्यों की सरलता से तुलना की जा सकती है क्योंकि तुलना-योग्य सामग्री को पास-पास के खानों या पंक्तियों में रखा जाता है।

महत्त्व तथा लाभ (Importance and Advantages)—सारणीयन समंकों के वर्गीकरण तथा उनके निर्वचन के बीच की महत्त्वपूर्ण क्रिया है। सारणीयन के बिना किसी भी समस्या का तुलनात्मक और सांख्यिकीय विवेचन सम्भव नहीं है। इस क्रिया का अत्यधिक महत्त्व उसके निम्नलिखित लाभों के कारण हैं—

(i) **सरलता**—सारणीयन से आवश्यक सूचना आसानी से समझी और याद रखी जा सकती है; सारणियों में प्रस्तुत समंकों को दोनों ओर से—ऊपर से नीचे तथा बाईं से दाहिनी

[1] 'Either for one's own use or for the use of others, the data must be presented in some suitable form. Usually the figures are arranged in tables or represented by graphic devices.' —Croxton and Cowden, *Applied General Statistics*, p. 3.

[2] 'Tabulation in its broadest sense is any orderly arrangement of data in columns and rows.' —Blair.

[3] '*Tabulation involves the orderly and systematic presentation* of numerical data in a form designed to elucidate the problem under consideration.' —Connor, *Statistics in Theory and Practice*, p. 20.

[4] 'Tables are a means of recording in permanent form the analysis that is made *through classification and of placing in juxtaposition things that are similar and should be* ed.' —Horace Secrist.

ओर—सरलतापूर्वक पढ़ा जा सकता है। इसके अतिरिक्त सारणियों से समंक सम्बन्धी गणन-क्रियाएँ जैसे जोड़ना, घटाना, आदि सरल हो जाती है और अशुद्धियों का सुगमता से पता चल जाता है।

(ii) तुलनात्मक अध्ययन—सारणियों मे समान व तुलना-योग्य समको को परस्पर निकटवर्ती खानों में रखा जाता है जिससे उनका तुलनात्मक अध्ययन आसानी से किया जा सके। इसके अतिरिक्त, सारणियों में प्रतिशत, अनुपात, गुणक, आदि विश्लेषण इकाइयो के प्रयोग के कारण भी तुलना सुविधाजनक हो जाती है।

(iii) बचत—इससे स्थान व समय की बचत होती है क्योंकि अधिक से अधिक सूचना कम से कम स्थान में व्यक्त की जाती है।

(iv) सांख्यिकीय विवेचन—सारणीयन समकों के विस्तृत विश्लेषण मे सहायक होता है। समंकों को सारणीबद्ध करके ही, माध्य, विचरण, विषमता, सह-सम्बन्ध आदि सांख्यिकीय माप ज्ञात किये जाते है।

(v) प्रदर्शन—सारणियो की सहायता से ही समंको को चित्रलेख तथा आरेखीय चित्रो द्वारा आकर्षक ढंग से प्रदर्शित किया जा सकता है।

सक्षेप मे, सारणियाँ वर्गीकृत समकों को सरल, सक्षिप्त और सुव्यवस्थित रूप मे प्रस्तुत करके सांख्यिक को निर्वचन मे सहायता प्रदान करती है। परन्तु, सन्दर्भ के अभाव मे कभी-कभी सारणी मे प्रस्तुत समको का अर्थ पूर्णतया स्पष्ट नही हो पाता। दूसरे, व्यक्तिगत समंको का स्वतंत्र अस्तित्व सारणी मे लगभग मिट जाता है। ये सारणीयन की परिसीमाएं (limitations) हैं।

वर्गीकरण व सारणीयन का अन्तर (Difference between Classification and Tabulation)—वर्गीकरण तथा सारणीयन दोनो ही सांख्यिकी की महत्त्वपूर्ण क्रियाएँ है जिनसे सकलित समंको को सक्षिप्त व व्यवस्थित रूप मे क्रमबद्ध किया जा सकता है। परन्तु दोनो में अन्तर है। प्रथम, दोनो का क्रम (sequence) भिन्न है। पहले आंकडो को वर्गीकृत किया जाता है तथा वर्गीकरण के बाद उन्हे सारणियो मे प्रस्तुत किया जाता है। अतः वर्गीकरण सारणीयन का आधार है। दूसरे, वर्गीकरण मे सकलित समको को उनके समान-असमान गुणो के आधार पर वर्गो या श्रेणियो में बांटा जाता है जबकि सारणीयन मे उन वर्गीकृत तथ्यों को खानों और पक्तियों मे प्रस्तुत किया जाता है। सारणीयन वर्गीकरण का यन्त्रात्मक भाग (mechanical part) है। तीसरे, वर्गीकरण सांख्यिकीय विश्लेषण की एक विधि है जबकि सारणीयन समको के प्रस्तुतीकरण की रीति है। वर्गीकरण की क्रिया में समको को वर्गों, उपवर्गों मे बांटा जाता है जबकि सारणीयन मे उन्हे स्थायी रूप मे उपयुक्त शीर्षकों व उप-शीर्षको के अन्तर्गत प्रस्तुत किया जाता है। सारणियो मे व्युत्पन्न समको (*derivatives*) जैसे प्रतिशत, अनुपात आदि का भी प्रयोग किया जाता है जिससे तुलना सरल हो जाये।

सारणी के मुख्य भाग (Main Parts of a Table)—एक सारणी के निम्नलिखित प्रमुख भाग होते है—

(1) *सारणी शीर्षक* (*Title*)—*सबसे पहले सारणी का शीर्षक होता है जिससे समको की* प्रकृति, क्षेत्र, समय आदि के बारे मे एक ही दृष्टि में सूचना मिल सके। यह मोटे अक्षरो मे होता है ताकि तुरन्त ही पाठकों का ध्यान आकर्षित हो।

(2) खानों व पक्तियों के अनुशीर्षक (Captions and Stubs)—उदग्र खानो (vertical columns) के *अनुशीर्षक* (*captions*) *तथा क्षैतिज पक्तियो* (*horizontal rows*) के *अनुशीर्षक* (stubs) स्पष्ट व सक्षिप्त होते हैं तथा उनमें प्रयुक्त सांख्यिकीय-एकक का भी उल्लेख होता है। प्रत्येक सारणी में खानों व पक्तियों में प्रविष्ट समकों के जोड़ की भी व्यवस्था होती है।

(3) रेखाएं खींचना तथा रिक्त स्थान छोड़ना (Ruling and Spacing)—सारणी का आकर्षण बहुत कुछ उचित रेखा खीचने *तथा उपयुक्त रिक्त स्थान छोड़ने पर निर्भर होता है।* सारणी में समक लिखने से पूर्व नमूने के रूप मे सारणी का ढांचा बना लेना उचित रहता है।

(4) पदों की व्यवस्था (Arrangement of Items)—सारणी के प्रारूप मे खानों व

पंक्तियों को उचित ढंग से क्रमबद्ध करके उनमें विभिन्न समंकों को यथोचित रीति से लिख दिया जाता है। तुलना-योग्य समंकों को निकटवर्ती खानों में रखा जाता है। पदों की व्यवस्था, आवश्यकतानुसार, वर्णमाला, समय, महत्त्व, आकार, रीति-रिवाज, स्थानिक या भौगोलिक आधार पर की जाती है।

(5) टिप्पणियाँ (Footnotes)—सारणी में कभी-कभी कुछ प्रविष्ट समंकों या शब्दों को अधिक स्पष्ट करने या उन पर अधिक महत्त्व देने के लिए सारणी के नीचे एक संक्षिप्त व्याख्यात्मक टिप्पणी दी जा सकती है।

(6) उद्गम (Source)—प्रत्येक सारणी के अन्त में यथासम्भव समंकों के सन्दर्भ व उद्गम दिये जाते हैं।

सारणी के प्रमुख अंग निम्न प्रारूप से स्पष्ट हो जाते हैं—

सारणी शीर्षक (Title)

खाने (Columns) ↓ ↓

पंक्ति-शीर्षक (Stub-Box)	उपशीर्षक (Caption)	उपशीर्षक (Caption)	योग (Total)
अनुशीर्षक (Stub)			
योग (Total)			

पंक्तियाँ (Rows) →

टिप्पणी (Footnote) :

स्रोत (Source) :

सारणियों के प्रकार
(Kinds of Tables)

सांख्यिकीय सारणियाँ विभिन्न आधारों पर निम्न प्रकार की होती हैं—

(क) उद्देश्य के आधार पर—इस आधार पर सारणियाँ निम्न दो प्रकार की होती हैं—

(1) सामान्य उद्देश्य वाली सारणी (General Purpose Table)—इसे सन्दर्भ सारणी (Reference Table) भी कहते हैं। क्रॉक्सटन व काउडेन के अनुसार 'सामान्य उद्देश्य वाली या सन्दर्भ सारणी का प्राथमिक तथा प्रायः एकमात्र उद्देश्य समंकों को इस प्रकार प्रस्तुत करना होता है कि व्यक्तिगत इकाइयाँ पाठक द्वारा तुरन्त ढूँढी जा सकें।'[1] वास्तव में, इस प्रकार की सारणी का कोई विशेष उद्देश्य नहीं होता है। ये सारणियाँ अत्यधिक विस्तृत होती हैं तथा प्रायः किसी रिपोर्ट के साथ सम्बन्ध रहती हैं। जनगणना रिपोर्ट तथा अन्य सरकारी प्रकाशनों में इस प्रकार की सारणियों का काफी प्रयोग होता है जिनसे विभिन्न व्यक्ति लाभ उठाते हैं।

[1] 'The primary, and usually sole, purpose of a reference table is to present the data in such a manner that individual items may be found readily by a reader.'—Croxton and Cowden, *Applied General Statistics*, p. 2.

(2) विशेष उद्देश्य वाली सारणी (Special Purpose Table)—इनको सारांश सारणी (Summary table) भी कहते हैं । ये किसी विशेष उद्देश्य की पूर्ति के लिए सामान्य उद्देश्य वाली सारणियों की सहायता से तैयार की जाती हैं । ये सारणियाँ अपेक्षाकृत छोटी होती हैं तथा किसी परिणाम को प्रभावपूर्ण ढंग से समझाने के लिए बनायी जाती हैं । सामान्य उद्देश्य वाली सारणी से विशेष उद्देश्य वाली सारणी बनाने के लिए अधिकतर माध्य, प्रतिशत, अनुपात, गुणांक आदि का प्रयोग किया जाता है, अनावश्यक समंकों को छोड़ दिया जाता है तथा विस्तृत आँकड़ों को संक्षिप्त रूप देकर उन्हें पुनर्गठित किया जाता है ।

(ख) मौलिकता —इस आधार पर सारणियाँ निम्न दो प्रकार की होती हैं—

(1) मौलिक या प्राथमिक सारणी (Original or Primary Table)—मौलिक या प्राथमिक सारणी में समक उसी मौलिक रूप में प्रस्तुत किये जाते हैं जिसमें वे एकत्रित किये गये थे । इसको वर्गीकरण सारणी भी कहते हैं ।

(2) व्युत्पन्न सारणी (Derivative Table)—इसमें मौलिक समंकों को प्रस्तुत नहीं किया जाता वरन् उनके आधार पर निकाले गये योग, प्रतिशत, अनुपात, गुणांक या माध्य आदि को प्रस्तुत किया जाता है ।

(ग) रचना के आधार पर (On the basis of construction)—बनावट के अनुसार सारणियाँ निम्न दो प्रकार की होती हैं—

(1) सरल या एकगुण वाली सारणी (Simple or Single or One-way Table)—सरल सारणी में समंकों की केवल एक ही विशेषता या गुण को लिया जाता है जैसे विद्यार्थियों की संख्या का विभिन्न ज्ञान-संकायों (faculties) के अनुसार सारणीयन, जनसंख्या का राज्यों के अनुसार वितरण, आदि । यह बनाने तथा समझने में अत्यन्त सरल होती है ।

उदाहरण 6 :

एकगुण सारणी का उदाहरण—

भारत की जनसंख्या का आयुवर्गानुसार वितरण
(Distribution of Population of India According to Age)

आयु वर्ग (Age-Group) Years	व्यक्तियों की संख्या (Number of Persons)
0–15 15–40 40–60 60 से अधिक	
योग	

(2) जटिल सारणी (Complex Table)—एक से अधिक गुणों का विवेचन करने वाली सारणी को जटिल सारणी कहते हैं । प्रदर्शित गुणों की संख्या के अनुसार जटिल सारणी निम्न प्रकार की होती है—

(i) द्विगुण सारणी (Double or Two-way Table)—इसमें समंकों की दो विशेषताओं का प्रदर्शन किया जाता है जैसे विभिन्न ज्ञान-शाखाओं तथा लड़के-लड़कियों के अनुसार विद्यार्थियों का सारणीयन या जनसंख्या का अलग-अलग राज्यों तथा लिंग—पुरुष-स्त्री के अनुसार वितरण । अगले उदाहरण में जनसंख्या का दो गुणों—आयु तथा लिंग—के अनुसार वितरण प्रस्तुत किया गया है—

उदाहरण 7 :

द्विगुण सारणी का उदाहरण—

भारतीय जनसंख्या का आयु व लिंग के अनुसार वितरण
(Distribution of Population of India by Age and Sex)

आयु-वर्ग (Age-Group)	व्यक्तियों की संख्या (Number of Persons)		
	पुरुष	स्त्री	योग
0–15 15–40 40–60 60 से अधिक			
योग			

(ii) त्रिगुण सारणी (Treble or Three-way Table)—इसमें तीन गुणों को प्रस्तुत किया जाता है जैसे विद्यार्थियों की संख्या का ज्ञान-शाखा, लिंग तथा निवास के अनुसार सारणीयन या जनसंख्या का राज्य, लिंग व साक्षरता के अनुसार वितरण आदि। निम्न उदाहरण में जनसंख्या का तीन गुणों—आयु, लिंग व साक्षरता—के अनुसार विश्लेषण किया गया है—

उदाहरण 8 :

त्रिगुण सारणी का उदाहरण—

भारतीय जनसंख्या का आयु, लिंग व साक्षरता के अनुसार वितरण
(Distribution of Population of India by Age, Sex and Literacy)

व्यक्तियों की संख्या दस लाख में
(No. of persons in millions)

आयु-वर्ग (Age-Group) Years	पुरुष			स्त्री			योग		
	साक्षर	निरक्षर	योग	साक्षर	निरक्षर	योग	साक्षर	निरक्षर	योग
0–15 15–40 40–60 60 से अधिक									
योग									

(iii) बहुगुण सारणी (Manifold Table)—इस प्रकार की सारणी में समंकों के अनेक गुणों का एक साथ प्रस्तुतीकरण किया जाता है, जैसे विद्यार्थियों की संख्या का ज्ञान-शाखाओं, आयु-वर्गों, लिंग तथा निवास के अनुसार सारणीयन या जनसंख्या का राज्यों, लिंग, साक्षरता, आयु तथा धर्मों के अनुसार वितरण।

अपने उदाहरण में चार गुणों—विभिन्न राज्यों, आयु-वर्गों, लिंग तथा साक्षरता—के आधार पर बहुगुण सारणी बनाई गई है। इसे अन्य गुणों का प्रदर्शन करने के लिए बढ़ाया जा सकता है परन्तु जैसे-जैसे सारणी में प्रस्तुत विशेषताओं की संख्या बढ़ती जाती है, उसमें जटिलता आती जाती है।

उदाहरण 9 :

बहुगुण सारणी का उदाहरण—

भारतीय जनसंख्या का राज्य, आयु, लिंग व साक्षरता के अनुसार वितरण
(Distribution of Population of India by States, Age, Sex and Literacy)

व्यक्तियों की संख्या (दस लाख में)

राज्य	आयु वर्ग	पुरुष			स्त्री			योग		
		साक्षर	निरक्षर	योग	साक्षर	निरक्षर	योग	साक्षर	निरक्षर	योग
1. आन्ध्र प्रदेश	0-15 15-40 40-60 60 से अधिक									
	योग									
2. आसाम	0-15 15-40 40-60 60 से अधिक									
	योग									

इस सारणी को अन्य राज्यों के लिए बढ़ाया जा सकता है।

सारणी की रचना के नियम
(Rules for Construction of Statistical Tables)

यद्यपि एक अच्छी सारणी का निर्माण पर्याप्त सीमा तक सांख्यिक की योग्यता, सामान्य विवेक और अनुभव पर निर्भर होता है फिर भी सारणियाँ बनाते समय निम्न नियमों (rules) एवं सावधानियाँ

(1) शीर्ष [illegible]
चाहिए जिसमें यह प्रकट हो जाए कि समंक किस [illegible]
किस आधार पर उनका वर्गीकरण किया गया है। [illegible]

(2) खाने व पंक्तियाँ (Columns and Rows)—खानों व पंक्तियों की संख्या प्रस्तुत [illegible]

उनके शीर्षक (captions an [illegible]
सन्निकट किये गये समंकों के [illegible]

(3) रेखायें (Rulings)—महत्वपूर्ण खाने मोटी या दोहरी रेखाओं [illegible]

जिससे उनकी ओर तुरन्त ध्यान आकर्षित हो। कम महत्त्व की सूचना को हल्की रेखाओं वाले खानो में रखना चाहिए।

(4) तुलना (Comparison)—यह ध्यान रखना चाहिए कि जिन समंकों की तुलना करनी है वे पास-पास रखे जायें।

(5) व्युत्पन्न समंक (Derivatives)—प्रतिशत, अनुपात, गुणांक, माध्य आदि व्युत्पन्न समंकों को मूल समंकों के पास वाले खाने में ही रखना चाहिए।

(6) पदों की व्यवस्था (Arrangement of Items)—सारणियों में विभिन्न पद, महत्त्व, आकार, वर्णमाला, स्थान या समय के अनुसार व्यवस्थित करने चाहिएँ। अनेक गुण वाली सारणियों में ऐसे गुण वाले समंकों को पहले रखा जाता है जिनको कई वर्गों में विभक्त किया जा सके। कम वर्गों वाले गुणो को बाद के खानों मे प्रस्तुत किया जाता है। जो समंक, विविध प्रकृति के या कम महत्त्व के हों, उन्हें एक विविध खाने (miscellaneous column) में प्रस्तुत कर दिया जाता है।

(7) विशेष महत्त्व (Special Emphasis)—विशेष महत्त्व की सूचना की ओर ध्यान आकर्षित करने के लिए उन्हें मोटे या टेढ़े अंकों मे लिख दिया जाता है।

(8) इकाई तथा सन्निकटन (Unit and Approximation) —माप की इकाई को तथा उपसादन की सीमा को सारणी के ऊपर की ओर या सम्बन्धित खाने के अनुशीर्षक मे लिख देना चाहिए।

(9) टिप्पणियाँ (Footnotes)—यदि कोई आवश्यक सूचना सारणी में प्रस्तुत होने से रह गई है या किसी समंक के बारे में विशेष स्पष्टीकरण देना है तो उसके लिए सारणी के नीचे व्याख्यात्मक टिप्पणी दे देनी चाहिए।

(10) उद्गम (Source)—सारणी के नीचे समकों के उद्गम का उल्लेख अवश्य होना चाहिए जिससे यह ज्ञात हो जाए कि वे कहाँ से उद्धृत किये गये हैं।

(11) योग (Total)—सारणियों मे योग व अन्तर्योग का इस प्रकार आयोजन करना चाहिए जिससे कि खाने व पंक्तियों के योग की स्वयं एक दूसरे से जाँच होती रहे और इस प्रकार अशुद्धियो का पता चल जाये।

(12) सामान्य नियम (General Rules)—उपर्युक्त नियमों के अतिरिक्त सांख्यिक को अन्य सामान्य नियमो का भी पालन करना चाहिए। सारणी का आकार कागज के आकार के अनुकूल होना चाहिए। यदि सामग्री बहुत अधिक है तो उसे कई सारणियों मे प्रस्तुत किया जा सकता है। प्रत्येक सारणी पूर्ण, सरल, स्पष्ट, बुद्धिगम्य व मितव्ययी होनी चाहिए।

संक्षेप मे, सारणीयन की क्रिया सरल नहीं है। हैरी जरोम के अनुसार 'एक उच्च कोटि की सारणी तैयार करने के लिए सांख्यिक को यह स्पष्ट जानकारी होनी चाहिए कि किन तथ्यों को प्रस्तुत करना है, किन विषमताओं को महत्त्व देना है व किन-किन बातों पर अत्यधिक बल देना है। इसके अतिरिक्त, उसे सारणी-रचना की तान्त्रिक प्रविधि का भी ज्ञान होना चाहिए।"......एक उत्तम सांख्यिकीय सारणी निपुणता व प्रविधि की विजय है और स्पष्ट रूप से प्रस्तुत अधिकतम सूचना तथा स्थान की मितव्ययिता की सर्वोत्कृष्ट कृति है।'[1] निस्सन्देह, एक उत्तम सारणी का निर्माण सांख्यिक की निपुणता, विवेक-शक्ति व अनुभव पर निर्भर होता है। जैसा कि डा० बाउले ने कहा है 'संकलन तथा सारणीयन में सामान्य विवेक की प्रमुख आवश्यकता है और अनुभव प्रमुख शिक्षक है।'[2]

[1] 'To prepare a first class table, one must have a clear idea of the facts to be presented, the contrast to be stressed, the points upon which emphasis is to be placed and lastly, a familiarity with the technique of preparation.... A good statistical table is a triumph of ingenuity and technique, a masterpiece of economy of space combined with a maximum of clearly presented information.' —Harry Jerome.

[2] 'In (collection and) tabulation, commonsense is the chief requisite and experience chief teacher.' —Dr. Bowley.

उदाहरण (Illustration) 10 :

लिंग, आयु व साक्षरता के आधार पर निर्मित निम्न निरंक सारणी (blank table) में निहित अशुद्धियों को दर्शाइए और उसका पुनर्गठन कीजिए—

लिंग	0-25		25-50		50-75		75-100	
	साक्षर	निरक्षर	साक्षर	निरक्षर	साक्षर	निरक्षर	साक्षर	निरक्षर
पुरुष								
स्त्री								

हल (Solution) :

उपर्युक्त सारणी में निम्न त्रुटियाँ हैं—

(i) सारणी का कोई शीर्षक नहीं दिया गया है।

(ii) विभिन्न खानों व पंक्तियों के योग नहीं दिये गये हैं।

(iii) खानों व पंक्तियों का क्रम ठीक नहीं है। पहले कॉलम में केवल दो वर्गों वाली विशेषता (sex) दी गई है जबकि चार वर्गान्तरों वाली विशेषता अर्थात् आयु को अन्य चार कॉलम में प्रविष्ट किया गया है।

(iv) रेखाएँ महत्त्व के अनुसार उचित रूप से नहीं खींची गई हैं।

इन सब त्रुटियों के कारण उक्त सारणी में वर्णित तीनों विशेषताओं के बारे में एक ही दृष्टि में आवश्यक सूचना स्पष्ट नहीं होती। अतः उसका निम्नलिखित रूप में पुनर्गठन करना चाहिए—

आयु, लिंग व साक्षरता के अनुसार जनसंख्या का वितरण
(Distribution of Population by Age, Sex and Literacy)

व्यक्तियों की संख्या ('''में)

आयु-वर्ग (वर्षों में)	पुरुष			स्त्री			योग		
	सा०	नि०	कुल	सा०	नि०	कुल	सा०	नि०	कुल
0- 25 25- 50 50- 75 75-100									
योग									

उदाहरण (Illustration) 11 :

निम्नलिखित सूचना को एक उपयुक्त सारणी के रूप में व्यवस्थित कीजिए—

खाद्यान्न जाँच समिति ने पूर्वी, उत्तर प्रदेश और उत्तर प्रदेश के शेष भाग में

आकार का निम्न तुलनात्मक अध्ययन किया—

उत्तर प्रदेश के 14 पूर्वी जिलो में 2 एकड़ से कम क्षेत्रफल वाली जोतों का अनुपात सभी आकार की जोतों के कुल क्षेत्रफल—12,280 हजार एकड़—का 20% है जबकि शेष यू० पी० के लिए तत्सवादी समक 29,036 हजार एकड़ और 11% है। इसी प्रकार, 2 एकड़ से अधिक और 5 एकड़ तक क्षेत्रफल वाली जोतो का अनुपात कुल क्षेत्रफल का 29% 14 जिलों के लिए और केवल 3% शेष उ० प्र० के लिए है। इसके विपरीत, 5 एकड़ से अधिक क्षेत्रफल वाली जोतों का प्रतिशत 14 जिलो की तुलना में शेष उ० प्र० में कहीं अधिक है।

Arrange in a suitable tabular form the following—

The Foodgrains Enquiry Committee make the following comparative study of the size of holdings in the Eastern U. P., with the rest of U. P.—

In the 14 eastern districts of U. P., holdings below 2 acres account for 20% of the area under all holdings comprising the total of 12,280 thousand acres. The corresponding figures for the rest of U. P. are 11% and 29,036 thousand acres. Similarly, the proportion of the area covered by holdings exceeding 2 acres but not exceeding 5 acres to the area under all holdings is 29% in 14 districts and only 3% in the rest of U. P. On the other hand, the proportion of area covered by holdings exceeding 5 acres is much greater in the rest of U. P. than in the 14 districts. *[B. Com., Banaras, 1960, M. A., Delhi, 1958]*

हल (S. .ution) :

इस विवरण मे दो विशेषताओं का विवेचन किया गया है—(i) खेतो का आकार : 0–2, 2–5, 5 एकड़ से अधिक; (ii) उत्तर प्रदेश के दो भाग—14 पूर्वी जिले, व शेष उ० प्र०; इनसे सम्बन्धित क्षेत्रफल तथा प्रतिशत का भी उल्लेख किया गया है। दी हुई प्रतिशतो के आधार पर अलग-अलग आकार के खेतो के क्षेत्रफल के अंक ज्ञात करके निम्न प्रकार सारणी बनाई जाएगी—

पूर्वी उत्तर प्रदेश और शेष उ० प्र० में जोत आकारों का तुलनात्मक प्रस्तुतीकरण

(क्षेत्रफल—हजार एकड़ में)

जोत का आकार (एकड़ में)	पूर्वी जिले		शेष यू० पी०	
	क्षेत्रफल	%	क्षेत्रफल	%
2 से कम	2,456	20	3,194	11
2 से 5	3,561	29	871	3
5 से अधिक	6,263	51	24,971	86
योग	12,280	100	29,036	100

स्रोत . खाद्यान्न जाँच समिति रिपोर्ट

यान्त्रिक सारणीयन
(Mechanical Tabulation)

जब अनुसन्धान का क्षेत्र बहुत छोटा होता है तो हाथ द्वारा (by hand) सारणीयन कर लिया जाता है परन्तु विशाल क्षेत्र मे जहाँ बहुत अधिक समक होते है, यन्त्रों द्वारा (by ne) सारणीयन किया जाता है।

यान्त्रिक सारणीयन (mechanical tabulation) मे निम्नलिखित क्रियाएँ की जाती हैं—

(1) संकेतांकों में बदलना (Codification)—सबसे पहले प्रश्नावली में प्रविष्ट सूचना को संकेतांकों (code numbers) मे बदला जाता है।

(2) संकेतांकों को कार्डों पर लिखना (Transcription)—इसके बाद संकेतांकों को सारणीयन कार्डों पर उतारा जाता है। प्रत्येक कार्ड में 0 से 9 तक अंक होते है तथा अनेक कॉलम होते हैं। सूचना से सम्बन्धित संकेतांक को 'की पंच' (key punch) द्वारा काटकर छेद कर लिया जाता है।

(3) परीक्षण (Verification)—सूचना को कार्डों पर उतारने के बाद त्रुटियो की जाँच करने के लिए एक परीक्षण-पंच (verifying punch) द्वारा यह देखा जाता है कि कार्डों में छेद आवश्यकतानुसार ठीक किए गए है या नही।

(4) कार्डों को छांटना (Sorting)—फिर कार्डों को उनके विभिन्न गुणों के अनुसार, बिजली के छांटने वाले यन्त्र (electric sorting machine) में डालकर अलग-अलग कर दिया जाता है।

(5) सारणीयन (Tabulation)—अन्त में, छांटे हुए कार्डों की यन्त्र द्वारा गणना करके सारणीयन यन्त्रों (Tabulating machines) की सहायता से सारणियाँ तैयार कर ली जाती है।

लाभ-दोष—यान्त्रिक सारणीयन के अनेक लाभ है जिनके कारण उसका आजकल काफी प्रयोग किया जाता है। प्रथम, यन्त्रो द्वारा सारणीयन से श्रम व समय की बचत होती है। दूसरे, इस रीति द्वारा अशुद्धियों की जाँच की जा सकती है। तीसरे, इस रीति द्वारा सारणीयन सुव्यवस्थित एवं मितव्ययी होता है। चौथे, विशाल क्षेत्रों मे सारणीयन करने के लिए यह रीति उपयुक्त है। इस रीति मे दोष केवल यह है कि आरम्भ में विभिन्न यन्त्र खरीदने मे बहुत अधिक खर्च करना पड़ता है।

यान्त्रिक सारणीयन की तीन प्रमुख प्रणालियाँ प्रचलित है—(अ) हॉलेरिथ प्रणाली (Hollerith System), (ब) पावर्स-समस प्रणाली (Powers-Samas System), तथा (स) पैरामाउन्ट पद्धति (Paramount System)। आजकल ससार के विकसित राष्ट्रो में अनेक क्षेत्रों मे स्वचालित विद्युत् समक-विधायन (electronic data processing) के माध्यम से समंकों का सारणीयन एव विश्लेषण किया जाता है। परन्तु अभी यह विधि शैशवावस्था मे ही है। भारत मे जनगणना के परिणामों का सारणीयन आंशिक रूप में यन्त्रो द्वारा किया जाता है। प्रतिरक्षा-लेखा-विभाग (C. D. A.) एवं जीवन बीमा निगम (L. I. C.) में भी विभिन्न सारणीयन एव समंक-क्रियान्वन यन्त्रो का प्रयोग किया जाता है।

द्विचर आवृत्ति सारणी (Bivariate Frequency Table) की रचना—कभी-कभी विभिन्न पदो के दो-दो माप लेकर उन्हें एक आवृत्ति सारणी में व्यवस्थित किया जाता है। इस प्रकार, समान पदों की संख्या को दो चर-मूल्यो (two variables) के माप के आधार पर जिस आवृत्ति सारणी में प्रस्तुत किया जाता है उसे द्विचर या द्विमुखी आवृत्ति सारणी (bivariate or two-directional frequency table) कहते है। उदाहरणार्थ, 20 विद्यार्थियों के दो विषयो—सांख्यिकी और अर्थशास्त्र—मे प्राप्तांक दिये जाएँ, तो उनका एक ही आवृत्ति वितरण मे प्रस्तुतीकरण, द्विचर आवृत्ति सारणी कहलाएगा।

रचना-विधि—द्विचर आवृत्ति वंटन की रचना-विधि निम्नांकित है—

(i) सर्वप्रथम, दोनों चरो मे से प्रत्येक का वर्गान्तरानुसार वर्गीकरण किया जायेगा अर्थात् प्रत्येक चर के वर्गान्तर निश्चित किये जाएँगे। जैसे, व्यक्तियो की लम्बाई को 155–157, 157–159,...,171–173 सेण्टीमीटर और भार को 35–40, 40–45, 45–50...85–90 किलोग्राम के वर्गान्तरो मे प्रस्तुत किया जायेगा।

(ii) एक चर के वर्गान्तर पहले स्तम्भ (col.) मे और दूसरे चर के वर्गान्तर ऊपर की ओर लिखे जायेंगे। दूसरे चर के उतने ही स्तम्भ होंगे जितने वर्गान्तरों मे वह वितरित किया जायेगा।

(iii) सारणी में उतनी पंक्तियाँ (rows) होंगी जितने पहले चर के वर्गान्तर हैं।

(iv) अन्तिम पंक्ति और अन्तिम स्तम्भ कुल आवृत्तियों के लिए होते हैं।

(v) प्रत्येक पद के पहले चर के माप वाले वर्गान्तर (पंक्ति) के सामने, उसके दूसरे चर के माप वाले वर्गान्तर (स्तम्भ) के नीचे वाले उभयनिष्ठ कोष्ठक (common cell) में एक मिलान रेखा खींच दी जायेगी। इसी प्रकार सभी मदों के द्विचर मूल्यों को तत्सम्बन्धी कोष्ठकों में मिलान चिह्नों द्वारा अंकित कर दिया जायेगा।

(vi) कोष्ठकों के मिलान-चिह्नों को गिनकर कोष्ठक-आवृत्तियाँ (cell frequencies) लिख दी जाएँगी।

(vii) अन्त में, स्तम्भानुसार (column-wise) और पंक्ति-अनुसार (row-wise) कोष्ठकों के योग अन्तिम स्तम्भ और पंक्ति में लिख दिये जाएँगे। इनका महायोग (grand total) कुल आवृत्ति है जो अन्तिम कोष्ठक में अन्तिम स्तम्भ और अन्तिम पंक्ति के योग के रूप में होती है।

उदाहरण (Illustration) 12 :

एक कक्षा-परीक्षा में 20 विद्यार्थियों ने सांख्यिकी (Statistics) और अर्थशास्त्र (Economics) में निम्न अंक (marks) प्राप्त किये—

अनुक्रमांक (Roll No.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
सांख्यिकी में प्राप्तांक	5	17	6	0	19	11	8	14	1	18
अर्थशास्त्र में प्राप्तांक	9	16	6	1	18	7	5	11	2	12

अनुक्रमांक (Roll No.)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
सांख्यिकी में प्राप्तांक	13	10	11	2	11	16	13	3	9	4
अर्थशास्त्र में प्राप्तांक	4	10	13	9	14	8	11	7	3	17

उपर्युक्त समंकों को एक द्विचर आवृत्ति सारणी (bivariate frequency table) के रूप में प्रस्तुत कीजिए।

हल (Solution) :

सांख्यिकी में न्यूनतम और अधिकतम प्राप्तांक 0 और 19 हैं और अर्थशास्त्र में ये क्रमशः 1 और 18 हैं अतः दोनों में ही निम्न वर्गान्तर उपयुक्त रहेंगे—

0–4, 5–9, 10–14, 15–19

सांख्यिकी (प्रथम चर) में प्राप्तांकों के वर्ग पहले स्तम्भ में और अर्थशास्त्र (दूसरा चर) के प्राप्तांक-वर्ग ऊपर की ओर चार खानों में रखे जाएँगे। प्रत्येक अनुक्रमांक के दोनों प्राप्तांकों के संयोग वाले कोष्ठक में निम्न प्रकार मिलान रेखाएँ खींच दी जाएँगी—

मिलान-चिन्ह तालिका
(Tally Sheet)

सांख्यिकी में प्राप्तांक	अर्थशास्त्र में प्राप्तांक				योग
	0—4	5—9	10—14	15—19	
0—4	//	//		/	5
5—9	/	///			4
10—14	/	/	////		6
15—19		/	//	//	5
योग	4	7	6	3	20

मिलान-रेखाओं को गिनकर कोष्ठक आवृत्तियाँ लिख दी जायेंगी और द्विचर-आवृत्ति सारणी का निम्न अन्तिम प्रारूप होगा—

सांख्यिकी में प्राप्तांक	अर्थशास्त्र में प्राप्तांक				योग
	0—4	5—9	10—14	15—19	
0—4	2	2		1	5
5—9	1	3			4
10—14	1	1	4		6
15—19		1	2	2	5
योग	4	7	6	3	20
					कुल आवृत्ति

प्रश्न

1. 'वर्गीकरण' की परिभाषा कीजिए। उपयुक्त उदाहरण देते हुए समंकों [illegible] वर्गीकरण के उद्देश्य और रीतियों को स्पष्ट कीजिए।
Define 'Classification.' Explain the purpose and methods of classification of data giving suitable examples. *[B. Com. (I Yr.), Raj., 1965]*

2. आँकड़ों के वर्गीकरण के क्या उद्देश्य हैं? वर्गीकरण के विभिन्न तरीकों की व्याख्या कीजिए।
What are the objects of classification of data? Discuss the different methods of classification. *[B. Com., Agra, 1968]*

3. वर्गीकरण के क्या उद्देश्य हैं? वर्गान्तरों के वर्ग-विस्तार तथा उसकी अपर एवं अधर सीमायें निर्धारित करने की विधि की व्याख्या कीजिए।
What are the objects of classification? Explain the method of determining the magnitude, the upper and lower limits of the class-interval. *[B. Com., Meerut, 1970]*

4. वर्गीकरण और सारणीयन में अन्तर बतलाइये। वर्गीकरण के उद्देश्य, उसकी रीतियों तथा उसके महत्त्व का विवेचन कीजिए।
[illegible] rpose, methods

5. [illegible] ?
Discuss what considerations you shall have in determining the classification of data. *[M. A., Meerut, 1969]*

6. (क) वर्गीकरण के उद्देश्य स्पष्ट कीजिए।
(ख) वर्गान्तर किसे कहते हैं? वर्गान्तर का विस्तार तथा वर्ग-सीमाएँ किस प्रकार निश्चित की जाती हैं?
(a) State clearly the objects of classification.
(b) What is a class-interval? How do you determine the magnitude of the 'class-interval' and 'class-limits'? *[B. Com., Meerut, 1969]*

7. एक आवृत्ति वितरण बनाते समय आप किन-किन बातों को ध्यान में रखेंगे?
What considerations would you bear in mind while constructing a frequency distribution. *[B. A. (Hon.), Delhi, 1969]*

8. अवलोकित तथ्यों को आप किस प्रकार वर्गीकृत करेंगे और उनका सारणीयन करने में किन-किन बातों का ध्यान रखेंगे ? सामान्यतः प्रयोग की जाने वाली विभिन्न प्रकार की सारणियों का उल्लेख कीजिए।
How would you proceed to classify the observations made and what points will you *take into consideration in tabulating them ? Mention the kinds of tables generally* used. *[B. Com., Indore, 1964 ; Raj., 1961]*

9. 'सांख्यिकीय सारणी संख्यात्मक तथ्यों का एक ऐसा व्यवस्थित अनुविन्यास है जो तुलना के उद्देश्य से खानों तथा पंक्तियों में प्रस्तुत किया जाता है।' उपर्युक्त कथन की व्याख्या कीजिए और सांख्यिकीय सारणी के निर्माण से सम्बन्धित नियमों का उल्लेख कीजिए।
'The statistical table is a systematic arrangement of numerical data presented in columns and rows for purposes of comparison.'
Elaborate the above statement and mention the rules for the construction of a statistical table. *[M. A., Agra, 1961]*

10. सारणी बनाते समय किन-किन बातों का ध्यान रखना आवश्यक है ?
What points should be considered while constructing statistical tables ?
[B. Com , Agra, 1971]

11. (क) आप एक आवृत्ति सारणी किस प्रकार तैयार करेंगे ?
(ख) एक सांख्यिकीय सारणी के निर्माण में आप क्या सावधानियाँ रखेंगे ?
(a) How would you construct a frequency table ?
(b) What precautions would you observe in constructing a statistical table ?
[B Com , Meerut, 1971]

12. सारणी के कौन-कौन से अंग होते हैं ? सारणी तैयार करते समय किन-किन बातों का ध्यान रखना चाहिए ?
What are different parts of a table ? What points should be taken into account, while preparing a table ? *[B. Com., Kanpur, 1971]*

13. (क) एक रिक्त सारणी बनाइये, जिसमें एक कालिज के विद्यार्थियों का आयु, लिंग, कक्षाओं और निवास के आधार पर शारीरिक शिक्षा हेतु विभाजन दिखाया जाए।
(ख) सांख्यिकीय सामग्री का सारणीयन करते समय किन-किन बातों का ध्यान रखना चाहिये ?
(a) Prepare a blank table showing the distribution of students of a college according to age, sex, class and residence for arranging physical training.
(b) What points should be taken into consideration in tabulating statistical data ?
[B. Com. (I Yr.), Raj., 1970]

14. (अ) संक्षेप में समझाइए कि समंकों के वर्गीकरण से क्या तात्पर्य है ?
(ब) एक सारणी के द्वारा भारत से 1969, 1970, 1971 और 1972 के वर्षों में रूस और ब्रिटेन को इन्जीनियरिंग सामान का निर्यात दिखलाइए।
(a) Explain briefly what is meant by classification of data ?
(b) Prepare a table showing the exports of engineering goods from India during the years 1969, 1970, 1971 and 1972 to U. S. S. R. and U. K. *[B. Com , Agra, 1973]*

15. एक ऐसी सारणी का ढांचा बनाइये जिसमें अपनी संस्था के विद्यार्थियों के विषय में निम्नलिखित सूचना स्पष्ट रूप से दिखाई जा सके—
विद्यार्थी—संकाय के अनुसार (Faculty-wise)।
—स्नातक तथा स्नातकोत्तर (Degree and Post-graduate)।
—ग्रामीण एवं नगरीय (Rural and Urban)।
—छात्रावास के तथा बाहर के (Hostellers and Day-scholars)।
—पुरुष तथा महिला (Male and Female)।
[B. Com., Gorakhpur , 1972]

16. उपयुक्त उदा [illegible]
(अ) मतत [illegible]
(ब) मंभिर्न [illegible]
([illegible] equency
([illegible]
[B. Com., Meerut, 1968]

17. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिये—
Write short notes on the following—
(क) सामान्य तथा संक्षिप्त सारणी (General and Summary tables) ।
(ख) बहुगुण सारणी (Manifold Tabulation) ।
(ग) यान्त्रिक सारणीयन (Mechanical Tabulation) ।
(घ) स्टर्जेस का नियम (Sturges' Rule) ।

आवृत्ति वितरण (Frequency Distributions)

18. 20 विद्यार्थियों के सांख्यिकी में निम्नलिखित प्राप्तांकों को सतत आवृत्ति वितरण के रूप में प्रस्तुत कीजिए। अपवर्जी और समावेशी दोनों वर्गान्तर प्रयोग कीजिए—

10	2	6	11	10	7	14	18	20	5
17	14	1	13	22	12	10	9	13	16

[अपवर्जी 0–5......20–25 | समावेशी 1–5......21–25
आवृत्ति 2 4 9 3 2 | आवृत्ति 3 6 6 4 1]

19. 70 विद्यार्थियों के भार (पौण्ड में) के निम्नलिखित आँकड़ों को ऐसे आवृत्ति वितरण के रूप में प्रस्तुत कीजिए जिसमें पहला वर्गान्तर 60–69 हो।

61	69	103	92	90	118	87	86	115	98
73	96	84	102	86	95	89	106	85	67
93	72	84	91	113	63	92	107	98	82
107	80	106	101	101	99	107	62	93	104
112	88	91	90	114	82	111	94	109	88
76	96	75	77	72	100	76	73	97	[illegible]
78	109	91	105	77	106	83	108	74	92

[आवृत्ति 5, 11, 14, 18, 16, 6]

20. स्टर्जेस का नियम (Sturge's Rule $n=1+3{\cdot}3 \log N$) का प्रयोग करते हुए एक कारखाने के 50 कर्मचारियों के एक माह में काम के घण्टों को समान वर्गान्तरों में वर्गीकृत कीजिए—
Using Sturges' Rule $n=1+3{\cdot}3 \log N$, where n is the number of class-interval, N is the total number of observations, classify in equal intervals, the following data of hours worked by 50 piece-rate workers for a month in a certain factory—

110	108	165	103	113	140	42	167	149	87
175	164	133	150	69	144	30	124	104	40
161	128	195	162	121	71	62	164	187	122
157	114	151	149	93	94	138	146	184	203
155	178	141	79	143	87	156	116	197	148

[C. A., Nov. 1962]

[$n=6{\cdot}644$ or 7 $i=24{\cdot}7$ or 25 30–55...............180–205
3 4 6 9 12 11 5]

21. निम्नलिखित श्रेणी को समान वर्गान्तरों में पुनर्गठित कीजिए तथा तत्पश्चात् 'से कम' और 'से अधिक' संचयी आवृत्ति वितरण ('Less than and more than' cumulative frequency distributions) की रचना कीजिए—

0–5	5–6	6–9	9–12	12–14	17–18	18–20	20–24	24–25	25–30	30–36
3	2	7	5	16	12	15	20	8	10	2

[से कम 6 12............... 36 | से अधिक 0 6............... 30
सं० आवृत्ति 5 17 45 80 93 100 | 100 95 83 55 20 2]

22. निम्नलिखित श्रेणियों को साधारण अविच्छिन्न श्रेणी (Simple continuous series) में बदलिये—

(a)		(b)		(c)	
'से कम' प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	'से अधिक' आय (रु०)	व्यक्तियों की संख्या	मध्य-मूल्य	आवृत्ति
10	30	0	700	10.5	3
20	70	50	607	17.5	7
30	120	100	402	24.5	15
40	168	150	245	31.5	25
50	192	200	136	38.5	40
60	354	250	72	45.5	18
70	486	300	31	52.5	12
80	500	350	9	59.5	10

[(a) आवृत्ति 39, 40, 50, 48, 24, 162, 132, 14
(b) आवृत्ति 93, 205, 157, 109, 64, 41, 22, 9
(c) वर्गान्तर 7–14, 14–21,..............................56–63]

23. शब्दों में अक्षरों की संख्या को चर-मूल्य और शब्दों की संख्या को आवृत्ति मानते हुए, निम्न गद्यांश से एक खण्डित आवृत्ति सारणी (discrete frequency table) तैयार कीजिए—

Success in the examination confers no absolute right to appointment, unless Government is satisfied, after such enquiry as may be considered necessary, that the candidate is suitable in all respects for appointment to the public service.

[आकार 2, 3, 4,........................11
आवृत्ति 9, 6, 2, 2, 2, 4, 3, 3, 2, 3]

24. 50 परीक्षार्थियों के सांख्यिकी में प्राप्तांक (पूर्णांक 100) निम्न प्रकार हैं—

70	55	51	42	57
45	60	47	63	53
33	65	39	62	55
64	58	41	65	42
50	52	53	45	45
25	36	59	63	39
65	45	49	54	64
75	42	41	52	35
30	35	15	48	26
20	40	55	46	18

10–10 प्राप्तांकों का वर्ग-विस्तार लेते हुए, एक आवृत्ति वितरण की रचना कीजिए। प्रथम वर्गान्तर 0–10 रखिए। *[B. Com., Delhi, 1968]*

[आवृत्ति 0, 2, 3, 7, 13, 13, 9, 2, 1]

25. मानव शक्ति सम्बन्धी समंकों को आयु, लिंग एवं 'ग्रामीण अथवा शहरी' निवास के आधार पर वर्गीकृत करके सारणी स्वरूप में रखने के लिए रिक्त सारणी बनाइये।

Prepare a blank table for classifying and tabulating manpower data relating to age, sex and rural-urban character of residence. *[M. A., Meerut, 1969]*

26. निम्नलिखित निरंक सारणी (blank table) को अधिक बुद्धिगम्य बनाने के उद्देश्य से पुनर्व्यवस्थित कीजिए :

लिंग	ब्राह्मण		राजपूत		वैश्य		हरिजन	
	साक्षर	निरक्षर	साक्षर	निरक्षर	साक्षर	निरक्षर	साक्षर	निरक्षर
पुरुष								
स्त्री								

27. एक समाचार-पत्र विवरण में एक ही परिवार में रहने वाले क्षय-ग्रस्त व्यक्तियों में फ्लू के प्रभाव से सम्बन्धित निम्न अवतरण प्रकाशित हुआ—

एक लाख निवासियों में से ठीक पाँचवें भाग के बराबर व्यक्तियों में क्षयरोग (T. B.) के लक्षण प्रकट हुए और उनमें से 5000 व्यक्ति फ्लू से पीड़ित हुए परन्तु उनमें से केवल 1000 व्यक्ति ही अ-दूषित घरों में रहते थे। इसके विपरीत जिन्हें फ्लू नहीं हुआ, ऐसे क्षय-ग्रस्त व्यक्तियों के पन्द्रहवें भाग पर अभी भी स्पर्श-दोष का प्रभाव था। कुल मिलाकर 21,000 फ्लू से पीड़ित हुए और 41,000 स्पर्श दोष से प्रभावित थे परन्तु ऐसे व्यक्तियों की सख्या केवल 2000 थी जो फ्लू के शिकार हुए और क्षयरोग से प्रभावित नहीं हुए तथा जो ऐसे घरों में रहते थे जहाँ फ्लू का कोई और रोगी नहीं था (अर्थात् अ-दूषित घरों में)। उपर्युक्त सूचना को स्पष्ट सारणी के रूप में पुनर्व्यवस्थित कीजिए।

In a newspaper account, describing the incidence of influenza among tubercular persons living in the same family, the following paragraph appeared—

'Exactly a fifth of the 1,00,000 inhabitants showed signs of tuberculosis and no fewer than 5,000 among them had an attack of influenza, but among them only 1,000 lived in uninfected houses. In contrast with this, 1/15th of the tuberculous persons who did not have influenza were still exposed to infection. Altogether 21,000 were attacked by influenza and 41,000 were exposed to risk of infection, but the number who having influenza but not tuberculosis lived in houses where no other cases of influenza occurred, was only 2,000.' Redraft the information in a concise tabular form.

[I. A. S., 1968 ; M. Com., Agra, 1962 ; R. A. S., 1960]

संकेत—उपर्युक्त प्रश्न में तीन गुणों के आधार पर सूचना दी गई है। प्रत्येक गुण का द्वन्द्वात्मक विभाजन किया गया है। वे गुण हैं—

(क) घर की स्थिति—दूषित व अ-दूषित (Housing condition—Infected and Uninfected houses)।

(ख) क्षय का प्रभाव—क्षय-ग्रस्त और क्षय-मुक्त (Incidence of T. B.—Having T. B. and Not having T. B)।

(ग) फ्लू—फ्लू-पीड़ित और फ्लू से मुक्त (Influenza—Having influenza and Not having influenza)।

इन गुणों के आधार पर सारणी बनाई जायेगी।

28. निम्न सूचना को सारणीबद्ध (tabulate) कीजिए—

'एक कॉलिज द्वारा आयोजित पर्यटन (trip) में 80 व्यक्तियों ने भाग लिया जिनमें से प्रत्येक ने औसत रूप से 15·50 रु० का भुगतान किया। इनमें से 60 छात्र थे और प्रत्येक ने 16 रु० चन्दा दिया। अध्यापकों से अधिक दर से चन्दा वसूल किया गया। नौकरों (पुरुष) की संख्या 6 थी, और उनसे कोई चन्दा नहीं लिया गया। स्त्रियों की सख्या कुल पर्यटकों की सख्या का 20 प्रतिशत थी जिनमें से एक अध्यापिका थी।'

In a trip organised by a college, there were 80 persons each of whom paid Rs. 15·50 on an average. There were 60 students each of whom paid Rs. 16. Members of the teaching staff were charged at a higher rate. The number of servants was 6 (all males) and they were not charged anything. The number of ladies was 20% of the total of which one was a lady staff member. *[B. Com., Poona, 1971 ; Bombay, 1961]*

संकेत—कुल चन्दा Rs. 1240 है जिसमें Rs. 960 विद्यार्थियों ने दिया है। शेष Rs. 280, 14 अध्यापकों द्वारा दिया गया है। 16 स्त्रियों में से 15 छात्रायें हैं। सारणी इस प्रकार बनेगी—

स्तम्भ : (i) पर्यटकों की श्रेणी : शिक्षक, छात्र, सेवक।

" (ii) चन्दा प्रति व्यक्ति : Rs. 20, 16, 0

" (iii) पुरुष—सख्या और कुल दान

" (iv) स्त्री " "

" (v) कुल " "

29. निम्नांकित समंक 20 व्यक्तियों की ऊँचाई (heights) और उनके भार (weights) से सम्बन्धित हैं। आपको इनकी सहायता से एक ऐसी द्विगुणी आवृत्ति सारणी (two-way or bivariate frequency table) की रचना करनी है जिसमें वर्गान्तर (class-interval) 62"–64", 64"–66"...तथा 115–125 lbs., 125–135 lbs. ... और इसी प्रकार हों—

क्रम-सख्या	भार	ऊँचाई	क्रम-संख्या	भार	ऊँवाई
1	170	70	11	163	70
2	135	65	12	139	67
3	136	65	13	122	63
4	137	64	14	134	68
5	148	69	15	140	67
6	124	63	16	132	69
7	117	65	17	120	66
8	128	70	18	148	[illegible]
9	143	71	19	129	67
10	129	62	20	152	67

[C. A., 1966]

[प्रावृत्ति—

भार	4	5	6	3	1	1	
ऊँचाई	3	4	5	4	4		20]

30. किन्ही 24 परीक्षार्थियो द्वारा साख्यिकी तथा अकेक्षण मे प्राप्ताक निम्न प्रकार हैं। इनसे एक द्वि-मूल्य आवृत्ति वितरण सारणी (bivariate frequency table) का निर्माण कीजिए—

क्रम सख्या	साख्यिकी मे प्राप्ताक	अकेक्षण मे प्राप्ताक	क्रम सख्या	साख्यिकी मे प्राप्ताक	अकेक्षण मे प्राप्ताक	क्रम सख्या	साख्यिकी में प्राप्ताक	अकेक्षण मे प्राप्ताक
1	22	16	9	22	16	17	27	15
2	23	16	10	23	18	18	27	16
3	23	18	11	24	18	19	26	18
4	23	16	12	24	17	20	28	19
5	23	16	13	23	16	21	25	19
6	24	17	14	25	17	22	24	16
7	23	16	15	23	17	23	23	17
8	25	19	16	22	17	24	25	19

[B. Com (II Yr), Raj, 1969]

प्राप्तांक—

साख्यिकी	22	23	24	25	26	27	28	अकेक्षण	15	16	17	18	19
सख्या	3	9	4	4	1	2	1	सख्या	1	9	6	4	4

31. एक मिल के 40 कर्मचारियो की आयु तथा उनके मासिक वेतन में सह-सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित आंकडे प्राप्त हुए। उन्हे द्विचर-आवृत्ति सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए—
With a view to determining correlation between age and monthly wages of 40 employees of a factory, the following figures were obtained. Present them in the form of a bivariate frequency table—

क्रम सख्या	आयु (वर्षों मे)	वेतन (रु०)	क्रम सख्या	आयु (वर्षों मे)	वेतन (रु०)	क्रम सख्या	आयु (वर्षों मे)	वेतन (रु०)
1	37	181	15	31	200	29	41	192
2	21	200	16	30	190	30	31	210
3	49	201	17	35	230	31	35	220
4	36	209	18	30	239	32	42	213
5	37	202	19	29	190	33	40	219
6	34	204	20	21	179	34	45	190
7	23	181	21	41	189	35	50	176
8	34	210	22	38	192	36	24	258
9	31	200	23	41	181	37	21	176
10	41	189	24	37	240	38	22	176
11	45	235	25	45	194	39	21	194
12	33	201	26	46	219	40	38	189
13	28	199	27	28	199			
14	41	213	28	43	209			

आयु	21–30,	31–40,	41–50	वेतन	176–200,	201–225,	226–250,	251–275
	12	15	13		22	13	4	1

32. किसी विश्वविद्यालय मे अध्यापकों के एक वर्ग द्वारा घर से प्रस्थान करने का समय और संस्था मे बिताए गए घण्टों की संख्या निम्न सारांश रूप में उपलब्ध है—

'एक अध्यापक प्रात: 5.30 बजे से पहले घर छोड़ता है और विश्वविद्यालय में 4 घण्टे रहता है। ऐसे 23 अध्यापको मे से जो अपने घर से प्रात. 6 और 7 बजे के बीच चलते हैं, 7 अध्यापक संस्था मे 3 घण्टे, 11 अध्यापक 4 घण्टे, 2 अध्यापक 5 घण्टे और 3 अध्यापक 6 घण्टे रहते है। ऐसे 16 अध्यापको मे से जो प्रात: 7 और 8 बजे के मध्य घर छोड़ते हैं, 4...3 घण्टे, 6...4 घण्टे, 1...5 घण्टे और 5 अध्यापक 6 घण्टे संस्था मे व्यतीत करते हैं। उन 82 अध्यापको मे से जो प्रात. 8 और 10 बजे के बीच घर से निकलते हैं, 6...3 घण्टे, 9...4 घण्टे, 21...5 घण्टे और 46...6 घण्टे विश्वविद्यालय मे रहते हैं। प्रात: 10 और 11 बजे के मध्य घर छोड़ने वाले 21 अध्यापको मे से 2 अध्यापक 3 घण्टे, 8...4 घण्टे, 7...5 घण्टे और 4...6 घण्टे संस्था मे रहते हैं। उपर्युक्त सारांश को एक उपयुक्त सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए।'

The following is the summary of the time of leaving home and the number of hours spent in the institution of a group of teachers in a University—

One teacher leaves home before 5-30 A.M. and spends 4 hours in the institution. Of the 23 teachers who leave their homes between 6 and 7 A.M., 7 teachers spend 3 hours, 11 teachers...4 hours, 2 teachers...5 hours, 3 teachers...6 hours Of the 16 who leave between 7 and 8 A.M, 4 teachers...3 hours, 6 teachers...4 hours, 1 teacher...5 hours and 5 teachers...6 hours. Of the 82 who leave between 8 and 10 A.M., 6 teachers...3 hours, 9 teachers.. 4 hours, 21 teachers...5 hours and 46 teachers ...6 hours Of the 21 teachers who leave between 10 and 11 A.M., 2 teachers...3 hours, 8 teachers...4 hours, 7 teachers...5 hours and 4 teachers...6 hours.

Present the summary in a suitable tabular form. [*B. Com., Raj, 1961*; *Bombay, 1957*]

[घर से प्रस्थान करने का समय	5–	6–	7–	8–10	10–11
अध्यापकों की संख्या :	1	23	16	82	21
व्यतीत घण्टे :	3	4	5	6	
अध्यापकों की संख्या :	19	35	31	58]	

33. (क) निम्न सामग्री को (i) अविच्छिन्न, (ii) खण्डित, या (iii) वस्तुत: खण्डित परन्तु व्यवहार मे अविच्छिन्न चर-मूल्य के रूप में वर्गीकृत कीजिए—

(a). Classify the following data as (i) continuous (ii) discrete or (iii) really discrete but continuous for all practical purposes.

Diameter of a screw, petals of a flower, per capita national income, age in years nearest birthday, life of an electric bulb, employees in an office section, retail price of sugar per kilo, cost of living index, gross national product, annual rainfall.

(ख) 26 कार्य-दिनो के एक माह में किसी कार्यालय के 30 कर्मचारियो के कार्य का निम्न विवरण उपलब्ध है—

'2 कर्मचारियो मे से प्रत्येक 23 दिन उपस्थित रहा और कुल 21,000 मदो की प्रतिलिपि की, जबकि 5 ने 25–25 दिन उपस्थित रहकर कुल 32,480 मदो की प्रतियाँ की, 16 ने 47,500 प्रतियाँ की और प्रत्येक ने कुल कार्य-दिनो के आधे दिन कार्य किया और 6 ने 38,212 प्रतियाँ निकाली और 16–16 दिन उपस्थित रहे। शेष ने सभी दिन कार्य किया और 15,200 मदो की प्रतिलिपियाँ की।'

उक्त सूचना को एक सारणी के रूप मे प्रस्तुत कीजिए।

(b) The record of work of 30 office workers during one month of 26 working days is given below: *Two* workers attended 23 days each and copied a total of 21,000 items, while *five* copied 32,480 items attending 25 days each, *sixteen* copied 47,500 each attending half the number of working days and *six* copied 38,212 attending 16 days each. The remaining worked on all days and copied 15,200 items.

Present this information in the form of a table. [*I. A. S., 1966*]

8
सांख्यिकीय माध्य
(STATISTICAL AVERAGES)

मानव मस्तिष्क जटिल समकों को भली-भांति समझने तथा उनकी तुलना करने में असमर्थ है। वर्गीकरण और सारणीयन की रीतियों द्वारा समकों के विशाल परिमाण को संक्षिप्त करके आवृत्ति-बंटन के रूप में व्यक्त किया जाता है जिससे वे सरल व बुद्धिगम्य हो जायें। परन्तु ये विधियाँ सांख्यिकीय विश्लेषण की केवल प्रारम्भिक अवस्थाएँ हैं जिनसे समंकमाला की सभी महत्वपूर्ण विशेषतायें स्पष्ट नहीं होतीं। 'संख्यात्मक तथ्यों के विशाल समूह को पूर्णरूपेण समझने की मानव मस्तिष्क की अन्तर्निहित अयोग्यता, हमें ऐसे अपेक्षाकृत थोड़े स्थिर-माप उपलब्ध करने को बाध्य करती है, जो समंकों की पर्याप्त रूप से व्याख्या कर सकें।'[1] समंकों के लक्षणों को कम से कम अंकों में सारांश रूप में प्रकट करने के लिए सांख्यिक को केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (measures of central tendency) या सांख्यिकीय माध्यों (statistical averages) का परिकलन (computation) करना पड़ता है।

अर्थ और महत्व (Meaning and Importance)—प्रत्येक समंक-श्रेणी में एक ऐसा बिन्दु होता है जिसके आस-पास अन्य समंकों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति पाई जाती है। यह मूल्य श्रेणी के लगभग केन्द्र में स्थित होता है और उसके महत्वपूर्ण लक्षणों का प्रतिनिधित्व करता है। सांख्यिकी में, सम्पूर्ण समंक-श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति को सरल व सारांश रूप में अभिव्यक्त करने वाला प्रतिनिधि मूल्य, केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप या माध्य कहलाता है। सांख्यिकीय माध्य एक ऐसा सरल व संक्षिप्त अंक है जो समंक-श्रेणी के प्रमुख अभिलक्षणों पर प्रकाश डालता है। क्राक्सटन एवं काउडेन के अनुसार, 'माध्य, समंकों के विस्तार के अन्तर्गत स्थित एक ऐसा मूल्य है जिसका प्रयोग श्रेणी के सभी मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है। समंकमाला के विस्तार के मध्य में स्थित होने के कारण माध्य को केन्द्रीय मूल्य का माप भी कहा जाता है।'[2] माध्य को 'केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप' इसलिए कहा जाता है क्योंकि व्यक्तिगत चर-मूल्यों का अधिकतर उनके आस-पास जमाव होता है।[3] सिम्पसन एवं काफ्का के अनुसार 'केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप एक ऐसा प्रतिरूपी मूल्य है जिसकी ओर अन्य संख्यायें संकेन्द्रित होती हैं।'[4] माध्य, स्थान-सम्बन्धी माप (measures of location), प्रतिरूपी मूल्य (typical values) या सारांश-अंक (summary

[1] 'The inherent inability of the human mind to grasp, in its entirety, a large body of numerical data, compels us to seek relatively few constants that will adequately describe the data.' —Ronald A. Fisher.

[2] 'An average is a single value within the range of the data that is used to represent all of the values in the series. Since an average is somewhere within the range of the data, it is sometimes called a measure of central value.' —Croxton and Cowden, *Practical Business Statistics*, p. 214.

[3] 'An average is sometimes called a "measure of central tendency" because individual values of the variable usually cluster around it.' —Spurr, Kellog and Smith, *Business and Economic Statistics*, p. 197.

[4] 'A measure of central tendency is a typical value around which other figures congregate.' —Simpson & Kafka *Basic Statistics*, p. 123.

numbers) भी कहलाते है ।

सांख्यिकी में माध्यों का मूलभूत महत्व है । वास्तव में, सांख्यिकीय विश्लेषण की अन्य बहुत-सी रीतियाँ, माध्यों पर ही आधारित हैं । यही कारण है कि डा० बाउले ने सांख्यिकी को 'माध्यों का विज्ञान' (science of averages) कहा है । माध्यों की सहायता से समंक-श्रेणी के सभी मूल्यों का सार प्रकट किया जाता है । सांख्यिकी में व्यक्तिगत इकाइयों का अलग-अलग कोई महत्त्व नहीं है । माध्यों द्वारा सभी इकाइयों में सामूहिक रूप से पाए जाने वाले मुख्य लक्षण स्पष्ट हो जाते हैं तथा उनकी तुलना भी सरल हो जाती है । इस प्रकार, माध्य सांख्यिकी में महत्त्वपूर्ण स्थान रखते है ।

उद्देश्य व कार्य (Objects and Functions)—सांख्यिकीय माध्यों के निम्नलिखित उद्देश्य व कार्य है जिनके कारण उनकी अत्यधिक उपयोगिता है—

(i) **संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत करना (To present a brief picture)**—माध्यों द्वारा जटिल और अव्यवस्थित समकों की मुख्य विशेषताओं का एक सरल, स्पष्ट एवं संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत किया जाता है ताकि उन्हें समझने और याद रखने में कोई कठिनाई न हो । 55 करोड़ भारतीयों की अलग-अलग आय को समझना व स्मरण रखना असम्भव है परन्तु उनकी औसत प्रति व्यक्ति आय आसानी से समझी और याद रखी जा सकती है । अतः जैसा कि मोरोने ने कहा है, 'माध्य का उद्देश्य व्यक्तिगत मूल्यों के समूह का सरल और संक्षिप्त रूप में प्रतिनिधित्व करना है जिससे कि मस्तिष्क, समूह की इकाइयों के सामान्य आकार को शीघ्रता से ग्रहण कर सके ।'[1]

(ii) **तुलना की सुविधा प्रदान करना (To facilitate comparison)**—माध्यों की सहायता से दो समूहों के महत्त्वपूर्ण लक्षणों की सरलता से एक ही दृष्टि में तुलना की जा सकती है । उदाहरणार्थ, भारत और श्रीलंका की औसत प्रति व्यक्ति आय की तुलना करके उचित परिणाम निकाले जा सकते हैं ।

(iii) **समग्र का प्रतिनिधित्व करना (To represent the entire group)**—माध्यों की सहायता से ही प्रतिदर्श के अध्ययन के आधार पर पूरे समग्र के बारे में निष्कर्ष निकाले जा सकते है । केवल प्रतिदर्श समको के माध्य द्वारा समग्र के माध्य का अनुमान लगाया जा सकता है ।

(iv) **सांख्यिकीय विवेचन का आधार (Basis of statistical analysis)**—सांख्यिकीय विश्लेषण की अनेक क्रियाएँ माध्यो पर ही आधारित होती है ।

(v) **पथ-प्रदर्शन करना (To guide in policy-formulation)**—माध्यों से ऐसे मूल्य ज्ञात हो जाते है जो भावी योजनाओ, क्रियाओं व नीतियों के निर्धारण में यथोचित मार्ग-दर्शन करते है । व्यापारियो व अर्थशास्त्रियों के अनुमानो में तो माध्य विशेष रूप से सहायक सिद्ध होते हैं ।

आदर्श माध्य के आवश्यक तत्त्व (Essentials of an Ideal Average)—यूल एव कैन्डाल[2] के विचारानुसार एक आदर्श माध्य मे निम्नलिखित आवश्यक गुण होने चाहिएँ—

(1) **स्पष्ट व स्थिर परिभाषा (Clearly and rigidly defined)**—आदर्श माध्य स्पष्ट व निश्चित होना चाहिए । यदि वह केवल सांख्यिक के अनुमान पर आधारित है तो उससे समंक-श्रेणी की वास्तविक विशेषताओं का उचित प्रतिनिधित्व नही हो सकेगा और विभिन्न व्यक्ति उनका अलग-अलग अर्थ लगाएँगे ।

(2) **सभी मूल्यों पर आधारित (Based on all observations)**—एक सन्तोषजनक माध्य समकमाला के सभी पदो पर आधारित होना चाहिए अन्यथा वह पूरे समूह के प्रमुख अभिलक्षणों का संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत नही कर सकेगा । कुछ माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित न होने के कारण असन्तोषजनक माने जाते हैं ।

[1] 'The purpose of an average is *to represent a group of individual values* in a simple and concise manner so that the mind can get a quick understanding of the general size of the individuals in the group.' —Moroney, *Facts from Figures*, p. 34.

[2] See Yule and Kendall, *An Introduction to the Theory of Statistics*, Ch. V, p. 103.

8

सांख्यिकीय माध्य

(STATISTICAL AVERAGES)

मानव मस्तिष्क जटिल समंकों को भली-भाँति समझने तथा उनकी तुलना करने में असमर्थ है। वर्गीकरण और सारणीयन की रीतियों द्वारा समको के विशाल परिमाण को संक्षिप्त करके आवृत्ति-वंटन के रूप में व्यक्त किया जाता है जिससे वे सरल व बुद्धिगम्य हो जायें। परन्तु ये विधियाँ सांख्यिकीय विश्लेषण की केवल प्रारम्भिक अवस्थाएँ हैं जिनसे समंकमाला की सभी महत्त्वपूर्ण विशेषतायें स्पष्ट नही होतीं। 'सख्यात्मक तथ्यों के विशाल समूह को पूर्णरूपेण समझने की मानव मस्तिष्क की अन्तर्निहित अयोग्यता, हमें ऐसे अपेक्षाकृत थोड़े स्थिर-माप उपलब्ध करने को बाध्य करती है, जो समंकों की पर्याप्त रूप से व्याख्या कर सकें।'[1] समकों के लक्षणों को कम से कम अंकों मे सारांश रूप में प्रकट करने के लिए साख्यिक को केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (measures of central tendency) या सांख्यिकीय माध्यों (statistical averages) का परिकलन (computation) करना पड़ता है।

अर्थ और महत्त्व (Meaning and Importance)—प्रत्येक समंक-श्रेणी मे एक ऐसा बिन्दु होता है जिसके आस-पास अन्य समको के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति पाई जाती है। यह मूल्य श्रेणी के लगभग केन्द्र में स्थित होता है और उसके महत्त्वपूर्ण लक्षणों का प्रतिनिधित्व करता है। साख्यिकी मे, सम्पूर्ण समक-श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति को सरल व सारांश रूप में अभिव्यक्त करने वाला प्रतिनिधि मूल्य, केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप या माध्य कहलाता है। सांख्यिकीय माध्य एक ऐसा सरल व संक्षिप्त अंक है जो समंक-श्रेणी के प्रमुख अभिलक्षणों पर प्रकाश डालता है। क्राक्सटेन एवं काउडेन के अनुसार, 'माध्य, समंकों के विस्तार के अन्तर्गत स्थित एक ऐसा मूल्य है जिसका प्रयोग श्रेणी के सभी मूल्यो का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है। समंकमाला के विस्तार के मध्य में स्थित होने के कारण माध्य को केन्द्रीय मूल्य का माप भी कहा जाता है।'[2] माध्य को 'केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप' इसलिए कहा जाता है क्योंकि व्यक्तिगत चर-मूल्यों का अधिकतर उसके आस-पास जमाव होता है।[3] सिम्पसन एवं काफ्का के अनुसार 'केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप एक ऐसा प्रतिरूपी मूल्य है जिसकी ओर अन्य संख्यायें संकेन्द्रित होती हैं।'[4] माध्य, स्थान-सम्बन्धी माप (measures of location), प्रतिरूपी मूल्य (typical values) या सारांश-अंक (summary

---

[1] 'The inherent inability of the human mind to grasp, in its entirety, a large body of numerical data, compels us to seek relatively few constants that will adequately describe the data.' —Ronald A. Fisher.

[2] 'An average is a single value within the range of the data that is used to represent all of the values in the series. Since an average is somewhere within the range of the data, it is sometimes called a measure of central value.' —Croxton and Cowden, *Practical Business Statistics*, p. 214.

[3] 'An average is sometimes called a "measure of central tendency" because individual values of the variable usually cluster around it.' —Spurr, Kellog and Smith, *Business and Economic Statistics*, p. 197.

[4] 'A measure of central tendency is a typical value around which other figures congregate.' —Simpson & Kafka *Basic Statistics*, p. 128.

numbers) भी कहलाते हैं।

सांख्यिकी में माध्यों का मूलभूत महत्त्व है। वास्तव में, सांख्यिकीय विश्लेपण की अन्य बहुत-सी रीतियां, माध्यों पर ही आधारित हैं। यही कारण है कि डा० बाउले ने सांख्यिकी को 'माध्यों का विज्ञान' (science of averages) कहा है। माध्यों की सहायता से समंक-श्रेणी के सभी मूल्यो का सार प्रकट किया जाता है। सांख्यिकी मे व्यक्तिगत इकाइयों का अलग-अलग कोई महत्त्व नही है। माध्यों द्वारा सभी इकाइयो में सामूहिक रूप से पाए जाने वाले मुख्य लक्षण स्पष्ट हो जाते हैं तथा उनकी तुलना भी सरल हो जाती है। इस प्रकार, माध्य सांख्यिकी मे महत्त्वपूर्ण स्थान रखते है।

उद्देश्य व कार्य (Objects and Functions)—सांख्यिकीय माध्यों के निम्नलिखित उद्देश्य व कार्य हैं जिनके कारण उनकी अत्यधिक उपयोगिता है—

(i) **संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत करना** (To present a brief picture)—माध्यो द्वारा जटिल और अव्यवस्थित समको की मुख्य विशेषताओं का एक सरल, स्पष्ट एव संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत किया जाता है ताकि उन्हें समझने और याद रखने में कोई कठिनाई न हो। 55 करोड़ भारतीयों की अलग-अलग आय को समझना व स्मरण रखना असम्भव है परन्तु उनकी औसत प्रति व्यक्ति आय आसानी से समझी और याद रखी जा सकती है। अतः जैसा कि मोरोने ने कहा है, 'माध्य का उद्देश्य व्यक्तिगत मूल्यो के समूह का सरल और सक्षिप्त रूप मे प्रतिनिधित्व करना है जिससे कि मस्तिष्क, समूह की इकाइयो के सामान्य आकार को शीघ्रता से ग्रहण कर सके।'[1]

(ii) **तुलना की सुविधा प्रदान करना** (To facilitate comparison)—माध्यों की सहायता से दो समूहो के महत्त्वपूर्ण लक्षणों की सरलता से एक ही दृष्टि मे तुलना की जा सकती है। उदाहरणार्थ, भारत और श्रीलंका की औसत प्रति व्यक्ति आय की तुलना करके उचित परिणाम निकाले जा सकते हैं।

(iii) **समग्र का प्रतिनिधित्व करना** (To represent the entire group)—माध्यों की सहायता से ही प्रतिदर्श के अध्ययन के आधार पर पूरे समग्र के बारे में निष्कर्ष निकाले जा सकते है। केवल प्रतिदर्श समंको के माध्य द्वारा समग्र के माध्य का अनुमान लगाया जा सकता है।

(iv) **सांख्यिकीय विवेचन का आधार** (Basis of statistical analysis)—सांख्यिकीय विश्लेपण की अनेक क्रियाएँ माध्यो पर ही आधारित होती है।

(v) **पथ-प्रदर्शन करना** (To guide in policy-formulation)—माध्यो से ऐसे मूल्य ज्ञात हो जाते है जो भावी योजनाओं, क्रियाओ व नीतियो के निर्धारण मे यथोचित मार्ग-दर्शन करते हैं। व्यापारियो व अर्थशास्त्रियो के अनुमानो मे तो माध्य विशेष रूप से सहायक सिद्ध होते हैं।

आदर्श माध्य के आवश्यक तत्त्व (Essentials of an Ideal Average)—यूल एवं कैण्डाल[2] के विचारानुसार एक आदर्श माध्य में निम्नलिखित आवश्यक गुण होने चाहिएँ—

(1) **स्पष्ट व स्थिर परिभाषा** (Clearly and rigidly defined)—आदर्श माध्य स्पष्ट व निश्चित होना चाहिए। यदि वह केवल सांख्यिक के अनुमान पर आधारित है तो उससे समंक-श्रेणी की वास्तविक विशेषताओ का उचित प्रतिनिधित्व नही हो सकेगा और विभिन्न व्यक्ति उनका अलग-अलग अर्थ लगाएँगे।

(2) **सभी मूल्यों पर आधारित** (Based on all observations)—एक सन्तोषजनक माध्य समंकमाला के सभी पदों पर आधारित होना चाहिए अन्यथा वह पूरे समूह के प्रमुख अभिलक्षणो का संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत नही कर सकेगा। कुछ माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित न होने के कारण असन्तोषजनक माने जाते है।

[1] 'The purpose of an average is *to represent a group of individual values* in a simple and concise manner so that the mind can get a quick understanding of the general size of the individuals in the group.' —Moroney, *Facts from Figures*, p. 34.

[2] See Yule and Kendall, *An Introduction to the Theory of Statistics*, Ch. V, p. 103.

(3) **सरल व बुद्धिगम्य (Easy and Intelligible)**—उत्तम माध्य में कुछ सरल व स्पष्ट गुण होने चाहिएँ जिससे उसकी प्रकृति आसानी से समझी जा सके। वह अत्यधिक गणितनिष्ठ (highly mathematical) नहीं होना चाहिए।

(4) **निर्धारण की सरलता (Easy to determine)**—सन्तोषजनक माध्य की गणन-क्रिया सरल होनी चाहिए। कुछ माध्य जटिल रीतियों द्वारा परिगणित होने के कारण अधिक लोकप्रिय नहीं हैं।

(5) **प्रतिचयन के परिवर्तनों का न्यूनतम प्रभाव (Least effect of fluctuations of sampling)**—यदि एक ही समग्र में से उचित रीति द्वारा विभिन्न प्रतिदर्श चुनकर माध्य निकाले जाएँ तो उन माध्यों में अत्यधिक अन्तर नहीं होने चाहिएँ। वही माध्य आदर्श माना जाता है जिसमें इस प्रकार के प्रतिचयन परिवर्तनों का कम से कम प्रभाव पड़े। एक ही समग्र में से निकाले गए भिन्न-भिन्न प्रतिदर्शों के माध्यों मे लगभग समानता होनी चाहिए।

(6) **बीजगणितीय विवेचन (Algebraic treatment)**—एक आदर्श माध्य मे कुछ ऐसी गणितीय विशेषतायें होनी चाहियें जिनसे उसका बीजीय विवेचन सरलता से किया जा सके। उदाहरणार्थ, यदि दो या अधिक समूहों के माध्य ज्ञात हों तो उनकी सहायता से उन समूहों का सम्मिलित माध्य भी निर्धारित हो जाना चाहिए। सांख्यिकीय विश्लेषण की अन्य रीतियों में उसी माध्य का सर्वाधिक प्रयोग होता है जिसमे बीजगणितीय विवेचन का गुण पाया जाता है।

उपर्युक्त आवश्यक गुणों के अतिरिक्त एक सन्तोषजनक माध्य समंकमाला के अधिक से अधिक लक्षणों का प्रतिनिधित्व करने वाला तथा विभिन्न पदों का अधिक से अधिक निकटवर्ती होना चाहिए। वह एक निश्चित व निरपेक्ष संख्या के रूप मे अभिव्यक्त किया जाना चाहिए।

सांख्यिकीय माध्यों के प्रकार
(Kinds of Statistical Averages)

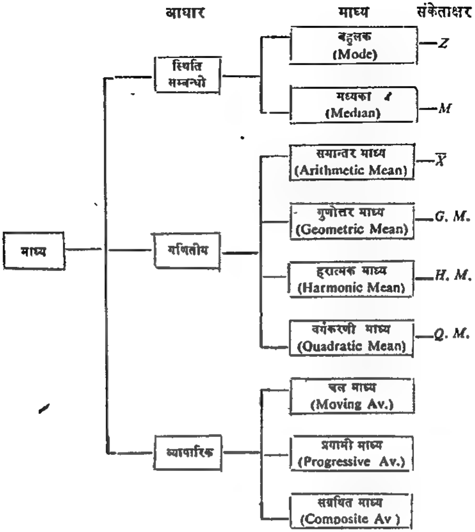
सांख्यिकी में निम्न प्रकार के माध्यों का अध्ययन किया जाता है—

(क) स्थिति-सम्बन्धी माध्य (Positional Averages) :
- (1) बहुलक (Mode),
- (2) मध्यका या माध्यिका (Median)।

(ख) गणितीय माध्य (Mathematical Averages) :
- (3) समान्तर माध्य या मध्यक (Airthmetic average or mean),
- (4) गुणोत्तर माध्य (Geometric mean),
- (5) हरात्मक माध्य (Harmonic mean),
- (6) वर्गकरणी अथवा द्विघातीय माध्य (Quadratic mean)।

(ग) व्यापारिक माध्य (Business Averages) :
- (7) चल अथवा गतिमान माध्य (Moving average),
- (8) प्रगामी या संचयी माध्य (Progressive average),
- (9) संग्रथित माध्य (Composite average)।

(क) स्थिति-सम्बन्धी माध्य (Positional averages)—इन माध्यों का निर्धारण अधिकतर निरीक्षण मात्र से हो जाता है। पहले, क्रम-संख्या के आधार पर इस प्रकार के माध्य की स्थिति ज्ञात की जाती है फिर उस क्रम-संख्या से सम्बन्धित मूल्य को निरीक्षण द्वारा निश्चित कर लिया जाता है। वही स्थिति-माध्य का मान कहलाता है। स्थिति माध्य में बहुलक तथा मध्यका का समावेश होता है।



माध्यों के प्रकार—प्रतिरूप-चित्र

बहुलक
(Mode)

'Mode' शब्द फ्रेंच भाषा के '*La mode*' से बना है जिसका अर्थ है रिवाज या फैशन। सांख्यिकी में बहुलक (या भूयिष्ठक) उस मूल्य को कहते है जो समंकमाला मे सबसे अधिक बार आता हो अर्थात् जिसकी सबसे अधिक आवृत्ति हो।[1] वह 'सर्वाधिक घनत्व की स्थिति'[2] (position of greatest density) या 'मूल्यों के अधिकतम सकेन्द्रण का बिन्दु' (point of highest concentration of values) कहलाता है। क्राक्सटन एवं काउडेन के अनुसार, 'एक समंक-वंटन का बहुलक वह मूल्य है जिसके निकट श्रेणी की इकाइयाँ अधिक से अधिक केन्द्रित होती है। उसे मूल्यों की श्रेणी का सबसे अधिक प्रतिरूपी मूल्य माना जा सकता है।'[3] यदि यह कहा जाये कि एक कॉलिज में छात्रावासी विद्यार्थियों का बहुलक-व्यय (modal expenditure) 100 रुपये प्रति माह है तो इसका अर्थ यह होगा कि उन विद्यार्थियों में से अधिकांश 100 रुपये

[1] 'The value of the variable which occurs most frequently in a distribution is called the mode.' —Kenney and Keeping, *Mathematics of Statistics*, p. 50.

[2] Boddington, *Statistics as an Aid to Commerce*, p. 102.

[3] 'The mode of a distribution is the value at the point around which the items tend to be most heavily concentrated. It may be regarded as the most typical of a series of values.' —Croxton and Cowden, *Applied General Statistics*, p. 212.

मासिक खर्च करते हैं । इसी प्रकार, बहुलक लाभ (modal profits), कॉलर का बहुलक आकार (modal size of the collar), बहुलक मजदूरी (modal wages), आदि का तात्पर्य इन घटनाओं से सम्बन्धित अधिकतम इकाइयों के मूल्यों से है ।

बहुलक का निर्धारण
(Location of the Mode)

व्यक्तिगत श्रेणी (Individual series)—व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक निकालने की निम्न विधियाँ है—

(i) व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित श्रेणी (discrete series) में बदल-कर,

(ii) सतत श्रेणी (continuous series) में बदल कर, या

(iii) मध्यका एवं समान्तर माध्य की सहायता से बहुलक का अनुमान ।

(i) खण्डित या विच्छिन्न श्रेणी में बदलना—जब व्यक्तिगत श्रेणी के अनेक मूल्य दो या दो से अधिक बार पाये जाते हैं तो उन्हें आरोही क्रम के अनुसार रखकर उनके सामने उनकी आवृत्ति लिख दी जाती है । फिर निरीक्षण द्वारा यह देखा जाता है कि अधिकतम आवृत्ति क्या है । इस आवृत्ति का मूल्य ही बहुलक है ।

उदाहरण (Illustration) 1 :

किसी देश की 15 वर्षों की वार्षिक मृत्यु-दरों के समंक निम्नांकित है । बहुलक (Mode) का निर्धारण कीजिए ।

11·1	10·9	10·7	11·1	10·9	11·6	11·3	10·6
10·7	10·6	10·9	10·6	10·5	10·4	10·6	

हल (Solution) :

पहले इन व्यक्तिगत मूल्यों को खण्डित माला के रूप में निम्न प्रकार क्रमबद्ध किया जायेगा—

मृत्यु दरें :	10·4	10·5	10·6	10·7	10·9	11·1	11·3	11·6
आवृत्ति :	1	1	4	2	3	2	1	1

अधिकतम आवृत्ति 4 है जिसका मूल्य 10·6 है अतः यही बहुलक मृत्यु-दर (modal death rate) है ।

$Z = 10{\cdot}6$. Mode के लिए 'Z' सकेताक्षर का प्रयोग किया जाता है ।

यदि दो या अधिक चर-मूल्यों की आवृत्तियाँ अधिकतम हों तो बहुलक का निर्धारण कठिन हो जाता है । ऐसी स्थिति में समक-श्रेणी में उतने ही बहुलक होंगे जितनी अधिकतम आवृत्तियाँ होंगी । ऐसी समंकमालायें द्वि-बहुलक (bi-modal), त्रि-बहुलक (tri-modal) या अनेक बहुलक वाली (multi-modal) श्रेणियाँ कहलाती है ।

(ii) सतत (अविच्छिन्न) श्रेणी में बदलना—जब श्रेणी में कोई भी व्यक्तिगत मूल्य एक से अधिक बार न पाया जाता हो तो उसे अविच्छिन्न आवृत्ति-वटन के रूप में बदलकर अधिकतम आवृत्ति वाला वर्गान्तर ज्ञात कर लेना चाहिए । फिर इस बहुलक-वर्ग (modal class) में बहुलक का मूल्य एक सूत्र के प्रयोग द्वारा निश्चित करना चाहिए । सूत्रानुसार बहुलक निर्धारण-विधि इसी अध्याय में आगे स्पष्ट की गई है ।

(iii) मध्यका व समान्तर माध्य के आधार पर बहुलक-निर्धारण—यदि व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका (Median or M), समान्तर माध्य (Arithmetic Mean or $\bar{X}$) तथा बहुलक (Mode or Z) तीनों ही ज्ञात करने हों तो इन तीनों के पारस्परिक सम्बन्ध पर आधारित निम्नांकित सूत्र द्वारा बहुलक-मूल्य का अनुमान लगाना चाहिए—

$$Z=3M-2\bar{X}$$

इस सूत्र द्वारा बहुलक का अनुमान केवल असाधारण स्थिति में ही किया जाता है। यह सूत्र इस मान्यता पर आधारित है कि एक थोड़े विषम (moderately asymmetrical) बटन में—

$$(\bar{X}-Z)=3(\bar{X}-M)$$

खण्डित श्रेणी (Discrete series)—खण्डित समंक-श्रेणी में बहुलक निरीक्षण द्वारा ज्ञात हो सकता है या समूहन-विधि द्वारा।

(i) **निरीक्षण रीति** (Inspection method)—यह रीति तब अपनाई जाती है जब खण्डित श्रेणी की आवृत्तियाँ नियमित हो अर्थात् श्रेणी के आरम्भ से आवृत्तियाँ निरन्तर बढ़ती रहें, अधिकतम आवृत्ति लगभग केन्द्र में हो और उसके बाद से आवृत्तियाँ फिर निरन्तर घटने लगें। ऐसी श्रेणी में अधिकतम आवृत्ति बिल्कुल स्पष्ट हो जाती है। निरीक्षण द्वारा उसका मूल्य ज्ञात कर लिया जाता है। यही बहुलक है।

उदाहरण (Illustration) 2 :

निम्न सारणी में एक कक्षा के 50 विद्यार्थियो के भार दिये गये है। बहुलक भार (modal weight) ज्ञात कीजिए।

भार (किलो) :	48	49	50	51	52	53
विद्यार्थियो की संख्या :	4	10	20	11	3	2

हल (Solution) :

उपर्युक्त श्रेणी में आवृत्तियाँ नियमित हैं अत: निरीक्षण द्वारा बहुलक ज्ञात किया जायेगा। अधिकतम आवृत्ति 20 है जिसका मूल्य 50 है। इसलिए बहुलक भार 50 किलो है।

(ii) **समूहन रीति** (Grouping method)—जब आवृत्तियाँ अनियमित होती हैं और अधिकतम आवृत्ति ज्ञात करना कठिन हो जाता है तो समूहन रीति का प्रयोग किया जाता है। *आवृत्तियाँ अनियमित तब मानी जाती है जब* (क) *वे अनियमित रूप से कभी बढ़ें, कभी घटें,* (ख) अधिकतम आवृत्तियाँ दो या दो से अधिक स्थानो पर हों; (ग) अधिकतम आवृत्ति केन्द्र में न होकर समूह के बिल्कुल आरम्भ या बिल्कुल अन्त मे हो; या (घ) अधिकतम आवृत्ति के एक ओर की आवृत्तियाँ दूसरी ओर की आवृत्तियो से बहुत भिन्न हों।

अनियमित आवृत्तियों वाले खण्डित-बटन मे इस रीति द्वारा बहुलक ज्ञात करने की निम्न विधि है—

सर्वप्रथम, एक सारणी बनाई जाती है जिसमें चर-मूल्यो के अतिरिक्त आवृत्ति के 6 खाने खीचे जाते है। इन 6 खानो में आवृत्तियो का दो-दो और तीन-तीन के समूहों मे वर्गण निम्न क्रम से किया जाता है—

Col. (i) में प्रश्न में दी हुई आवृत्तियाँ ही लिखी जाती है।

Col. (ii) में आरम्भ से दो-दो आवृत्तियों के जोड लिखे जाते है।

Col. (iii) में Col. (i) की सबसे पहली आवृत्ति को छोड़कर, दो-दो आवृत्तियों के जोड़ लिखे जाते है।

Col. (iv) में Col. (i) की तीन-तीन आवृत्तियो के जोड लिखे जाते है।

Col. (v) में Col. (i) की प्रथम आवृत्ति को छोडकर आगे की तीन-तीन आवृत्तियो के जोड लिखे जाते है।

Col. (vi) में Col. (i) की पहली दो आवृत्तियो को छोडकर, तीन-तीन आवृत्तियों के जोड लिखे जाते है।

आवृत्तियों का इस प्रकार समूहन करने के बाद प्रत्येक कॉलम की अधिकतम आवृत्ति या आवृत्ति-समूह को रेखांकित कर दिया जाता है तथा उन अधिकतम आवृत्तियो के चर-मूल्यों पर चिह्न लगाकर उनकी गणना कर ली जाती है। जिस मूल्य के सामने अधिकतम चिह्न होते है वही

बहुलक का मूल्य होता है। विभिन्न खानों की अधिकतम आवृत्तियों का विश्लेषण एक अलग सारणी (analysis table) बनाकर भी किया जा सकता है।

इस प्रकार, समूहन का उद्देश्य अनियमित आवृत्ति वाले बंटन में आवृत्तियों का जमाव-बिन्दु निश्चित करना होता है। अधिकतम आवृत्ति निर्धारित करने में निकटतम आवृत्तियों का बहुत प्रभाव पड़ता है। अनियमित श्रेणी में बहुलक अधिकतम आवृत्ति का मूल्य न होकर ऐसी आवृत्ति का मूल्य हो सकता है जिसके आस-पास अधिक आवृत्तियों का जमाव हो। समूहन से सारी स्थिति स्पष्ट हो जाती है।

उदाहरण (Illustration) 3 :

किसी कॉलिज के 230 छात्रों के कॉलर-माप निम्न विवरण में प्रस्तुत हैं। कॉलर का बहुलक माप (modal size of the collar) निर्धारित कीजिये।

कालर-माप (से० मी०)	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
छात्रों की संख्या	7	14	30	28	35	34	16	14	36	16

हल (Solution) :

आवृत्तियाँ अनियमित होने के कारण समूहन रीति द्वारा बहुलक ज्ञात किया जायेगा—

समूहन द्वारा बहुलक-निर्धारण
(Determination of Mode by Grouping)

कॉलर-माप (से० मी०)	आवृत्ति (i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	अधिकतम आवृत्तियों की संख्या	
32	7	21		51				
33	14		44		72			
34	30	58				93	/	1
35	28		63	97			///	3
36	35	69			85		/////	5
37	34		50			64	///	3
38	16	30		66			/	1
39	14		50		66			
40	36	52					/	1
41	16							

उपर्युक्त सारणी को देखने से यह पता चलता है कि सबसे अधिक (5) बार 36 मूल्य पाया जाता है।

अतः कॉलर का बहुलक-माप (Modal size of the collar) = 36 सेन्टीमीटर

समूहन द्वारा प्राप्त अधिकतम आवृत्तियों का विश्लेषण अग्र सारणी के रूप में भी किया जा सकता है—

विश्लेषण-सारणी (Analysis Table)

स्तम्भ-संख्या	पद-मूल्य (Size of Items)									
	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
(i)									✓	
(ii)					✓	✓				
(iii)				✓	✓					
(iv)				✓	✓	✓				
(v)					✓	✓	✓			
(vi)			✓	✓	✓					
बारम्बारता	—	—	1	3	5	3	1	—	1	—

बहुलक आकार=36 सेण्टीमीटर

अखण्डित या सतत श्रेणी (Continuous Series)—अखण्डित श्रेणी में बहुलक ज्ञात करने के लिए पहले निरीक्षण या समूहन रीति द्वारा बहुलक वर्ग निश्चित कर लिया जाता है। यदि आवृत्तियाँ नियमित है तो निरीक्षण द्वारा ही बहुलक वर्गान्तर (modal group) का पता चल जाता है परन्तु *अनियमित आवृत्तियो वाली अविच्छिन्न श्रेणी में समूहन द्वारा विश्लेषण करके* बहुलक-वर्ग निर्धारित किया जाता है। तत्पश्चात् बहुलक-वर्ग की सीमाओं के अन्तर्गत बहुलक का मूल्य निर्धारित करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$Z = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

इस सूत्र मे प्रयुक्त विभिन्न चिह्नों का अर्थ इस प्रकार है—

Z संकेत का अर्थ है	बहुलक का मूल्य (value of the mode)
l " "	*बहुलक-वर्ग की निचली सीमा (lower limit of the modal-group)*
i " "	बहुलक-वर्ग का विस्तार (magnitude of the modal class-interval)
f_1 " "	बहुलक-वर्ग की आवृत्ति (frequency of the modal class)
f_0 " "	बहुलक-वर्ग से पहले आने वाले अर्थात् उससे कम आकार वाले वर्ग की आवृत्ति (frequency of the pre-modal class, that is, the class just lower than the modal class)
f_2 " "	बहुलक-वर्ग के तुरन्त बाद मे आने वाले अर्थात् उससे अधिक आकार वाले वर्ग की आवृत्ति (frequency of the post-modal class, that is, the class just higher than the modal class)।

सूत्र का आधार—यह सूत्र इस मान्यता पर आधारित है कि बहुलक का मूल्य बहुलक-वर्ग के निकटवर्ती वर्गों की आवृत्तियो से प्रभावित होता है। यदि पिछले वर्ग की आवृत्ति, अगले वर्ग की आवृत्ति की अपेक्षा अधिक है तो बहुलक-मूल्य बहुलक-वर्ग की निचली सीमा के अधिक निकट होगा। इसके विपरीत, यदि अगली वर्ग-आवृत्ति अधिक है तो भूयिष्ठक ऊपरी सीमा के अधिक पास होगा। इस सूत्र का आधार बिन्दुरेखीय प्रदर्शन वाले अध्याय में आवृत्ति-चित्र (histogram) के सम्बन्ध में स्पष्ट किया गया है।

दूसरा रूप—बहुलक के सूत्र को आवृत्तियों के अन्तर के रूप में निम्न प्रकार लिखा —

I	II
अधर सीमा में जोड़कर	अपर सीमा में से घटाकर
$Z=l_1+\frac{\Delta_1^*}{\Delta_1+\Delta_2}\times i$	$Z=l-\frac{\Delta_2}{\Delta_1+\Delta_2}\times i$

l_1 और l_2 बहुलक-वर्ग की अधर व अपर सीमाएँ (lower and upper limits of modal class) हैं।

$\Delta_1=f_1-f_0$ $\Delta_2=f_1-f_2$

आवृत्तियों के रूप में—

$$Z=l_1+\frac{f_1-f_0}{(f_1-f_0)+(f_1-f_2)}\times i=l_1+\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times i$$

उदाहरण (Illustration) 4 :

निम्न वितरण का बहुलक (mode) परिकलित कीजिए—

वर्गान्तर	आवृत्ति
4-8	10
8-12	12
12-16	16
16-20	14
20-24	10
24-28	8
28-32	17
32-36	5
36-40	4

हल (Solution) :

आवृत्ति अनियमित होने के कारण बहुलक-वर्ग का निर्णय समूहन रीति द्वारा किया जायेगा—

बहुलक-वर्ग का निर्धारण
(Location of modal Group)

वर्गान्तर	आवृत्ति						अधिकतम आवृत्ति वाले वर्ग	
		दो-दो के जोड़		तीन-तीन के जोड़				
	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)		
4—8	10	22		38			/	1
8—12	12		28		42		///	3
12—16	16	30				40	/////	5
16—20	14		24	32			///	3
20—24	10	18			35		/	1
24—28	8		25			30		
28—32	17	22		26			/	1
32—36	5		9					
36—40	4							

* 'Δ' ग्रीक वर्णमाला का अक्षर 'डेल्टा' (Capital letter—Delta) है।

उपर्युक्त सारणी को देखने से पता चलता है कि (12–16) बहुलक-वर्ग है। इस वर्ग में बहुलक का मूल्य ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जायेगा—

$$Z=l+\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times i$$

इस सूत्र में विभिन्न मूल्यों का प्रयोग करने पर—

$$Z=12+\frac{16-12}{2\times 16-12-14}\times 4=12+\frac{4\times 4}{32-26} \text{ or } 12+\frac{16}{6}$$

$$=12+2{\cdot}67 \text{ or } 14{\cdot}67. \quad \therefore \text{ बहुलक}=14{\cdot}67$$

बहुलक वर्ग की अपर सीमा (l_2) मे से अन्तरों का अनुपात घटाकर दूसरे सूत्र (formula II) द्वारा भी बहुलक मूल्य निकाला जा सकता है—

$$Z=l_2-\frac{\Delta_2}{\Delta_1+\Delta_2}\times i \qquad \text{or} \qquad l_2-\frac{f_1-f_2}{(f_1-f_0)+(f_1-f_2)}\times i$$

$$=16-\frac{16-14}{32-12-14}\times 4=16-\frac{8}{6} \quad \therefore Z=14{\cdot}67$$

कभी-कभी समूहन के बाद यह ज्ञात होता है कि दो या अधिक वर्गों की आवृत्तियाँ समान रूप से अधिकतम बार पाई जाती हैं। ऐसी स्थिति मे अलग-अलग उन वर्गों की तथा निकटवर्ती वर्गों की आवृत्तियाँ जोड़कर, उन जोड़ो की तुलना की जाती है। जिस वर्ग से सम्बन्धित जोड़ अधिक होता है वही बहुलक-वर्ग माना जाता है। यदि जोड़ भी बराबर हैं तो समंक श्रेणी दो या अधिक बहुलक वाली होती है।

वैकल्पिक सूत्र (Alternative Formula)—अविच्छिन्न श्रेणी मे बहुलक का मान ज्ञात करने के लिए उपर्युक्त सूत्र के स्थान पर निम्न वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है—

$$Z=l+\frac{f_2}{f_0+f_2}\times i$$

इस सूत्र में प्रयुक्त चिह्नों का वही अर्थ है जो प्रथम सूत्र मे है। इसका प्रयोग तभी करना चाहिए जब प्रथम सूत्र द्वारा ज्ञात करने से बहुलक का मूल्य बहुलक-वर्ग की सीमाओं के अन्तर्गत न रहे अर्थात् वह या तो निचली सीमा से कम या ऊपरी सीमा से अधिक आए। अधिकतर बहुलक-वर्ग की आवृत्ति से पिछली आवृत्ति अधिक होने पर ऐसी स्थिति आती है। दोनों सूत्रों से प्राप्त परिणाम भिन्न होते हैं।

उदाहरण (Illustration) 5 :

निम्न सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए—

केन्द्रीय आकार :	15	25	35	45	55	65	75	85
आवृत्तियाँ :	5	9	13	21	20	15	8	3

हल (Solution) :

वर्गान्तरो के स्थान पर केन्द्रीय आकार या मध्य-मूल्य दिए हुए है जिनमें 10–10 का अन्तर है। वर्गान्तरो की सीमाएँ 15±5, 25±5, 35±5........अर्थात् 10–20, 20–30, 30–40....80–90 होगी।

बहुलक का मूल्य समूहन रीति द्वारा ज्ञात किया जायेगा क्योंकि अधिकतम आवृत्ति (21) के बाद की आवृत्तियों (20, 15....) और उसके पहले की आवृत्तियो (13, 9....) मे काफी अन्तर है।

बहुलक-वर्ग का निर्धारण

वर्गान्तर	आवृत्ति						अधिकतम आवृत्ति वाले वर्ग	
		दो-दो के जोड़		तीन-तीन के जोड़				
	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)		
10—20	5	14		27				
20—30	9		22		43		/	1
30—40	13	34				54	//	2
40—50	21		41	56			/////	5
50—60	20	35			43		/////	5
60—70	15		23			26	///	3
70—80	8	11					/	1
80—90	3							

उपर्युक्त सारणी से यह ज्ञात होता है कि (40–50) तथा (50–60) दोनों वर्गों में अधिकतम आवृत्ति 5–5 बार आती है। अतः इन दोनों में से बहुलक-वर्ग छाँटने के लिए निम्न घनत्व परीक्षण का प्रयोग किया जायेगा—

	40–50	50–60
बहुलक-वर्ग की आवृत्ति	21	20
उससे पहले वर्ग की आवृत्ति	13	21
उसके बाद वाले वर्ग की आवृत्ति	20	15
	54	56

इस प्रकार (50–60) बहुलक-वर्ग है जिसकी आवृत्ति 20 है परन्तु इससे पहले वर्ग की आवृत्ति इससे अधिक है। अतः दूसरे सूत्र द्वारा बहुलक ज्ञात होगा—

$$Z=l+\frac{f_2}{f_0+f_2}\times i=50+\frac{15}{21+15}\times 10=50+\frac{150}{36}=50+4{\cdot}166$$

$\therefore$ बहुलक $=54{\cdot}17$

यदि पहले सूत्र का प्रयोग किया जाता तो बहुलक का मूल्य बहुलक-वर्ग की सीमाओं के बाहर आ जाता जो सर्वथा गलत है—

$$Z=l+\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times i=50+\frac{20-21}{40-21-15}\times 10=47{\cdot}5$$

किन्तु 47·5, (50–60) वाले वर्ग के बाहर है अतः यह सही बहुलक नहीं है।

समावेशी वर्गान्तर तथा असमान वर्ग-विस्तार—बहुलक ज्ञात करने से पूर्व समावेशी वर्गान्तरों को पहले अपवर्जी रीति से परिवर्तित कर लेना चाहिए। यदि वर्ग-विस्तार असमान है तो यथासम्भव उन्हें समान करने का प्रयत्न करना चाहिए।

बिन्दुरेखीय रीति से भी बहुलक मूल्य निश्चित किया जा सकता है। बिन्दुरेखाचित्र वाले अध्याय में इस रीति का स्पष्टीकरण किया जायेगा।

लाभ—बहुलक के निम्नलिखित लाभ हैं—

(i) **सरलता व लोकप्रियता**—बहुलक का सबसे महत्त्वपूर्ण लाभ यह है कि वह समझने मे तथा ज्ञात करने में अत्यन्त सरल होता है। दैनिक जीवन में इसका काफी प्रयोग किया जाता है। दैनिक प्रयोग की वस्तुओं, जैसे सिले-सिलाये कपड़ों आदि के सम्बन्ध मे औसत आकार का तात्पर्य बहुलक आकार से ही होता है।

बहुलक अधिकतर निरीक्षण से ही मालूम हो जाता है। सतत श्रेणी मे भी सरल गणन-क्रिया द्वारा ही इसका निर्धारण हो जाता है।

(ii) **चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव**—बहुलक पर श्रेणी के चरम मूल्यों (extreme values) या सीमान्त इकाइयों का कोई प्रभाव नही पड़ता। नियमित आवृत्ति-वंटन में केवल बहुलक-वर्ग या मूल्य और उसके आस-पास की आवृत्तियों के आधार पर ही बहुलक निर्धारित किया जा सकता है। सभी आवृत्तियों की जानकारी आवश्यक नही है।

(iii) **बिन्दुरेखीय निर्धारण**—बहुलक का मूल्य रेखाचित्र बनाकर भी निर्धारित किया जा सकता है।

(iv) **सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व**—बहुलक श्रेणी का वह मूल्य है जो सबसे अधिक बार पाया जाता है, अतः वह समूह का सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व करने वाला अंक है। उसका मूल्य समूह में दिये हुए मूल्यों में से एक ही होता है।

दोष—बहुलक में निम्न दोष है—

(i) **अनिश्चित व अस्पष्ट**—बहुलक सबसे अधिक अनिश्चित व अस्पष्ट माध्य है। यदि सभी पदो की आवृत्तियाँ समान हो तो वह निश्चित नही किया जा सकता। कभी-कभी एक समूह में दो या दो से अधिक बहुलक भी हो सकते हैं।

(ii) **बीजगणितीय विवेचन का अभाव**—इसका आगे की रीतियों मे बहुत कम प्रयोग होता है क्योंकि श्रेणी के सभी पदो पर आधारित न होने के कारण इसका बीजगणितीय विवेचन सम्भव नही है।

(iii) **चरम मूल्यों की उपेक्षा**—बहुलक सीमान्त पदो को कोई महत्त्व नही देता। अतः जहाँ सीमान्त पदो को भी महत्त्व देना हो वहाँ यह सर्वथा अनुपयुक्त है।

(iv) **कुल मूल्य ज्ञात न होना**—यदि बहुलक मूल्य और पदो की संख्या ज्ञात हों तो उनकी गुणा करके समूह के सब मूल्यो का जोड़ ज्ञात नही हो सकता।

(v) **भ्रमात्मक**—कभी-कभी बहुलक समक-श्रेणी का प्रतिनिधित्व नही करता। यदि 500 व्यक्तियो मे से 5 की मासिक आय 50 रुपये है, बाकी 495 मे से प्रत्येक की आय 50 रुपये से अधिक है तो बहुलक आय 50 रुपये होगी जो पूरे समूह का प्रतिनिधित्व नही कर सकती। 50 रुपये आय तो 500 में से केवल 5 व्यक्तियों की है जबकि इनके 99 गुने (495) व्यक्तियों की आय 50 रुपये से अधिक है। इस प्रकार कुछ परिस्थितियो में बहुलक से भ्रमात्मक निष्कर्ष निकलते हैं।

(vi) **वर्ग-विस्तार का प्रभाव**—बहुलक मूल्य बहुत कुछ वर्ग-विस्तार पर निर्भर होता है। वर्गान्तरों के विस्तार मे परिवर्तन होने पर वह भी भिन्न हो जाता है।

उपयोग—इतने दोष होते हुए भी दैनिक जीवन तथा व्यापारिक क्षेत्र मे बहुलक का काफी प्रयोग किया जाता है। जब हम यह कहते है कि 'औसत छात्रावासी विद्यार्थी का मासिक व्यय 80 रुपये है', 'कॉलर का औसत आकार 32 सेण्टीमीटर है', 'टेलीफोन कॉल्स की दैनिक औसत संख्या 20 है', तो औसत से हमारा तात्पर्य सबसे अधिक आवृत्ति वाले मूल्य अर्थात् बहुलक से होता है। व्यापार तथा वाणिज्य में बहुलक का बहुत प्रयोग होता है। व्यापारिक पूर्वानुमानो मे यह माध्य एक महत्त्वपूर्ण पथ-प्रदर्शक है। उद्योग व प्रशासन के क्षेत्र मे बहुलक की सहायता से औसत-उत्पादन ज्ञात किया जाता है जिसके आधार पर विभिन्न कारखानो की तथा उनके अलग-अलग विभागों की कार्यकुशलता की तुलना की जाती है। इसी प्रकार किसी वस्तु के उत्पादन में लगने वाले बहुलक-समय के निर्धारण द्वारा उसकी लागत का अनुमान आसानी से लगाया जा सकता है। विभिन्न

वस्तुओं की लोकप्रियता का अध्ययन बहुलक द्वारा ही किया जाता है। मौसम-सम्बन्धी पूर्वानुमानों में भी बहुलक का ही प्रयोग किया जाता है।

मध्यका
(Median)

किसी समंक-श्रेणी को आरोही (बढ़ते हुए) या अवरोही (घटते हुए) क्रम में व्यवस्थित करने पर उस श्रेणी के मध्य में जो मूल्य आता है वही मध्यका (Median) कहलाता है। कौनर के शब्दों में, 'मध्यका समंक-श्रेणी का वह चर-मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में इस प्रकार बाँटता है कि एक भाग में सारे मूल्य मध्यका से अधिक और दूसरे भाग में सारे मूल्य उससे कम हों।'[1] इस प्रकार, मध्यका वह केन्द्रीय मूल्य है जो क्रमबद्ध समंक-माला को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। उदाहरणार्थ, यदि 5 विद्यार्थियों के प्राप्तांक 11, 15, 18, 25 और 32 हों तो उनका मध्यका 18 होगा क्योंकि यह तीसरे क्रम का अंक है जो बिल्कुल मध्य में स्थित है तथा इससे पहले के दोनों अंक (11, 15) कम और बाद के दोनों अंक (25, 32) इससे अधिक हैं।

मध्यका का निर्धारण

व्यक्तिगत समंक-माला (Individual Series)—व्यक्तिगत मूल्यों का मध्यका ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रियाएँ की जाती हैं—

(i) सर्वप्रथम, दिये हुए मूल्यों को आरोही (ascending) या अवरोही (descending) क्रम में अनुविन्यसित किया जाता है। दोनों क्रमों के अनुसार केन्द्र-बिन्दु एक ही होता है। मूल्यों की क्रम संख्याएँ भी साथ-साथ लिख देनी चाहिएँ।

(ii) क्रमबद्ध करने के बाद निम्न सूत्र का प्रयोग करना चाहिए—

$$M = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right)\text{th item}$$

M सकेताक्षर मध्यका-मूल्य (Median) के लिए प्रयोग हुआ है।

N सकेताक्षर पदों की संख्या (number of items) के लिए प्रयोग हुआ है।

इस प्रकार, उपर्युक्त सूत्र से केन्द्रीय पद की क्रम-संख्या अर्थात् मध्यका-संख्या (middle item or median number) ज्ञात हो जाती है। उस क्रम-संख्या का मूल्य ही मध्यका है। यदि व्यक्तिगत इकाइयों की संख्या सम (even) अर्थात् 2 से विभाज्य है जैसे 10 या 18 तो सूत्र द्वारा ज्ञात केन्द्रीय क्रम-संख्या पूर्णांक नहीं होगी वरन् क्रमशः 5·5 या 9·5 होगी। ऐसी क्रम-संख्या का मूल्य निश्चित करने के लिए उसके दोनों ओर की दो पूर्ण क्रम-संख्याओं के मूल्यों को जोड़कर 2 से भाग दिया जाता है। वही मध्यका-मूल्य होता है। जैसे—

$$\text{Size of 5·5th item} = \frac{\text{Size of 5th item} + \text{Size of 6th item}}{2}$$

उदाहरण (Illustration) 6 :

निम्न संख्याओं का मध्यका-मूल्य (Median) निर्धारित कीजिए—

25, 15, 23, 40, 27, 25, 23, 25, 20.

[1] 'The median is that value of the variable which divides the group into two equal parts, one part comprising all values greater, and the other all values less than the median.' *Statistics in Theory and Practice*, p. 89.

हल (Solution) :

आरोही क्रम में निम्न प्रकार इन मूल्यों का विन्यास किया जायेगा—

क्रम-संख्या		पद-मूल्य
1	...	15
2	...	20
3	...	23
4	...	23
5	...	25
6	...	25
7	..	25
8	...	27
9	..	40
$N=9$		

$M=\text{Size of }\left(\frac{N+1}{2}\right)\text{th item} \qquad =\text{Size of }\frac{9+1}{2}=5\text{th item}$

∴ मध्यका-मूल्य (Median)=25.

उदाहरण (Illustration) 7 :

निम्न आँकड़ों से मध्यका-मूल्य (Median) की परिगणना कीजिए—

क्रम-संख्या	प्राप्तांक	क्रम-संख्या	प्राप्तांक	क्रम-संख्या	प्राप्तांक
1	17	7	41	13	11
2	32	8	32	14	15
3	35	9	11	15	35
4	33	10	18	16	23
5	15	11	20	17	38
6	21	12	22	18	12

[*B. Com., Agra, 1961*]

हल (Solution) :

आरोही क्रम में विन्यसित प्राप्तांक—

क्रमांक	प्राप्तांक	क्रमांक	प्राप्तांक	क्रमांक	प्राप्तांक
1	11	7	18	13	32
2	11	8	20	14	33
3	12	9	21	15	35
4	15	10	22	16	35
5	15	11	23	17	38
6	17	12	32	18	41

$$\text{Median}=\text{Size of }\left(\frac{N+1}{2}\right)\text{th item}=\frac{18+1}{2}\text{ or }9{\cdot}5\text{th item}$$

$$\text{Size of }9{\cdot}5\text{th item}=\frac{\text{Size of 9th item}+\text{Size of 10th item}}{2}$$

$$=\frac{21+22}{2}\text{ or }\frac{43}{2}\;\therefore\;\text{Median}=21{\cdot}5.$$

खण्डित या विच्छिन्न श्रेणी (Discrete Series)—अखण्डित आवृत्ति-श्रेणी में मध्यका ज्ञात करने के लिए निम्न क्रियाएँ करनी पड़ती हैं—

(i) पहले संचयी आवृत्तियाँ (cumulative frequencies) ज्ञात करके श्रेणी को संचयी आवृत्ति-माला में बदल लिया जाता है।

(ii) इसके बाद निम्न सूत्र द्वारा मध्यका की क्रम-संख्या ज्ञात कर ली जाती है—

$$M = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right)\text{th item}$$

N कुल आवृत्तियों (total frequency) के लिए प्रयुक्त किया गया है।

(iii) मध्यका की क्रम-संख्या का मूल्य संचयी आवृत्ति की सहायता से ज्ञात कर लिया जाता है। जिस संचयी आवृत्ति में यह क्रम-संख्या प्रथम बार सम्मिलित होती है उसका मूल्य ही मध्यका होता है।

उदाहरण (Illustration) 8 :

निम्न वटन में मध्यका-मूल्य (Median) ज्ञात कीजिए—

पद-आकार :	8	10	12	14	16	18	20
आवृत्ति :	3	7	12	28	10	9	6

हल (Solution) :

पद का आकार	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
8	3	3
10	7	10
12	12	22
14	28	50
16	10	60
18	9	69
20	6	75
	$N=75$	

$$\text{Median} = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right)\text{th item}$$

$$= \text{Size of } \frac{75+1}{2} \text{ or 38th item} \qquad \therefore \text{Median} = 14$$

उपर्युक्त सारणी में संचयी आवृत्तियों को देखने से ज्ञात होता है कि 22वीं इकाई तक मूल्य 8, 10 व 12 आकार के हैं। 23वीं इकाई से 50वीं इकाई तक सभी 28 पदों का मूल्य 14 है, अतः 38वीं इकाई का मूल्य भी 14 है।

अविच्छिन्न श्रेणी (Continuous Series)—अविच्छिन्न या सतत समंक-माला में मध्यका का मूल्य निकालने के लिए निम्न प्रक्रिया अपनाई जाती है—

(i) सर्वप्रथम, संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात की जाती हैं।

(ii) निम्न सूत्र द्वारा केन्द्रीय पद ज्ञात किया जाता है—

$$\text{Median} = \text{Size of } \left(\frac{N}{2}\right)\text{th item}$$

अविच्छिन्न श्रेणी में मध्यका $\left(\frac{N}{2}\right)$th item का ही मूल्य होता है, $\left(\frac{N+1}{2}\right)$th item का नहीं। इसके दो प्रमुख कारण हैं। प्रथम, मध्यका का मूल्य एक समान होना चाहिए चाहे उसका निर्धारण आरोही वर्गान्तरों (जैसे 0–10, 10–20, 20–30........) के आधार पर किया जाये या अवरोही वर्गों (40–50, 30–40, 20–30........) के आधार पर। केन्द्र बिन्दु को $\frac{N}{2}$ पर स्थित मानने पर ही दोनों स्थितियों में मध्यका समान आता है, दूसरे, संचयी आवृत्ति-वक्र खींचकर मध्यका का मूल्य निर्धारित करने में भी $\frac{N}{2}$ का प्रयोग ही उचित है क्योंकि वक्र का केन्द्र-बिन्दु $\frac{N}{2}$ पर होता है जो उसे दो बराबर भागों में बाँटता है।

(iii) मध्यका की संख्या जिस संचयी आवृत्ति में सबसे पहली बार आती है उससे सम्बन्धित वर्ग, मध्यका-वर्गान्तर (Median class-interval) कहलाता है।

(iv) मध्यका-वर्ग में मध्यका का मूल्य निर्धारित करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$M=l+\frac{i}{f}(m-c) \quad \text{or} \quad M=l+\frac{i}{f}\left(\frac{N}{2}-c\right)$$

M संकेताक्षर का प्रयोग मध्यका (Median) के लिए हुआ है,

l „ „ मध्यका-वर्ग की निचली सीमा (lower limit of median class) के लिए हुआ है,

i „ „ मध्यका-वर्ग के विस्तार (class-interval of median class) के लिए हुआ है,

f „ „ मध्यका-वर्ग की आवृत्ति (frequency of the median class) के लिए हुआ है,

m „ „ मध्यका संख्या (median number *i. e.* $\frac{N}{2}$) के लिए हुआ है,

c „ „ मध्यका-वर्ग से तुरन्त पूर्व (निचले) वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति (*cumulative frequency of the class just preceding the median class*) के लिए हुआ है।

उदाहरण (Illustration) 9 :

100 विद्यार्थियों के निम्नलिखित प्राप्तांकों से मध्यका (Median) ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
विद्यार्थियों की संख्या :	*8*	*30*	*40*	*12*	*10*

हल (Solution) :

मध्यका परिकलन

प्राप्तांक (वर्ग)	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)	संचयी आवृत्ति
0–10	8	8
10–20	30	38 *c*
'*l*' 20–30	40 *f*	78
30–40	12	90
40–50	10	100
	$N=100$	

Median=Size of $\left(\frac{N}{2}\right)$th item=Size of $\frac{100}{2}$ or 50th item.

संचयी आवृत्तियों के निरीक्षण से पता चलता है कि 50वीं इकाई 78 संचयी आवृत्ति में पहली बार शामिल हुई है, इसलिये इसके ठीक सामने का वर्गान्तर (20–30) मध्यका-वर्ग है।
मध्यका-वर्ग में मध्यका-मूल्य निश्चित करने के लिए निम्न सूत्र प्रयुक्त होगा—

$$M=l+\frac{i}{f}(m-c) \qquad =20+\frac{10}{40}(50-38)$$

$$=20+\frac{10\times 12}{40} \qquad \therefore \text{ Median}=23 \text{ marks.}$$

सूत्र का आधार—अविच्छिन्न श्रेणी में मध्यका के सूत्र का प्रयोग करते समय यह माना जाता है कि प्रत्येक वर्ग की इकाइयों का उसके पूरे वर्गान्तर में समान रूप से वितरण हुआ है।

उपर्युक्त उदाहरण में मध्यका-वर्ग 20–30 है जिसका वर्ग-विस्तार 10 है। यह कल्पना की गई है कि वर्ग-आवृत्ति 40, 10 आकार में समान रूप से बँटी हुई है अर्थात् मध्यका-वर्ग की 1 आवृत्ति के बढ़ने से मूल्य $\frac{10}{40}\left(\frac{i}{f}\right)$ के बराबर बढ़ता है। हमें 50वीं इकाई का मूल्य निर्धारित करना है। आरम्भ से 38 (c) इकाइयों के आकार 0–10 व 10–20 वाले वर्गों में है। 50वीं इकाई के मूल्य तक पहुँचने के लिए हमें 38 से 12 पद (50–38) आगे बढ़ना होगा। एक आवृत्ति के लिए मूल्य $\frac{10}{40}$ बढ़ता है तो 12 आवृत्तियों ($m-c$) के लिए मध्यका-वर्ग की निचली सीमा 20 (l) से $\frac{10}{40}\times(50-38)$ मूल्य अर्थात् $\frac{i}{f}(m-c)$ के बराबर आगे बढ़ना पड़ेगा।

अत: $M=l+\frac{i}{f}(m-c)=20+\frac{10}{40}(50-38)=23.$

अवरोही वर्गान्तर—वर्गान्तरों को अवरोही क्रम से विन्यसित करने पर भी मध्यका-मूल्य वही होना चाहिए जो आरोही क्रम के वर्गों के आधार पर ज्ञात किया जाता है परन्तु ऐसा तभी हो सकता है जब मध्यका-संख्या $\left(\frac{N}{2}\right)$ मानी जाये।

अवरोही वर्गान्तरों की 'निचली सीमा से अधिक' सचयी आवृत्ति ('More than' cumulative frequency) श्रेणी में मध्यका-निर्धारण की विधि पूर्ववत् रहेगी। परन्तु सूत्र निम्न प्रकार होगा—

$$M=l_2-\frac{i}{f}(m-c).$$

उदाहरण (Illustration) 10 :

उदाहरण 9 में दी गई श्रेणी को अवरोही क्रम (descending order) में अनुविन्यसित करके मध्यका-मान ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

वर्ग	आवृत्ति	सचयी आवृत्ति	—से अधिक	सचयी आवृत्ति
40–50	10	10	0	100
30–40	12	22	10	92
20–30	40	62	20	62
10–20	30	92	30	22
0–10	8	100	40	10
	$N=100$			

$M=$ size of $\left(\frac{N}{2}\right)$ or 50th item which is in the class (20–30).

(20–30) मध्यका-वर्ग (Median group) है जिसमें मध्यका-मूल्य ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र प्रयुक्त होगा—

$$M=l_2-\frac{i}{f}(m-c).$$

l_2 संकेताक्षर मध्यका-वर्ग की ऊपरी सीमा (upper limit of median class) के लिए प्रयुक्त हुआ है।

$$M=30-\frac{10}{40}(50-22)=30-\frac{10\times28}{40}$$

[यदि मध्यका-संख्या $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ द्वारा निश्चित की जाये तो आरोही क्रम से निकाले गये मध्यका का मूल्य 23·125 आता है और अवरोही क्रम से निकालने पर 22 875 ।]

समावेशी वर्गान्तरों में मध्यका-निर्धारण—समावेशी वर्गान्तरों (Inclusive Class-intervals) में मध्यका-मूल्य ज्ञात करने के लिए पहले समंक-श्रेणी को अपवर्जी वर्गान्तरों में बदल लेना चाहिए। बाकी सभी क्रियायें पूर्ववत् रहती है।

उदाहरण (Illustration) 11 :

निम्न सारणी से मध्यका ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक	परीक्षार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	परीक्षार्थियों की संख्या
1-5	7	26-30	18
6-10	10	31-35	10
11-15	16	36-40	5
16-20	32	41-45	1
21-25	24		

हल (Solution) :

मध्यका निर्धारण

अंक (वर्गान्तर)	परीक्षार्थियों की संख्या (आवृत्ति)	संचयी आवृत्ति	वास्तविक वर्ग-सीमाएँ
1-5	7	7	0·5-5·5
6-10	10	17	5·5-10·5
11-15	16	33	10 5-15·5
16-20	32	65	15·5-20·5
21-25	24	89	20 5-25·5
26-30	18	107	25 5-30·5
31-35	10	117	30 5-35 5
36-40	5	122	35 5-40 5
41-45	1	123	40 5-45·5
	$N=123$		

M=size of $\left(\frac{N}{2}\right)$th item or $\frac{123}{2}$ or 61·5th item.

संचयी आवृत्तियों की सहायता से यह ज्ञात होता है कि वर्गान्तर (16—20) या (15·5--20·5) मध्यका-वर्ग है। इस वर्ग में मध्यका-मूल्य निर्धारित करने के लिए निम्न सूत्र प्रयोग किया जायेगा—

$$M=l+\frac{i}{f}(m-c)=15{\cdot}5+\frac{5}{32}(61{\cdot}5-33)$$

$$=15{\cdot}5+\frac{5\times28{\cdot}5}{32}=15{\cdot}50+4{\cdot}45=19{\cdot}95$$

∴ मध्यका-प्राप्तांक (Median marks) = 19·95.

यदि वर्गान्तर असमान हों, तो पहले उन्हें यथासम्भव समान वर्गान्तरों मे बदल लेना चाहिए। इसके लिए श्रेणी को अधिकतम वर्ग-विस्तार के आधार पर पुनर्गठित किया जाता है। तत्पश्चात् ही स्थिति माध्य ज्ञात करने चाहिएँ।

उदाहरण (Illustration) 12 :

निम्न सारणी का संशोधन कीजिए और संशोधित सारणी से मध्यका-मूल्य ज्ञात कीजिए।

मूल्य	आवृत्ति
10–15	10
15–17·5	15
17·5–20	17
22–30	25
30–35	28
35–40	30
45 और अधिक	40

हल (Solution) :

उपर्युक्त श्रेणी को समान वर्गों में निम्न प्रकार पुनर्गठित किया जायेगा—

मूल्य	आवृत्ति
10–15	10
15–17·5	15
17·5–20	17
20–22	0
22–30	25
30–35	28
35–40	30
40–45	0
45–50	40

पुनर्गठित श्रेणी

वर्गान्तर	आवृत्ति
10–20	42 (10+15+17)
20–30	25
30–40	58 (28+30)
40–50	40

मध्यका-निर्धारण

वर्गान्तर	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
10–20	42	42
20–30	25	67
30–40	58	125
40–50	40	165
	$N=165$	

$M=$ size of $\left(\frac{N}{2}\right)$th item $=$ size of $\frac{165}{2}=82{\cdot}5$th item.

82·5th item 125 संचयी आवृत्ति में शामिल है इसलिए उसके ठीक सामने का वर्ग (30−40) मध्यका-वर्ग है। इस वर्ग में मध्यका का माप निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जायेगा—

$$M=l+\frac{i}{f}(m-c)=30+\frac{10}{58}(82{\cdot}5-67)$$

$$=30+\frac{19\times15{\cdot}5}{58}=30+2{\cdot}67 \quad \therefore \text{ Median}=32{\cdot}67$$

बिन्दुरेखीय प्रदर्शन—मध्यका का निर्धारण 'संचयी आवृत्ति वक्र' खींचकर या 'गाल्टन पद्धति' द्वारा भी किया जा सकता है। इन रीतियों का विवेचन रेखाचित्र वाले अध्याय में किया जायेगा।

लाभ—मध्यका के निम्न लाभ हैं—

(1) सरलता—मध्यका को समझना और ज्ञात करना बहुत सरल है। इसका अर्थ सर्वसाधारण भी आसानी से समझ लेते हैं। अनेक परिस्थितियों में मध्यका केवल समक-श्रेणी के

निरीक्षण से ही ज्ञात किया जा सकता है।

(ii) चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव—बहुलक की भाँति मध्यका पर भी चरम मूल्यों या सीमान्त पदों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। सीमान्त मूल्यो के बिना, केवल श्रेणी के मध्य के मूल्यों के आधार पर ही इसे निकाला जा सकता है।

(iii) बिन्दुरेखीय निरूपण—रेखाचित्र खींचकर भी मध्यका के मूल्य का निर्धारण किया जा सकता है।

(iv) निश्चितता व स्पष्टता—मध्यका एक निश्चित एवं स्पष्ट माध्य है। इसके मूल्य का निर्धारण प्रत्येक समंक-माला में निश्चितता के साथ किया जा सकता है। यह 'बहुलक' की तरह अनिश्चित नहीं है।

(v) गुणात्मक तथ्यों में उपयुक्त—ऐसे तथ्यों का माध्य ज्ञात करने के लिए मध्यका सर्वोत्तम माना जाता है जो प्रत्यक्ष रूप से मापनीय न हों, जैसे बौद्धिक स्तर, स्वास्थ्य, दरिद्रता आदि।

दोष—मध्यका में निम्न कमियाँ हैं—

(i) निर्धारण सम्बन्धी कठिनाइयाँ—मध्यका-मूल्य निर्धारित करने से पूर्व पदों को आरोही या अवरोही क्रम में रखना पड़ता है। यदि व्यक्तिगत इकाइयों की संख्या सम हो तो दो केन्द्रीय मूल्यों के औसत को ही मध्यका मान लिया जाता है। अविच्छिन्न श्रेणी में मध्यका-निर्धारण इस मान्यता पर आधारित होता है कि प्रत्येक वर्ग में आवृत्तियाँ समान रूप से वितरित हैं। यह मान्यता सदैव सत्य नहीं होती।

(ii) बीजीय विवेचन का अभाव—मध्यका में बीजगणितीय गुणों का अभाव है जिसके कारण उच्चतर गणितीय क्रियाओं में इसका प्रयोग नहीं किया जाता। उदाहरणार्थ, मध्यका-मूल्य और पदों की संख्या को गुणा करने से भी पदों के मूल्यों का जोड़ ज्ञात नहीं हो सकता।

(iii) सीमान्त मूल्यों की उपेक्षा—मध्यका सीमान्त मूल्यो से प्रभावित नहीं होता। अतः जहाँ इन मूल्यो को महत्त्व या भार देना हो वहाँ यह अनुपयुक्त है।

(iv) प्रतिनिधित्व का अभाव—मध्यका ऐसे समूहो की केन्द्रीय प्रवृत्ति का यथोचित रूप से प्रतिनिधित्व नहीं करता जिनमें विभिन्न पदो के मूल्यो में काफी अन्तर होता है या आवृत्तियाँ अनियमित होती हैं।

उपयोग—मध्यका गुणात्मक तथ्यों जैसे बुद्धिमत्ता, स्वास्थ्य आदि के अध्ययन में बहुत उपयोगी होता है। सामाजिक समस्याओं के विश्लेषण मे मध्यका की काफी उपयोगिता है। वस्तुतः जहाँ इकाइयों को क्रमानुसार रखा जा सके और चरम मूल्यो को महत्त्व न देना हो वहाँ मध्यका का प्रयोग उचित होता है।

विभाजन-मूल्य

(Partition Values or Quantiles)

मध्यका समंक-श्रेणी को दो बराबर भागो मे विभाजित करता है। मध्यका के सिद्धान्त के आधार पर समंक-माला को चार, पाँच, आठ, दस, या सौ बराबर भागो में बाँटा जा सकता है। श्रेणी को अनेक भागों मे विभक्त करने वाले मूल्यों को विभाजन मूल्य (Partition Values or Quantiles) कहते है। चार बराबर भागों में बाँटने वाले मूल्य चतुर्थक (quartiles), पाँच भागों मे बाँटने वाले मूल्य पंचमक (quintiles), आठ भागों मे विभक्त करने वाले मूल्य अष्टमक (octiles), दस बराबर भागो मे बाँटने वाले मूल्य दशमक (deciles) तथा सौ भागों मे विभक्त करने वाले मूल्य शतमक (percentiles) कहलाते है। एक समंक-माला में कुल 3 चतुर्थक पंचमक, 7 अष्टमक, 9 दशमक तथा 99 शतमक होते है जिनमे से दूसरे चतुर्थक, चौथे पाँचवें दशमक अथवा पचासवें शतमक का मूल्य मध्यका-मूल्य के बराबर ही होता है। सारणी में विभाजन मूल्यों का विवरण दिया गया है—

विभाजन-मूल्यों की सारणी

विभाजन मूल्य	वंटन के भाग	वि० मूल्यों की संख्या	वास्तविक संख्या	संकेताक्षर
चतुर्थक	4	3	2	Q_1, Q_3
पंचमक	5	4	4	Q_{n_1} से Q_{n_4}
अष्टमक	8	7	6	O_1 से O_7 (सिवाय O_4)
दशमक	10	9	8	D_1 से D_9 (सिवाय D_5)
शतमक	100	99	98	P_1 से P_{99} (सिवाय P_{50})

उपयोग—उपर्युक्त विभाजन-मूल्यों में से चतुर्थक (quartiles), दशमक (deciles) तथा शतमक (percentiles) अधिक महत्त्वपूर्ण हैं। इनसे समंक-श्रेणी की रचना का आभास हो जाता है। अपकिरण (Dispersion) तथा विषमता (Skewness) ज्ञात करने में इन मूल्यों का काफी प्रयोग होता है।

विभाजन मूल्यों का निर्धारण (Determination of Partition Values)—चतुर्थकों, दशमकों, शतमकों आदि का निर्धारण उसी आधार पर किया जाता है जिस पर मध्यका-मूल्य का। व्यक्तिगत तथा खण्डित श्रेणियों में इन मूल्यों को ज्ञात करने के लिए $(N+1)$ को उस अङ्क से भाग दिया जाता है जितने भागों में वे मूल्य श्रेणी को बाँटते हैं और उस मूल्य की क्रम-संख्या से $(N+1)$ को गुणा कर दिया जाता है। इस प्रकार जो पद-संख्या निश्चित हो जाती है उसका मूल्य श्रेणी में देख लिया जाता है। उदाहरणार्थ—

Q_1=size of $\frac{1(N+1)}{4}$th item

D_3=size of $\frac{3(N+1)}{10}$th item

P_{11}=size of $\frac{11(N+1)}{100}$th item

Q_{n_2}=size of $\frac{2(N+1)}{5}$th item

O_1=size of $\frac{1(N+1)}{8}$th item

Q_3=size of $\frac{3(N+1)}{4}$th item

D_7=size of $\frac{7(N+1)}{10}$th item

P_{93}=size of $\frac{93(N+1)}{100}$th item

Q_{n_2}=size of $\frac{2(N+1)}{5}$th item

O_7=size of $\frac{7(N+1)}{8}$th item

अखण्डित या अविच्छिन्न श्रेणी में विभाजन मूल्यों की पद-संख्या ज्ञात करने के लिए $(N+1)$ के स्थान N का प्रयोग किया जाता है जैसे—

Q_1=size of $\frac{N}{4}$th item

Q_3=size of $\frac{3N}{4}$th item

D_1=size of $\frac{N}{10}$th item

P_{98}=size of $\frac{98N}{100}$th item

पद-संख्या निर्धारण के बाद सचयी आवृत्ति की सहायता से उस विभाजन मूल्य का वर्गान्तर ज्ञात कर लिया जाता है। तत्पश्चात्, इस वर्ग में उसी सूत्र द्वारा मूल्य ज्ञात किया जाता है जिसका प्रयोग मध्यका के मूल्य-निर्धारण में किया जाता है। केवल m के स्थान पर (q_1, q_3), [illegible]), $(p_1, p_2 .... p_{99})$ आदि का प्रयोग किया जाता है। शेष चिन्हों का अर्थ वही

होता है जो मध्यका सूत्र के चिन्हों का। सभी चिन्ह विभाजन-मूल्य के वर्गान्तर से सम्बन्धित होते हैं।

$$Q_1 = l + \frac{i}{f}(q_1 - c)$$

l=प्रथम चतुर्थक वर्ग की अधर सीमा (lower limit)

i=Q_1-वर्गान्तर का विस्तार (interval)

f=Q_1-वर्ग की आवृत्ति (frequency)

q_1=प्रथम चतुर्थक पद-संख्या अर्थात् $\frac{N}{4}$

c=Q_1-वर्ग से तुरन्त पूर्व के वर्ग की सचयी आवृत्ति।

$$Q_3 = l + \frac{i}{f}(q_3 - c)$$

l=तृतीय चतुर्थक वर्ग की अधर सीमा (lower limit)

i=Q_3-वर्गान्तर का विस्तार (interval)

f=Q_3-वर्ग की आवृत्ति (frequency)

q_3=तृतीय चतुर्थक पद-संख्या अर्थात् $\frac{3N}{4}$

c=Q_3-वर्ग से तुरन्त पूर्व के वर्ग की सचयी आवृत्ति।

उदाहरण (Illustration) 13 :

किसी कक्षा-परीक्षा मे 20 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांक निम्नांकित है। निम्नतर चतुर्थक (Lower Quartile), सातवां दशमक (7th Decile) और 82वां शतमक (82nd Decile) ज्ञात कीजिए—

18	10	4	31	25	20	24	17	35	15
40	2	8	19	21	11	13	22	24	30

हल (Solution) :

प्राप्तांकों का आरोही क्रम—

S. No.	Marks	S No.	Marks	S. No	Marks	S No.	Marks
1	2	6	13	11	20	16	25
2	4	7	15	12	21	17	30
3	8	8	17	13	22	18	31
4	10	9	18	14	24	19	35
5	11	10	19	15	24	20	40

निम्नतर चतुर्थक Q_1=size of $\frac{N+1}{4}$th item

=size of $\frac{20+1}{4}$=5·25th item

Size of 5·25th item=size of 5th item+·25 (size of 6th item—size of 5th item)

=11+·25 (13—11) $\therefore Q_1$=11·5

सातवां दशमक D_7=size of $\frac{7(N+1)}{10}$th item

=size of $\frac{7(20+1)}{100}$=14·7th item

Size of 14·7th item=size of 14th item+·7 (size of 15th item—size of 14th item)

=24+·7 (24—24) $\therefore D_7$=24

बयासीवां शतमक P_{82}=size of $\frac{82(N+1)}{100}$th item

=size of $\frac{82(20+1)}{100}$ or 17·22nd item

Size of 17·22nd item = size of 17th item + ·22 (size of 18th item − size of 17th item)

$= 30 + \cdot22\,(31-30)$ or $30 + \cdot22$

$\therefore\ P_{82} = 30\cdot22$

अत.　$Q_1 = 11\cdot5$　$D_7 = 24$　$P_{82} = 30\cdot22.$

उदाहरण (Illustration) 14 :

निम्न समको से दोनों चतुर्थकों (both quartiles), चतुर्थ पंचमक (4th Quintile), सप्तम अष्टमक (7th Octile), नवम दशमक (9th Decile) और बारहवाँ शतमक (12th Percentile) परिकलित कीजिए—

शब्दो में अक्षरों की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9
शब्दों की संख्या	18	37	41	55	62	48	27	10	1

हल (Solution) :

विभाजन मूल्यों का परिकलन

अक्षरों की संख्या	शब्दों की संख्या (आवृत्ति)	संचयी आवृत्ति
1	18	18
2	37	55
3	41	96
4	55	151
5	62	213
6	48	261
7	27	288
8	10	298
9	1	299
	$N = 299$	

$Q_1 =$ size of $\left(\frac{N+1}{4}\right)$th item

$=$ size of $\frac{299+1}{4}$ or 75th item

$= 3$

$Q_{n_4} =$ size of $\frac{4(N+1)}{5}$th item

$=$ size of $\frac{4(299+1)}{5}$ or 240th item

$= 6$

$D_9 =$ size of $\frac{9(N+1)}{10}$th item

$=$ size of $\frac{9(299+1)}{10}$ or 270th item

$= 7$

$Q_3 =$ size of $\frac{3(N+1)}{4}$th item

$=$ size of $\frac{3(299+1)}{4}$ or 225th item

$= 6$

$O_7 =$ size of $\frac{7(N+1)}{8}$th item

$=$ size of $\frac{7(299+1)}{8}$ or 262·5th item

$= 7$

$P_{12} =$ size of $\frac{12(N+1)}{100}$th item

$=$ size of $\frac{12(299+1)}{100}$ or 36th item

$= 2$

अत: $Q_1 = 3,\ Q_3 = 6,\ Q_{n_4} = 6,\ O_7 = 7,\ D_9 = 7,\ P_{12} = 2$

उदाहरण (Illustration) 15 :

अग्र सारणी से चतुर्थकों, तीसरे दशमक (3rd Decile) और पैंसठवें शतमक (65th Percentile) का परिकलन कीजिए—

मजदूरी (रु०)	श्रमिकों की संख्या
50 तथा 59·99	11
50 ,, 69·99	28
50 ,, 79·99	60
50 ,, 89·99	88
50 ,, 99·99	100

हल (Solution) :

यह संचयी आवृत्ति श्रेणी है जिसमें न्यूनतम सीमा 50 है और ऊपरी सीमाएँ 59·99....99·99 हैं। ऊपरी सीमाओं का क्रमशः 60, 70....100 के रूप में सन्निकटन करके निम्न प्रकार साधारण आवृत्ति श्रेणी बनाई जायेगी—

मजदूरी (रु०)	श्रमिकों की संख्या	
50–60	11	
60–70	17	(28–11)
70–80	32	(60–28)
80–90	28	(88–60)
90–100	12	(100–88)
	$N=100$	

विभाजन मूल्यों का परिकलन

मजदूरी	मजदूरों की संख्या	संचयी आवृत्ति
50–60	11	11
60–70	17	28
70–80	32	60
80–90	28	88
90–100	12	100
	$N=100$	

$$Q_1=\text{size of } \frac{N}{4}\text{th item or } \frac{100}{4}\text{th item or 25th item}$$

25th item (60–70) वाले वर्गान्तर में स्थित है अतः यही Q_1-class है। इस वर्गान्तर में निम्न सूत्र द्वारा प्रथम चतुर्थक का आन्तरगणन किया जायेगा—

$$Q_1=l+\frac{i}{f}(q_1-c)$$

l चतुर्थक वर्ग की अधर सीमा है।
i चतुर्थक वर्ग का विस्तार है।
f चतुर्थक वर्ग की आवृत्ति है।
q_1 प्रथम चतुर्थक संख्या है, और
c Q_1-वर्ग से पिछले वर्ग की संचयी आवृत्ति है।

$$Q_1=60+\frac{10}{17}(25-11) \text{ or } 60+\frac{10\times14}{17} \text{ or } 60+8{\cdot}24$$

$$\therefore \quad Q_1=68{\cdot}24$$

Q_3=size of $\frac{3N}{4}$th item or $\frac{300}{4}$ or 75th item

यह पद (80—90) वर्गान्तर मे है। अत: Q_3-class=(80—90)

$$Q_3=l+\frac{i}{f}(q_3-c)=80+\frac{10}{28}(75-60) \text{ or } 80+\frac{150}{28}$$

$$\therefore \quad Q_3=85{\cdot}36$$

D_3=size of $\frac{3N}{10}$th item or 30th item

(70—80) D_3 वर्ग है।

$$D_3=l+\frac{i}{f}(d_3-c)=70+\frac{10}{32}(30-28)=70+\frac{20}{32}$$

$$\therefore \quad D_3=70{\cdot}625$$

P_{65}=size of $\frac{65N}{100}$th item or 65th item

(80—90) P_{65} वर्ग है।

$$P_{65}=l+\frac{i}{f}(p_{65}-c)=80+\frac{10}{28}(65-60)+80+\frac{50}{28}$$

$$\therefore \quad P_{65}=81{\cdot}79$$

अत: $Q_1=68{\cdot}24$, $Q_3=85{\cdot}36$, $D_3=70{\cdot}625$, $P_{65}=81{\cdot}79$

बिन्दुरेखीय निर्धारण—मध्यका की भांति विभाजन मूल्यों का निर्धारण भी सचयी आवृत्ति चक्र बनाकर बिन्दुरेखीय रीति द्वारा किया जा सकता है। इस रीति का विवेचन रेखाचित्र वाले अध्याय में किया जाएगा।

उदाहरण (Illustration) 16 :

500 मजदूरों के समूह मे 4% की मासिक मजदूरी 60 रु० से कम थी और 15% मजदूरों की मजदूरी 62·50 रु० से कम थी। 15% मजदूरों ने 95 रु० और इससे अधिक मजदूरी कमाई और उनमे से 5% को 100 रु० और अधिक प्राप्त हुए। मध्यका और चतुर्थक मजदूरियाँ क्रमश: 82·25, 72·75 और 90·50 रु० थी। चतुर्थ (4th) और षष्ठम (6th) दशमक मजदूरी क्रमश: 78·75 रु० और 85·34 रु० थी। 55 से 105 रु० तक का सम्पूर्ण विस्तार मानते हुए इस सूचना को एक आवृत्ति वटन के रूप मे प्रस्तुत कीजिए।

In a group of 500 wage-earners, the monthly wages of 4% were under Rs. 60 and those of 15% were under Rs. 62·50. 15% of the workers earned Rs. 95 and over, and 5% of them got Rs. 100 and over. The median and quartile wages were Rs. 82·25, 72·75 and 90·50 respectively. The fourth and sixth decile wages were Rs. 78·75 and 85·34 respectively. Assume a range of Rs. 55 to 105 and put this information in the form of a frequency distribution.

हल (Solution) :

न्यूनतम व अधिकतम मूल्य 55 व 105 है। Q_1, D_4, M, D_6, एवं Q_3 तक क्रमश: 25, 40, 50, 60 व 75% आवृत्तियाँ आ जाती हैं। प्रश्न में प्रस्तुत सूचना को पहले सचयी में सारणीबद्ध किया जाएगा—

मजदूरी (रु०)	प्रतिशत आवृत्ति (संचयी)
60 से कम	4
62·50 ,, ,,	15
72·75 ,, ,,	25
78 75 ,, ,,	40
82 25 ,, ,,	50
85·34 ,, ,,	60
90·50 ,, ,,	75
95 से अधिक	15
100 ,, ,,	5

उपर्युक्त संचयी आवृत्ति वितरण को निम्न साधारण आवृत्ति वितरण में बदला जायेगा—

मजदूरी (रु०) (वर्गान्तर)	प्रतिशत आवृत्ति	मजदूरों की संख्या (आवृत्ति)
55–60	4	20
60–62·50	11	55
62·50–72·75	10	50
72 75–78·75	15	75
78·75–82·25	10	50
82·25–85·34	10	50
85·34–90·50	15	75
90·50–95	10	50
95–100	10	50
100–105	5	25
	100	500

अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण (Determination of missing frequencies)—किसी आवृत्ति श्रेणी में यदि मध्यका और बहुलक के मान दिये हों और कुछ आवृत्तियाँ अज्ञात हों तो M और Z के सूत्रों का प्रयोग करके ज्ञात आवृत्तियों की सहायता से अज्ञात आवृत्तियाँ निर्धारित की जा सकती हैं। अगले उदाहरण से यह क्रिया स्पष्ट हो जाती है।

उदाहरण (Illustration) 17 :

निम्न मजदूरी-वितरण (wage-distribution) का मध्यका (Median) और भूयिष्ठक (mode) क्रमशः 33·5 रुपये और 34 रुपये हैं किन्तु सारणी में से तीन आवृत्तियाँ अज्ञात (missing) हैं। अज्ञात आवृत्तियों को ज्ञात कीजिये—

मजदूरी (रु० में) :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	योग
आवृत्तियाँ :	4	16	?	?	?	6	4	230

[B. Com., TDC. (IIyr), Raj., 1969]

हल (Solution) :

$M = 33·5$; $Z = 34$, मध्यका और बहुलक—दोनों ही 30–40 वर्गान्तर में स्थित हैं। अतः 30–40 वर्गान्तर की आवृत्ति को f_1, इससे पिछले वर्ग की आवृत्ति को f_0 और अगले वर्ग की आवृत्ति को f_2 मानकर निम्न संचयी आवृत्ति सारणी (cumulative frequency table) बनाई जाएगी—

मजदूरी (रु०)	आवृत्तियाँ	संचयी आवृत्तियाँ
0–10	4	4
10–20	16	20
20–30	f_0	$20+f_0$
30–40	f_1	$20+f_0+f_1$
40–50	f_2	$220=20+f_0+f_1+f_2$
50–60	6	226
60–70	4	230
	$N=230$	

हल (Solution) :

समान्तर माध्य का परिकलन (प्रत्यक्ष रीति)—

विद्यार्थी	लम्बाई (सेण्टीमीटर)
A	155
B	153
C	168
D	160
E	162
F	166
G	164
H	180
I	157
J	165
$N=10$	$\Sigma X=1630$

$$\bar{X}=\frac{\Sigma X}{N}=\frac{1630}{10}$$

समान्तर माध्य = 163 सेण्टीमीटर

(2) लघु रीति (Short-Cut Method)—समान्तर माध्य का सबसे महत्त्वपूर्ण बीजगणितीय अभिलक्षण यह होता है कि 'वास्तविक माध्य से विभिन्न पद-मूल्यों के विचलनों का बीजीय योगफल शून्य (0) होता है।'*

संकेताक्षरों के रूप में—

$$\Sigma(X-\bar{X}) \text{ or } \Sigma d=0$$

यदि वास्तविक समान्तर माध्य की बजाय किसी कल्पित मूल्य (arbitrary value) को माध्य मान लिया जाये तो विभिन्न पद-मूल्यों के इस कल्पित माध्य (assumed mean) से निकाले गये विचलनों का योग शून्य नहीं होगा। इन विचलनों के औसत का कल्पित माध्य में समायोजन करने पर वास्तविक माध्य ज्ञात हो जाएगा। यही लघु रीति का आधार है। अतः,

वास्तविक माध्य (Arithmetic Mean) = कल्पित माध्य (Assumed Mean) + संशोधन कारक (Correction Factor)

सूत्रानुसार—

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma d_x}{N}$$

A संकेताक्षर कल्पित माध्य के लिए प्रयुक्त होता है, और

Σd_x ,, कल्पित माध्य से पद-मूल्यों के विचलनों के जोड़ के लिए प्रयोग हुआ है।

इस प्रकार लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात करने की [illegible] है—

(i) दिये हुए मूल्यों में से किसी एक [illegible] को क[illegible] (assumed mean) मान लेना चाहिए। सैद्धान्तिक दृष्टिकोण [illegible] मूल्य [illegible] माना जा सकता है चाहे वह समंक-श्रेणी से बाहर का [illegible] को मानने से

गणन-क्रिया सरल हो जाती है जो न सबसे कम हो, न सबसे अधिक, वरन् लगभग मध्य का हो और सरल हो।

(ii) प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य (X) में से कल्पित माध्य (A) घटाकर, विचलन (deviation) ज्ञात कर लेना चाहिए—

$$d_x = X - A$$

(iii) विचलनो का बीजगणितीय जोड़ निकाल लेना चाहिए—

$$\Sigma d_x \text{ or } \Sigma(X-A)$$

(iv) अन्त मे निम्न सूत्र का प्रयोग करना चाहिए—

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma d_x}{N}$$

$\bar{X}$ समान्तर माध्य के लिए सकेत है,
A कल्पित माध्य के लिए संकेत है,
Σd_x कल्पित माध्य से विभिन्न मूल्यो के विचलनों के जोड़ को व्यक्त करता है, तथा
N पदो की सख्या है।

उदाहरण (Illustration) 19 :

पिछले उदाहरण (Illustration 18) मे दिये गये 10 छात्रों की लम्बाई के समंको से लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

हल (Solution) :

समान्तर माध्य का परिकलन (लघु रीति)

विद्यार्थी	लम्बाई (सेण्टीमीटर) X	कल्पित माध्य (A=160) से विचलन d_x	$(X-A)$
A	155	−5	(155−160)
B	153	−7	(153−160)
C	168	+8	(168−160)
D	160	0	(160−160)
E	162	+2	(162−160)
F	166	+6	(166−160)
G	164	+4	(164−160)
H	180	+20	(180−160)
I	157	−3	(157−160)
J	165	+5	(165−160)
$N=10$		Σd_x +45−15=+30	

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma d_x}{N} = 160 + \frac{30}{10}$$

∴ समान्तर माध्य =163 सेण्टीमीटर

खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना (Calculation of Arithmetic Mean in discrete series)—

(1) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)—खण्डित श्रेणी में कुल मूल्यो का जोड़ ज्ञात करने के लिए प्रत्येक मूल्य की आवृत्ति से गुणा की जाती है। इस प्रकार की सब गुणाओं का जोड़ ही कुल मूल्यो का योग होता है। इस योग को इकाइयो की सख्या (आवृत्तियो का जोड़) से भाग देने पर समान्तर माध्य ज्ञात हो जाता है।

प्रक्रिया—(i) प्रत्येक मूल्य (X) की आवृत्ति (f) से गुणा करनी चाहिए ($X \times f$)
(ii) इन गुणाओं का जोड लगा लेना चाहिए, (ΣfX)
(iii) आवृत्तियो का जोड़ ज्ञात कर लेना चाहिए, (Σf). इस बात का ध्यान रखना

हल (Solution) :

समान्तर माध्य का परिकलन (प्रत्यक्ष रीति)—

विद्यार्थी	लम्बाई (सेण्टीमीटर)
A	155
B	153
C	168
D	160
E	162
F	166
G	164
H	180
I	157
J	165
$N=10$	$\Sigma X=1630$

$$X=\frac{\Sigma X}{N}=\frac{1630}{10}$$

समान्तर माध्य = 163 सेण्टीमीटर

(2) लघु रीति (Short-Cut Method)—समान्तर माध्य का सबसे महत्त्वपूर्ण बीजगणितीय अभिलक्षण यह होता है कि 'वास्तविक माध्य से विभिन्न पद-मूल्यों के विचलनों का बीजीय योगफल शून्य (0) होता है।'*

संकेताक्षरों के रूप में—

$$\Sigma(X-\bar{X}) \text{ or } \Sigma d=0$$

यदि वास्तविक समान्तर माध्य की बजाय किसी कल्पित मूल्य (arbitrary value) को माध्य मान लिया जाये तो विभिन्न पद-मूल्यों के इस कल्पित माध्य (assumed mean) से निकाले गये विचलनों का योग शून्य नहीं होगा। इन विचलनों के औसत का कल्पित माध्य में समायोजन करने पर वास्तविक माध्य ज्ञात हो जाएगा। यही लघु रीति का आधार है। अतः,

वास्तविक माध्य (Arithmetic Mean) = कल्पित माध्य (Assumed Mean) + संशोधन कारक (Correction Factor)

सूत्रानुसार—

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma d_x}{N}$$

A संकेताक्षर कल्पित माध्य के लिए प्रयुक्त होता है, और

Σd_x ,, कल्पित माध्य से पद-मूल्यों के विचलनों के जोड़ के लिए प्रयोग हुआ है।

इस प्रकार लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात करने की निम्न प्रक्रिया है—

(i) दिये हुए मूल्यों में से किसी एक सरल मूल्य को कल्पित माध्य (assumed mean) मान लेना चाहिए। सैद्धान्तिक दृष्टिकोण से किसी भी मूल्य को कल्पित माध्य माना जा सकता है चाहे वह समंक-श्रेणी से बाहर का ही क्यों न हो, परन्तु व्यवहार में ऐसे मूल्य को मानने से

* 'The algebraic total of deviations of all values from their actual arithmetic mean is equal to zero.'

Proof— $d_1=X_1-\bar{X}$; $d_2=X_2-\bar{X}$; $d_3=X_3-\bar{X}$; ......$d_N=X_N-\bar{X}$

$$d_1+d_2+d_3+...d_N=(X_1-\bar{X})+(X_2-\bar{X})+(X_3-\bar{X})+...(X_N-\bar{X})$$

$$\Sigma d=\Sigma(X-\bar{X})=\Sigma X-N\times\frac{\Sigma X}{N} \quad \because \bar{X}=\frac{\Sigma X}{N}$$

$$=\Sigma X-\Sigma X=O$$

रीति द्वारा) परिकलित कीजिए—

हल (Solution) :

माध्य-परिकलन (लघु रीति)

मजदूरी (रु०)	व्यक्तियों की संख्या	A=8·5 से विचलन	विचलनों व आवृत्तियों का गुणनफल
X	f	dx	f×dx
4·5	35	−4	−140
5·5	40	−3	−120
6·5	48	−2	− 96
7·5	100	−1	−100
8·5	125	0	0
9·5	87	+1	+87
10·5	43	+2	+86
11·5	22	+3	+86
योग	500 (N=Σf)		+239−456 = −217 (Σfdx)

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fdx}{N}=8{\cdot}5+\frac{-217}{500}=8{\cdot}066$$

∴ माध्य मजदूरी = Rs. 8·07

अविच्छिन्न श्रेणी (Arithmetic Mean in Continuous Series)—अविच्छिन्न श्रेणी में यह मा जाता है कि आवृत्तियाँ वर्गों के मध्य-मूल्यों पर केन्द्रित है जैसे यदि (0–10) वाले वर्ग की वृत्ति 7 है तो यह मान लिया जाता है कि 7 इकाइयों में से प्रत्येक का मूल्य 5 है जो कि (0– वर्ग का मध्य-बिन्दु है। अविच्छिन्न श्रेणी मे समान्तर माध्य उसी प्रकार निर्धारित किया ज है जिस प्रकार खण्डित श्रेणी में, परन्तु अन्तर केवल इतना है कि पहले इस श्रेणी में वर्गों के -मान 'X' ज्ञात किये जाते है। ये मूल्य समान्तर माध्य की गणन-क्रिया के आधार हैं।

ण्डित समंकमाला में समान्तर माध्य ज्ञात करने की निम्न रीतियाँ है—

) प्रत्यक्ष रीति,

) लघु रीति,

) पद-विचलन रीति,

) आकलन या योग रीति।

) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)—पहले, वर्गों के मध्य-मूल्य निश्चित कर लिए जाते इसके बाद वही क्रिया अपनायी जाती है जो खण्डित श्रेणी मे प्रयुक्त की जाती है। असमा वाले समूह में यह रीति उपयुक्त है।

) लघु रीति (Short-cut Method)—लघु रीति के अन्तर्गत वर्गों के मध्य-मूल्य निका वही क्रिया अपनाई जाती है जो खण्डित श्रेणी में प्रयोग की जाती है। सक्षेप में, पहले किसी य-मूल्य को कल्पित माध्य (A) मान लिया जाता है, फिर उससे प्रत्येक मध्य-मूल्य विचलन (dx) ज्ञात किया जाता है तथा उसकी आवृत्ति से गुणा करके गुणनफलों का जोड़ dx), निश्चित कर लिया जाता है। अन्त मे, निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fdx}{N}$$

उदा (Illustration) 22 :

प्रलिखित वंटन से किसी बाग मे पेड़ों की ऊँचाई का समान्तर माध्य (Arithmetic mean त कीजिए। प्रत्यक्ष एव लघु—दोनो—रीतियो का प्रयोग कीजिए—

चाहिए, कि आवृत्ति श्रेणी में, आवृत्तियों का जोड़ ही कुल इकाइयों की संख्या होती है, अर्थात् $N=\Sigma f$.

(iv) निम्न सूत्र का प्रयोग करना चाहिए—

$$\bar{X}=\frac{\Sigma fX}{N} \text{ or } \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} \qquad (\because N=\Sigma f)$$

उदाहरण (Illustration) 20 :

निम्न समकों से माध्य मजदूरी (mean wage) ज्ञात कीजिए—

35	व्यक्ति	प्राप्त	करते	हैं	4·5	रु० प्रति	व्यक्ति	की दर से
40	"	"	"	"	5·5	"	"	"
48	"	"	"	"	6·5	"	"	"
100	"	"	"	"	7·5	"	"	"
125	"	"	"	"	8·5	"	"	"
87	"	"	"	"	9·5	"	"	"
43	"	"	"	"	10·5	"	"	"
22	"	"	"	"	11·5	"	"	"

हल (Solution) :

माध्य मजदूरी की गणना (प्रत्यक्ष रीति)

मजदूरी (रु०) X	व्यक्तियों की संख्या f	कुल मजदूरी $f\times X$
4·5	35	157·5
5·5	40	220
6·5	48	312
7·5	100	750
8·5	125	1062·5
9·5	87	826·5
10·5	43	451·5
11·5	22	253
	$N=500$	$\Sigma fX=4033·0$

$$\bar{X}=\frac{\Sigma fX}{N} \text{ or } \frac{4033}{500} \qquad \therefore \text{ माध्य मजदूरी} = \text{Rs. } 8·07$$

(2) लघु रीति (Short-cut Method)—खण्डित श्रेणी में लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात करने की गणन-क्रिया निम्नलिखित है—

(i) मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य (A) मान लेना चाहिए।

(ii) प्रत्येक मूल्य 'X' में से कल्पित माध्य 'A' घटाकर उस मूल्य का विचलन (deviation) ज्ञात करना चाहिए—

$$d_x=(X-A)$$

(iii) प्रत्येक विचलन d_x में उसकी आवृत्ति f की गुणा करके उन गुणाओं का जोड़ निकाल लेना चाहिए, (Σfd_x)

(iv) अन्त में, निम्न सूत्र का प्रयोग करना चाहिए—

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fd_x}{N}$$

$\bar{X}$ संकेत समान्तर माध्य के लिए प्रयोग होता है,
A " कल्पित माध्य " " "
Σfd_x " विचलनों व आवृत्तियों की गुणाओं का योग है, और
N " कुल आवृत्ति है।

उदाहरण (Illustration) 21 :

पिछले उदाहरण (Illustration 20) में दी गई खण्डित श्रेणी से समान्तर माध्य (लघु

(3) **पद-विचलन या प्रवविचलन रीति (Step Deviation Method)**—यदि अविच्छिन्न श्रेणी में वर्ग-विस्तार समान हो और वर्गान्तरों की संख्या भी अधिक हो तो पद-विचलन लेकर लघु रीति को और भी सरल बनाया जा सकता है। इस रीति में कल्पित माध्य से विभिन्न मध्य-बिन्दुओं के वास्तविक विचलनों को वर्ग-विस्तार के बराबर समापवर्त्तक (Common factor) से भाग करके पद-विचलन ज्ञात किये जाते हैं। अन्त में, लघु रीति वाले सूत्र में $\Sigma fd'_x$ को वर्ग-विस्तार (i) से गुणा कर दी जाती है। इस प्रकार गणन-क्रिया अत्यन्त सरल हो जाती है। समान विच्छिन्नता वाली खण्डित श्रेणी में भी मूल्यों के समान अन्तर के बराबर समापवर्त्तक लेकर इस रीति का प्रयोग किया जा सकता है।

अवविचलन रीति में निम्न क्रियाएँ होती है—

(i) मध्य-मूल्यो मे से किसी एक को कल्पित माध्य 'A' माना जाता है।

(ii) प्रत्येक मध्य-मूल्य में से कल्पित माध्य घटाकर अन्तर को वर्ग-विस्तार से भाग दे दिया जाता है। इस प्रकार पद-विचलन ज्ञात हो जाते हैं—

$$d'=\frac{X-A}{i} \qquad (\therefore\ d'\times i=X-A=dx)$$

व्यवहार में, कल्पित माध्य के सामने पद-विचलन वाले खाने में 0 लिखा जाता है, कम मूल्य वाले मध्य-बिन्दुओं की ओर क्रमानुसार —1, —2, —3; —4 आदि और अधिक मूल्य वाले बिन्दुओं की ओर क्रमशः +1, +2, +3, +4 आदि लिख दिए जाते है। यही पद-विचलन (d'_x) है।

(iii) पद-विचलन को आवृत्तियों से गुणा करके गुणनफलों का जोड़ निकाल लिया जाता है। ($\Sigma fd'$)

(iv) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fd'}{N}\times i$$

$\Sigma fd'$ अवविचलनों और आवृत्तियों की गुणाओं का योग है, और
i समापवर्तक वर्ग-विस्तार है।

उदाहरण (Illustration) 23 :

पिछले उदाहरण (Illustration 22) में पद-विचलन रीति द्वारा समान्तर माध्य की गणना कीजिए।

हल (Solution) :

प्रवविचलन विधि द्वारा समान्तर माध्य का परिकलन

ऊँचाई (फीट में)	मध्यमान	आवृत्ति	$A=31.5$ से पद-विचलन $\left(\frac{X-A}{i}\right)$	पद-विचलन व आवृत्ति का गुणनफल
	X	f	d'	$f\times d'$
0—7	3.5	26	—4	—104
7—14	10.5	31	—3	— 93
14—21	17.5	35	—2	— 70
21—28	24.5	42	—1	— 42
28—35	31.5	82	0	0
35—42	38.5	71	+1	+ 71
42—49	45.5	54	+2	+108
49—56	52.5	19	+3	+ 57
योग		360 (N)		+236—309 = — 73 ($\Sigma fd'$)

ऊँचाई	आवृत्तियाँ
7 ft. से कम	26
14 ,, ,,	57
21 ,, ,,	92
28 ,, ,,	134
35 ,, ,,	216
42 ,, ,,	287
49 ,, ,,	341
56 ,, ,,	360

हल (Solution) :

पहले उक्त संचयी आवृत्ति श्रेणी को साधारण अविच्छिन्न श्रेणी में बदला जाएगा। इसके बाद समान्तर माध्य ज्ञात किया जाएगा—

प्रत्यक्ष रीति द्वारा—

समान्तर माध्य का परिकलन

ऊँचाई (फीट में)	मध्य-मान	आवृत्ति	मध्य-मूल्यों आवृत्तियों का गुणनफल
	X		fX
0—7	3·5	26	3 5
7—14	10·5	31	6 5
14—21	17·5	35	10
21—28	24·5	42	25
28—35	31·5	82	27 5
35—42	38·5	71	24
42—49	45·5	54	95
49—56	52·5	19	
योग		360 (N)	10,8) (Σf.

$$\overline{X}=\frac{\Sigma fX}{N}=\frac{10,829}{360}$$

∴ औसत ऊँचाई = 30·08 या 30 ft. 1 inch.

लघु रीति द्वारा—

समान्तर माध्य की गणना

ऊँचाई (फीट में)	मध्यमान	आवृत्ति	$A=31\cdot5$ से विचलन	विचलनों व [आवृ]त्तियों का गुणा
	X	f	dx	$f\times$
0—7	3 5	26	−28	-
7—14	10·5	31	−21	-
14—21	17·5	35	−14	-
21—28	24·5	42	− 7	-
28—35	31·5	82	0	0
35—42	38 5	71	+ 7	+497
42—49	45·5	54	+14	+756
49—56	52·5	19	+21	+399
योग		360 (N)		+1652,3 − (Σf

$$X=A+\frac{\Sigma fd_x}{N}=31\cdot5+\frac{-511}{360} \qquad \overline{X}=31\cdot50-1\cdot42$$

∴ माध्य ऊँचाई = 30 08 या 30 ft. 1 inch.

(3) पद-विचलन या अवविचलन रीति (Step Deviation Method)—यदि अविच्छिन्न श्रेणी में वर्ग-विस्तार समान हो और वर्गान्तरों की संख्या भी अधिक हो तो पद-विचलन लेकर लघु रीति को और भी सरल बनाया जा सकता है। इस रीति में कल्पित माध्य से विभिन्न मध्य-बिन्दुओं के वास्तविक विचलनों को वर्ग-विस्तार के बराबर समापवर्त्तक (Common factor) से भाग करके पद-विचलन ज्ञात किये जाते हैं। अन्त में, लघु रीति वाले सूत्र में $\Sigma fd'_x$ को वर्ग-विस्तार (i) से गुणा कर दी जाती है। इस प्रकार गणन-क्रिया अत्यन्त सरल हो जाती है। समान विच्छिन्नता वाली खण्डित श्रेणी में भी मूल्यों के समान अन्तर के बराबर समापवर्त्तक लेकर इस रीति का प्रयोग किया जा सकता है।

अवविचलन रीति में निम्न क्रियाएँ होती है—

(i) मध्य-मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य 'A' माना जाता है।

(ii) प्रत्येक मध्य-मूल्य में से कल्पित माध्य घटाकर अन्तर को वर्ग-विस्तार से भाग दे दिया जाता है। इस प्रकार पद-विचलन ज्ञात हो जाते हैं—

$$d'=\frac{X-A}{i} \qquad (\therefore\ d'\times i=X-A=dx)$$

व्यवहार में, कल्पित माध्य के सामने पद-विचलन वाले खाने में 0 लिखा जाता है, कम मूल्य वाले मध्य-बिन्दुओं की ओर क्रमानुसार —1, —2, —3, —4 आदि और अधिक मूल्य वाले बिन्दुओं की ओर क्रमशः +1, +2, +3, +4 आदि लिख दिए जाते है। यही पद-विचलन (d'_x) हैं।

(iii) पद-विचलन को आवृत्तियों से गुणा करके गुणनफलों का जोड़ निकाल लिया जाता है। ($\Sigma fd'$)

(iv) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$X=A+\frac{\Sigma fd'}{N}\times i$$

$\Sigma fd'$ अवविचलनों और आवृत्तियों की गुणाओं का योग है, और
i समापवर्तक वर्ग-विस्तार है।

उदाहरण (Illustration) 23 :

पिछले उदाहरण (Illustration 22) में पद-विचलन रीति द्वारा समान्तर माध्य की गणना कीजिए।

हल (Solution) :

अवविचलन विधि द्वारा समान्तर माध्य का परिकलन

ऊंचाई (फीट में)	मध्यमान	आवृत्ति	$A=31.5$ से पद-विचलन $\left(\frac{X-A}{i}\right)$	पद-विचलन व आवृत्ति का गुणनफल
	X	f	d'	$f\times d'$
0—7	3.5	26	—4	—104
7—14	10.5	31	—3	— 93
14—21	17.5	35	—2	— 70
21—28	24.5	42	—1	— 42
28—35	31.5	82	0	0
35—42	38.5	71	+1	+ 71
42—49	45.5	54	+2	+108
49—56	52.5	19	+3	+ 57
योग		360 (N)		+236—309 = — 73 ($\Sigma fd'$)

ऊंचाई	आवृत्तियाँ
7 ft. से कम	26
14 ,, ,,	57
21 ,, ,,	92
28 ,, ,,	134
35 ,, ,,	216
42 ,, ,,	287
49 ,, ,,	341
56 ,, ,,	360

हल (Solution) :

पहले उक्त संचयी आवृत्ति श्रेणी को साधारण अविच्छिन्न श्रेणी में दला जाएगा। इसके बाद समान्तर माध्य ज्ञात किया जाएगा—

प्रत्यक्ष रीति द्वारा—

समान्तर माध्य का परिकलन

ऊंचाई (फीट मे)	मध्य-मान	आवृत्ति	मध्य-मूल्यो आवृत्तियो का गुणन
	X		fX
0—7	3·5	26	
7—14	10·5	31	3·5
14—21	17·5	35	6 5
21—28	24·5	42	10
28—35	31·5	82	25
35—42	38·5	71	275
42—49	45·5	54	24
49—56	52·5	19	95
योग		360 (N)	10,83 (Σf.

$$\overline{X}=\frac{\Sigma fX}{N}=\frac{10.829}{360}$$

∴ औसत ऊँचाई = 30·08 या 30 ft. 1 inch.

लघु रीति द्वारा—

समान्तर माध्य की गणना

ऊंचाई (फीट मे)	मध्यमान	आवृत्ति	$A=31·5$ से विचलन	विचलनो व त्तियो का गुणः
	X	f	dx	$f\times$
0—7	3 5	26	−28	-
7—14	10·5	31	−21	-
14—21	17·5	35	−14	-
21—28	24·5	42	−7	-
28—35	31·5	82	0	0
35—42	38 5	71	+7	+497
42—49	45·5	54	+14	+756
49—56	52 5	19	+21	+399
यो		360 (N)		+1652,3 — (Σf

$$X=A+\frac{\Sigma fd_x}{N}=31·5+\frac{-511}{360} \qquad \overline{X}=31·50-1·42$$

∴ माध्य ऊंचाई = 30 08 या 30 ft. 1 inch.

(3) पद-विचलन या प्रवविचलन रीति (Step Deviation Method)—यदि अविच्छिन्न श्रेणी में वर्ग-विस्तार समान हों और वर्गान्तरों की संख्या भी अधिक हो तो पद-विचलन लेकर लघु रीति को और भी सरल बनाया जा सकता है। इस रीति में कल्पित माध्य से विभिन्न मध्य-बिन्दुओं के वास्तविक विचलनों को वर्ग-विस्तार के बराबर समापवर्त्तक (Common factor) से भाग करके पद-विचलन ज्ञात किये जाते हैं। अन्त में, लघु रीति वाले सूत्र में $\Sigma fd'_x$ की वर्ग-विस्तार (i) से गुणा कर दी जाती है। इस प्रकार गणन-क्रिया अत्यन्त सरल हो जाती है। समान विच्छिन्नता वाली खण्डित श्रेणी में भी मूल्यों के समान अन्तर के बराबर समापवर्त्तक लेकर इस रीति का प्रयोग किया जा सकता है।

अवविचलन रीति में निम्न क्रियाएँ होती है—

(i) मध्य-मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य 'A' माना जाता है।

(ii) प्रत्येक मध्य-मूल्य में से कल्पित माध्य घटाकर अन्तर को वर्ग-विस्तार से भाग दे दिया जाता है। इस प्रकार पद-विचलन ज्ञात हो जाते हैं—

$$d'=\frac{X-A}{i} \qquad (\therefore d'\times i=X-A=dx)$$

व्यवहार में, कल्पित माध्य के सामने पद-विचलन वाले खाने में 0 लिखा जाता है, कम मूल्य वाले मध्य-बिन्दुओं की ओर क्रमानुसार $-1, -2, -3, -4$ आदि और अधिक मूल्य वाले बिन्दुओं की ओर क्रमशः $+1, +2, +3, +4$ आदि लिख दिए जाते है। यही पद-विचलन (d'_x) है।

(iii) पद-विचलन की आवृत्तियों से गुणा करके गुणनफलों का जोड़ निकाल लिया जाता है। ($\Sigma fd'$)

(iv) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fd'}{N}\times i$$

$\Sigma fd'$ अवविचलनों और आवृत्तियों की गुणाओं का योग है, और

i समापवर्तक वर्ग-विस्तार है।

उदाहरण (Illustration) 23 :

पिछले उदाहरण (Illustration 22) में पद-विचलन रीति द्वारा समान्तर माध्य की गणना कीजिए।

हल (Solution) :

अवविचलन विधि द्वारा समान्तर माध्य का परिकलन

ऊँचाई (फीट में)	मध्यमान	आवृत्ति	$A=31.5$ से पद-विचलन $\left(\frac{X-A}{i}\right)$	पद-विचलन व आवृत्ति का गुणनफल
	X	f	d'	$f\times d'$
0—7	3.5	26	−4	−104
7—14	10.5	31	−3	−93
14—21	17.5	35	−2	−70
21—28	24.5	42	−1	−42
28—35	31.5	82	0	0
35—42	38.5	71	+1	+71
42—49	45.5	54	+2	+108
49—56	52.5	19	+3	+57
योग		360 (N)		+236−309 = −73 ($\Sigma fd'$)

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fd'}{N}\times i=31{\cdot}50+\frac{-73}{360}\times 7$$

$$=31{\cdot}50-\frac{511}{360}=31{\cdot}50-1{\cdot}42$$

∴ माध्य ऊँचाई $=30{\cdot}08$ or 30 ft. 1 inch.

(4) आकलन या योग रीति (Summation Method)—समान वर्ग-विस्तार वाली अविच्छिन्न श्रेणी में समान्तर माध्य का निर्धारण आकलन या योग रीति द्वारा भी किया जा सकता है परन्तु व्यवहार में, इस रीति का प्रयोग बहुत कम होता है। इसकी प्रक्रिया इस प्रकार है—

(i) पहले, समकमाला की संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात करके उनका जोड़ निकाला जाता है।

(ΣC_f)

(ii) संचयी आवृत्तियों के जोड़ को कुल इकाइयों की संख्या N से भाग देकर F ज्ञात कर लिया जाता है।

$$F=\frac{\Sigma C_f}{N} \text{ या } \frac{\Sigma C_f}{\Sigma f}$$

(iii) अन्तिम वर्गान्तर का मध्य-मूल्य निश्चित कर लिया जाता है। 'M'

(iv) निम्न सूत्र प्रयुक्त किया जाता है—

$$\bar{X}=M-i\,(F-1)$$

M अधिकतम वर्ग का मध्य-बिन्दु है,

i वर्ग-विस्तार है,

F संचयी आवृत्ति के योग को कुल संख्या में भाग देने पर प्राप्त संख्या है।

उदाहरण (Illustration) 24 :

उदाहरण 22 में प्रदत्त समकों से आकलन रीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

योग रीति द्वारा समान्तर माध्य का परिगणन

ऊँचाई (फीट में)	आवृत्ति f	संचयी आवृत्ति C_f
0—7	26	26
7—14	31	57
14—21	35	92
21—28	42	134
28—35	82	216
35—42	71	287
42—49	54	341
49—56	19	360
योग	360 (N)	1513 (ΣC_f)

अधिकतम वर्ग का मध्य बिन्दु $M=52{\cdot}5$

वर्ग-विस्तार $i=7$

$$F=\frac{\Sigma C_f}{N}=\frac{1513}{360}=4{\cdot}203$$

$$\bar{X}=M-i\,(F-1)=52{\cdot}5-7\,(4{\cdot}203-1)$$

$$=52{\cdot}5-7\times 3{\cdot}203=52{\cdot}5-22{\cdot}42$$

∴ माध्य ऊँचाई $=30{\cdot}08$ or 30 ft. 1 inch.

उपयुक्त रीति—पूर्व-वर्णित चारों रीतियों में से किसी भी रीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात किया जाए, उत्तर एक समान आता है। परन्तु अधिकतर लघु रीति तथा पद-विचलन रीति का उपयोग किया जाता है। यदि वर्गान्तरों की संख्या अधिक हो, वर्ग-विस्तार समान हो तथा आवृत्तियाँ अधिक हो तो पद-विचलन रीति का प्रयोग सर्वोत्तम होता है। यदि वर्ग-विस्तार सरल व समान हो या विभिन्न वर्गों के विस्तार में थोड़ा ही अन्तर हो तो लघु रीति का प्रयोग करना चाहिए। इसके विपरीत यदि वर्गों के विस्तारों में काफी भिन्नता हो तो प्रत्यक्ष रीति उपयुक्त होती है।

चार्लियर की परिशुद्धता परीक्षा (Charlier Check)—आवृत्ति-बंटन में लघु रीति या पद-विचलन रीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात करते समय गणन-क्रिया की शुद्धता की जाँच करने के लिए चार्लियर जाँच का प्रयोग किया जाता है। इसके लिए अपनाई जाने वाली प्रक्रिया इस प्रकार है—

(i) प्रत्येक विचलन या पद-विचलन में 1 जोड़कर (d_x+1) अथवा $(d'+1)$ ज्ञात किया जाएगा।

(ii) d_x+1 में आवृत्ति की गुणा करके गुणनफलों का जोड़ $\Sigma\{f(d_x+1)\}$ निकाला जाएगा। यदि पद-विचलन रीति अपनाई गई है तो $(d'+1)$ की आवृत्ति से गुणा करके जोड़ $\Sigma[f(d'+1)]$ ज्ञात कर लिया जाएगा।

(iii) इसके बाद निम्न समीकरण का प्रयोग किया जाएगा—

लघु रीति, $\Sigma fd_x=\Sigma\{f(d_x+1)\}-\Sigma f$

पद-विचलन रीति में, $\Sigma fd'=\Sigma\{f(d'+1)\}-\Sigma f$

यदि उपर्युक्त समीकरण के दोनों पक्ष बराबर है तो गणन-क्रिया शुद्ध है अन्यथा विचलन निकालने या आवृत्तियों से गुणा करने में कोई अशुद्धि रह गई है।

उदाहरण (Illustration) 25 :

एक कम्पनी अपने कर्मचारियों को निम्न आधार पर बोनस देना चाहती है—

मासिक (वेतन रु०)	बोनस (रु०)
100–120	50
120–140	60
140–160	70
160–180	80
180–200	90
200–220	100
220 और अधिक	110

कर्मचारियों के वास्तविक वेतन निम्न प्रकार हैं—

Rs. 200,	180,	185,	195,	218,	187,	160,	250,	
198,	190,	168,	170,	178,	175,	140,	120,	
148,	165,	155,	145,	125,	110,	162,	130,	150.

बतलाइए—

(क) कुल कितना बोनस दिया गया,

(ख) प्रति कर्मचारी कितना बोनस दिया गया।

हल (Solution) :

दिये हुए वेतन-वर्गों में पहले कर्मचारियों का वर्गीकरण करके आवृत्तियाँ ज्ञात की जायेंगी जैसे (100–120) वर्ग में 1, (120–140) वर्ग में 3 आदि। इसके बाद प्रत्यक्ष रीति द्वारा बोनस तथा माध्य बोनस ज्ञात किया जाएगा।

कुल व माध्य बोनस का परिकलन

मासिक वेतन (रु०)	कर्मचारियों की संख्या	प्रति कर्मचारी बोनस	कुल बोनस
	f	X	fX
100 and under 120	1	50	50
120 " " 140	3	60	180
140 " " 160	5	70	350
160 " " 180	7	80	560
180 " " 200	6	90	540
200 " " 220	2	100	200
220 and over	1	110	110
योग	25 (N)		1990 (ΣfX)

(क) कुल बोनस $=1990$ रु०

(ख) प्रति कर्मचारी बोनस $\overline{X}=\frac{\Sigma fX}{N}=\frac{1990}{25}=79{\cdot}60$ रु०

सामूहिक समान्तर माध्य (Combined Arithmetic Mean)—यदि किसी समूह के दो या अधिक भागों के अलग-अलग समान्तर माध्य और उन भागों में पदों की संख्या ज्ञात हों तो उनकी सहायता से पूरे समूह का सामूहिक समान्तर माध्य भी ज्ञात किया जा सकता है।

सामूहिक माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\text{सामूहिक माध्य } \overline{X}=\frac{\overline{X}_1N_1+\overline{X}_2N_2+\overline{X}_3N_3+....\overline{X}_NN_N}{N_1+N_2+N_3+....N_N}$$

$\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$ इत्यादि विभिन्न भागों के समान्तर माध्य हैं,

N_1, N_2, N_3 आदि विभिन्न भागों में इकाइयों की संख्या है।

इसी प्रकार, यदि सामूहिक समान्तर माध्य और कुल संख्या ज्ञात हो तथा समूह के तीन सभागों (components) में से दो के माध्य और इकाइयों की संख्यायें ज्ञात हों तो तीसरे भाग का समान्तर माध्य निम्न सूत्र द्वारा निकाला जा सकता है—

$$\overline{X}=\frac{\overline{X}N-(\overline{X}_1N_1+\overline{X}_2N_2)}{N-(N_1+N_2)}$$

ये सूत्र समान्तर माध्य के इस बीजगणितीय गुण पर आधारित है कि माध्य और संख्या की गुणा करने से कुल मूल्यों का जोड़ ज्ञात हो जाता है।

उदाहरण (Illustration) 26 :

(i) निम्नांकित सूचना से बतलाइए—

(क) कौनसा कारखाना अधिक दैनिक मजदूरी देता है,

(ख) दोनों कारखानों के सम्मिलित श्रमिकों की औसत दैनिक मजदूरी क्या है ?

	कारखाना A	कारखाना B
श्रमजीवियों की संख्या	250	200
औसत दैनिक मजदूरी	Rs. 2·00	Rs. 2·50

(*ii*) 50 परीक्षार्थियों ने परीक्षा दी। उत्तीर्ण होने वाले छात्रों का परीक्षाफल निम्नलिखित है—

प्राप्तांक	4	5	6	7	8	9
विद्यार्थियों की संख्या	8	10	9	6	4	3

यदि सभी 50 परीक्षार्थियों के सामूहिक माध्य प्राप्तांक 5·16 हों तो अनुत्तीर्ण छात्रों के औसत प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

	A	B
(*i*) (क) श्रमिकों की संख्या	$N_1 = 250$	$N_2 = 200$
माध्य दैनिक मजदूरी	$\bar{X}_1 =$ Rs. 2·00	$\bar{X}_2 =$ Rs. 2·50
	$\Sigma X_A = 2 \times 250$	$\Sigma X_B = 2{\cdot}50 \times 200$
कुल दैनिक मजदूरी	= Rs. 500	= Rs. 500

दोनों कारखानों में बराबर दैनिक मजदूरी दी जाती है।

(ख) सामूहिक माध्य (Combined Average)—

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}_1 N_1 + \bar{X}_2 N_2}{N_1 + N_2} = \frac{(2 \times 250) + (2{\cdot}50 \times 200)}{250 + 200} = \frac{1000}{450}$$

∴ सामूहिक माध्य मजदूरी = 2·22 रुपये

(*ii*) उत्तीर्ण होने वाले 40 विद्यार्थियों के कुल प्राप्तांक निम्न प्रकार ज्ञात किये जायेंगे—

प्राप्तांक X	विद्यार्थियों की संख्या f	कुल प्राप्तांक fX
4	8	32
5	10	50
6	9	54
7	6	42
8	4	32
9	3	27
	$N = 40$	$\Sigma fX = 237$

50 विद्यार्थियों के कुल प्राप्तांक $= 5{\cdot}16 \times 50 = 258{\cdot}0$

40 उत्तीर्ण छात्रों के कुल प्राप्तांक $= 237$

∴ अनुत्तीर्ण छात्रों के कुल प्राप्तांक $= 258 - 237 = 21$

10 अनुत्तीर्ण छात्रों के औसत प्राप्तांक $= \frac{21}{10} = 2{\cdot}1$ है।

अज्ञात मूल्य अथवा अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण (Location of Missing Size of Frequency)—समान्तर माध्य का एक महत्त्वपूर्ण गुण यह है कि यदि $\bar{X}$, N और ΣX में से कोई से दो मान ज्ञात है तो बाकी तीसरा मान ज्ञात किया जा सकता है अर्थात्—

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} \text{ or } \frac{\Sigma fX}{N}, \qquad \Sigma X \text{ or } \Sigma fX = \bar{X} \times N, \qquad N = \frac{\Sigma X}{\bar{X}} \text{ or } \frac{\Sigma fX}{\bar{X}}$$

इन सूत्रों के आधार पर किसी समूह में अज्ञात मूल्य या अज्ञात आवृत्ति का निर्धारण किया जा सकता है। अज्ञात मूल्य को 'X', अज्ञात आवृत्ति को 'f' मानकर तथा प्रत्यक्ष सूत्र का प्रयोग करके एक सरल समीकरण उपलब्ध कर लिया जाता है जिसके आधार पर 'X' या 'f' का मान निश्चित किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 27 :

(i) किसी स्थान की एक सप्ताह मे सोमवार से शनिवार तक की औसत वर्षा (mean rainfall) 4.5 सेण्टीमीटर थी। रविवार को अत्यधिक वर्षा होने के कारण पूरे सप्ताह की औसत वर्षा बढ़कर 6 सेण्टीमीटर हो गई। बताइये रविवार को कितनी वर्षा हुई ?

(ii) 100 छात्रो के औसत प्राप्तांक 40 थे। बाद मे यह पता लगा कि एक विद्यार्थी के अंक 74 के स्थान पर गलती से 14 पढ़े गये। ठीक औसत प्राप्तांक ज्ञात कीजिये।

हल (Solution) :

(i) 6 दिनो (सोम से शनि) की औसत वर्षा = 4·5 सेण्टीमीटर

∴ 6 दिनो की कुल वर्षा = 4·5 × 6 = 27 सेण्टीमीटर

पूरे सप्ताह—7 दिनों की औसत वर्षा = 6 सेण्टीमीटर

पूरे सप्ताह की कुल वर्षा = 6 × 7 = 42 सेण्टीमीटर

∴ 7वे दिन रविवार को हुई वर्षा = (42 — 27) = **15** सेण्टीमीटर

(ii) 100-छात्रों के कुल प्राप्तांक = 40 × 100 = 4000

उनके प्राप्तांको का सही जोड़ = 4000 − 14 + 74 = 4060

∴ सही औसत प्राप्तांक $= \frac{4060}{100} = 40{\cdot}6$ अंक.

उदाहरण (Illustration) 28 :

निम्न आवृत्ति बटन मे यदि समान्तर माध्य (arithmetic mean) का मान 18 हो तो अज्ञात आवृत्ति (missing frequency) ज्ञात कीजिए—

वर्गान्तर	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
आवृत्ति	3	6	9	13	?	5	4

हल (Solution) :

अज्ञात आवृत्ति को f मानकर उसको इस प्रकार ज्ञात किया जायेगा—

अज्ञात आवृत्ति का निर्धारण

वर्ग	मध्य बिन्दु	आवृत्ति	कुल आकार
	X	f	$f \times X$
11—13	12	3	36
13—15	14	6	84
15—17	16	9	144
17—19	18	13	234
19—21	20	? f	20f
21—23	22	5	110
23—25	24	4	96
Total		$40+f$	$704+20f$
		N	ΣfX

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N}; \quad 18 = \frac{704+20f}{40+f}$$

$$18(40+f) = 704+20f; \qquad 720+18f = 704+20f$$

$$18f - 20f = 704 - 720; \qquad -2f = -16$$

$$\therefore f = \frac{-16}{-2} \text{ or } 8 \qquad \therefore \text{ अज्ञात आवृत्ति 8 है।}$$

समान्तर माध्य के बीजीय गुण (Algebraic Properties of the Arithmetic Mean)—समान्तर माध्य में निम्नलिखित बीजगणितीय गुण पाये जाते हैं जिनके कारण इसका अन्य रीतियों में काफी प्रयोग होता है—

(1) समान्तर माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनों का बीजगणितीय जोड़ शून्य होता है, अर्थात् $\Sigma d=0$. इसी अध्याय में यह सिद्ध किया जा चुका है कि माध्य से विचलनों का योग शून्य होता है। इसी गुण के आधार पर समान्तर माध्य ज्ञात करने की लघु रीति का प्रयोग किया जाता है।

(2) समान्तर माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनों के वर्गों (squares) का जोड़ न्यूनतम होता है, अर्थात् $\Sigma d^2=$ Minimum. श्रेणी के किसी अन्य मूल्य से निकाले गए विचलन-वर्गों के जोड़ की तुलना में समान्तर माध्य से लिए गए विचलनों के वर्गों का जोड़ कम होता है। उदाहरणार्थ, 1, 2 और 6 का समान्तर माध्य 3 है जिससे इन मूल्यों के विचलन क्रमशः −2, −1, +3 हैं और विचलनों के वर्गों का जोड़ 14 है। यदि माध्य के अतिरिक्त किसी अन्य मूल्य जैसे 1, 2, 6, 3·5 या 4 आदि से विचलन लेकर उनके वर्गों के जोड़ ज्ञात किये जाएँ तो वे 14 से अधिक होंगे।

पद-मूल्य	$\bar{X}=3$ से विचलन	विचलन-वर्ग	$A=1$ से विचलन	विचलन-वर्ग	$A=2$ से विचलन	विचलन-वर्ग
1	−2	4	0	0	−1	1
2	−1	1	1	1	0	0
6	+3	9	5	25	4	16
		14		26		17
		Σd^2 (3 से)		Σd^2 (1 से)		Σd^2 (2 से)

$$\therefore\ \Sigma(X-\bar{X})^2 <^* \Sigma(X-A)^2$$

अपकिरण की 'प्रमाप विचलन' रीति, प्रवृत्ति-मापन की न्यूनतम वर्ग विधि तथा सहसम्बन्ध में माध्य के इस गुण का प्रयोग होता है।

(3) $\bar{X}$, N व ΣX में से कोई दो माप ज्ञात हों तो तीसरा माप ज्ञात किया जा सकता है—

$$\bar{X}=\frac{\Sigma X}{N};\quad \Sigma X=\bar{X}\times N;\quad N=\frac{\Sigma X}{\bar{X}}$$

इस गुण के आधार पर समान्तर माध्य और पदों की संख्या को गुणा करके पदों का कुल मूल्य ज्ञात किया जा सकता है। अज्ञात या रिक्त मूल्यों व आवृत्तियों के निर्धारण तथा अशुद्धियों के *निवारण में इस गुण का प्रयोग किया जाता है। (देखिये उदाहरण 27 व 28)।*

(4) यदि एक समूह के दो या अधिक भागों के समान्तर माध्य तथा उनके पदों की संख्या ज्ञात हैं तो उनके आधार पर सामूहिक समान्तर माध्य ज्ञात किया जा सकता है, अर्थात्—

दो भाग	दो से अधिक
$\bar{X}_{1\cdot2}=\dfrac{\bar{X}_1N_1+\bar{X}_2N_2}{N_1+N_2}$	$\bar{X}_{1\cdot2\cdot3\cdots n}=\dfrac{\bar{X}_1N_1+\bar{X}_2N_2+\bar{X}_3N_3+\ldots\bar{X}_nN_n}{N_1+N_2+N_3\ldots N_n}$

उदाहरण (Illustration) 29 :

(i) एक संस्था में सभी श्रमिकों का औसत मासिक वेतन 92 रुपये है। कुशल (skilled) और अकुशल (unskilled) श्रमिकों का औसत मासिक वेतन क्रमशः 100 रुपये और 80 रुपये आता है। उस संस्था में कुशल और अकुशल श्रमिकों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

[B. Com. (IIyr), Raj., 1971]

*< संकेत 'से कम' (smaller than)—के लिए प्रयुक्त होता है जबकि > 'से अधिक' (more than)—के लिए प्रयोग किया जाता है।

(ii) किसी वंटन के चार उप-समूहों (sub-groups) के समान्तर माध्य निम्नांकित हैं। उनकी सहायता से सम्पूर्ण वंटन की सामूहिक समान्तर माध्य (combined arithmetic mean of the whole distribution) ज्ञात कीजिए—

उप-समूह	व्यक्तियों की संख्या	औसत मासिक मजदूरी (रु०)
क	100	70
ख	50	61
ग	120	80 5
घ	30	83

हल (Solution) :

(i) N_1 संकेताक्षर कुशल श्रमिकों की संख्या के लिए प्रयोग किया जाएगा,

N_2 „ अकुशल „ „ „ „ ,

$\overline{X}_1$ „ कुशल श्रमिकों का औसत मासिक वेतन होगा,

$\overline{X}_2$ „ अकुशल „ „ „ „

और $\overline{X}_{1\cdot2}$ „ सभी श्रमिकों के सामूहिक औसत वेतन के लिए प्रयुक्त होगा।

$$\overline{X}_{1\cdot2}=\frac{\overline{X}_1N_1+\overline{X}_2N_2}{N_1+N_2}$$

$$92=\frac{100N_1+80N_2}{N_1+N_2} \text{ या } 92(N_1+N_2)=100N_1+80N_2$$

$$92N_1+92N_2=100N_1+80N_2 \quad \text{या} \quad -8N_1=-12N_2$$

$$\therefore\ 2N_1=3N_2;\ \ \frac{N_1}{N_2}=\frac{3}{2}$$

अतः कुशल तथा अकुशल श्रमिकों का अनुपात 3 : 2 है।

उनका प्रतिशत क्रमशः $100\times\frac{3}{5}=60$ और $100\times\frac{2}{5}=40$ है।

∴ संस्था में कुशल व अकुशल श्रमिकों का प्रतिशत 60 और 40 है।

(ii)

उप-समूह	औसत मजदूरी	संख्या
क	$\overline{X}_1=70$	$N_1=100$
ख	$\overline{X}_2=61$	$N_2=50$
ग	$\overline{X}_3=80{\cdot}5$	$N_3=120$
घ	$\overline{X}_4=83$	$N_4=30$

$$\overline{X}_{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\frac{\overline{X}_1N_1+\overline{X}_2N_2+\overline{X}_3N_3+\overline{X}_4N_4}{N_1+N_2+N_3+N_4}$$

$$\overline{X}_{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\frac{(70\times100)+(61\times50)+(80{\cdot}5\times120)+(83\times30)}{100+50+120+30}=\frac{22200}{300}$$

$=74$ अतः सम्पूर्ण वंटन का सामूहिक औसत वेतन 74 रुपये है।

(5) दो श्रेणियों के तत्संवादी मूल्यों (corresponding values) के सभी जोड़ों व अन्तरों का समान्तर माध्य, दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्यों के योग या अन्तर के बराबर होता है। अग्र सारणी से यह विशेषता स्पष्ट हो जाती है—

	अ	ब	अ+ब	अ—ब
	49	7	56	42
	53	12	65	41
	56	25	81	31
	58	41	99	17
	59	65	124	—6
योग	275	150	425	125
माध्य	55	30	85 [55+30]	25 [55—30]

उपर्युक्त बीजगणितीय गुणों के कारण ही अन्य सांख्यिकीय रीतियों जैसे अपकिरण, विषमता, सहसम्बन्ध इत्यादि में समान्तर माध्य का काफी प्रयोग किया जाता है।

लाभ—समान्तर माध्य के निम्न लाभ हैं—

(i) सरलता—सांख्यिकीय माध्यों में समान्तर माध्य सबसे अधिक सरल व बुद्धिगम्य है। इसे साधारण व्यक्ति भी आसानी से समझ लेते हैं। समान्तर माध्य के निर्धारण की गणन-क्रिया भी बहुत सरल है। यदि केवल मूल्यों का जोड़ और उनकी संख्या ज्ञात हो तो उनकी सहायता से ही माध्य निर्धारित किया जा सकता है।

(ii) सभी मूल्यों पर आधारित—समान्तर माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है। मध्यका व बहुलक में यह गुण नहीं पाया जाता।

(iii) निश्चितता—समान्तर माध्य सदैव निश्चयात्मक होता है। उसका निर्धारण करने में आन्तरगणन या अनुमान का प्रयोग नहीं किया जाता। मध्यका व बहुलक में यह गुण उपस्थित नहीं है।

(iv) बीजगणितीय विवेचन—समान्तर माध्य में अनेक बीजीय गुण हैं जिनके कारण उच्चतर सांख्यिकीय विश्लेषण मे इसका पर्याप्त प्रयोग किया जाता है। इन गुणों का इसी अध्याय में विस्तृत विवेचन किया जा चुका है।

(v) स्थिरता—समान्तर माध्य पर प्रतिचयन के परिवर्तनों (fluctuations of sampling) का सबसे कम प्रभाव पड़ता है। एक समग्र में यदि दैव प्रतिचयन के आधार पर यथेष्ट मात्रा में अनेक प्रतिदर्श निकाले जाएँ तो उनके समान्तर माध्य लगभग समान होंगे। यह गुण अन्य किसी माध्य में नहीं पाया जाता।

उपर्युक्त गुणों के कारण समान्तर माध्य सबसे अधिक लोकप्रिय माध्य है तथा इसमें आदर्श माध्य के सभी गुण पर्याप्त मात्रा में पाये जाते हैं।

समान्तर माध्य के दोष या सीमाएँ—निस्सन्देह समान्तर माध्य में आदर्श माध्य के अनेक गुण पाये जाते हैं, परन्तु उसके निम्नलिखित दोष भी हैं जिनके कारण उसकी उपयोगिता कुछ कम हो जाती है।

(i) चरम मूल्यों का प्रभाव—समान्तर माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है इसलिए उस पर असाधारण व सीमान्त मूल्यों का बहुत प्रभाव पड़ता है। उदाहरणार्थ, यदि किसी व्यापारी की मासिक आय 5000 रुपये है और उसके चार कर्मचारियो की मासिक आय क्रमशः 50, 70, 80 व 100 रुपये है तो पाचों की आय का समान्तर माध्य 1060 रुपये होगा जो कि इस समूह का प्रतिनिधि नहीं कहा जा सकता। इस पर 5000 रुपये का अधिक प्रभाव पड़ा है।

(ii) अप्रतिनिधि तथा अवास्तविक—अधिकतर समान्तर माध्य ऐसा कोई मूल्य होता है जो समंक श्रेणी से बाहर हो। अतः वह श्रेणी के मूल्यो का पूर्ण रूप से प्रतिनिधित्व नहीं करता। उदाहरणार्थ, 10, 20 व 120 का समान्तर माध्य 50 है जो इन तीनों मूल्यों में से एक भी नही है। कभी-कभी समान्तर माध्य पूर्णांक न होकर भिन्न या दशमलव के रूप में होता है जिसके बहुत अवास्तविक और हास्यास्पद निष्कर्ष निकल सकते हैं। हास्य-व्यंग्य पत्रिका पंच ने अवास्तविक समान्तर माध्य का उदाहरण देते हुए व्यंग्यात्मक रूप मे लिखा था—'प्रति वयस्क स्त्री पर 2·2

बच्चों की संख्या कुछ बातों में बिल्कुल मूर्खतापूर्ण व हास्यास्पद प्रतीत हुई और राजकीय आयोग ने यह सुझाव दिया कि मध्यम-वर्गों को धन दिया जाना चाहिए जिससे यह माध्य पूर्णांक और अधिक सुविधाजनक अंक के रूप में बढ़ाया जा सके।'[1] वास्तव में, दशमलव के रूप में बच्चों की संख्या की कल्पना भी नहीं की जा सकती। '2·2 बच्चे' अवास्तविक संख्या है। यह पूर्णांक में (2 या 3) होनी चाहिए।

(iii) गणना सम्बन्धी कठिनाइयाँ—स्थिति-माध्यों की अपेक्षा समान्तर माध्य की गणना अधिक कठिन है। यदि कोई एक मूल्य भी अज्ञात हो तो पूरी श्रेणी का समान्तर माध्य ज्ञात नहीं किया जा सकता क्योंकि वह सभी मूल्यों पर आधारित होता है। समान्तर माध्य का बिन्दुरेखीय निर्धारण भी नहीं किया जा सकता। गुणात्मक समंकों का अध्ययन करने के लिए समान्तर माध्य का प्रयोग नहीं किया जा सकता। ये सब दोष स्थिति सम्बन्धी माध्यों में नहीं पाये जाते।

(iv) भ्रमात्मक निष्कर्ष—समान्तर माध्य से समंक-श्रेणी की रचना या बनावट का ठीक-ठीक पता नहीं चलता। अतः समंक मालाओं के समान्तर माध्यों की तुलना से कभी-कभी गलत और भ्रामक निष्कर्ष निकलते हैं। उदाहरणार्थ, यदि एक कारखाने के गत तीन वर्षों के लाभ 10,000, 20,000 व 45,000 रुपये तथा दूसरे कारखाने के लाभ क्रमशः 50,000, 20,000 व 5,000 रुपये हों तो दोनों के लाभों का समान्तर माध्य 25,000 रुपये होगा, जिससे यह परिणाम निकाला जा सकता है कि दोनों एक ही स्तर पर हैं। परन्तु यदि दोनों के लाभों का विश्लेषण किया जाए तो यह निष्कर्ष निकलेगा कि एक कारखाने में उन्नति हो रही है और दूसरा अवनति की ओर जा रहा है। उचित निष्कर्ष निकालने के लिए अन्य सांख्यिकीय माप जैसे अपकिरण, विषमता-गुणक आदि का प्रयोग किया जाता है।

(v) अनुपयुक्तता—अनुपात, दर व प्रतिशत आदि का अध्ययन करने के लिए समान्तर माध्य सर्वथा अनुपयुक्त है।

उपयोग—अनेक दोष होते हुए भी समान्तर माध्य को आदर्श माध्य माना जाता है और व्यावहारिक क्षेत्र में इसका बहुत प्रयोग किया जाता है। यह विशेष रूप से ऐसी श्रेणियों के लिए उपयोगी होता है जिनमें विभिन्न मूल्यों का लगभग समान महत्त्व होता है। सामाजिक व आर्थिक समस्याओं के विवेचन के लिए यह माध्य बहुत उपयोगी है। औसत मूल्य, औसत लागत, औसत आय, औसत उत्पादन आदि ज्ञात करने में समान्तर माध्य का ही प्रयोग होता है।

भारित समान्तर माध्य
(Weighted Arithmetic Mean)

समान्तर माध्य दो प्रकार के होते हैं—(i) सरल, तथा (ii) भारित।

(i) सरल समान्तर माध्य—इसके निर्धारण में श्रेणी के सभी मूल्यों को समान महत्त्व दिया जाता है। अब तक हमने जिस समान्तर माध्य का विवेचन किया है, वास्तव में वही सरल (simple) समान्तर माध्य कहलाता है।

(ii) भारित समान्तर माध्य—व्यवहार में अनेक श्रेणियों में विभिन्न मूल्यों का अलग-अलग सापेक्षिक महत्त्व होता है। किसी पद का अधिक महत्त्व होता है, किसी का कम। ऐसी श्रेणियों में मूल्यों का समान्तर माध्य निकालते समय उनके सापेक्षिक महत्त्व को ध्यान में रखना अत्यन्त आवश्यक है। इकाइयों का सापेक्षिक महत्त्व किसी निर्दिष्ट आधार पर निश्चित अंकों द्वारा व्यक्त किया जाता है। इन अंकों को भार (weights) कहते हैं तथा भारों के आधार पर निर्धारित किया गया समान्तर माध्य, भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean) कहलाता है। जहाँ पर विभिन्न मूल्य अलग-अलग सापेक्षिक महत्त्व रखते हों वहाँ भारित माध्य ज्ञात करना

[1] 'The figure of 2·2 children per adult female was felt to be 'in some respects absurd, and a Royal Commission suggested that the middle classes be paid money to increase the to a rounder and more convenient number.' —*Punch*, Quoted by Moroney, *Facts Figures*, p. 34.

ही उपयुक्त है। उदाहरणार्थ, यदि किसी कारखाने में दो प्रकार के मजदूर—कुशल तथा अकुशल—हों और उनकी दैनिक मजदूरी 6 रुपये और 4 रु० हो तो यह कहा जा सकता है कि औसत मजदूरी 5 रु० है। परन्तु यह सही माध्य नहीं है। इस माध्य में इस बात पर विचार नहीं किया गया कि कितने कुशल मजदूर हैं और कितने अकुशल। यदि कुशल मजदूरों की संख्या 20 और अकुशल मजदूरों की संख्या 80 हो तो सख्या के अनुपात में भाग देने से प्राप्त माध्य ही औसत मजदूरी का यथोचित प्रतिनिधित्व करेगा, अर्थात् $\frac{(6\times20)+(4\times80)}{20+80}=4{\cdot}40$ रुपये सही माध्य होगा। इसी प्रकार वस्तुओं की कीमतों का समान्तर माध्य ज्ञात करते समय उनके उपभोग या उत्पादन की मात्रा के आधार पर अलग-अलग भार देकर भारित माध्य निकालना अधिक उपयुक्त होगा।

भारित समान्तर माध्य की गणना—भारित समान्तर माध्य निकालने के लिए विभिन्न पदों के अलग-अलग भार जान लेना आवश्यक है।

वास्तविक तथा अनुमानित भार—भार दो प्रकार के हो सकते हैं—वास्तविक तथा अनुमानित। वास्तविक भार वे होते हैं जो या तो स्पष्ट रूप से दिए होते हैं या जो समकों की प्रकृति के आधार पर सम्बन्धित तथ्यों की सहायता से निश्चित किये जाते हैं। उदाहरणार्थ, एक कालेज के प्राध्यापकों व अन्य कर्मचारियों का औसत वेतन ज्ञात करने के लिए उनकी वास्तविक संख्या, परीक्षाफल की तुलना करने के लिए परीक्षार्थियों की संख्या तथा वस्तुओं के मूल्य से सम्बन्धित समंकों के लिए उत्पादित या उपभोग की गई या विक्रीत मात्रा के आधार पर वास्तविक भार निश्चित किये जाते हैं। *यदि वास्तविक भार ज्ञात न हो सके तो विभिन्न पद-मूल्यों* के सापेक्षिक महत्त्व को ध्यान में रखते हुए भारों का उचित अनुमान लगा लिया जाता है। विभिन्न व्यक्तियों के अनुमान भिन्न हो सकते हैं। परन्तु यदि ये अनुमान तर्कसंगत हैं तो इनके आधार पर निकाले गए भारित समान्तर माध्य लगभग समान होंगे।

भारित समान्तर माध्य ज्ञात करने की प्रत्यक्ष विधि निम्न प्रकार है—

(i) इकाइयों के मूल्य 'X' और उनके भार 'W' की गुणा की जाती है।
(ii) मूल्य व भार की गुणाओं का जोड़ 'ΣWX' निकाल लिया जाता है।
(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\bar{X}w=\frac{W_1X_1+W_2X_2+\ldots\ldots W_nX_n}{W_1+W_2+\ldots\ldots W_n}, \qquad \bar{X}w=\frac{\Sigma WX}{\Sigma W}$$

$\bar{X}w$ संकेत भारित समान्तर माध्य (weighted arithmetic mean) के लिए प्रयोग हुआ है;

ΣXW संकेत मूल्यों व भारों की गुणाओं के योग (total of products of sizes and weights) के लिए प्रयोग हुआ है;

ΣW *संकेत भारो के जोड़ (total of weights)* के लिए प्रयोग हुआ है।

भारित समान्तर माध्य की गणना लघु रीति द्वारा भी की जा सकती है। इसके लिए, पहले किसी मूल्य को कल्पित माध्य (Aw) मान लिया जाता है, फिर उससे विभिन्न पदों के विचलन (dx) ज्ञात किये जाते है। विचलनों व भारो की गुणा करके उन गुणाओं का जोड़ ΣWdx निकाल लिया जाता है और निम्न सूत्र द्वारा माध्य की गणना कर ली जाती है—

$$\bar{X}w=Aw+\frac{\Sigma Wdx}{\Sigma W}$$

व्यवहार में भारित समान्तर माध्य निकालने में, अधिकतर प्रत्यक्ष रीति का ही प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 30 :

किसी कॉलिज में अध्यापकों का मासिक वेतन और उनकी संख्या (strength) निम्न सारणी में वर्णित है। मासिक वेतन का सरल तथा भारित समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों में कौन-सा अधिक उपयुक्त है और क्यों ?

	मासिक वेतन (रु०)	भार (संख्या)
प्राचार्य (Principal)	1800	1
विभागाध्यक्ष (Readers)	1200	10
वरिष्ठ प्रवक्ता (Senior Lecturers)	750	20
प्रवक्ता (Lecturers)	600	60
सहायक प्रवक्ता (Asst. Lecturers)	300	9

हल (Solution) :

सरल व भारित समान्तर माध्य की गणना

श्रेणी	मासिक वेतन (रु०)	संख्या (भार)	कुल वेतन
	X	W	$W \times X$
प्राचार्य	1800	1	1800
रीडर	1200	10	12000
वरिष्ठ प्रवक्ता	750	20	15000
प्रवक्ता	600	60	36000
सहायक प्रवक्ता	300	9	2700
योग	4650	100	67500
$N=5$	ΣX	ΣW	ΣWX

सरल समान्तर माध्य

$$\bar{X}=\frac{\Sigma X}{N}=\frac{4650}{5}=930$$

∴ सरल समान्तर माध्य = 930 रुपये

भारित समान्तर माध्य

$$\bar{X}w=\frac{\Sigma WX}{\Sigma W}=\frac{67500}{100}=675$$

∴ भारित समान्तर माध्य = 675 रुपये

इन दोनों में से भारित समान्तर माध्य ही उपयुक्त है। सरल समान्तर माध्य को यदि अध्यापकों की संख्या से गुणा करें तो कुल मासिक वेतन ज्ञात नहीं होगा। इसके विपरीत भारित समान्तर माध्य में कुल संख्या की गुणा देने से कुल वेतन की रकम मालूम हो जाती है—

Rs. 930 × 100 = Rs. 93,000

Rs. 675 × 100 = Rs. 67,500

कुल वेतन 93,000 रुपये नहीं है, 67,500 रुपये है।

अतः उक्त स्थिति में भारित समान्तर माध्य 675 रुपये ही उपयुक्त है।

लघु रीति द्वारा भी भारित समान्तर माध्य ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण (Illustration) 31 :

निम्न आँकड़ों से भारित माध्य निकालिए, वास्तविक (actual) भारों और अनुमानित भारों (estimated weights) का प्रयोग करके, और दोनों भारित माध्यों में अन्तर दिखाइए :

मद Item	खर्च (रु०) Expenditure (Rs.)	वास्तविक भार Actual Weights	अनुमानित भार Estimated Weights
खाद्यान्न (Food)	94	7·5	15
किराया (Rent)	20	2·5	5
कपड़ा (Clothing)	50	1·5	4
ईंधन और रोशनी (Fuel & Light)	25	1·0	2
अन्य मद (Other Items)	24	0·5	1

[*B. Com., Agra, 1973*]

हल (Solution) :

भारित समान्तर माध्य (वास्तविक व अनुमानित भार)

मद (Item)	खर्च (Expenditure) Rs.	वास्तविक भार		अनुमानित भार	
		भार	भारित खर्च	भार	भारित खर्च
	X	W	WX	W	WX
खाद्यान्न	94	7·5	705	15	1410
किराया	20	2·5	50	5	100
कपड़ा	50	1·5	75	4	200
ईंधन-रोशनी	25	1·0	25	2	50
अन्य	24	0·5	12	1	24
योग		13·0	867	27	1784
		ΣW	ΣWX	ΣW	ΣWX

भारित समान्तर माध्य

वास्तविक भारों के आधार पर

$$\bar{X}w=\frac{\Sigma WX}{\Sigma W}=\frac{867}{13}=66{\cdot}69$$

अनुमानित भारों के आधार पर

$$\bar{X}w=\frac{\Sigma WX}{\Sigma W}=\frac{1784}{27}=66{\cdot}08$$

अतः वास्तविक और अनुमानित भारों का प्रयोग करते हुए भारित समान्तर माध्य क्रमशः 66·69 रुपये और 66·08 रुपये हैं, ये दोनों ही लगभग समान हैं क्योंकि भारों के अनुपात लगभग वही हैं। अनुमानित भार वास्तविक भार के दोगुने हैं केवल कपड़ों के भार में थोड़ा अन्तर है। दोनों ही भारों के आधार पर विभिन्न मदों की सापेक्षिक महत्ता लगभग एक समान होने के कारण दोनों भारित माध्यों में अन्तर नगण्य (negligible) है।

सरल व भारित समान्तर माध्य की तुलना—सरल समान्तर माध्य, भारित समान्तर माध्य के बराबर हो सकता है, उससे अधिक या उससे कम हो सकता है।

(i) **बराबर** ($X=\bar{X}w$)—जब श्रेणी के प्रत्येक मूल्य को समान भार दिया जाता है तो सरल और भारित समान्तर माध्य, दोनों बराबर होते हैं।

(ii) **अधिक** ($\bar{X}>\bar{X}w$)—*जब श्रेणी के कम मूल्यों को अधिक भार तथा अधिक मूल्यों* को कम भार दिया जाता है तो सरल समान्तर माध्य, भारित माध्य से अधिक होता है।

(iii) **कम** ($\bar{X}<\bar{X}w$)—जब समंकमाला के छोटे मूल्यों को कम भार तथा बड़े मूल्यों को अधिक भार दिया जाता है तो सरल समान्तर माध्य भारित समान्तर माध्य की तुलना में कम होता है।

निम्नांकित सारणी द्वारा उपर्युक्त प्रवृत्तियाँ सिद्ध की जा सकती है—

सरल एवं भारित माध्यों की तुलना

मद	मूल्य	स्थिति (*i*) $(\bar{X}=\bar{X}w)$		स्थिति (*ii*) $(\bar{X}>\bar{X}w)$		स्थिति (*iii*) $(\bar{X}<\bar{X}w)$	
	X	*W*	*WX*	*W*	*WX*	*W*	*WX*
I	50	5	250	9	450	1	50
II	70	5	350	7	490	3	210
III	80	5	400	5	400	5	400
IV	100	5	500	3	300	7	700
V	200	5	1000	1	200	9	1800
Total	500	25	2500	25	1840	25	3160
$N=5$	ΣX	ΣW	ΣWX	ΣW	ΣWX	ΣW	ΣWX
$\bar{X}=100$		$\bar{X}w=100$		$\bar{X}w=73\cdot6$		$\bar{X}w=126\cdot4$	

भार और आवृत्ति—गणन-क्रिया के उद्देश्य से भार (weight) और आवृत्ति (frequency) में कोई अन्तर नहीं माना जाता। व्यक्तिगत श्रेणी के भारित समान्तर माध्य निकालने में जो भार का उपयोग किया जाता है वही प्रयोग आवृत्ति-श्रेणी के सरल माध्य निकालने मे आवृत्ति का होता है। दोनों स्थितियों में मूल्य की भार या आवृत्ति से गुणाओं के जोड़ को भारों या आवृत्तियों के जोड़ से भाग दिया जाता है, अर्थात्—

आवृत्ति श्रेणी में, $\bar{X}=\frac{\Sigma fX}{\Sigma f}$ or $\bar{X}=A+\frac{\Sigma fd_x}{\Sigma f}$

साधारण श्रेणी में, $\bar{X}w=\frac{\Sigma XW}{\Sigma W}$ or $\bar{X}w=Aw+\frac{\Sigma Wd_x}{\Sigma W}$

वस्तुतः भार और आवृत्ति में बहुत अन्तर है। प्रथम, आवृत्ति, पदों की संख्या को प्रकट करती है। जबकि भार उनके सापेक्षिक महत्त्व को व्यक्त करते हैं। दूसरे, पूरी श्रेणी में आवृत्ति एक ही प्रकार की सांख्यिकीय इकाइयों में व्यक्त की जाती है जैसे विभिन्न आय-वर्गों में मजदूरों की संख्या। इससे आवृत्ति वंटन सजातीय एवं प्रवाहपूर्ण होता है। परन्तु भार एक ही श्रेणी में विभिन्न प्रकार की इकाइयों के रूप में हो सकते हैं जैसे उपभोक्ता मूल्य निर्देशांक बनाते समय कुछ भार क्विंटल में, कुछ किलोग्राम में, कुछ मीटर आदि में हो सकते हैं। तीसरे, आवृत्ति की गणना सदा वास्तविक संख्या के आधार पर की जाती है परन्तु भार वास्तविक भी हो सकते हैं या किसी आधार पर अनुमानित किए जा सकते हैं। चौथे, एक श्रेणी के सभी भारों में कोई उभयनिष्ठ गुणक (common factor) होता है तो उसे निकालकर माध्य ज्ञात किया जा सकता है क्योंकि भारों का उद्देश्य मूल्यों के सापेक्षिक महत्त्व को प्रकट करना है और भार निरपेक्ष अंक मात्र होते हैं। उदाहरणार्थ, 30, 20 50, 60 के स्थान पर 3, 2, 5, 6 के भार का प्रयोग किया जा सकता है परन्तु आवृत्ति के इस प्रकार समापवर्तक निकालने से वास्तविक स्थिति ज्ञात नहीं हो पाती। पाँचवें, यदि सभी मूल्यों के भार समान हों तो उन भारों का उपयोग नहीं किया जाता परन्तु आवृत्ति का प्रयोग उस स्थिति में भी किया जाता है जब सभी मूल्यों की आवृत्तियाँ समान हों। अन्त में, भार, संख्या, मात्रा या समूह से सम्बन्धित अतिरिक्त सूचना के आधार पर निश्चित किये जाते हैं जबकि आवृत्ति, मूल्यों या वर्गों में आने वाले पदों की संख्या मात्र है। इस प्रकार

भारित माध्य के उपयोग की स्थितियाँ—*निम्नलिखित* परिस्थितियों में भारित समान्तर माध्य अधिक उपयुक्त होता है—

(i) जहाँ विभिन्न मूल्यों का अलग-अलग सापेक्षिक महत्व हो; उदाहरणार्थ, विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों का माध्य निकालते समय उन वस्तुओं की अलग-अलग मात्राओं का भार देकर भारित माध्य ज्ञात करना चाहिए। इसी प्रकार विद्यार्थियों के माध्य प्राप्तांकों की तुलना करते समय विभिन्न विषयों को अलग-अलग सापेक्षिक महत्ता को ध्यान में रखना आवश्यक है।

(ii) जहाँ समंक-माला अनेक उपवर्गों में बँटी हुई हो और उपवर्गों की आवृत्तियों में काफी अन्तर हो। उदाहरणार्थ, एक कारखाने के मजदूरों की औसत मजदूरी भारित माध्य के आधार पर ही निकाली जानी चाहिए क्योंकि कुशल, अर्द्धकुशल एवं अकुशल मजदूरों की मजदूरी और उनकी संख्या में बहुत अन्तर होता है।

(iii) जहाँ श्रेणी के विभिन्न भागों के अलग-अलग समान्तर माध्य और पदों की संख्याएँ ज्ञात हों तथा उनकी सहायता से पूरी श्रेणी का संयुक्त माध्य (combined mean) निकालना हो।

(iv) जहाँ अनुपातों, प्रतिशतों और दरों का माध्य निकालना हो। यदि दो कॉलिजों में विभिन्न कक्षाओं के औसत प्रतिशत परीक्षाफल की तुलना करनी हो तो प्रत्येक कक्षा की प्रतिशत को परीक्षार्थियों की संख्या का भार देकर भारित माध्य ज्ञात करना उपयुक्त होगा। ऐसी स्थिति में सरल माध्य भ्रामक होता है।

लाभ-दोष—सामान्यतः, भारित समान्तर माध्य के लाभ व दोष लगभग वही हैं जो सरल समान्तर माध्य के हैं। जहाँ इकाइयों की संख्या अधिक हो, वे विभिन्न सापेक्षिक महत्ता रखती हो और पूरे समूह का अध्ययन करना हो वहाँ भारित समान्तर माध्य ही केन्द्रीय प्रवृत्ति का आदर्श माप होता है। भारित माध्य निकालने में यथासम्भव वास्तविक भारों का ही प्रयोग करना चाहिए। *गलत भार देने से परिणाम भ्रमात्मक हो सकते हैं।*

सूचकांकों (Index Numbers) के निर्माण में तथा मृत्यु-दर, जन्म-दर, बेरोजगारी की दर, प्रतिशत परीक्षाफल आदि के तुलनात्मक अध्ययन में भारित समान्तर माध्य का विशेष रूप से उपयोग किया जाता है।

सामान्य व प्रमापित मृत्यु-दरें
(General and Standardised Death Rates)

दो नगरों की औसत मृत्यु-दरों की तुलना करने के लिए भारित समान्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है। औसत मृत्यु-दर दो प्रकार की होती है—

(1) **सामान्य मृत्यु-दर (Crude or General Death Rate)**—एक नगर की विभिन्न आयु-वर्गों की प्रति सहस्र (per mille) मृत्यु-दरों में उसी नगर की अलग-अलग आयु-वर्गानुसार *जनसंख्या की गुणा करके गुणनफलों के योग को उस नगर की कुल जनसंख्या से* भाग देने पर जो संख्या प्राप्त होती है वही उस नगर की सामान्य मृत्यु-दर कहलाती है।

संक्षेप में, सामान्य मृत्यु-दर निकालने की निम्न प्रक्रिया है—

(i) सर्वप्रथम, निम्न सूत्रानुसार प्रत्येक आयु-वर्ग की विशिष्ट मृत्यु-दर (Age-Specific Death Rate) निकाली जाती है—

$$\text{आयु-विशिष्ट मृत्यु-दर}\text{‰} = \frac{\text{विशिष्ट आयु-वर्ग में मृत्यु-संख्या}}{\text{विशिष्ट आयु-वर्ग की जनसंख्या}} \times 1000$$

(ii) प्रत्येक आयु-वर्ग की प्रति हजार मृत्यु-दर (X) की तत्सम्बन्धी जनसंख्या (W) से गुणा करके उन गुणाओं का जोड़ *(ΣWX) ज्ञात कर लिया जाता है।*

(iii) उन गुणाओं के जोड़ को नगर की कुल जनसंख्या (ΣW) से भाग देने पर उस नगर की सामान्य मृत्यु-दर आ जाती है।

सामान्य मृत्यु-दर को लघु रीति द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है। इस रीति में प्रत्येक आयु-वर्ग की प्रति हजार मृत्यु-दर नहीं निकालनी पड़ती। केवल निम्न सूत्र प्रयोग किया जाता है—

$$\text{सामान्य मृत्यु-दर} = \frac{\text{कुल मृत्यु-संख्या}}{\text{कुल जनसंख्या}} \times 1000$$

(2) **प्रमापित मृत्यु-दर (Standardised Death Rate)**—दो नगरों की सामान्य मृत्यु-दरें तुलना-योग्य नहीं होती क्योंकि दोनों की गणना में अलग-अलग जनसंख्याओं का भार दिया जाता है। भारित माध्यों की तुलना का यह महत्त्वपूर्ण नियम है कि दोनों माध्यों में भार एक समान होने चाहिएँ। अतः दो नगरों की औसत मृत्यु-दरों की तुलना करने में एक प्रमाप नगर (standard town) की जनसंख्या को दोनों माध्यों के लिए भार मान लिया जाता है। स्थानीय नगर (local town) की अलग-अलग प्रति हजार मृत्यु-दरों को प्रमाप नगर की आयु-वर्गानुसार जनसंख्या से गुणा करके उन गुणाओं के जोड़ को प्रमाप नगर की कुल जनसंख्या से भाग देने पर जो भारित माध्य दर ज्ञात होती है वह स्थानीय नगर की प्रमापित या संशोधित मृत्यु-दर (standardised or corrected death rate) कहलाती है।

स्थानीय नगर की प्रमापित मृत्यु-दर और प्रमाप नगर की सामान्य मृत्यु-दर की आपस में तुलना करके दोनों नगरों की स्वास्थ्य-सम्बन्धी स्थिति के बारे में उचित निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं क्योंकि इन दोनों औसत मृत्यु-दरों की गणना करने मे एक ही नगर की जनसंख्या को भार माना गया है। जिस नगर की औसत मृत्यु-दर कम होती है वही अधिक स्वस्थ माना जाता है। यह बात ध्यान रखनी चाहिए कि यदि दिये हुए समंकों से यह ज्ञात न हो कि प्रमाप नगर कौन-सा है तो पहले नगर को ही प्रमाप मान लिया जाता है।

जन्म-दरों, विवाह-दरो, बेरोजगारी-दरों, परीक्षाफल प्रतिशतों, आदि की तुलना मे सामान्य एवं प्रमापित दरों के सिद्धान्त का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 32 :

निम्न सारणी की सहायता से यह बतलाइये कि कौन-सा नगर अधिक स्वस्थ (more healthy) है—

आयु वर्ग (वर्ष)	नगर A (प्रमापित)		नगर B (स्थानीय)	
	जनसंख्या	मृत्यु-संख्या	जनसंख्या	मृत्यु-संख्या
10 से कम	10,000	300	15,000	270
10—25	50,000	1,000	40,000	1,000
25—50	30,000	450	40,000	800
50 से अधिक	10,000	600	5,000	250
योग	1,00,000	2,350	1,00,000	2,320

हल (Solution) :

उस नगर को अधिक स्वस्थ माना जायेगा जिसकी औसत मृत्यु-दर कम होगी। औसत मृत्यु-दर ज्ञात करने के लिए पहले, प्रत्येक आयु-वर्ग की प्रति हजार मृत्यु-दर निकाली जायेगी।

औसत मृत्यु-दरों की गणना

आयु वर्ग (वर्ष)	नगर A (प्रमापित)			नगर B (स्थानीय)		
	जनसंख्या	मृत्यु	मृत्यु-दर ‰	जनसंख्या	मृत्यु	मृत्यु-दर ‰
	W_1		X_1	W_2		X_2
0—10	10,000	300	30	15,000	270	18
10—25	50,000	1,000	20	40,000	1,000	25
25—50	30,000	450	15	40,000	800	20
50 से अधिक	10,000	600	60	5,000	250	30
योग	1,00,000	2,350		1,00,000	2,320	

नगर A की सामान्य मृत्यु-दर—

$$=\frac{(30\times 10{,}000)+(20\times 50{,}000)+(15\times 30{,}000)+(60\times 10{,}000)}{1{,}00{,}000}$$

$$=\frac{23{,}50{,}000}{1{,}00{,}000} \text{ या } 23\cdot 5‰$$

G. D. R. निम्न प्रकार लघु रीति द्वारा भी ज्ञात की जा सकती है—

$$\text{नगर A की G. D. R.} = \frac{\text{कुल मृत्यु-संख्या}}{\text{कुल जनसंख्या}} \times 1{,}000$$

$$=\frac{2{,}350}{1{,}00{,}000}\times 1000 \text{ या } 23\cdot 5‰$$

नगर B की सामान्य मृत्यु-दर—

$$\text{नगर B की G. D. R.} = \frac{2{,}320}{1{,}00{,}000}\times 1000 \text{ या } 23\cdot 2‰$$

दोनों नगरों की सामान्य मृत्यु-दरों की तुलना नहीं की जा सकती। कारण यह है कि दोनों में भार (वर्गानुसार जनसंख्या) अलग-अलग है। उचित तुलना के लिए यह आवश्यक है कि भार एक समान हो। अतः नगर B की प्रमापित मृत्यु-दर ज्ञात की जाएगी जिसमें नगर A की जनसंख्या का भार दिया जाएगा।

नगर B की प्रमापित मृत्यु-दर—

$$=\frac{(18\times 10{,}000)+(25\times 50{,}000)+(20\times 30{,}000)+(50\times 10{,}000)}{1{,}00{,}000}$$

$$=\frac{25{,}30{,}000}{1{,}00{,}000}=25\cdot 3‰$$

नगर *A* की G.D.R.$=23\cdot 5‰$ नगर *B* की S.D.R.$=25\cdot 3‰$

इन दोनों औसत मृत्यु-दरों की गणना में नगर *A* (Standard) की जनसंख्या का भार दिया गया है, अतः ये तुलना-योग्य हैं। दोनों दरों की तुलना से पता चलता है कि नगर *A* अधिक स्वस्थ है क्योंकि उसकी औसत मृत्यु-दर कम है।

प्रमापित दरों का सिद्धान्त, मृत्यु-दरों के अतिरिक्त जन्म-दरों, बेरोजगारी-दरों, परीक्षाफल प्रतिशत आदि की तुलना करने में भी प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 33 :

दो विश्वविद्यालयों—A और B—के निम्न परीक्षाफलों से यह ज्ञात कीजिए कि कौन-सा विश्वविद्यालय उत्तम है ?

परीक्षा	A		B	
	परीक्षा में बैठे	उत्तीर्ण हुए	परीक्षा में बैठे	उत्तीर्ण हुए
M.Sc. M.A. B.Sc. B. A.	60 100 400 240	50 90 300 150	200 240 200 160	160 190 140 100
योग	800	590	800	590

हल (Solution) :

जिस विश्वविद्यालय की औसत सफलता-प्रतिशत (Average Pass Percentage) अधिक होगी वही उत्तम माना जाएगा ।

परीक्षा	A			B		
	परीक्षा में बैठे	उत्तीर्ण हुए	सफलता प्रतिशत	परीक्षा में बैठे	उत्तीर्ण हुए	सफलता प्रतिशत
	W_1		X_1	W_2		X_2
M.Sc. M A. B.Sc. B.A.	60 100 400 240	50 90 300 150	83·33 90 75 62·50	200 240 200 160	160 190 140 100.	80 79·17 70 62·50
योग	800	590	..	800	590	

सामान्य उत्तीर्णता प्रतिशत

विश्वविद्यालय A

$$=\frac{\text{कुल पास हुए}}{\text{कुल बैठे}}\times 100$$

$$=\frac{590}{800}\times 100 \text{ या } 73{\cdot}75\%$$

विश्वविद्यालय B

$$=\frac{\text{कुल पास हुए}}{\text{कुल बैठे}}\times 100$$

$$=\frac{590}{800}\times 100 \text{ या } 73{\cdot}75\%$$

दोनो सामान्य प्रतिशतों से यह पता चलता है कि दोनों विश्वविद्यालयों में औसत परीक्षाफल समान है परन्तु सामान्य दरों की तुलना नही की जा सकती क्योंकि दोनों में अलग-अलग भार प्रयोग किये गये हैं । इसलिए विश्वविद्यालय B की प्रमापित उत्तीर्णता प्रतिशत (Standardised Pass Percentage) ज्ञात की जाएगी जिसमे विश्वविद्यालय A के परीक्षार्थियों की सख्या का ही भार दिया जाएगा । इस प्रमापित दर की तुलना विश्वविद्यालय A की सामान्य दर से की जाएगी ।

विश्वविद्यालय B की प्रमापित उत्तीर्णता प्रतिशत—

$$=\frac{(80\times 60)+(79{\cdot}17\times 100)+(70\times 400)+(62{\cdot}5\times 240)}{800}$$

$= \frac{55717}{800}$ या 69·65%

सामान्य पास प्रतिशत (General Pass Percentage) 'Varsity A = 73·75%
प्रमापित पास प्रतिशत (Standardised Pass Percentage) 'Varsity B = 69·65%
अतः विश्वविद्यालय A परीक्षाफल के दृष्टिकोण से अच्छा है।

गुणोत्तर माध्य
(Geometric Mean)

किसी समक-श्रेणी का गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) उसके सभी मूल्यों के गुणनफल का वह मूल (Root) होता है जितनी उस श्रेणी में इकाइयाँ है।[1] उदाहरणार्थ, यदि दो संख्याओं के मूल्य 3 और 27 हैं तो उनका गुणोत्तर माध्य $\sqrt{3\times27}$ अर्थात् 9 हुआ। इसी प्रकार, यदि तीन संख्याओं के मूल्य क्रमशः 20, 30 और 45 है तो उनका गुणोत्तर माध्य 30 होगा—

$$GM. = \sqrt[3]{20\times30\times45} \text{ या } \sqrt[3]{27000}$$
$$= \sqrt[3]{27\times1000} \text{ या } \sqrt[3]{3\times3\times3\times10\times10\times10}$$
$$= 3\times10 \text{ या } 30$$

इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$GM. = \sqrt[N]{X_1\times X_2\times X_3\times \ldots\ldots X_N}$$

$GM.$ गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) के लिए प्रयुक्त हुआ है।
N पदों की संख्या (number of items) के लिए प्रयुक्त हुआ है।
$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_N$ पदों के मूल्यो (value of items) के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

इस प्रकार, यदि श्रेणी में केवल 2 या 3 पद दिए हों तो सरलता से गुणोत्तर माध्य निकाला जा सकता है परन्तु अधिक संख्याएँ होने पर गणना-कार्य की जटिलता बहुत बढ़ जाती है। उदाहरणार्थ, 10 मूल्यों की गुणाओं का दसवाँ मूल (10th root) प्रत्यक्ष रूप से निश्चित करना सरल कार्य नही है। इसके लिए लघुगणक (Logarithm or Log) का प्रयोग किया जाता है। लघुगणकों व प्रति-लघुगणको (Antilogarithms) का अर्थ, गुण व निर्धारण-विधि का स्पष्टीकरण पुस्तक के अन्त मे परिशिष्ट में किया गया है। लघुगणकों के आधार पर गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र प्रयुक्त किया जाता है—

$$GM. = \text{Antilog}\left[\frac{\log X_1 + \log X_2 + \log X_3 + \ldots\ldots \log X_N}{N}\right]$$

$$GM. = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma \text{ logs}}{N}\right]$$

उपर्युक्त सूत्र में लघुगणकों की दो विशेषताओं का प्रयोग किया गया है—

(i) $(X_1\times X_2) = \text{Antilog}\,[\log X_1 + \log X_2]$

(ii) $\sqrt[N]{X} = \text{Antilog}\left[\frac{\log X}{N}\right]$

इन दो नियमों के आधार पर—

$$X_1\times X_2\times X_3\times \ldots X_N = \text{Antilog}\,[\log X_1 + \log X_2 + \log X_3 + \ldots \log X_N]$$

[1] 'Geometric Mean is the nth root of the product of n values of a series'

$$\sqrt[N]{X_1\times X_2\times X_3\times \ldots X_N}=\text{Antilog}\left[\frac{\log X_1+\log X_2+\log X_3+\ldots \log X_N}{N}\right]$$

$$\therefore\ GM.=\text{Antilog}\left[\frac{\Sigma \text{ logs}}{N}\right]$$

व्यक्तिगत श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने की निम्नलिखित प्रक्रिया है—

(i) दिये गये मूल्यों के logs ज्ञात किये जाते हैं।

'Characteristic' निरीक्षण द्वारा और 'Mantissa' Log Table की सहायता से निश्चित कर लिये जाते हैं।

(ii) Logs का जोड़ (Σ logs) निकाल लिया जाता है।

(iii) निम्नांकित सूत्र अपनाया जाता है—

$$GM.=\text{Antilog}\left[\frac{\Sigma \text{ logs}}{N}\right]$$

इस प्रकार गुणोत्तर माध्य, श्रेणी के मूल्यों के लघुगणकों की समान्तर माध्य का प्रति-लघुगणक है।

उदाहरण (Illustration) 34 :

निम्न दो श्रेणियों के गुणोत्तर माध्य (geometric mean) ज्ञात कीजिए।

श्रेणी A	श्रेणी B
5439	2·156
687	1·372
92	·9814
8	·0903
0·7	·0082
0·06	·0005
0 004	·0078
0 0003	·0009

हल (Solution) :

श्रेणी A

मूल्य	लघुगणक
5439	3·7355
687	2·8370
92	1·9638
8	0·9031
0·7	$\bar{1}$·8451
0 06	$\bar{2}$·7782
0·004	$\bar{3}$ 6021
0·0003	$\bar{4}$·4771
	2·1419
$N=8$	Σlogs

श्रेणी B

मूल्य	लघुगणक
2·156	0 3336
1·372	0·1373
·9814	$\bar{1}$·9919
·0903	$\bar{2}$·9557
·0082	$\bar{3}$·9138
·0005	$\bar{4}$·6990
·0078	$\bar{3}$ 8921
0009	$\bar{4}$·9542
	$\overline{12}$·8776
$N=8$	Σlogs

श्रेणी A

$$GM.=\text{Antilog}\left[\frac{\Sigma \text{ logs}}{N}\right]$$
$$=\text{Antilog}\left[\frac{2{\cdot}1419}{8}\right]$$
$$=\text{Antilog } 0{\cdot}2677$$

गुणोत्तर माध्य = **1·852**

श्रेणी B

$$GM.=\text{Antilog}\left[\frac{\Sigma \text{ logs}}{N}\right]$$
$$=\text{Antilog}\left[\frac{\overline{12}{\cdot}8776}{8}\right]$$
$$=\text{Antilog}\left[\frac{-16+4{\cdot}8776}{8}\right]$$
$$=\text{Antilog } \bar{2}{\cdot}6097$$

गुणोत्तर माध्य = **·0407**

जब Σ logs में पूर्णांक (characteristic) ऋणात्मक (—) होता है तो N से भाग देने के लिए उस जोड़ में संशोधन करना पड़ता है। पूर्णांक (characteristic) तथा दशमलवांश (mantissa) में N का भाग इस प्रकार अलग-अलग किया जाता है कि Characteristic, N से पूरा-पूरा विभाजित हो जाये, कुछ शेष न रहे। यदि कुछ शेष रहा तो वह भी ऋणात्मक होगा और उसे Mantissa के साथ शामिल नहीं किया जा सकता। कारण यह है कि Mantissa सदा धनात्मक (+) होता है। यदि ऋणात्मक पूर्णांक N से पूरा कटने वाला नहीं है तो उसमे से ऐसा न्यूनतम अंक घटा देते हैं जिससे वह N से पूरा विभाज्य हो जाये तथा उसी न्यूनतम अंक को Mantissa में जोड़ देते हैं। यहाँ पर $\overline{12}$ में से 4 घटाया गया है अर्थात् $-12-4=-16$ जो कि 8 से पूरा कट जाता है। फिर 4 को Mantissa में जोड़ दिया गया है और 4·8776 को 8 से विभाजित किया गया है।

व्यक्तिगत श्रेणी में गुणोत्तर माध्य लघु रीति द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है। इस रीति के अनुसार मूल्यों के लघुगुणक निकालकर किसी एक को कल्पित माध्य मान लिया जाता है। उस कल्पित लघुगणक से अन्य लघुगणकों के विचलन ज्ञात किये जाते हैं। फिर विचलनों के माध्य को कल्पित लघुगणक में जोड़कर प्राप्त संख्या का प्रति लघुगणक निकाल लिया जाता है। वही गुणोत्तर माध्य है।

खण्डित श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने की निम्नलिखित क्रिया-विधि है—

(i) दिये हुए मूल्यों के Logs ज्ञात किये जाते है।

(ii) प्रत्येक Log में सम्बन्धित आवृत्ति की गुणा करके गुणनफलों का जोड़ $[\Sigma(\log X \times f)]$ निकाला जाता है।

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$GM. = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma(\log X \times f)}{N}\right]$$

उदाहरण (Illustration) 35 :

निम्न श्रेणी का गुणोत्तर माध्य (geometric mean) परिगणित कीजिए—

मूल्य :	8	10	12	14	16	18
आवृत्ति :	6	10	20	8	5	1

हल (Solution) :

गुणोत्तर माध्य का परिकलन

मूल्य	आवृत्ति	मूल्यों के लघुगणक	लघु॰ और आवृत्ति का गुणनफल
X	f	$\log X$	$\log X \times f$
8	6	0·9031	5·4186
10	10	1·0000	10·0000
12	20	1·0792	21·5840
14	8	1·1461	9·1688
16	5	1·2041	6·0205
18	1	1·2553	1·2553
	$N=50$		$\Sigma(\log X \times f)=53·4472$

$$GM. = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma(\log X \times f)}{N}\right]$$

$$=\text{Antilog}\left[\frac{53\cdot4472}{50}\right] \text{ or Antilog } 1\cdot06894$$

∴ गुणोत्तर माध्य = 11·71

अविच्छिन्न श्रेणी—अविच्छिन्न श्रेणी में पहले वर्गान्तरों के मध्य-विन्दु निकाले जाते हैं। फिर इन मध्य विन्दुओं को मूल्य मानते हुए ठीक उसी प्रकार गुणोत्तर माध्य निकाला जाता है जिस प्रकार खण्डित श्रेणी में।

उदाहरण (Illustration) 36 :

निम्न आँकड़ों से गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक (से कम) :	10	20	30	40	50
परीक्षार्थियों की संख्या :	12	27	72	92	100

हल (Solution) :

गुणोत्तर माध्य की गणना

अंक	मध्य-मूल्य X	विद्यार्थियों की संख्या f	लघुगणक $\log X$	लघु० और आवृत्तियों का गुणनफल $\log X \times f$
0—10	5	12	0·6990	8·3880
10—20	15	15	1·1761	17 6415
20—30	25	45	1·3979	62 9055
30—40	35	20	1·5441	30·8820
40—50	45	8	1 6532	13 2256
योग		100 (N)		($\Sigma \log X \times f$) 133·0426

$$GM. = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma(\log X \times f)}{N}\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{133\cdot0426}{100}\right] = \text{Antilog } 1\cdot3304$$

∴ गुणोत्तर माध्य = 21·40

भारित गुणोत्तर माध्य (Weighted Geometric Mean)—यदि विभिन्न मूल्यों का सापेक्षिक महत्व अलग-अलग हो, तो समान्तर माध्य की भाँति गुणोत्तर माध्य को भी भारित किया जा सकता है। भारित गुणोत्तर माध्य निकालने की क्रिया निम्न प्रकार है—

(i) प्रत्येक मूल्य का Log ज्ञात किया जाता है।

(ii) प्रत्येक Log में तत्सम्बन्धी भार 'W' की गुणा करके गुणाओं का योग $[\Sigma(\log X \times W)]$ निकाला जाता है।

(iii) निम्न सूत्र प्रयुक्त किया जाता है—

$$WGM. = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma(\log X \times W)}{\Sigma W}\right]$$

ΣW भारों का योग (total of weights) है।

उदाहरण (Illustration) 37 :

अधोलिखित आँकड़ों से भारित गुणोत्तर माध्य (weighted geometric mean) ज्ञात

समूह	सूचकांक	भार
खाद्यान्न	125	7
वस्त्र	133	5
ईंधन व प्रकाश	141	4
किराया	173	1
विविध	182	3

[B. Com., Agra, 1967]

हल (Solution) :

भारित गुणोत्तर माध्य का परिकलन

समूह	भार	सूचकांक	लघुगणक	लघु० व भारों की गुणा
	W	X	$\log X$	$\log X \times W$
खाद्यान्न	7	125	2·0969	14·6783
वस्त्र	5	133	2·1239	10·6195
ईंधन व प्रकाश	4	141	2·1492	8·5968
किराया	1	173	2·2380	2·2380
विविध	3	182	2·2601	6·7803
योग	20 ΣW			42·9129 $\Sigma(\log X \times W)$

$$W\,GM = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma(\log X \times W)}{\Sigma W}\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{42 \cdot 9129}{20}\right] = \text{Antilog } 2 \cdot 1456$$

∴ भारित गुणोत्तर माध्य 139·8 है।

विशेष प्रयोग (Special Uses)—गुणोत्तर माध्य का प्रमुख उपयोग प्रतिशत वृद्धि-दरों तथा अनुपातों का औसत निकालने में किया जाता है। विशेषतया जनसंख्या-वृद्धि, चक्रवृद्धि ब्याज, मूल्यों में होने वाले प्रतिशत परिवर्तनों आदि की औसत दरें, गुणोत्तर माध्य पर आधारित 'चक्रवृद्धि ब्याज' सूत्र ('compound interest' formula) के प्रयोग द्वारा ही ज्ञात की जाती हैं—

सूत्र इस प्रकार हैं—

(i) $P_N = P_o(1+r)^N$ (ii) $r = \sqrt[N]{\frac{P_N}{P_o}} - 1$

P_N संकेताक्षर निश्चित अवधि के बाद चर-मूल्य की राशि के लिए प्रयोग हुआ है,

P_o „ अवधि के आरम्भ में चर-मूल्य के लिए प्रयोग हुआ है,

N „ वर्षों आदि की संख्या के लिए प्रयोग हुआ है,

r „ प्रति इकाई परिवर्तन की दर के लिए प्रयोग हुआ है।

उदाहरणार्थ, यदि 1,000 रुपये की धनराशि 12 वर्षों के अन्त में चक्रवृद्धि दर (compound rate) से बढ़कर 1600 रुपये हो जाती है तो साधारण ब्याज की दर 5% per annum होगी—

$$\frac{1600-1000}{12} = 50 \qquad = 5\%$$

परन्तु चक्रवृद्धि दर निम्न प्रकार ज्ञात की जायेगी—

$$P_o=1000; \quad P_N=1600; \quad N=12$$

$$r=\sqrt[N]{\frac{P_N}{P_o}}-1 \qquad =\sqrt[12]{\frac{1600}{1000}}-1$$

$$=\text{Antilog}\left[\frac{\log 1{\cdot}6}{12}\right]-1=\text{Alog }({\cdot}017)-1$$

$$=1{\cdot}040-1 \text{ or } {\cdot}04 \quad \therefore \text{Rate\%}={\cdot}04\times100=4\%$$

उदाहरण (Illustration) 38 :

एक वस्तु के मूल्य में 1969 की तुलना में 1970 में 5 प्रतिशत, 1970 की तुलना में 1971 में 8 प्रतिशत और 1971 से 1972 में 77 प्रतिशत की वृद्धि हुई। 1969 से 1972 तक की औसत वृद्धि 26 प्रतिशत है न कि 30 प्रतिशत।

उक्त कथन की इस प्रकार-व्याख्या कीजिए जिस प्रकार आप किसी सामान्य व्यक्ति को समझाते हुए करेंगे और गणन-क्रिया की शुद्धता की जाँच कीजिए।

हल (Solution) :

मूल्य-वृद्धि की प्रतिशत वार्षिक दरें 5, 8 तथा 77 हैं। इनका समान्तर माध्य $\frac{5+8+77}{3}$ =30 है परन्तु यह गलत है क्योंकि समान्तर माध्य केवल निरपेक्ष मूल्यों का औसत निकालने में उपयुक्त होता है। जहाँ वृद्धि की प्रतिशत दरें दी जाएँ और प्रत्येक वर्ष की वृद्धि पिछले वर्ष के आधार पर हो तो गुणोत्तर माध्य पर आधारित 'चक्रवृद्धि' सूत्र का प्रयोग किया जाता है जिसके अनुसार प्रति इकाई दर 'r' निम्न प्रकार निकाली जाती है—

$$r=\sqrt[N]{\frac{P_N}{P_o}}-1$$

N=वर्षों की संख्या,

P_o=प्रारम्भ का मूल्य-स्तर जिसे 100 माना जाएगा,

P_N=अवधि के अन्त में मूल्य स्तर।

वर्ष	प्रतिशत वृद्धि	निरपेक्ष वृद्धि	मूल्य स्तर
1969	—	—	100
1970	5	5	105
1971	8	$\frac{8}{100}\times105=8{\cdot}4$	113·4
1972	77	$\frac{77}{100}\times113{\cdot}4=87{\cdot}32$	200·72

$\therefore P_N=200{\cdot}72$

$$r=\sqrt[N]{\frac{P_N}{P_o}}-1 \quad \text{or} \quad \sqrt[3]{\frac{200{\cdot}72}{100}}-1$$

$$=\text{Antilog}\left[\frac{\log 2{\cdot}0072}{3}\right]-1$$

$$=\text{Antilog}\left(\frac{0{\cdot}3025}{3}\right)-1$$

$$=(\text{Antilog } 0{\cdot}10083)-1 \text{ or } 1{\cdot}260-1$$

$\therefore$ औसत प्रतिशत वृद्धि $={\cdot}26\times100$ or 26%

26% मूल्य वृद्धि की उचित औसत प्रतिशत दर है, 30% नहीं। यदि प्रत्येक गत वर्ष के मूल्य पर 26% की वृद्धि हो तभी तीन वर्ष बाद मूल्य-स्तर वही, आता है जो 5, 8 व 77% दर के अनुसार (अर्थात् 200·72) आता है—

वर्ष	औसत प्रतिशत वृद्धि	निरपेक्ष वृद्धि	बढ़ा हुआ मूल्य
1969	—	—	100
1970	26%	26	126
1971	26%	$32{\cdot}8 \left(\frac{26 \times 126}{100}\right)$	158·8
1972	26%	$41{\cdot}3 \left(\frac{26 \times 158{\cdot}8}{100}\right)$	200·1

200·1 और 200·7 में मामूली-सा अन्तर सन्निकटन के कारण है।

वैकल्पिक रीति (Alternative Method)—चक्रवृद्धि दरों की औसत निम्न वैकल्पिक रीति द्वारा भी ज्ञात की जा सकती है—

(i) वृद्धि की प्रत्येक प्रतिशत दर को 100 में जोड़ दीजिए।

(ii) इस प्रकार जो संख्याएँ ज्ञात हों उनका गुणोत्तर माध्य निकालिए।

(iii) गुणोत्तर माध्य में से 100 घटा दीजिए।

यही औसत प्रतिशत दर होगी।

अपलिखित मूल्य पद्धति (Written-down value system) के अनुसार ह्रास की विभिन्न दरों की औसत भी उपर्युक्त वैकल्पिक रीति अपनाकर निर्धारित की जा सकती है। ह्रास की दरों को 100 में से घटाकर जो संख्याएँ प्राप्त हों उनका गुणोत्तर माध्य निकाला जाता है। अन्त में इस गुणोत्तर माध्य को 100 में से घटाकर ह्रास की औसत दर उपलब्ध कर ली जाती है।

उदाहरण 38 को इस रीति द्वारा निम्न प्रकार हल किया जा सकता है—

वर्ष	मूल्य	Logs
1970	100+5 =105	2·0212
1971	100+8 =108	2·0334
1972	100+77=177	2·2480
		6·3026 Σlogs

$$G.M. = \text{Antilog}\left[\frac{6{\cdot}3026}{3}\right] = \text{Antilog } 2{\cdot}10087 = 126{\cdot}1$$

∴ औसत वार्षिक प्रतिशत वृद्धि दर $= 126 - 100$

$= 26\%$

उदाहरण (Illustration) 39 :

एक मशीन का मूल्य पहले वर्ष में 40% कम होता है, दूसरे वर्ष में 25% तथा अगले तीन वर्षों में 10% प्रति वर्ष—प्रत्येक प्रतिशत को घटते हुए मूल्य पर निर्धारित किया गया है। पाँचों वर्षों के लिए औसत प्रतिशत ह्रास ज्ञात कीजिये।

A machine is assumed to depreciate 40% in value in the first year, 25% in the second year and 10% per annum for the next three years, each percentage being calculated on the diminishing value. What is the average percentage depreciation for the five years ? *(J. Mounsey)*

परन्तु चक्रवृद्धि दर निम्न प्रकार ज्ञात की जायेगी—

$$P_o=1000; \quad P_N=1600; \quad N=12$$

$$r=\sqrt[N]{\frac{P_N}{P_o}}-1 \qquad =\sqrt[12]{\frac{1600}{1000}}-1$$

$$=\text{Antilog}\left[\frac{\log 1\cdot6}{12}\right]-1=\text{Alog }(\cdot017)-1$$

$$=1\cdot040-1 \text{ or } \cdot04 \quad \therefore \text{Rate\%}=\cdot04\times100=4\%$$

उदाहरण (Illustration) 38 :

एक वस्तु के मूल्य मे 1969 की तुलना में 1970 में 5 प्रतिशत, 1970 की तुलना में 1971 मे 8 प्रतिशत और 1971 से 1972 में 77 प्रतिशत की वृद्धि हुई। 1969 से 1972 तक की औसत वृद्धि 26 प्रतिशत है न कि 30 प्रतिशत।

उक्त कथन की इस प्रकार व्याख्या कीजिए जिस प्रकार आप किसी सामान्य व्यक्ति को समझाते हुए करेंगे और गणन-क्रिया की शुद्धता की जाँच कीजिए।

हल (Solution) :

मूल्य-वृद्धि की प्रतिशत वार्षिक दरें 5, 8 तथा 77 हैं। इनका समान्तर माध्य $\frac{5+8+77}{3}$ =30 है परन्तु यह गलत है क्योंकि समान्तर माध्य केवल निरपेक्ष मूल्यों का औसत निकालने मे उपयुक्त होता है। जहाँ वृद्धि की प्रतिशत दरें दी जाएँ और प्रत्येक वर्ष की वृद्धि पिछले वर्ष के आधार पर हो तो गुणोत्तर माध्य पर आधारित 'चक्रवृद्धि' सूत्र का प्रयोग किया जाता है जिसके अनुसार प्रति इकाई दर 'r' निम्न प्रकार निकाली जाती है—

$$r=\sqrt[N]{\frac{P_N}{P_o}}-1$$

N=वर्षों की संख्या,

P_o=प्रारम्भ का मूल्य-स्तर जिसे 100 माना जाएगा,

P_N=अवधि के अन्त में मूल्य स्तर।

वर्ष	प्रतिशत वृद्धि	निरपेक्ष वृद्धि	मूल्य स्तर
1969	—	—	100
1970	5	5	105
1971	8	$\frac{8}{100}\times105=8\cdot4$	113·4
1972	77	$\frac{77}{100}\times113\cdot4=87\cdot32$	200·72

$\therefore P_N=200\cdot72$

$$r=\sqrt[N]{\frac{P_N}{P_o}}-1 \quad \text{or} \quad \sqrt[3]{\frac{200\cdot72}{100}}-1$$

$$=\text{Antilog}\left[\frac{\log 2\cdot0072}{3}\right]-1$$

$$=\text{Antilog}\left(\frac{0\cdot3025}{3}\right)-1$$

$$=(\text{Antilog } 0\cdot10083)-1 \text{ or } 1\cdot260-1$$

$\therefore$ औसत प्रतिशत वृद्धि $=\cdot26\times100$ or 26%

26% मूल्य वृद्धि की उचित औसत प्रतिशत दर है, 30% नही। यदि प्रत्येक गत वर्ष के मूल्य पर 26% की वृद्धि हो तभी तीन वर्ष बाद मूल्य-स्तर वही, आता है जो 5, 8 व 77% दर के अनुसार (अर्थात् 200·72) आता है—

वर्ष	औसत प्रतिशत वृद्धि	निरपेक्ष वृद्धि	बढ़ा हुआ मूल्य
1969	—	—	100
1970	26%	26	126
1971	26%	$32·8 \left(\frac{26 \times 126}{100}\right)$	158·8
1972	26%	$41·3 \left(\frac{26 \times 158·8}{100}\right)$	200·1

200·1 और 200·7 में मामूली-सा अन्तर सन्निकटन के कारण है।

वैकल्पिक रीति (Alternative Method)—चक्रवृद्धि दरों की औसत निम्न वैकल्पिक रीति द्वारा भी ज्ञात की जा सकती है—

(i) वृद्धि की प्रत्येक प्रतिशत दर को 100 में जोड़ दीजिए।
(ii) इस प्रकार जो संख्याएँ ज्ञात हों उनका गुणोत्तर माध्य निकालिए।
(iii) गुणोत्तर माध्य मे से 100 घटा दीजिए।

यही औसत प्रतिशत दर होगी।

अपलिखित मूल्य पद्धति (Written-down value system) के अनुसार ह्रास की विभिन्न दरों की औसत भी उपर्युक्त वैकल्पिक रीति अपनाकर निर्धारित की जा सकती है। ह्रास की दरों को 100 मे से घटाकर जो संख्याएँ प्राप्त हों उनका गुणोत्तर माध्य निकाला जाता है। अन्त मे इस गुणोत्तर माध्य को 100 में से घटाकर ह्रास की औसत दर उपलब्ध कर ली जाती है।

उदाहरण 38 को इस रीति द्वारा निम्न प्रकार हल किया जा सकता है—

वर्ष	मूल्य	Logs
1970	100+5 =105	2·0212
1971	100+8 =108	2·0334
1972	100+77=177	2·2480
		6·3026 Σlogs

$$GM. = \text{Antilog}\left[\frac{6·3026}{3}\right] = \text{Antilog } 2·10087 = 126·1$$

∴ औसत वार्षिक प्रतिशत वृद्धि दर = 126 − 100
= 26%

उदाहरण (Illustration) 39 :

एक मशीन का मूल्य पहले वर्ष में 40% कम होता है, दूसरे वर्ष में 25% तथा अगले तीन वर्षों में 10% प्रति वर्ष—प्रत्येक प्रतिशत को घटते हुए मूल्य पर निर्धारित किया गया है। पाँचो वर्षों के लिए औसत प्रतिशत ह्रास ज्ञात कीजिये।

A machine is assumed to depreciate 40% in value in the first year, 25% in the second year and 10% per annum for the next three years, each percentage being calculated on the diminishing value. What is the average percentage depreciation for the five years ? *(J. Mounsey)*

परन्तु चक्रवृद्धि दर निम्न प्रकार ज्ञात की जायेगी—

$P_o=1000; \quad P_N=1600; \quad N=12$

$$r=\sqrt[N]{\frac{P_N}{P_o}}-1 \qquad =\sqrt[12]{\frac{1600}{1000}}-1$$

$$=\text{Antilog}\left[\frac{\log 1{\cdot}6}{12}\right]-1=\text{Alog }({\cdot}017)-1$$

$$=1{\cdot}040-1 \text{ or } {\cdot}04 \quad \therefore \text{Rate}\%={\cdot}04\times100=4\%$$

उदाहरण (Illustration) 38 :

एक वस्तु के मूल्य में 1969 की तुलना में 1970 में 5 प्रतिशत, 1970 की तुलना में 1971 में 8 प्रतिशत और 1971 से 1972 में 77 प्रतिशत की वृद्धि हुई। 1969 से 1972 तक की औसत वृद्धि 26 प्रतिशत है न कि 30 प्रतिशत।

उक्त कथन की इस प्रकार व्याख्या कीजिए जिस प्रकार आप किसी सामान्य व्यक्ति को समझाते हुए करेंगे और गणन-क्रिया की शुद्धता की जाँच कीजिए।

हल (Solution) :

मूल्य-वृद्धि की प्रतिशत वार्षिक दरें 5, 8 तथा 77 हैं। इनका समान्तर माध्य $\frac{5+8+77}{3}$ $=30$ है परन्तु यह गलत है क्योंकि समान्तर माध्य केवल निरपेक्ष मूल्यों का औसत निकालने में उपयुक्त होता है। जहाँ वृद्धि की प्रतिशत दरें दी जाएँ और प्रत्येक वर्ष की वृद्धि पिछले वर्ष के आधार पर हो तो गुणोत्तर माध्य पर आधारित 'चक्रवृद्धि' सूत्र का प्रयोग किया जाता है जिसके अनुसार प्रति इकाई दर 'r' निम्न प्रकार निकाली जाती है—

$$r=\sqrt[N]{\frac{P_N}{P_o}}-1$$

N=वर्षों की संख्या,

P_o=प्रारम्भ का मूल्य-स्तर जिसे 100 माना जाएगा,

P_N=अवधि के अन्त में मूल्य स्तर।

वर्ष	प्रतिशत वृद्धि	निरपेक्ष वृद्धि	मूल्य स्तर
1969	—	—	100
1970	5	5	105
1971	8	$\frac{8}{100}\times105=8{\cdot}4$	113·4
1972	77	$\frac{77}{100}\times113{\cdot}4=87{\cdot}32$	200·72

$\therefore P_N=200{\cdot}72$

$$r=\sqrt[N]{\frac{P_N}{P_o}}-1 \quad \text{or} \quad \sqrt[3]{\frac{200{\cdot}72}{100}}-1$$

$$=\text{Antilog}\left[\frac{\log 2{\cdot}0072}{3}\right]-1$$

$$=\text{Antilog}\left(\frac{0{\cdot}3025}{3}\right)-1$$

$$=(\text{Antilog }0{\cdot}10083)-1 \text{ or } 1{\cdot}260-1$$

$\therefore$ औसत प्रतिशत वृद्धि $={\cdot}26\times100$ or 26%

26% मूल्य वृद्धि की उचित औसत प्रतिशत दर है, 30% नहीं। यदि प्रत्येक गत वर्ष के मूल्य पर 26% की वृद्धि हो तभी तीन वर्ष बाद मूल्य-स्तर वही, आता है जो 5, 8 व 77% दर के अनुसार (अर्थात् 200·72) आता है—

वर्ष	औसत प्रतिशत वृद्धि	निरपेक्ष वृद्धि	बढ़ा हुआ मूल्य
1969	—	—	100
1970	26%	26	126
1971	26%	32·8 $\left(\frac{26 \times 126}{100}\right)$	158·8
1972	26%	41·3 $\left(\frac{26 \times 158{\cdot}8}{100}\right)$	200·1

200·1 और 200·7 में मामूली-सा अन्तर सन्निकटन के कारण है।

वैकल्पिक रीति (Alternative Method)—चक्रवृद्धि दरों की औसत निम्न वैकल्पिक रीति द्वारा भी ज्ञात की जा सकती है—

(i) वृद्धि की प्रत्येक प्रतिशत दर को 100 में जोड़ दीजिए।
(ii) इस प्रकार जो संख्याएँ ज्ञात हो उनका गुणोत्तर माध्य निकालिए।
(iii) गुणोत्तर माध्य में से 100 घटा दीजिए।

यही औसत प्रतिशत दर होगी।

अपलिखित मूल्य पद्धति (Written-down value system) के अनुसार ह्रास की विभिन्न दरों की औसत भी उपर्युक्त वैकल्पिक रीति अपनाकर निर्धारित की जा सकती है। ह्रास की दरों को 100 में से घटाकर जो संख्याएँ प्राप्त हो उनका गुणोत्तर माध्य निकाला जाता है। अन्त मे इस गुणोत्तर माध्य को 100 में से घटाकर ह्रास की औसत दर उपलब्ध कर ली जाती है।

उदाहरण 38 को इस रीति द्वारा निम्न प्रकार हल किया जा सकता है—

वर्ष	मूल्य	Logs
1970	100+5 =105	2·0212
1971	100+8 =108	2·0334
1972	100+77=177	2·2480
		6·3026 Σlogs

$$GM. = \text{Antilog}\left[\frac{6{\cdot}3026}{3}\right] = \text{Antilog } 2{\cdot}10087 = 126{\cdot}1$$

∴ औसत वार्षिक प्रतिशत वृद्धि दर = 126 — 100
= 26%

उदाहरण (Illustration) 39 :

एक मशीन का मूल्य पहले वर्ष में 40% कम होता है, दूसरे वर्ष में 25% तथा अगले तीन वर्षों में 10% प्रति वर्ष—प्रत्येक प्रतिशत को घटते हुए मूल्य पर निर्धारित किया गया है। पाँचों वर्षों के लिए औसत प्रतिशत ह्रास ज्ञात कीजिये।

A machine is assumed to depreciate 40% in value in the first year, 25% in the second year and 10% per annum for the next three years, each percentage being calculated on the diminishing value. What is the average percentage depreciation for the five years ? *(J. Mounsey)*

हल (Solution) :

वर्ष	अपलिखित मूल्य	Logs
I	100−40=60	1·7782
II	100−25=75	1·8751
III	100−10=90	1·9542
IV	100−10=90	1·9542
V	100−10=90	1·9542
		9·5159
		Σlogs

$$GM.=\text{Antilog}\left[\frac{\Sigma\log s}{N}\right]=\text{Antilog}\left[\frac{9{\cdot}5159}{5}\right]$$

$$=\text{Antilog } 1{\cdot}9032 \text{ या } 80$$

∴ औसत प्रतिशत ह्रास की दर $=100-80=20\%$

उदाहरण (Illustration) 40 :

(क) यदि 4 वर्षों की अवधि मे किसी वस्तु की कीमत दोगुनी हो जाती है तो औसत वार्षिक वृद्धि की प्रतिशत दर क्या होगी ?

(ख) एक नगर की जनसंख्या जो कि 1961 मे 10 लाख थी 1971 में बढ़कर 12·19 लाख हो गई। औसत वार्षिक वृद्धि की प्रतिशत दर निकालिए। यदि वृद्धि उसी चक्रवृद्धि दर से होती रहे तो 1976 मे अनुमानित जनसंख्या क्या होगी ?

हल (Solution) :

(क) मान लिया वस्तु का मूल्य 100 है। 4 वर्ष बाद वह 200 हो जाता है। वार्षिक वृद्धि की दर (r) निम्न सूत्रानुसार निश्चित की जाएगी—

$$r=\sqrt[N]{\frac{P_N}{P_o}}-1 \qquad P_o=100;\ P_N=200;\ N=4$$

$$=\sqrt[4]{\frac{200}{100}}-1 \text{ या Antilog}\left[\frac{\log 2}{4}\right]-1$$

$$=\text{Antilog}\left(\frac{0{\cdot}3010}{4}\right)-1 \text{ या Antilog }(0{\cdot}07525)-1$$

$$=1{\cdot}190-1={\cdot}19 \text{ अर्थात् } 19\%$$

(ख) $P_o=10$ लाख; $P_N=12{\cdot}19$ लाख; $N=10$

$$\therefore\ r=\sqrt[N]{\frac{P_N}{P_o}}-1 \text{ या } \sqrt[10]{\frac{12{\cdot}19}{10}}-1 \text{ या } \sqrt[10]{1{\cdot}219}-1$$

$$r=\text{Antilog}\left(\frac{\log 1{\cdot}219}{10}\right)-1 \text{ या Antilog } {\cdot}00859-1$$

$$r=1{\cdot}020-1 \text{ या } {\cdot}02 \text{ i.e. } 2\%$$

1976 के लिए जनसख्या-अनुमान

$P_o=10$ लाख; $r={\cdot}02$; $N=15$ (1976−1961)

$$P_N=P_o(1+r)^N=10(1+{\cdot}2)^{15}$$

$$=\text{Antilog }[\log 10+15\log 1{\cdot}02]$$

$$=\text{Antilog }(1{\cdot}0000+15\times 0{\cdot}0086)$$

$$=\text{Antilog } 1{\cdot}1290=13{\cdot}46$$

1976 मे नगर की अनुमानित जनसंख्या $=13{\cdot}46$ लाख।

गुणोत्तर माध्य की गणितीय विशेषताएँ (Algebraic Properties of Geometric Mean)—गुणोत्तर माध्य में निम्नलिखित गणितीय विशेषताएँ पाई जाती हैं जिनके कारण सूचकांकों, अनुपातों व प्रतिशत दरों आदि की गणना में इसका काफी प्रयोग होता है—

(i) गुणोत्तर माध्य में यह गुण पाया जाता है कि विभिन्न मूल्यों की पारस्परिक गुणा वही होती जो प्रत्येक मूल्य के स्थान पर मूल्यों के गुणोत्तर माध्य रखने से आती है। उदाहरणार्थ, 2, 4, 16 और 32, इन चार मूल्यों का गुणोत्तर माध्य 8 है। यदि 2, 4, 16 व 32 को आपस में गुणा की जाए तो गुणनफल वही होगा जो इन मूल्यों के स्थान पर 8 लिखकर गुणा करने से प्राप्त होता है, अर्थात्—

$$(2\times4\times16\times32)=(8\times8\times8\times8)$$

अर्थात् $$X_1\times X_2\times X_3\times\ldots X_N=(G.M.)^N$$

यदि किसी समंकमाला का गुणोत्तर माध्य व पदों की संख्या ज्ञात है तो इस गुण के आधार पर विभिन्न मूल्यों का गुणनफल निकाला जा सकता है।

(ii) गुणोत्तर माध्य से कम (या बराबर) मूल्यों के अनुपातों का गुणनफल उससे अधिक मूल्यों के अनुपातों के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात् यदि गुणोत्तर माध्य के उससे कम या बराबर मूल्यों से अलग-अलग अनुपात निकालकर उनकी आपस में गुणा की जाये तो परिणाम वही होगा जो उससे अधिक मूल्यों के गुणोत्तर माध्य पर निकाले गये अनुपातों की गुणा करने से प्राप्त होता है।

उदाहरणार्थ, 2, 4, 16 व 32 का गुणोत्तर माध्य 8 है। 2 और 4 इससे कम है और 16 व 32 अधिक है। अतः—

$$\frac{8}{2}\times\frac{8}{4}=\frac{16}{8}\times\frac{32}{8}$$

इसी प्रकार

$$\frac{G}{X\leqslant G}\times\frac{G}{X\leqslant G}=\frac{X>G}{G}\times\frac{X>G}{G}$$

G गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) है।

X व्यक्तिगत मूल्य (value) है।

$\leqslant$ संकेत 'कम या बराबर' (less than or equal to) के लिए प्रयुक्त हुआ है।

गुणोत्तर माध्य का यह गुण बहुत महत्त्वपूर्ण है। इसी गुण के कारण यह माध्य सापेक्ष परिवर्तनों के माप के लिए सर्वश्रेष्ठ माना जाता है। छोटे मूल्यों को अधिक व बड़े मूल्यों को कम महत्त्व देने के कारण ही इसका सूचकांकों में बहुत उपयोग होता है।

(iii) यदि किसी श्रेणी के दो या अधिक भागों के गुणोत्तर माध्य और पदों की संख्याएँ ज्ञात हों तो पूरे समूह का सामूहिक गुणोत्तर माध्य (Combined geometric mean) निकाला जा सकता है, अर्थात्—

$$GM_{1\cdot2}=\text{Antilog}\left[\frac{N_1\log G_1+N_2\log G_2}{N_1+N_2}\right]$$

G_1 व G_2 दो भागों के गुणोत्तर माध्य (geometric means of two parts) हैं।

N_1 और N_2 उन भागों में पदों की संख्याएँ (numbers of items in those parts) हैं।

(iv) दो श्रेणियों के सत्सवादी पद-मूल्यों के पारस्परिक गुणनफलों का गुणोत्तर माध्य उन श्रेणियों के गुणोत्तर माध्यों के गुणनफल के बराबर होता है। इसी प्रकार दो श्रेणियों के सगत मूल्यों के अनुपातों का गुणोत्तर माध्य, उनके अलग-अलग गुणोत्तर माध्यों के अनुपात के बराबर होता है।

उपयोग—उपर्युक्त गुणों के कारण प्रतिशत या आनुपातिक परिवर्तनों के मापन में,

सूचकांकों के निर्माण मे तथा चक्रवृद्धि दर के आधार पर होने वाली प्रतिशत वृद्धि की औसत निश्चित करने में गुणोत्तर माध्य का उपयोग ही उचित होता है। निरपेक्ष परिवर्तनों के माप के लिए यह उपयुक्त नही है। गणन-क्रिया की जटिलता ही इसकी लोकप्रियता में बाधक है।

लाभ—गुणोत्तर माध्य के निम्न लाभ हैं—

(i) **सभी मूल्यों पर आधारित**—समान्तर माध्य की भांति गुणोत्तर माध्य भी समंकमाला के सभी मूल्यों पर आधारित होता है।

(ii) **चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव**—अन्य माध्यों की तुलना में गुणोत्तर माध्य पर सीमान्त मूल्यों का बहुत कम प्रभाव पड़ता है।

(iii) **सन्तुलित स्थिति**—यह माध्य समंक-श्रेणी के छोटे मूल्यों को अधिक और बड़े मूल्यो को कम महत्त्व देता है। इस प्रकार एक सन्तुलित स्थिति स्पष्ट हो जाती है।

(iv) **बीजगणितीय विवेचन**—गुणोत्तर माध्य में अनेक गुण पाये जाते हैं जिनके कारण उसका अन्य प्रगत गणितीय रीतियों में बहुत प्रयोग किया जाता है।

(v) **अनुपातों का माध्य**—अनुपातों व प्रतिशत वृद्धि दरों की औसत निकालने में गुणोत्तर माध्य विशेष रूप से उपयुक्त होता है। यही कारण है कि चक्रवृद्धि दरों, प्रतिशतों व सूचकांकों के विश्लेषण में इस माध्य का प्रयोग ही सर्वोत्तम माना जाता है।

दोष—गुणोत्तर माध्य के निम्नलिखित दोष है—

(i) **गणना-सम्बन्धी जटिलता**—गुणोत्तर माध्य का सबसे बड़ा दोष यह है कि उसकी गणना करना अत्यन्त कठिन है। उसके लिए Logs तथा Antilogs की सहायता लेनी पड़ती है। अतः यह लोकप्रिय नही है।

(ii) **शून्य अथवा ऋणात्मक मूल्य**—यदि किसी पद का मूल्य शून्य (0) है तो पूरे समूह का गुणोत्तर माध्य शून्य हो जाता है। इसी प्रकार, यदि श्रेणी का कोई मूल्य ऋणात्मक है तो गुणोत्तर माध्य भी अवास्तविक व काल्पनिक होगा।

(iii) **अवास्तविक**—समान्तर माध्य की तरह गुणोत्तर माध्य भी दिए हुए मूल्यों के अतिरिक्त कोई बाहर का मूल्य हो सकता है। ऐसी स्थिति मे वह श्रेणी का उचित प्रतिनिधि नही कहा जा सकता।

(iv) **सभी मूल्यों का ज्ञान**—गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने के लिए समंकमाला के सभी मूल्यो को जानना आवश्यक है। यदि एक पद का मूल्य भी अज्ञात हो तो यह माध्य नही निकाला जा सकता।

हरात्मक माध्य
(Harmonic Mean)

किसी समंकश्रेणी मे मूल्यो की संख्या को उनके व्युत्क्रमों (Reciprocals) के योग से भाग देने पर जो मूल्य ज्ञात होता है वही उस श्रेणी का हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) कहलाता है। दूसरे शब्दों मे, मूल्यों के व्युत्क्रमों के समान्तर माध्य के व्युत्क्रम को उनका हरात्मक माध्य कहा जाता है।[1] किसी मूल्य का व्युत्क्रम वह संख्या है जो 1 को उस मूल्य से भाग देने पर उपलब्ध होती है, जैसे 5 का व्युत्क्रम $\frac{1}{5}$ या ·2 है तथा 7·6 का व्युत्क्रम $\frac{1}{7 \cdot 6}$ अर्थात् ·1316 है। किसी भी मूल्य का व्युत्क्रम, व्युत्क्रम तालिका की सहायता से सरलतापूर्वक निकाला जा सकता है।

हरात्मक माध्य की गणना—व्यक्तिगत श्रेणी (Individual series) में हरात्मक माध्य निम्नलिखित विधि द्वारा निकाला जाता है—

[1] The harmonic mean of a series of values is the reciprocal of the arithmetic average of the reciprocals of the values of items.

(i) मूल्यों के व्युत्क्रम ज्ञात किए जाते हैं।

यदि मूल्य छोटे हैं और पूर्णांकों में हैं तो 1 को प्रत्येक मूल्य से भाग देकर प्रत्यक्ष रीति से व्युत्क्रम निश्चित कर लिया जाता है जैसे $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_N$ मूल्यों के व्युत्क्रम क्रमशः $\frac{1}{X_1}, \frac{1}{X_2}, \frac{1}{X_3}, \ldots \frac{1}{X_N}$ होंगे। परन्तु यदि पद अनेक हों जिनके मूल्य भी दशमलव विन्दुओं में हों तो उनके व्युत्क्रम सारणी (Table of Reciprocals) की सहायता से ज्ञात करने चाहिएँ।

(ii) व्युत्क्रमों का योग 'Σ Reciprocals' निकाल लिया जाता है।

(iii) निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

(अ) यदि व्युत्क्रम प्रत्यक्ष रूप से निकाले जाते हैं तो

$$H.M. = \frac{N}{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}\cdots\cdots\frac{1}{X_N}}$$

$X_1, X_2, X_3 \ldots X_N$ पदों के मूल्य (values of items) हैं और
N पदों की संख्या (number of items) है।

(ब) यदि व्युत्क्रम, सारणी से ज्ञात किए जाते हैं, तो

$$H.M. = \text{Reciprocal}\left[\frac{\Sigma \text{ Reciprocals}}{N}\right]$$

उदाहरण (Illustration) 41 :

निम्नलिखित आँकड़ों द्वारा गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) और हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) निकालिए—

15,	250,	15·7,	157,	1·57
105·7	10·5	1·06	25·7	0·257

[*B. Com., Meerut, 1972*]

हल (Solution) :

पद-मूल्य (Values of Items)	लघुगणक (Logarithms)	व्युत्क्रम (Reciprocals)
15	1·1761	0 06667
250	2 3979	0 00400
15·7	1·1959	0 06369
157	2 1959	0 00637
1·57	0·1959	0·63690
105·7	2 0240	0·00946
10·5	1·0212	0 09524
1·06	0 0253	0·94340
25·7	1·4099	0 03891
0·257	$\bar{1}$·4099	3 89100
N=10	11 0520	5·75564
	Σ logs	Σ Reciprocals

गुणोत्तर माध्य

$$G.M. = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma \text{ logs}}{N}\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{11·0520}{10}\right]$$

$$= \text{Antilog } 1·1052$$

गुणोत्तर माध्य = 12·75

हरात्मक माध्य

$$H.M. = \text{Rec.}\left[\frac{\Sigma \text{ Rec.}}{N}\right]$$

$$= \text{Rec.}\left[\frac{5·75564}{10}\right]$$

$$= \text{Rec. } 0·5756$$

हरात्मक माध्य = 1·737

खण्डित व अखण्डित श्रेणी (Discrete and Continuous Series) में हरात्मक माध्य निकालने की निम्न प्रक्रिया है—

(i) पहले, मूल्यों (sizes) या मध्य-मूल्यों (mid-values) के व्युत्क्रम (Reciprocals) निकाले जाते हैं।

(ii) व्युत्क्रमों की आवृत्ति से गुणा करके उन गुणनफलों का योग $\{\Sigma(\text{Rec.}\times f)\}$ ज्ञात कर लिया जाता है।

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$HM.=\text{Reciprocal}\left[\frac{\Sigma(\text{Rec. } X\times f)}{N}\right]$$

N आवृत्तियों का जोड़ (total of frequencies) है।

उदाहरण (Illustration) 42 :

निम्न आँकडों से हरात्मक माध्य (harmonic mean) ज्ञात कीजिये—

वर्ग :	0—4	4—8	8—12	12—16	16—20
आवृत्ति :	4	12	20	9	5

हल (Solution) :

हरात्मक माध्य का परिकलन

वर्ग	मध्य-मूल्य	आवृत्ति	व्युत्क्रम	व्युत्क्रम × आवृत्ति
	X	f	Rec. X	Rec. $X\times f$
0- 4	2	4	·5000	2 0000
4- 8	6	12	·1667	2·0004
8-12	10	20	·1000	2 0000
12-16	14	9	·0714	0 6426
16-20	18	5	·0556	0 2780
योग		50 N		6·9210 $\Sigma(\text{Rec. } X\times f)$

$$HM.=\text{Rec.}\left[\frac{\Sigma(\text{Rec. } X\times f)}{N}\right]$$

$$=\text{Rec.}\left[\frac{6\ 9210}{50}\right] \text{ या Rec. } 0{\cdot}13842$$

$\therefore$ Harmonic Mean $=7\ 246$ या $7{\cdot}25$.

भारित हरात्मक माध्य (Weighted Harmonic Mean)—यदि विभिन्न मूल्यों का अलग-अलग सापेक्षिक महत्त्व हो तो भारों का प्रयोग करते हुए भारित हरात्मक माध्य निकालना चाहिए। भारित माध्य ज्ञात करने की वही विधि है जो खण्डित श्रेणी में सरल हरात्मक माध्य की गणना में अपनाई जाती है, केवल आवृत्तियों का स्थान भार ले लेते हैं। सूत्रानुसार—

$$WHM=\text{Reciprocal}\left[\frac{\Sigma(\text{Rec. } X\times W)}{\Sigma W}\right]$$

या
$$WHM.=\frac{\Sigma W}{\left(\frac{1}{X_1}\times W_1\right)+\left(\frac{1}{X_2}\times W_2\right)+\left(\frac{1}{X_3}\times W_3\right)+\ldots\left(\frac{1}{X_N}\times W_N\right)}$$

उदाहरण (Illustration) 43 :

अग्रांकित समंकों से सरल (simple) और भारांकित हरात्मक माध्य (weighted

harmonic mean) ज्ञात कीजिए—

आकार :	60	80	150	160	200
भार :	3	10	2	4	1

हल (Solution) :

सरल व भारित हरात्मक माध्यों की गणना

आकार	भार	मूल्यों के व्युत्क्रम	भारांकित व्युत्क्रम
X	W	Rec. X	Rec. $X \times W$
60	3	·01667	·05001
80	10	·01250	·12500
150	2	·00667	·01334
160	4	·00625	·02500
200	1	·00500	·00500
योग $N=5$	20 Σw	·04709 Σ Rec. X	·21835 Σ(Rec. $X \times W$)

सरल हरात्मक माध्य

$$H.M. = \text{Rec.} \left[\frac{\Sigma \text{ Rec. } X}{N}\right]$$

$$= \text{Rec.} \frac{\cdot 04709}{5}$$

$$= 106{\cdot}2$$

सरल हरात्मक माध्य $= 106{\cdot}2$

भारित हरात्मक माध्य

$$W.H.M. = \text{Rec.} \left[\frac{\Sigma(\text{Rec. } X \times W)}{\Sigma W}\right]$$

$$= \text{Rec.} \left[\frac{\cdot 21835}{20}\right]$$

$$= 91{\cdot}74$$

भारित हरात्मक माध्य $= 91{\cdot}74$

विशेष उपयोग—सांख्यिकी में हरात्मक माध्य का उपयोग सीमित क्षेत्र में किया जाता है। औसत गति, चलन-वेग तथा 'वस्तु की मात्रा प्रति रुपया' के रूप में दिए गये मूल्य (quantity prices) इत्यादि की औसत मात्रा ज्ञात करने के लिए हरात्मक माध्य विशेष रूप से उपयुक्त है। इन स्थितियों में समान्तर माध्य का प्रयोग नहीं करना चाहिए। उदाहरणार्थ, यदि एक मोटर कार 120 किलोमीटर 40 किलोमीटर प्रति घण्टा (km. p. h.) की गति से जाती है तथा वापसी में 120 किलोमीटर का रास्ता 60 किलोमीटर प्रति घण्टा की गति से तय करती है, तो उसकी औसत गति 40 व 60 का हरात्मक माध्य अर्थात् 48 होगी—

$$H.M. = \frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{1}{60}} \text{ या } \frac{2}{\frac{5}{120}} = 48 \text{ km. p. h.}$$

कुल 240 कि०मी० का रास्ता तय करने में उसे 5 घण्टे लग जाते हैं अतः उसकी औसत गति $\frac{240}{5}$ या 48 कि०मी० प्रति घण्टा है। यहाँ समान्तर माध्य निकालना गलत होगा। 40 व 60 का समान्तर माध्य 50 है। यदि 50 को 5 से गुणा किया जाए तो 250 कि०मी० की दूरी आती है जबकि कार द्वारा 240 कि०मी० का रास्ता तय किया गया है। इसलिए औसत गति की गणना करने में हरात्मक माध्य का ही प्रयोग किया जाता है। इसी प्रकार, यदि तीन स्थानों पर नारंगियों के मूल्य 5 प्रति रु०, 4 प्रति रु० व 2 प्रति रुपया दिए हैं तो औसत मूल्य $\frac{5+4+2}{3}$ या $3\frac{2}{3}$ प्रति रु० या 1 नारंगी का $\frac{300}{11}$ अर्थात् $27\frac{3}{11}$ पैसे नहीं होगा बल्कि वह—

$$\frac{3}{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{3\times20}{19}$$ नारंगियाँ प्रति रु०

या $$\frac{1900}{60}=31\frac{2}{3}$$ पैसे प्रति नारंगी होगा।

यदि यही मूल्य मुद्रा के रूप में प्रस्तुत किये जाएँ जैसे 20, 25 व 50 पैसे प्रति नारंगी, तब समान्तर माध्य उपयुक्त होगा, अर्थात् $\frac{20+25+50}{3}=\frac{95}{3}$ या $31\frac{2}{3}$ पैसे प्रति नारंगी। परन्तु जब मूल्य मात्रा प्रति रु० के रूप में दिए जाएँ तो हरात्मक माध्य ही उपयुक्त होता है।

उदाहरण (Illustration) 44 :

(क) एक रेलगाड़ी एक स्थान से रवाना होती है और मील के क्रमिक चतुर्थांशों को क्रमशः 12, 16, 24 और 48 मील प्रति घण्टा की गति से तय करती है। पूरे मील की यात्रा पर उसकी औसत रफ्तार 19·2 मील प्रति घण्टा है, 25 मील प्रति घण्टा नहीं है।

इस तथ्य को इस प्रकार समझाइए जैसे आप किसी सामान्य व्यक्ति को समझायेंगे और इसकी गणन-क्रिया की शुद्धता की जाँच कीजिए।

(ख) एक साइकिल सवार अपनी यात्रा के पहले तीन मील, 8 मील प्रति घण्टा की गति से, अगले दो मील, 3 मील प्रति घण्टा और अन्तिम दो मील, 2 मील प्रति घण्टा की रफ्तार से तय करता है। उसकी पूरी यात्रा के लिए औसत रफ्तार बतलाइए।

(a) A train starts from rest and travels successive quarters of miles at average speeds of 12, 16, 24 and 48 miles per hour. The average speed over the whole mile is 19·2 m. p. h. and not 25 m. p. h.

Expain this statement as you would to a layman and verify the arithmetic.

(b) A cyclist covers his first three miles at an average speed of 8 m. p. h., another two miles at 3 m. p. h. and the last two miles at 2 m. p. h. Find his average speed for the entire journey.

हल (Solution) :

(क) औसत गति ज्ञात करने के लिए हरात्मक माध्य का प्रयोग किया जाता है, समान्तर माध्य का नहीं। 1 मील के पूरे फासले के चार बराबर भाग हैं और प्रत्येक भाग के लिए अलग रफ्तार है। अतः विभिन्न गतियों का हरात्मक माध्य निकाला जाएगा—

$$\text{औसत रफ्तार } (H.M.)=\frac{4}{\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}}$$

$$=\frac{4}{\frac{4+3+2+1}{48}}=\frac{4}{\frac{10}{48}}=\frac{4\times48}{10} \text{ या } 19{\cdot}2 \text{ m. p. h.}$$

यदि इन गतियों का समान्तर माध्य निकाला जाता तो परिणाम इस प्रकार होता—

$$\text{औसत गति } \bar{X}=\frac{12+16+24+48}{4}=25 \text{ m. p. h.}$$

परन्तु यह परिणाम गलत हैं। इसका परीक्षण इस प्रकार किया जा सकता है—

गति (m. p. h.)	फासला (मील)	समय (घण्टे)
12	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{48}$
16	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$
24	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{96}$
48	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{48}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{192}$
	1 मील	$\frac{10}{192}$ घण्टे

$$\text{औसत गति}=\frac{\text{कुल तय किया गया फासला (मील)}}{\text{कुल समय (घण्टे)}}$$

$$\text{औसत गति}=\frac{1}{\frac{10}{192}}=\frac{19}{10} \text{ या } 19{\cdot}2 \text{ m. p. h.}$$

यदि समान्तर माध्य को औसत गति माना जाए तो इस गति से $\frac{10}{192}$ घण्टे में $\frac{25\times10}{192}=1{\cdot}302$ मील का रास्ता तय किया जायेगा जबकि वास्तव में इतने समय मे 1 मील की दूरी तय की गई है। इसलिए हरात्मक माध्य ही उपयुक्त है।

(ख) यदि विभिन्न गतियों से तय किया जाने वाला फासला भी अलग-अलग होता है तो औसत गति ज्ञात करने के लिए भारित हरात्मक माध्य का प्रयोग किया जाता है। अतः विभिन्न दूरियों को भार और गतियों को मूल्य मानते हुए निम्न प्रकार औसत गति निकाली जाएगी—

$$WHM.=\frac{\Sigma W}{\left(\frac{1}{X_1}\times W_1\right)+\left(\frac{1}{X_2}\times W_2\right)+\left(\frac{1}{X_3}\times W_3\right)+\ldots\ldots}$$

$$=\frac{3+2+2}{(\frac{1}{8}\times3)+(\frac{1}{3}\times2)+(\frac{1}{2}\times2)}$$

$$=\frac{7}{\frac{3}{8}+\frac{2}{3}+\frac{2}{2}}=\frac{7}{\frac{9+16+24}{24}}=\frac{7\times24}{49}$$

$\therefore$ औसत गति $=3{\cdot}43$ m. p. h.

वैकल्पिक विधि—इस प्रश्न को प्रत्यक्ष रीति द्वारा निम्न प्रकार भी हल किया जा सकता है—

रफ्तार (m. p. h.)	फासला (मील)	समय (घण्टे)
8	3	$\frac{1}{8}\times3=\frac{3}{8}$
3	2	$\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}$
2	2	$\frac{1}{2}\times2=1$
	7 मील	$\frac{49}{24}$ घण्टे

$$\text{औसत गति} = \frac{\text{कुल फासला}}{\text{कुल समय}}$$

$$\therefore \quad \text{औसत रफ्तार} = \frac{7}{\frac{49}{24}} \text{ या } \frac{7 \times 24}{49} \text{ या } \frac{24}{7} = 3{\cdot}43 \text{ m. p. h.}$$

हरात्मक माध्य के लाभ-दोष—हरात्मक माध्य के अनेक लाभ हैं। प्रथम, अन्य गणितीय माध्यों की भाँति हरात्मक माध्य भी समकश्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है। दूसरे, यह अन्य माध्यों की अपेक्षा बड़े मूल्यों को बहुत कम तथा छोटे मूल्यों को बहुत अधिक महत्व देता है। तीसरे, अन्य गणितीय माध्यों के समान इसका भी बीजगणितीय विवेचन हो सकता है। चौथे, विशेष प्रकार की दरों, मात्रा-मूल्यों, गति, चलन-वेग आदि की औसत ज्ञात करने के लिए यह अधिक उपयुक्त है। जहाँ मूल्यों में परस्पर विषमता अधिक हो वहाँ भी इस माध्य का प्रयोग वांछनीय होता है।

हरात्मक माध्य में कुछ दोष भी हैं। उदाहरणार्थ, गुणोत्तर माध्य की भाँति इसकी गणन-क्रिया भी अत्यन्त जटिल है। सारणी से व्युत्क्रम देखना सामान्य व्यक्ति के लिए कोई सरल कार्य नहीं है। इसके अतिरिक्त, इसे निकालने में श्रेणी के सभी मूल्यों का ज्ञान होना आवश्यक है। अधिकतर हरात्मक माध्य एक ऐसा मूल्य हो सकता है जो समंकमाला के दिए हुए मूल्यों में से न हों। ऐसी स्थिति में यह माध्य पूरे समूह का प्रतिनिधित्व नहीं कर सकता।

द्विघातीय माध्य
(Quadratic Mean)

एक श्रेणी का द्विघातीय माध्य (quadratic mean) वह संख्या है जो विभिन्न मूल्यों के वर्गों के समान्तर माध्य का वर्ग-मूल ज्ञात करने से प्राप्त होती है। इसे 'मूल-माध्य-वर्ग' भी कहते हैं।[1] इसका प्रयोग अपकिरण अथवा विक्षेपण (Dispersion) की महत्वपूर्ण रीति—मानक विचलन (Standard Deviation) की गणना में किया जाता है।

द्विघातीय माध्य ज्ञात करने की विधि इस प्रकार है—

(i) दिए हुए मूल्यों के वर्गों का जोड़ ज्ञात कर लिया जाता है।

(ii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$QM. = \sqrt{\frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \ldots\ldots X_N^2}{N}}$$

$X_1^2, X_2^2, X_3^2 \ldots\ldots$ संकेत मूल्यों के वर्ग (squares of values of items) के लिए हैं। N संकेत पदों की संख्या (number of items) के लिए है।

यदि किसी समूह में चार पद हो जिनके मूल्य 2, 4, 5, 10 हों तो उनका द्विघातीय माध्य 6·02 होगा—

$$QM. = \sqrt{\frac{(2)^2 + (4)^2 + (5)^2 + (10)^2}{4}} \text{ या } \sqrt{\frac{4+16+25+100}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{145}{4}} \text{ या } \sqrt{36{\cdot}25} = 6{\cdot}02$$

व्यवहार में द्विघातीय माध्य का प्रयोग तब किया जाता है जब श्रेणी के कुछ मूल्य धनात्मक तथा कुछ ऋणात्मक।

1. Quadratic Mean is the quantity obtained by extracting the square root of the arithmetic mean of squares of values. It is also called 'Root-Mean-Square.'

स्थिति माध्य तथा गणितीय माध्य का अन्तर—स्थिति सम्बन्धी माध्यों (मध्यका व बहुलक) और गणितीय माध्यों (समान्तर, गुणोत्तर व हरात्मक माध्य) मे बहुत अन्तर है। प्रथम, स्थिति माध्य निरीक्षण मात्र से ज्ञात हो सकते हैं परन्तु गणितीय माध्यों का गणितीय सूत्रों द्वारा निर्धारण किया जाता है। दूसरे, अविच्छिन्न श्रेणी में स्थिति माध्यों का निर्धारण कुछ मान्यताओं पर निर्भर होता है जबकि गणितीय माध्य गणितीय सूत्रो पर आधारित होते हैं। तीसरे, स्थिति-सम्बन्धी माध्य श्रेणी के सभी पदों पर आश्रित नही होते और उन पर चरम मूल्यो का कोई प्रभाव नही पड़ता। इसके विपरीत, गणितीय माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों के आधार पर निकाले जाते हैं तथा सीमान्त मूल्यों द्वारा प्रभावित होते हैं। चौथे, स्थिति माध्यो का बीजगणितीय विवेचन नही हो सकता जबकि गणित-सम्बन्धी माध्यों में ऐसे गुण होते है जिनके कारण उनका अन्य रीतियों मे भी काफी प्रयोग होता है। पाँचवें, स्थिति माध्यों पर प्रतिचयन परिवर्तनों का बहुत प्रभाव पड़ता है परन्तु गणितीय माध्यो पर इन परिवर्तनों का न्यूनतम प्रभाव पड़ता है। अन्त में, गणितीय माध्य सरल अथवा भारित हो सकते है जबकि स्थिति माध्य भारित नहीं होते।

व्यापारिक माध्य
(Business Averages)

व्यापार एवं वाणिज्य के क्षेत्र मे व्यापारिक माध्यो का काफी प्रयोग किया जाता है। यह तीन प्रकार के होते हैं—चल माध्य, प्रगामी या संचयी माध्य और संग्रथित माध्य। वे सभी समान्तर माध्य के विशिष्ट रूप है।

चल-माध्य (Moving Average)—चल माध्य या गतिमान माध्य एक विशेष प्रकार का समान्तर माध्य है जिसका प्रयोग काल-श्रेणी मे मूल्यों की दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए किया जाता है। समान्तर माध्य पूरे समूह मे एक होता है परन्तु चल-माध्य अनेक होते है तथा वे एक पूर्व-निश्चित अवधि—जैसे 3 वर्ष, 5 वर्ष, 7 वर्ष आदि—के आधार पर निकाले जाते है।

चल-माध्यों की गणना करने के लिए पहले अवधि निश्चित की जाती है। अधिकतर तीन-वर्षीय या पंचवर्षीय चल-माध्य निकाले जाते है। तीन-वर्षीय चल-माध्य ज्ञात करने की निम्नलिखित विधि है—

(i) काल-श्रेणी के पहले तीन वर्षों के मूल्यों को जोड़कर तथा जोड़ को 3 से भाग देकर समान्तर माध्य निकाला जाएगा। इस माध्य को प्रथम तीन वर्षों के मध्य में, अर्थात् दूसरे वर्ष के सामने, लिखा जाएगा।

(ii) फिर पहले वर्ष के मूल्य को छोड़कर तथा चौथे मूल्य को जोड़कर दूसरे, तीसरे व चौथे वर्ष के मूल्यों का समान्तर-माध्य निकाला जाएगा जिसे—तीसरे वर्ष के सामने लिख दिया जाएगा। इसी प्रकार, श्रेणी के अन्तिम वर्ष तक यह क्रिया चलती रहेगी। प्रत्येक बार पिछले मूल्य को छोड़कर तथा अगले मूल्य को जोड़कर माध्य निकाला जाएगा। आरम्भ से अन्त तक अवधि 3 वर्ष ही रखी जाएगी।

इस प्रकार, निर्धारित माध्य उस श्रेणी के चल माध्य होंगे जिनसे उनकी दीर्घकालीन प्रवृत्ति का पता चल सकेगा।

इनका विस्तृत विवेचन 'काल श्रेणी का विश्लेषण' वाले अध्याय में किया गया है।

तीन-वर्षीय चल-माध्य (Three-yearly moving averages) :

$$\frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+e}{3}, \frac{d+e+f}{3} \ldots\ldots$$

पंचवर्षीय चल-माध्य (Five-yearly moving averages) :

$$\frac{a+b+c+d+e}{5}, \frac{b+c+d+e+f}{5}, \frac{c+d+e+f+g}{5} \ldots$$

व्यापारिक क्षेत्र में उत्पादन, लाभ, निर्यात, मूल्य आदि से सम्बन्धित दीर्घकालीन प्रवृत्ति निश्चित करने के लिए चल-माध्यों का प्रयोग किया जाता है।

प्रगामी या संचयी माध्य (Progressive Average)—प्रगामी माध्य की गणना भी समान्तर माध्य के आधार पर की जाती है। यह चल-माध्य से भिन्न है क्योंकि इसकी संचयी प्रकृति होती है। इसकी गणना में प्रत्येक अगले वर्ष के मूल्य को शामिल कर लिया जाता है परन्तु पिछले मूल्य को छोड़ा नहीं जाता। इस प्रकार पहले 1 वर्ष का, फिर 2 वर्ष का, फिर 3 वर्ष का और इसी तरह अन्तिम वर्ष तक के माध्य निकाले जाते हैं। यदि $a, b, c...$ विभिन्न मूल्य दिए हों तो प्रथम पाँच वर्षों के प्रगामी माध्य निम्न प्रकार निकाले जायेंगे—

$$\frac{a}{1}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c+d}{4}, \frac{a+b+c+d+e}{5}$$

प्रगामी माध्य का प्रयोग अधिकतर नई व्यापारिक संस्थाओं द्वारा उनके प्रारम्भिक काल की प्रगति का तुलनात्मक अध्ययन करने के लिए किया जाता है।

निम्न उदाहरण द्वारा चल-माध्य व प्रगामी माध्य का अन्तर हो जाता है—

चल-माध्य और प्रगामी माध्य में तुलना

वर्ष	बिक्री (हजार रु॰)	त्रिवर्षीय चल-माध्य		प्रगामी माध्य	
		चल-योग	चल-माध्य	प्रगामी योग	प्रगामी माध्य
1962	9	...	...	9	9
1963	10	30	10	19	9·5
1964	11	36	12	30	10
1965	15	42	14	45	11·3
1966	16	51	17	61	12 2
1967	20	54	18	81	13·5
1968	18	51	17	99	14·1
1969	13	48	16	112	14
1970	17	51	17	129	14·3
1971	21	57	19	150	15
1972	19	...	...	169	15 4

संग्रथित माध्य (Composite Average)—संग्रथित माध्य वह मूल्य है जो विभिन्न समान्तर माध्यों का समान्तर माध्य निकालने से ज्ञात होता है। उदाहरणार्थ, यदि तीन वर्षों के लिए कारखाने में मासिक उत्पादन की मात्रा दी हो तो प्रत्येक वर्ष का औसत मासिक उत्पादन ज्ञात करके उन तीन माध्यों का जो समान्तर माध्य निकाला जायेगा वही संग्रथित माध्य कहलायेगा। $X_1, X_2, X_3 ... X_N$ विभिन्न समान्तर माध्य हों और $\bar{X}_C$ संग्रथित माध्य (Composite average) के लिए प्रयोग किया जाये, तो निम्न सूत्र द्वारा संग्रथित माध्य की गणना की जायेगी—

$$\bar{X}_C = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 ...... \bar{X}_N}{N}$$

माध्यों का पारस्परिक सम्बन्ध
(Relationship between Averages)

विभिन्न सांख्यिकीय माध्यों के मूल्यों में एक प्रकार का सम्बन्ध पाया जाता है।

(क) समान्तर माध्य, मध्यका व बहुलक—यदि आवृत्ति वंटन का एक सरल आवृत्ति वक्र

बनाया जाये तो उसमें समान्तर माध्य सन्तुलन-बिन्दु पर स्थित होता है, मध्यका बिल्कुल केन्द्र में स्थित होता है जिसके दोनों ओर के भाग क्षेत्रफल में समान होते हैं और बहुलक वक्र के शिखर का मान होता है।[1]

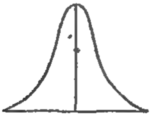
माध्य, मध्यका एवं बहुलक का सम्बन्ध आवृत्ति-वंटन की प्रकृति पर निर्भर होता है। आवृत्ति-वंटन सममित हो सकता है या असममित।

(1) सममित वंटन (Symmetrical Distribution)—जब आवृत्ति वंटन इस प्रकार का हो कि उसे बिन्दुरेख पर अंकित करने से पूर्ण सममित वक्र बन जाये तो वह सममित वंटन कहलाता है।

सममित वंटन के आवृत्ति-वक्र में सन्तुलन-बिन्दु, केन्द्र-बिन्दु तथा उच्चतम बिन्दु का मूल्य एक समान होता है। अतः ऐसे वंटन में माध्य, मध्यका व बहुलक मूल्य बराबर होते हैं जैसा कि चित्र 'अ' (Fig. A) से स्पष्ट है—

(2) असममित वंटन (Asymmetrical Distribution)—जब आवृत्ति वंटन इस प्रकार का हो कि उसका रेखाचित्र घण्टाकार या सममित न बने तो वह असममित वंटन कहलाता है। असममित वंटन के आवृत्ति-वक्र में यदि शिखर से आधार-रेखा पर एक लम्ब खींचा जाये तो वह वक्र को दो बराबर भागों में नहीं बाँटता। उसके एक ओर का क्षेत्रफल दूसरी ओर के क्षेत्रफल से अधिक होता है। यदि दाहिनी ओर वाला क्षेत्रफल बायीं ओर वाले भाग के क्षेत्रफल से अधिक है [चित्र 'ब' (Fig. B)] तो माध्य का मूल्य सबसे अधिक होता है, मध्यका-मूल्य उससे कम और बहुलक-मूल्य सबसे कम होता है। इसके विपरीत, यदि बाईं ओर वाले भाग का क्षेत्रफल अधिक होता है [चित्र 'स' (*Fig. C*)] *तो माध्य का मूल्य सबसे कम, मध्यका उससे अधिक और बहुलक-मूल्य सबसे अधिक होता है।*

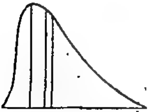
चित्र 'अ' (A)



$\bar{X} = M = Z$

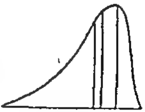
सममित वंटन

चित्र 'ब' (B)



$Z M \bar{X}$

चित्र 'स' (C)



$\bar{X} M Z$

सामान्य रूप से असममित वंटन

चित्र 'ब' (Fig. B) तथा चित्र 'स' (Fig. C) देखने से यह स्पष्ट हो जाता है कि एक साधारण रूप से असममित वंटन (Moderately Asymmetrical Distribution) में समान्तर

[1] 'The mean is the value of the centre of gravity.... The median divides the area under the curve into two equal parts. The mode is the value under the highest point of the curve.' —Spurr, Kellogg and Smith, *Business and Economic Statistics*, pp. 213-214.

माध्य और बहुलक का अन्तर माध्य व मध्यका के अन्तर का लगभग तीन गुना होता है। इस तथ्य को निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त किया जा सकता है—

$$\bar{X}-Z=3(\bar{X}-M)$$

यह मौलिक सूत्र है जिसके आधार पर मामूली असममित वंटनों मे $\bar{X}$, M व Z मे से किन्हीं दो माध्यो का मूल्य ज्ञात होने पर तीसरे माध्य का मूल्य अनुमानित किया जा सकता है। अलग-अलग माध्य ज्ञात करने के लिए इस आधारभूत सूत्र से निम्न सूत्र उद्‌धृत किये जा सकते हैं—

$$Z=3M-2\bar{X}, \qquad M=\tfrac{1}{3}(2\bar{X}+Z), \qquad \bar{X}=\tfrac{1}{2}(3M-Z)$$

उदाहरण (Illustration) 45 :

एक सामान्य रूप मे असममित वंटन (moderately asymmetrical distribution) मे निम्नलिखित केन्द्रीय माप ज्ञात कीजिए—

(क) मध्यका (median); यदि समान्तर माध्य 20 और बहुलक 18 है।
[*B. Com., Kanpur, 1970*]

(ख) मध्यका ; यदि बहुलक और समान्तर माध्य क्रमशः 32·1 और 35·4 हैं।
[*B. Com., Delhi, 1969*]

(ग) बहुलक (mode) ; यदि समान्तर माध्य = 15·6 और मध्यका = 15·73.
[*B. Com., Jiwaji, 1969*]

(घ) समान्तर माध्य (mean) ; यदि बहुलक और मध्यका क्रमशः 22 और 21·4 हैं।

हल (Solution) :

माध्यों के सम्बन्ध का मूल सूत्र—

$$\bar{X}-Z=3(\bar{X}-M)$$

(क) $\bar{X}-Z=3(\bar{X}-M)$ $\quad\therefore\ M=\frac{1}{3}(2\bar{X}+Z)$
$\bar{X}=20;\ Z=18;$ $\quad\therefore\ M=\frac{1}{3}\{(2\times20)+18\}$
$M=\frac{1}{3}(58)=19{\cdot}33$ मध्यका का अनुमानित मूल्य $=19{\cdot}33$

(ख) $Z=32{\cdot}1;\quad \bar{X}=35{\cdot}4;\quad M=\frac{1}{3}(2X+Z)$
$M=\frac{1}{3}(2\times35{\cdot}4+32{\cdot}1)=\frac{1}{3}(70\ 8+32{\cdot}1)=\frac{1}{3}\times102{\cdot}9$
मध्यका का आकलित मूल्य $=34{\cdot}3$

(ग) $\bar{X}=15{\cdot}6;\quad M=15\ 73;\quad Z=3M-2\bar{X}$
$Z=3\times15{\cdot}73-2\times15{\cdot}60=47{\cdot}19-31{\cdot}20=15{\cdot}99$
अतः बहुलक का अनुमानित मूल्य 15·99 है।

(घ) $Z=22:\quad M=21{\cdot}4;\quad \bar{X}=\frac{1}{2}(3M-Z)$
$\therefore\ \bar{X}=\frac{1}{2}(3\times21{\cdot}4-22{\cdot}0)=\frac{1}{2}(64{\cdot}2-22{\cdot}0)=\frac{1}{2}\times42{\cdot}2$
∴ समान्तर माध्य की आकलित मूल्य 21·1 है।

(ख) समान्तर, गुणोत्तर व हरात्मक माध्यों का सम्बन्ध—गणितीय माध्यों में सबसे बड़ा समान्तर माध्य होता है, उससे कम गुणोत्तर माध्य का मूल्य होता है तथा सबसे कम हरात्मक माध्य होता है। अर्थात्—

$$\bar{X} > GM. > HM.$$

परन्तु इस नियम का एक अपवाद है। यदि समंकश्रेणी के सभी पद एक मूल्य के हों तो—

$$\bar{X}=GM.=HM.$$

किन्ही दो मूल्यों का गुणोत्तर माध्य उसके समान्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य के गुणोत्तर माध्य के बराबर होता है, अर्थात्—

$$GM.=\sqrt{\bar{X}\times HM.} \qquad GM.^2=\bar{X}\times HM.$$

उदाहरण (Illustration) 46 :

(i) सिद्ध कीजिए—

(क) $\bar{X}=GM.=HM.$, यदि सभी पदों के मूल्य बराबर हों।

[B. Com., Agra, 1970]

(ख) $\bar{X} > GM. > HM.$ यदि पद-मूल्य बराबर न हों।

(ii) यदि श्रेणी में दो ही मूल्य हों तो सिद्ध कीजिए कि—

$$\bar{X}\times HM.=(GM.)^2 \quad \text{या} \quad GM.=\sqrt{\bar{X}\times HM.}$$

(iii) यदि दो संख्याओं का समान्तर माध्य 10 है और उनका गुणोत्तर माध्य 8 है तो (क) उनका हरात्मक माध्य निकालिए ; (ख) उन दोनों संख्याओं का मूल्य बताइए।

हल (Solution) :

(i) (क) यदि सभी पदों के मूल्य बराबर हों तो—

$$\bar{X}=GM.=HM.$$

प्रमाण (Proof)—मान लिया श्रेणी में 2 पद x और y हैं। उनके गणितीय माध्य निम्न होंगे—

$$\bar{X}=\frac{x+y}{2}; \quad GM.=\sqrt{xy}; \quad HM.=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

यदि दोनों का मूल्य 4 हो, तो—

$$\bar{X}=\frac{4+4}{2} \quad GM.=\sqrt{4\times4}; \quad HM.=\frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$

$$=4 \qquad =4 \qquad =4$$

$$\therefore \quad \bar{X}=GM.=HM.$$

(ख) यदि दोनों मूल्य x व y बराबर न हों, तो—

$$\bar{X} > GM. > HM.$$

प्रमाण—यदि x और y के मूल्य बराबर नहीं हैं तो यह निश्चित है कि उनका अन्तर 0 से अधिक होगा।

$$\bar{X} > GM.$$

$$x-y > 0$$

इनके वर्गमूलों का अन्तर भी 0 से अधिक होगा—

$$\sqrt{x}-\sqrt{y} > 0$$

इन वर्गमूलों के वर्ग का अन्तर भी 0 से अधिक होगा—

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 > 0$$

$$(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}.\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2 > 0$$

$$x+y-2\sqrt{xy} > 0$$

$$x+y > 2\sqrt{xy}$$

$$\therefore \quad \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$$

परन्तु $\frac{x+y}{2}=\bar{X}$ और $\sqrt{xy}=GM.$

$$\therefore \bar{X} > GM.$$

$$GM. > HM.$$

$$x-y > 0$$

अतः $x+y > 2\sqrt{xy}$ जैसा कि सिद्ध किया जा चुका है।

दोनों को $\sqrt{xy}$ से गुणा करने पर—

$$\sqrt{xy}\,(x+y) > 2\sqrt{xy}.\sqrt{xy}$$

दोनों पक्षों को $(x+y)$ से भाग देने पर—

$$\frac{\sqrt{xy}\,(x+y)}{x+y} > \frac{2xy}{x+y}$$

$$\sqrt{xy} > \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

परन्तु $\sqrt{xy}=GM.$: $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=H.$

$$\therefore \quad GM. > H.$$

अतः यह सिद्ध हो जाता है कि $\overline{X} > GM. > HM.$

(ii) यदि श्रेणी के दो मूल्य x और y हों, तो यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\overline{X} \times HM. = GM.^2$$

प्रमाण—$\overline{X}=\frac{x+y}{2}$; $HM.=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ या $\frac{2xy}{x+y}$; $GM.=\sqrt{xy}$

$$\overline{X}\times HM.=\frac{x+y}{2}\times\frac{2xy}{x+y}=xy=(\sqrt{xy})^2=GM.^2$$

$$\therefore\ \overline{X}\times HM.=GM.^2 \text{ या } \sqrt{\overline{X}\times HM.}=GM.$$

(iii) (क) $\overline{X}=10$; $GM.=8$; $HM.=?$

$$\overline{X}\times HM.=GM.^2 \text{ या } 10\times HM.=64$$

$$\therefore\ HM.=6{\cdot}4$$

(ख) मान लिया दोनों मूल्य x और y हैं।

$$\overline{X}=\frac{x+y}{2}=10 \quad \therefore\ x+y=20$$

$$GM.=\sqrt{xy}=8 \qquad \therefore\ xy=64$$

$$(x+y)^2-4xy=(20)^2-4\times 64 \text{ या } 400-256$$

या $$(x-y)^2=144$$

$$\therefore\ x-y=12$$

$$x+y=20$$

$$2x=32$$

$$\therefore\ x=16 \text{ and } y=20-16=4$$

16 और 4 दोनो संख्याओं के मूल्य हैं।

उपयुक्त माध्य का चुनाव
(Choice of a Suitable Average)

कोई एक माध्य सभी परिस्थितियों में उपयुक्त नहीं होता। अतः प्रत्येक स्थिति में एक उपयुक्त माध्य का चुनाव कर लेना चाहिए जिससे समंकमाला के सभी मौलिक अभिलक्षणों का यथोचित प्रतिनिधित्व हो जाए।

उचित माध्य का चुनाव करते समय निम्न बातों को प्रमुख रूप से ध्यान में रखना चाहिए—

(i) **पूर्व-निश्चित उद्देश्य**—उपयुक्त माध्य का चयन पहले से निश्चित उद्देश्य के अनुकूल किया जाना चाहिए। उदाहरणार्थ, यदि सभी मूल्यों को समान महत्त्व देना हो तो समान्तर माध्य, बड़े मूल्यों को कम और छोटे मूल्यों को अधिक महत्त्व प्रदान करता हो तो गुणोत्तर माध्य, श्रेणी के केन्द्र में स्थित मूल्य का निर्धारण करना हो तो मध्यका, अधिकतम बार आने वाले पद का मूल्य ज्ञात करना हो तो बहुलक का प्रयोग करना चाहिए।

(ii) **माध्यों की विशेषताएँ व गुण-दोष**—उचित माध्य के बारे में निर्णय करते समय माध्यों की गणितीय विशेषताओं, उनके लाभ-दोष व परिसीमाओं का भी ध्यान रखना आवश्यक है।

(iii) **पदों व आवृत्तियों का बंटन**—माध्यों का चुनाव समंकमाला में पद व आवृत्तियों के बंटन पर भी निर्भर होता है। उदाहरण के लिए, यदि श्रेणी के अधिकांश पदों के मूल्य कम हैं तथा एक या दो पदों के बहुत अधिक मूल्य हैं तो समान्तर माध्य उपयुक्त नहीं होगा। ऐसे बंटन

के लिए गुणोत्तर माध्य उचित होता है। यदि अधिकतर मूल्य, श्रेणी के केन्द्र में स्थित हैं या वे गुणात्मक तथ्यों से सम्बन्धित हैं तो मध्यका का प्रयोग उचित होता है।

(iv) **आदर्श माध्य के आवश्यक तत्त्व**—इस अध्याय के आरम्भ में एक सन्तोषजनक माध्य के आवश्यक तत्त्वों का उल्लेख किया गया था। उचित माध्य का चुनाव करते समय उन तत्त्वों को भी ध्यान में रखना चाहिए।

इस प्रकार, 'सभी सम्बन्धित तथ्यों तथा विभिन्न प्रकार के माध्यों के विशेष अभिलक्षणों को ध्यान में रखकर ही उनका प्रयोग करने के औचित्य का निर्णय करना चाहिए।'[1]

विभिन्न माध्यों के उपयोग
(Uses of Various Averages)

जैसा कि पहले बतलाया जा चुका है विभिन्न माध्य अलग-अलग परिस्थितियों में उपयुक्त होते हैं। उपर्युक्त बातों का ध्यान रखते हुए, प्रमुख सांख्यिकीय माध्यों का निम्न प्रकार प्रयोग करना चाहिए—

(1) **समान्तर माध्य**—आर्थिक व सामाजिक समस्याओं के अध्ययन के लिए अधिकतर समान्तर माध्य का ही प्रयोग किया जाता है। इस माध्य में आदर्श माध्य के लगभग सभी लक्षण पाये जाते हैं। यह सभी मूल्यों पर आधारित होता है, स्पष्ट व निश्चित है, समझने व ज्ञात करने में सरल है, इस पर निदर्शन परिवर्तनों का अधिक प्रभाव नहीं पड़ता तथा इसका बीजगणितीय विवेचन हो सकता है। अतः केवल उन परिस्थितियों को छोड़कर जिनमें किसी अन्य माध्य के प्रयोग का विशेष कारण हो, बाकी सभी स्थितियों में समान्तर माध्य का प्रयोग किया जाना चाहिए। उत्पादन, लागत, मूल्य, आय, निर्यात, आयात, उपभोग आदि की केन्द्रीय प्रवृत्ति का विश्लेषण समान्तर माध्य के प्रयोग द्वारा ही उचित रूप से किया जा सकता है। यदि समंकमाला में विभिन्न पदों का अलग-अलग सापेक्षिक महत्त्व हो तो भारित समान्तर माध्य उपयुक्त होता है।

(2) **गुणोत्तर माध्य**—जहाँ श्रेणी के मूल्यों में अत्यधिक असमानता हो या तथ्यों में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों का अध्ययन करना हो वहाँ गुणोत्तर माध्य का प्रयोग उचित होता है। अनुपातों, प्रतिशतों व चक्रवृद्धि दरों की औसत गुणोत्तर माध्य द्वारा ही निकाली जाती है। सूचकांको की रचना मे तथा जनसख्या की वृद्धि दर ज्ञात करने मे गुणोत्तर माध्य ही सन्तोषजनक होता है। गणना-सम्बन्धी कठिनाई ही इसके सार्वजनिक प्रयोग में बाधक है।

(3) **हरात्मक माध्य**—गति, चलन-वेग, मात्रा के रूप में दिए हुए मूल्य इत्यादि के अध्ययन के लिए हरात्मक माध्य का प्रयोग उचित है। व्यवहार मे, इस माध्य का प्रयोग क्षेत्र सीमित है।

(4) **बहुलक**—जब कभी यह देखना होता है कि सबसे अधिक बार कौन-सा मूल्य पाया जाता है तो इस माध्य का प्रयोग किया जाता है। 'कालर का माध्य आकार', 'प्रति व्यक्ति या प्रति मशीन औसत उत्पादन', 'टेलीफोन काल की मध्यक संख्या', 'प्रति सस्था औसत लाभ' इत्यादि ज्ञात करने मे बहुलक का ही प्रयोग किया जाता है। व्यापार व उद्योग के क्षेत्र में तथा ऋतु-विज्ञान व जीवशास्त्र मे विभिन्न समस्याओं का अध्ययन करने के लिए बहुलक बहुत उपयोगी सिद्ध होता है।

(5) **मध्यका**—मध्यका का प्रयोग विशेष रूप से गुणात्मक प्रकृति के समकों का सारांश जानने के लिए किया जाता है। उदाहरणार्थ, प्राप्तांको के आधार पर विद्यार्थियो के बौद्धिक स्तर का अनुमान लगाने के लिए तथा ईमानदारी, योग्यता आदि का अध्ययन करने के लिए मध्यका का प्रयोग उचित होता है।

[1] 'The justification of employing them (averages) must be determined by an appeal to all the facts and in the light of the peculiarities characteristic of the different types.'
—Horace Secrist.

इस प्रकार, प्रत्येक माध्य की महत्ता और उपयोगिता का अलग विशिष्ट क्षेत्र है। यदि अनुसन्धान के उद्देश्य और क्षेत्र के अनुकूल माध्य का प्रयोग नहीं किया जाता है तो परिणाम निश्चय ही भ्रमात्मक होते हैं। अतः जैसा कि होरेस सिक्राइस्ट ने कहा है, 'माध्यों के प्रयोग में पग-पग पर सावधानी, दूरदर्शिता एवं विश्लेषण आवश्यक हैं।'[1]

माध्यों की परिसीमाएँ
(Limitations of Averages)

माध्यों से किसी समंकमाला की केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप सम्भव हो जाता है। प्रतिनिधि या स्थानापन्न मूल्यों के रूप में माध्य, श्रेणी का सारांश प्रस्तुत करते हैं। परन्तु माध्यों की सबसे बड़ी परिसीमा यह है कि उनसे समंकमाला की बनावट, व्यक्तिगत मूल्यों का माध्य-मूल्य से औसत अन्तर तथा उनकी विषमता का आभास नहीं हो पाता। इसलिए केवल माध्यों का अध्ययन करने से ही समूह की सभी विशेषताओं के बारे में पूरी-पूरी जानकारी प्राप्त नहीं होती। उदाहरणार्थ, यदि यह कहा जाए कि भारत की प्रति व्यक्ति औसत वार्षिक आय 600 रुपये है तो इससे व्यक्तिगत आय की असमानताओं का पता नहीं चलता। इसी प्रकार, यदि दो व्यापारिक संस्थाओं का पिछले तीन वर्षों का औसत वार्षिक लाभ समान हो तो इस आधार पर यह निष्कर्ष निकालना सर्वथा अनुचित होगा कि दोनों एक ही स्तर की संस्थाएँ हैं। वस्तुतः, उनमें से एक के वार्षिक लाभों में काफी स्थिरता हो सकती है जबकि दूसरी संस्था में प्रत्येक वर्ष का लाभ औसत लाभ से बहुत भिन्न हो सकता है। यह जानने के लिए कि माध्य, व्यक्तिगत मूल्यों का कहाँ तक प्रतिनिधित्व करते हैं, उनसे विभिन्न मूल्यों के बिखराव का मापन भी आवश्यक होता है।[2] माध्य से पदों के बिखराव या प्रसार का माप करने के लिए अपकिरण का अध्ययन किया जाता है। अपकिरण की उपेक्षा करने से समंकमाला की वास्तविक स्थिति का यथोचित विश्लेषण नहीं हो पाता। डैरेल हफ के शब्दों में 'एक अन्य प्रकार की छोटी संख्या होती है……जिसकी अनुपस्थिति (या उपेक्षा) हानिकर हो सकती है। यह वह संख्या है जो पदों का विस्तार या दिए हुए माध्य से उनका विचलन बतलाती है। बहुधा, माध्य द्वारा श्रेणी का इतना अधिक सरलीकरण होता है कि वह सर्वथा निरर्थक ही हो जाता है।'[3] अतः समंकमाला का यथेष्ट सांख्यिकीय विश्लेषण करने के लिए माध्यों के अतिरिक्त श्रेणी के विभिन्न मूल्यों का अन्तर या अपकिरण का ज्ञान प्राप्त करना नितान्त आवश्यक है।

[1] 'Caution, foresight and analysis are necessary at every step in the use of averages.' —Horace Secrist.

[2] 'We will ordinarily be nearly, or even fully, as much interested in measuring the scatter about the average, in order to know how representative the average is, of the individual cases.' —Wallis and Roberts, *Statistics—A New Approach*, p. 244.

[3] 'There is another kind of little figure..., one whose absence can be just as damaging. It is one that tells the range of things or their deviation from the average that is given. Often an average is such an oversimplification that it is worse than useless.' —Darrell Huff, *How to Lie with Statistics*, p. 42.

चक्रवृद्धि ब्याज सूत्र—

$P_N = P_0 (1+r)^N$ | $r = \sqrt[N]{\frac{P_N}{P_0}} - 1$

माध्यों का सम्बन्ध—

$(\bar{X}-Z) = 3(\bar{X}-M)$ | $\bar{X} \geqslant GM \geqslant HM$

प्रश्न

1 'केन्द्रीय प्रवृत्ति' से क्या अभिप्राय है ? इसके मापने की विभिन्न रीतियों का वर्णन कीजिए और प्रत्येक रीति की उपयोगिता पर प्रकाश डालिए।
What is meant by 'central tendency'? Describe the various methods of measuring it and point out the usefulness of each method.
[B. Com., Agra, 1962; Delhi, 1955; Raj., 1953]

2. केन्द्रीय प्रवृत्ति से आप क्या समझते हैं ? समान्तर माध्य में क्या-क्या गुण व अवगुण पाये जाते हैं ?
What do you understand by 'central tendency'? What are the merits and demerits of the arithmetic mean?
[B. Com., Agra, 1971]

3. 'सांख्यिकीय माध्य' से आप क्या समझते हैं ? एक माध्य में कौन-कौन से वांछनीय गुण होने चाहिएँ ? उन माध्यों में से किसमें ये गुण पाए जाते हैं ?
What is a 'statistical average'? What are the desirable properties for an average to possess? Which of the averages, possesses these properties?
[M. A., Agra, 1967; Vikram, 1961; B. Com., Agra, 1969; Delhi, 1959]

4. विभिन्न प्रकार के माध्यों का वर्णन कीजिए और उनके सापेक्ष लाभों तथा हानियों का विवेचन कीजिए।
Describe the various kinds of averages and discuss their relative advantages and disadvantages.
[B. Com., Meerut, 1972]

5. विभिन्न प्रकार के सांख्यिकीय माध्यों के सापेक्ष गुण-दोष क्या हैं ? स्पष्ट कीजिए।
What are the relative merits and demerits of various kinds of statistical averages? Elucidate.
[B. A. II, Raj., 1972; B. Com., Agra, 1970]

6. 'प्रत्येक माध्य की अपनी-अपनी विशेषताएँ होती हैं। यह कहना कठिन है कि कौन-सी माध्य सबसे उत्तम है।' सोदाहरण व्याख्या कीजिए।
'Every average has its own peculiar characteristics. It is difficult to say which average is the best.' Explain with examples.
[B. Com., Vikram, 1972]

7. माध्यों के नियम की व्याख्या कीजिए और सांख्यिकीय माध्य की गणना करने के उद्देश्य का वर्णन कीजिए। स्थिति माध्य एवं गणितीय माध्यों का अन्तर भी स्पष्ट रूप से समझाइए।
Explain the Law of Averages and describe the objects of computing statistical average. Also distinguish clearly between Averages of Position and Mathematical Averages.
[B. Com., Alld., 1957]

8. 'एक माध्य का उपयोग सदैव प्रयोगकर्त्ता के उद्देश्य का ही कार्य होता है। माध्यों के प्रयोग में प्रत्येक कदम पर सावधानी, दूरदर्शिता एवं विश्लेषण आवश्यक है।' (सिक्राइस्ट)
इस कथन की व्याख्या कीजिए और उन विशेष परिस्थितियों का उल्लेख कीजिए जिनमें एक विशेष प्रकार के माध्य का प्रयोग अधिक लाभदायक हो सकता है।
'The use of an average is invariably a function of the purpose one has in mind. Caution, foresight and analysis are necessary at every step in the use of averages.'
(Secrist)
Explain the above statement and mention in brief the particular circumstances in which a particular type of average may be most advantageously used.
[M. A. (Final), Agra, 1966]

What are the different measures of Central tendency? Discuss their relative utility.

(ii) यदि एक चर x के गैर-ऋणात्मक मूल्य $x_1, x_2 ...... x_n$ हों तो सिद्ध कीजिए—
If a variable x takes non-negative values $x_1, x_2 ...... x_n$ show that

$$HM. \leq GM. \leq AM.$$ [U. P. C. S., 1963]

(iii) यदि समंक श्रेणी के सभी पदों का मूल्य बराबर हों तो सिद्ध करो—
If the values of all the items are the same, prove—

$$\bar{X} = GM. = HM.$$ [B. Com., Agra, 1970]

18. निम्न पद-मूल्यों से (i) बहुलक (Mode) और (ii) मध्यका (Median) ज्ञात कीजिए—

33, 20, 35, 50, 37, 33, 35, 25, 35, 34 और 35

[$Z=35$, $M=35$]

19. निम्न श्रेणी का बहुलक (Mode) निकालिए—

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
4	40	10	57	15	57
5	48	11	55	16	63
6	52	12	50	17	52
7	57	13	52	18	48
8	60	14	41	19	40
9	63				

[समूहन द्वारा, $Z=9$] [M. A. (Final), Agra, 1966]

20. निम्न वंटन का बहुलक (Mode) ज्ञात कीजिए—

खेतों का केन्द्रीय आकार (एकड़ में) :	10	20	30	40	50	60	70
खेतों की संख्या :	7	12	17	29	31	5	3

[$Z=41.46$ एकड़]

21. निम्नांकित वितरण का भूयिष्ठक (Mode) निकालिए—

वर्ग	आवृत्ति	वर्ग	आवृत्ति
4–8	10	24–28	8
8–12	12	28–32	17
12–16	16	32–36	5
16–20	14	36–40	4
20–24	10		

[$Z=14.67$] [B. Com., Vikram, 1968]

22. गणित की एक परीक्षा में बैठने वाले 90 परीक्षार्थियों के बहुलक प्राप्तांक (modal marks) ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
परीक्षार्थियों की संख्या :	2	7	15	16	17	8	5	17	2	1

[$Z=35.3125$] [B. Com., Punjab, 1969]

23. निम्न सारणी में भारत इलेक्ट्रोनिक्स लि० के 65 कर्मचारियों की साप्ताहिक मजदूरी का आवृत्ति वंटन दिया हुआ है—

मजदूरी (रु०)	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100	100–110	110–120
कर्मचारियों की संख्या	8	10	16	14	10	5	2

बहुलक मजदूरी (modal wages) ज्ञात कीजिए।

[$Z=$Rs. 77·5] [B. Com., Allahabad, 1968]

24. निम्न आवृत्ति वंटन से बहुलक आय (modal earnings) निकालिए—

आय :	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89
श्रमिकों की संख्या :	10	14	16	14	11	13	17	13

[$Z=34.50$ रु०]

25. किसी कक्षा-परीक्षा में 15 विद्यार्थियो द्वारा प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं—(i) मध्यका (median), (ii) निम्नतर चतुर्थक (lower quartile), और (iii) उच्चतर चतुर्थक (upper quartile) ज्ञात कीजिए—

6, 9, 10, 12, 18, 19, 23, 23, 24, 28, 37, 48, 49, 53 and 60

[(i) $M=23$ (ii) $Q_1=12$, (iii) $Q_3=48$] *[B. Com., Raj., 1964]*

26. 1941 की जनगणना के अनुसार भारत के प्रथम 36 नगरों की जनसंख्या (हजारो मे) के समक निम्नांकित हैं—According to the 1941 census, the following are the population figures (in thousands) of the first 36 cities of India—

2488	522	387	437	260	213	213	131	153
1490	672	391	284	239	176	169	147	142
777	591	360	302	203	193	204	143	92
733	407	258	263	176	160	178	181	151

मध्यका और चतुर्थक निकालिए (Find the median and the quartiles) :

[$M=226$, $Q_1=170\ 75$, $Q_3=403$]

27. किसी वर्ष एक भण्डार पर बिकने वाले जूतों के आकार (नाप) निम्नलिखित हैं—Find the median and quartiles of the size of shoes sold at a store in a particular year—

Size	No. of Pairs	Size	No. of Pairs	Size	No. of Pairs	Size	No. of Pairs
4·5	1	6·5	15	8·5	82	10·5	15
5	2	7	30	9	75	11	4
5·5	4	7·5	60	9·5	44	11·5	3
6	5	8	95	10	25	12	1

जूतों के नापो के वितरण का मध्यका व चतुर्थक निकालिए।

Find the median and the quartiles of distribution of size of the shoes.

[$M=8.5$, $Q_1=7\ 5$, $Q_3=9$]

28. निम्न सारणी से मध्यका और बहुलक निकालिए—

From the following table, find the median and the mode—

No. of days (absent) ;	5	10	15	20	25	30	35	40	45
No. of students :	29	224	465	582	634	644	650	653	655

[$M=12·15$ days, $Z=11·3$ days] *[B. Com., Madras, 1970, Lucknow, 1968]*

29. निम्न सारणी से मध्यका तथा बहुलक निकालिए—

From the following table, find the median and the mode—

Income (Rs.) :	100—200	100—300	100—400	100—500	100—600
No. of Persons :	15	33	63	83	100

[$M=$Rs. 356 67, $Z=$Rs. 354·54] *[B. Com., Agra, 1975 ; M A, Agra, 1973]*

30. निम्नांकित सारणी से मध्यका एवं चतुर्थक ज्ञात कीजिए—

Find the median and quartiles from the following table—

Size :	11—15	16—20	21—25	26—30	31—35	36—40	41—45	46—50
Frequency :	7	10	13	26	35	22	11	5

[$M=31·71$, $Q_1=25·93$, $Q_3=36\ 81$] *[B. Com., Gorakhpur, 1970, Agra, 1968]*

31. निम्नांकित सारणी से मध्यका ज्ञात कीजिए—

From the following table find the median—

Marks :	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45
No. of Candidates :	7	10	16	32	24	18	10	5	1

[$M=19·95$] *[B. Com., Vikram, 1970, Nagpur, 1969]*

32. एक फर्म के कुल 2000 कर्मचारियो मे से 5% 2 00 रु० प्रति घण्टा से कमाते हैं, 480 कर्मचारी 2 00 रु० से 2 24 रु० प्रति घण्टा कमाते हैं; 35% 2 25 रु० से 2 49 रु० प्रति घण्टा तक; 370 कर्मचारी 2 50 रु० से 2 74 रु० तक, 12% 2·75 रु० से 2 99 रु० तक और शेष कर्मचारी 3 00 रु० प्रति घण्टा या इससे

[$M=$Rs. 2·395] *[B. Com., Punjab, 1967]*

33. 12 विद्यार्थियों ने सांख्यिकी के तीन प्रश्न-पत्रों में निम्न अंक प्राप्त किये। कारण सहित बतलाइए कि किस प्रश्न-पत्र मे विद्यार्थियों का बौद्धिक स्तर सर्वोत्तम है—
Twelve students obtained the following marks in three papers. State, with reasons, in which paper the level of intelligence is the highest—.

A—36, 56, 41, 46, 54, 59, 55, 51, 52, 44, 37, 59
B—58, 4, 21, 51, 59, 46, 65, 31, 68, 41, 70, 36
C—65, 55, 26, 40, 30, 74, 45, 29, 85 32, 80, 39

[(A) $M=51{\cdot}5$, (B) $M=52{\cdot}5$, (C) $M=42{\cdot}5$ marks.
प्रश्न-पत्र II मे स्तर सर्वोत्तम है]

34. निम्न वटन मे बहुलक, मध्यका व चतुर्थको के मान ज्ञात कीजिए—
Determine the mode, median and quartiles in the following distribution—

Class	Frequency	Class	Frequency	Class	Frequency
0—2	1	11—12	5	22—24	8
2—3	2	12—15	18	24—29	11
3—6	1	15—18	7	29—30	9
6—8	4	18—20	12	30—34	6
8—11	3	20—22	10	34—36	3

सकेत—पहले 6–6 के समान वर्गान्तरो मे वंटन को पुनर्गठित कीजिए।
Hint—First reorganise the distribution in equal intervals of a magnitude of 6.
[$Z=20$, $M=19{\cdot}8$, $Q_1=14{\cdot}16$, $Q_3=25{\cdot}2$]

35. नीचे एक फ़ैक्ट्री के पगारो की आवृत्ति दी हुई है—
The following is the wage-distribution in a factory—

Monthly wages (Rs):	50-80	80-100	100-110	110-120	120-130	130-150	150-180	180-200
No. of Workers :	50	127	140	240	176	135	20	3

(i) मध्यका द्वारा औसत पगार ज्ञात कीजिए।
Determine the average wage through median.

(ii) अगर कुछ धन इकट्ठा करना है और यह निश्चय किया गया हो कि वे मजदूर जो 120 रु० से कम पगार पा रहे हैं अपनी पगारो का 5% और जो 120 रु० या अधिक पगारें पा रहे हैं वे 10% अंशदान करेंगे तो बतलाइए कितना धन इकट्ठा हो जाएगा?
A fund is to be raised and it is decided that workers getting less than Rs. 120 should contribute 5% of their wages and that those getting more than Rs. 120, should contribute 10% of their wages. What sum will be collected?

[$M=$Rs. 115·77, Sum Collected=Rs. 7261]. [*B. Com , Agra, 1973, Bombay, 1961*]

36.

Weekly Wages ($):	25-	26-	27-	28-	29-	30-	31-	32-	33-	34-	35-36	Total
No. of Persons :	25	0	210	275	430	550	340	130	90	55	23	2200

(i) सर्वाधिक प्रचलित मजदूरी क्या है?
What is the most usual wage?

(ii) मध्यका पगार क्या है?
What is median wage?

(iii) मध्य के 50% श्रमिको की पगार सीमाएँ निर्धारित कीजिए।
Determine the wage limits of the middle 50% workers.

[(i) $Z=30{\cdot}36$, (ii) $M=30{\cdot}16$, (iii) $Q_1=28{\cdot}89$, $Q_3=31{\cdot}26$]
[मध्य के 50% की सीमाएँ Q_1 व Q_3 हैं]

37. सांख्यिकी की किसी परीक्षा मे बैठने वाले कुछ परीक्षार्थियो के निम्न प्राप्तांक हैं—
The marks obtained by some students in Statistics in a particular examination are as under—

14, 22, 25, 15, 11, 33, 28, 26, 22
30, 13, 16, 27, 32, 19, 12, 21, 18
16, 10, 31, 29, 23, 24, 17, 23, 20

(क) प्रत्यक्ष रूप से मध्यका अंक निकालिए और (ख) अंको को 10–15, 15–20 आदि वर्गों मे बाँटकर मध्यका ज्ञात कीजिए। दोनो मानो मे आने वाले अन्तर का कारण स्पष्ट कीजिए।
(*a*) Obtain median marks directly, and (*b*) by grouping the marks in classes 10-15, 15-20 etc. Explain the reason for the difference.

[(a) $M=22$ marks, (b) $M=21{\cdot}8$ marks]

38. निम्न वर्णित अपूर्ण बटन में अज्ञात आवृत्तियों के मान निकालिए—
Locate the missing frequencies in the following incomplete distribution—

Class-interval :	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
Frequency :	3	?	20	12	?

मध्यका और बहुलक के मूल्य क्रमश: 27 और 26 हैं।
Median and mode are 27 and 26 respectively.

संकेत—पहले बहुलक सूत्र का प्रयोग करके f_0 ज्ञात कीजिए; तत्पश्चात् मध्यका सूत्र की सहायता से $N/2$ निकालिए। [8 और 7]

Hint—First determine f_0 by applying the formula for mode. Then find $N/2$ with the help of median formula.

39. एक विशेष प्रकार की वस्तुओं को उनके भार के अनुसार वर्गीकृत किया गया। दो सप्ताह तक सुखाने के पश्चात् उन वस्तुओं को पुन. तोला गया और उसी प्रकार वर्गीकृत किया गया। प्रथम तौल का मध्यका भार 20·83 औंस तथा द्वितीय तौल का मध्यका भार 17·35 औंस आया। प्रथम तौल में a और b आवृत्तियाँ तथा द्वितीय तौल में x और y आवृत्तियाँ नहीं दी गई हैं परन्तु यह पता है कि $a=\frac{1}{3}x$ तथा $b=\frac{1}{2}y$, अत नहीं दी हुई आवृत्तियों का मूल्य बताइए—
A number of particular articles has been classified according to their weights. After drying for two weeks the same articles have again been weighed and similarly classified. It is known that the median weight in the first weighment was 20.83 oz. while in the second weighment it was 17.35 oz. Some frequencies a and b in the first weighment and x and y in the second weighment are missing. It is known that $a=\frac{1}{3}x$ and $b=\frac{1}{2}y$. Find out the values of missing frequencies.

Class (oz.)	Frequencies: First Weighment	Second Weighment
0—5	a	x
5—	b	y
10—	11	40
15—	52	50
20—	75	30
25—	22	28

संकेत—x व y के स्थान पर क्रमश. $3a$ व $2b$ रखकर, दोनों आवृत्तिमालाओं को संचयी बना लीजिए। फिर प्रथम तौल में मध्यका-सूत्र प्रयोग करके, प्रथम समीकरण $a+b=9$ प्राप्त कीजिए। इसी प्रकार दूसरी तौल की आवृत्तियों के आधार पर मध्यका-सूत्र प्रयोग करके दूसरा समीकरण $3a+2b=21$ ज्ञात कीजिए। फिर इन दोनों युगपत् समीकरणों को हल करके a व b के मान निकाल लीजिए। दूसरा समीकरण दूसरी तौल में मध्यका-सूत्र का प्रयोग किए बिना भी उपलब्ध किया जा सकता है। प्रथम तौल की आवृत्तियों का योग $160+a+b$ और दूसरी तौल की आवृत्तियों का योग $148+3a+2b$ समान है क्योंकि दोनों तौलों में वस्तुएँ वही हैं। अत. दूसरा समीकरण $2a+b=12$ भी लिया जा सकता है।

[$a=3$, $b=6$; $x=9$, $y=12$]

गणितीय माध्य—समान्तर माध्य (Mathematical Average—Arithmetic Mean)

40. निम्न समंकों के समान्तर माध्य, मध्यका और बहुलक ज्ञात कीजिए—
Determine the arithmetic mean, median and mode from the following data—

S. No. :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Marks :	17	32	35	33	15	21	41	32	11	18	20	22	11	15	35	23	38	12

[$\bar{x}=23{\cdot}94$, $M=21{\cdot}5$, $Z=3M-2\bar{x}=16{\cdot}62$] [*B. Com., Agra, 1974, 1969, Vikram, 1969*]

41. किसी कक्षा के 25 विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्न वर्णित हैं। इन अंकों से (क) मध्यका, (ख) बहुलक, तथा (ग) समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—
From the following marks obtained by 25 students find (*a*) median, (*b*) mode, and (*c*) arithmetic mean—

Roll No.	Marks	Roll No.	Marks	Roll No.	Marks
1	43	10	67	19	50
2	45	11	57	20	50
3	63	12	64	21	42
4	34	13	40	22	59
5	56	14	50	23	36
6	37	15	35	24	50
7	50	16	62	25	58
8	60	17	44		
9	66	18	32		

[$M=50$, $Z=50$, $\bar{X}=50$] *[B. Com., Raj. 1973]*

42. निम्न खण्डित श्रेणी मे (i) 15 को शून्य (कल्पित माध्य) मानकर समान्तर माध्य निकालिए और (ii) प्रत्यक्ष रीति द्वारा परिणाम की जाँच कीजिए।
In the following discrete series determine the arithmetic mean (i) by assuming *15 as* zero, and (ii) verify the result by direct method.

Size :	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
Frequency :	1	2	4	8	11	10	7	4	2	1

[$\bar{X}=15{\cdot}54$]

43. निम्नलिखित सारणी से एक विद्यार्थी के औसत अंक निकालिए—
Determine the mean marks from the following table—

Marks (less than) :	10	20	30	40	50	60	70	80
No. of Students :	25	40	60	75	95	125	190	240

[$\bar{X}=49{\cdot}58$] *[B. Com., Vikram, 1972]*

44. निम्न सारणी में 1929 मे अमरीका मे विभिन्न आय-वर्गानुसार व्यक्तियो का वितरण दिया है—
The following is the distribution of persons in USA according to various *income*-groups—

Income (000 dollars) :	0-1	1-2	2-3	3-5	5-10	10-25	25-50	50-100	100-1000
No. of Persons (lakhs) :	13	90	81	117	66	27	6	2	2

औसत प्रति व्यक्ति आय परिगणित कीजिए।
Calculate the average income per head.
[8·06 हजार डालर]

45. निम्न श्रेणी से समान्तर माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए तथा अन्तर का कारण बताइए—
Calculate the arithmetic mean and mode and state the reason for the difference—

Size :	6—10	11—15	16—20	21—25	26—30
Frequency :	20	30	50	40	10

[$\bar{X}=17{\cdot}67$, $Z=18{\cdot}8$] *[B. Com., Kanpur, 1970, Lucknow, 1964, Banaras, 1958]*

46. एक परीक्षा में प्रत्याशियों द्वारा प्राप्त अंक निम्न सारणी में दिए हैं। उनसे समान्तर माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए—
The marks obtained by candidates in a particular examination are given below. Obtain the arithmetic mean and mode.

Marks	No. of Candidates	Marks	No. of Candidates
17·5—22·5	2	47·5—52·5	213
22·5—27·5	8	52·5—57·5	145
27·5—32·5	33	57·5—62·5	67
32·5—37·5	80	62·5—67·5	35
37·5—42·5	170	67·5—72·5	4
42·5—47·5	243		

आकलन रीति द्वारा भी माध्य निकालिए—
Also calculate mean by summation method.
[$\bar{X}=46{\cdot}965$, $Z=46{\cdot}04$]

47. निम्न सारणी से माध्य और मध्यका परिकलित कीजिए—
Calculate the mean and median from the following table—

गेहूँ की उपज पर फसल-कटाई प्रयोग के समंक
(Crop-Cutting Experiment Data on Plot Yields of Wheat)

Yield in lbs.		No. of Plots	Yield in lbs.		No. of Plots
more than	0	216	more than	300	31
,,	60	210	,,	360	13
,,	120	156	,,	420	7
,,	180	98	,,	480	2
,,	240	57			

[Class : 0—60, ... 480—540. $\bar{x}$=189·4 lbs.,
Frequency : 6, 54, 58, 41, 26, 18, 6, 5, 2. M=169 7 lbs.]

48. निम्नलिखित आंकड़ों से समान्तर मध्यक और मध्यका ज्ञात कीजिए—
Calculate arithmetic mean and median from the following data—

Marks (less than) :	80	70	60	50	40	30	20	10
No. of Students :	100	90	80	60	32	20	13	5

[$\bar{x}$=45, M=46 43] [*B. Com., Meerut, 1976, 1970, Jiwaji, 1969*]

49. निम्न सारणी द्वारा समान्तर माध्य तथा भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए—
Calculate the arithmetic mean and mode from the following table—

Marks (less than) :	80	70	60	50	40	30	20	10
No. of Studends :	50	45	40	30	16	10	7	3

[$\bar{x}$=44·8, Z=46·67] [*B. Com., Kanpur, 1971*]

50. निम्न सारणी से माध्य, मध्यका एव भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए—
From the following data calculate the arithmetic mean, median and mode—

Value (Rs) :	10—20	10—30	10—40	10—50	10—60	10—70	10—80	10—90
Frequency :	4	16	56	97	124	137	146	150

[$\bar{x}$=46·33, M=44 63. Z=40 67] [*B. Com., Vikram, 1971*]

51. निम्न श्रेणी से समान्तर माध्य और मध्यका परिकलित कीजिए—
From the following series calculate the arithmetic mean, and median—

Size :	0	1	2	3	4—6	7—9	10—14	15—19	20—24	25—34	35—44
Frequency :	15	25	30	26	30	52	39	24	11	10	5

[$\bar{x}$=8·76, M=6 93]

52. (i) निम्न आंकड़ों से माध्य, मध्यका व बहुलक परिगणित कीजिए—
Calculate mean, median and mode from the following data—

Marks :	30·5—39 5	40·5—49 5	50·5—59·5	60·5—69·5	70·5—79·5	80·5—89 5
Frequency :	5	22	63	74	30	6

(ii) कारण सहित बताइए कि वटन मे चरम अंकों की उपस्थिति का (i) सर्वाधिक और (ii) सबसे कम उक्त तीनो में से किस माप पर प्रभाव पड़ता है ?
Which of the three measures would be (i) most and (ii) least strongly affected by the occurrence of extreme marks in the distribution ?. Give reason.

(iii) यदि 20 चाय का स्वाद चखने वालो से एक विशिष्ट प्रकार की चाय को 1 (उच्चतम किस्म) से 5 (निम्नतम किस्म) तक कोटि-अंक प्रदान करने के लिए कहा जाये तो आप कौन-सा केन्द्रीय माप प्रयोग करेंगे और क्यो ?
Which measure of central tendency would you use in a case where twenty tea-tasters are asked to assign a rank from 1 (highest quality) to 5 (lowest quality) to a particular preparation of tea ? And why ? [*M. A , I Sem., Meerut, 1968*]

[$\bar{x}$=61 marks, M=61·35 marks, Z=62 marks]

53. निम्न सारणी मे किसी कारखाने के कर्मचारियो की दो वर्षों की आय दी गई है। सर्वोच्च 25% आय कमाने वाले प्रत्येक कर्मचारियो को 2% राष्ट्रीय सुरक्षा कोष मे अशदान देना है। 1972 में 1971 की तुलना में अशदान मे कितनी वृद्धि हुई ?
The table below gives the income of the employees in a big factory for two years. Every employee belonging to the top 25 per cent of the earners is required to pay 2 per cent for the National Defence Fund. Find the increase in contributions to this Fund from 1971 to 1972.

Monthly Income (Rs)	No. of Workers 1971	1972
less than 100	120	190
100—200	140	160
200—300	115	155
300—400	75	95
400—500	66	71
500—600	42	64
600—700	30	35
700—800	12	30
	600	800

संकेत—सर्वोच्च 25% आय कमाने वाले (150 और 200) 400 से 800 रु० वाले आय-वर्गों में हैं। उनकी कुल मासिक आय प्राप्त करके 12 से गुणा कर दिया जायेगा। इस वार्षिक आय पर 2% अंशदान निकाला जायेगा।

[1972 में वृद्धि = 7464 रु०]

54. एक फर्म के 30 कर्मचारियों का मासिक वेतन निम्न प्रकार है—

The following are the monthly salaries (in Rs.) of 30 employees of a firm—

140	139	126	114	100	88	62	77	99	103
108	129	144	148	134	63	69	148	132	118
142	116	123	104	95	80	85	106	123	133

निम्न वेतन-वर्गों के कर्मचारियों को फर्म ने क्रमश 10, 15, 20, 25, 30 और 35 रु० का अधिलाभांश प्रदान किया। 60 से अधिक किन्तु 75 रु० से अधिक नहीं, 75–90 और इस प्रकार 136–150 तक। प्रति कर्मचारी औसत अधिलाभांश निकालिए।

The firm gave bonus of Rs. 10, 15, 20, 25, 30 and 35 for individuals in the respective groups—Exceeding Rs. 60 but not exceeding Rs. 75, exceeding 75 but not exceeding 90 and so on upto 136–150. Find the bonus paid per employee.

[Average Bonus = Rs 24.50]　　　　[*B Com., Meerut, 1968; B. Com., Jiwaji, 1965*]

55. एक कम्पनी ने अपने कर्मचारियों को निम्न रूप में बोनस दिया—

A Company gives bonus to its employees on the following basis—

Monthly Salary (Rs.):	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200	200–220	220 and above
Bonus (Rs.):	500	600	700	800	900	1000	1100

कर्मचारियों के वास्तविक वेतन निम्न प्रकार थे—

Actual salary of the employees was as given below—

200	160	195	218	187	160	250	168	190
168	170	178	175	140	120	148	165	155
145	125	110	162	13	150	184		

बतलाइए (अ) कुल बोनस कितना दिया गया ? (ब) प्रति कर्मचारी कितना बोनस दिया गया ?

Find out—(*a*) the total bonus paid, (*b*) the average bonus paid per employee.

[(*a*) Rs. 19,800 ; (*b*) Rs. 792]　　　　[*B. Com., Agra, 1971*]

56. निम्न सूचना के आधार पर, श्रमिकों की औसत मजदूरी ज्ञात कीजिए—

The following information relates to wage-groups of workers in a factory, their total working hours and the average working hours per worker. Calculate the wage per worker—

Wages (Rs):	35—45	45—55	55—65	65—75	75—85
Total Hours:	88	185	273	162	70
Average Hours per worker:	8	7.4	7	9	10

[Rs. 58·50]

57. निम्न समंकों से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

Calculate arithmetic mean from the following data—

Temperature (°C):	—40 to —30	—30 to —20	—20 to —10	—10 to 0	0—10	10—20	20—30
No. of Days:	10	28	30	42	65	180	10

[4.29°C]　　　　[*C. A., May 1966*]

58. निम्नांकित समंकों के समान्तर माध्य और मध्यका ज्ञात कीजिए और माध्यों के पारस्परिक सम्बन्ध के आधार पर बहुलक का अनुमान निकालिए—

From the following data calculate the arithmetic mean and median and on the basis of empirical relationship between averages, estimate the modal value—

Marks	No. of Students
Less than 5	7
Less than 10	20
5—15	38
15 and above	55
20—25	20
25 and above	5
30 and above	1

[$\bar{x}$=15·45, M=15 83, Z=16 60]

भारित माध्य तथा प्रमापित दरें (Weighted average and Standardised rates)—

59. वर्ष के प्रथम छः महीनों में किसी उद्योग द्वारा खरीदे गये कोयले की प्रति टन सरल और भारित माध्य कीमत निकालिए। दोनो मे अन्तर का कारण भी स्पष्ट कीजिए—

Calculate the simple and weighted average price per tonne of coal purchased by an industrial undertaking during the first six months of a year. Also account for the difference between the two—

Month	Jan.	Feb.	March	Apr.	May	June
Price per tonne (Rs.) :	42 50	51·25	50 00	52·00	44 25	54·00
Purchase-quantity (Tonnes) :	25	30	40	50	10	45

[$\bar{X}$=Rs. 49 ; $\bar{X}_w$=Rs. 50.36] *[C. A., Nov., 1966]*

60. एक काल्पनिक उदाहरण लेकर उन स्थितियो को दर्शाइये जिनके अन्तर्गत—

Taking an imaginary example, show the conditions under which—

(i) $\bar{X}=\bar{X}_w$, (ii) $\bar{X}>\bar{X}_w$ and (iii) $\bar{X}<\bar{X}_w$

61. (i) एक प्रत्याशी की तीन विषयों—A, B और C मे 25-25 पूर्णांको की मौखिक और 75-75 अंकों की लिखित परीक्षाएँ ली गयी। तीनो विषयो मे उसने मौखिक परीक्षाओ मे क्रमशः 15, 11 व 9 और लिखित परीक्षाओ मे क्रमशः 55, 32 और 28 अंक प्राप्त किए। मौखिक परीक्षाओ मे प्राप्त अंकों को क्रमानुसार तीनो विषयो के भार मानकर लिखित परीक्षा के प्राप्तांको का भारित माध्य ज्ञात कीजिए।

A candidate was examined in three subjects—A, B and C in which oral and written test carried respectively 25 and 75 as maximum marks In the three subjects, he secured 15, 11 and 9 in oral tests and 55, 32 and 28 in written tests. Taking marks secured in oral examination as weights, determine the weighted average of marks obtained in written examination. *[B. Com., Bombay, 1965]*

(ii) निम्नलिखित समूह-सूचकाको के आधार पर उपभोक्ता मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिए—
(क) भारित समान्तर माध्य, (ख) भारित गुणोत्तर माध्य और (ग) भारित हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हुए—

Obtain Consumer Price Index Numbers from the following group indices, using (*a*) weighted arithmetic mean, (*b*) weighted geometric mean, (*c*) weighted harmonic mean—

Group	Food	Fuel and Light	Cloth	Rent	Misc.
Index No. :	352	220	230	160	190
Weight :	48	10	8	12	15

[(i) $\bar{X}_w$=40 83, (ii) $\bar{X}_w$=276·3, *WGM*=263·8, *WHM*=251]

62. एक छात्रवृत्ति के सम्बन्ध मे निर्णय करने के लिए एक परीक्षा ली गई। विभिन्न विषयो के भिन्न-भिन्न भार रखे गए। तीन प्रत्याशियो द्वारा प्राप्त अंक निम्न वर्णित हैं—

A test was held to decide about the award of a scholarship. Different weights were assigned to various subjects. Marks obtained by three candidates are as follows—

Subject	Weight	Marks Obtained A	B	C
Statistics :	4	63	60	65
Mathematics :	3	65	64	70
Economics :	2	58	56	63
Hindi :	1	70	80	52

यदि सर्वोच्च अंक प्राप्त करने वाले को छात्रवृत्ति दी जाए तो बतलाइए वह किसको मिलनी चाहिए

If the candidate securing the highest aggregate marks is awarded the state who gets it.

[A=63 3 ; B=62·4 ; C=64 8 ; C should get] *[I. C.*

63. निम्न आंकड़ों से यह निर्णय कीजिए कि A और B में कौन-सा नगर अधिक स्वस्थ है और क्यों ?
From the following data, determine which of the two towns, A and B, is more healthy and why—

Age	A (Standard)		B (Local)	
	Population	Deaths	Population	Deaths
0—5	8,000	185	2,500	65
5—40	25,000	125	13,000	78
40—75	60,000	420	31,500	252
Above 75	7,000	480	3,000	210
Total	1,00,000	1,210	50,000	605

[G. D. R. : A=12·1‰, B=12·1‰, S. D. R. of B=13·28‰ A is more healthy]

64. निम्न आंकड़ों से सामान्य और प्रमापित मृत्यु-दरों का परिकलन कीजिए—
From the following figures, compute crude and standardised death rates—

Age Group	Population	D R. ‰	Standard Age-Distribution
0—10	400	40	600
10—20	1500	4	1000
20—60	2400	10	3000
Above 60	700	30	400

[C.D.R.=13·4‰ ; S D.R.=14‰] [*B. Com., Bombay, 1969*]

65. निम्न आंकड़ों से यह बताइए कि कौन-सा नगर अधिक स्वस्थ है—
From the following figures, determine which town is more healthy—

Age-Group	Town A		Town B	
	Population (000)	Death Rate	Population (000)	Death Rate
0—10	13	110	10	100
10—20	35	30	35	25
20—40	55	20	65	15
Above 40	10	30	12	20

[G.D R.—A=34·34 ; B=25·33 ; S D R. of B=28·32‰ ; B is more healthy]

66. A व B दो कालिजों के निम्नलिखित परीक्षा-फलों के आधार पर यह निश्चित कीजिए कि कौन-सा कालिज उत्तम है—
On the basis of the following examination-results of two colleges—A and B, determine which college is better—

Examination	A		B	
	Appeared	Passed	Appeared	Passed
M. A.	100	90	240	200
M. Sc.	60	45	200	160
B. A.	120	75	160	100
B. Sc.	200	150	200	140
Total	480	360	800	600

[General Pass Percentage—A=75%, B=75% ; [*B Com , Agra, 1965*]
Standardised Pass Percentage—B=72·2%, A is better]

गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य (Geometric Mean and Harmonic Mean)—

67. निम्न श्रेणी से गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए—
Calculate the Geometric Mean and Harmonic Mean from the following series -

(i)	(ii)
2574	·8974
·475	·0570
75	·0081
5	·5677
·8	·0002
·08	·0984
·005	·0854
·0009	·5672

[(i) *GM.*=1 841, *HM.*=·00604, (ii) *GM.*=·06223, *HM.*=·0015]

68. निम्नलिखित आँकड़ो द्वारा गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य निकालिए—
From the following data, compute the geometric mean and the harmonic mean—

15	250	15·7	157	1 57
105·7	10·5	1·06	25·7	0·257

[*GM.*=12·75 ; *HM.*=1,737] [*B. Com., Meerut, 1972*]

69. गुणोत्तर माध्य निकालिए (Calculate Geometric Mean)—

6 5, 169·0, 11 0, 112·5, 14·2, 75·5, 35·5, 215·0

[42·74] [*B. Com., Agra, 1966*]

70. 8 परिवारों की मासिक आय निम्न प्रकार है—
The monthly income of 8 families is given below—

Family :	A	B	C	D	E	F	G	H
Income (Rs) :	70	10	500	75	8	250	8	42

मध्यक, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए और यह सिद्ध कीजिए कि $\bar{X} > GM. > HM.$
Find arithmetic, geometric and harmonic means and prove that $\bar{x} > GM. > HM.$
[$\bar{x}$=120·375 ; *GM.*=45 27 ; *HM* =Rs. 19 65] [*B. Com , Saugar, 1965*]

71. निम्नलिखित आँकड़ो का ज्योमेतिक माध्य ज्ञात कीजिए—
Find the geometric mean of the following figures—

Rs. 2000 ;	1500 ;	1200 ;	450 ;	400 ;	300 ;	250 ;
150 ;	90 ;	60 ;	40 ;	35 ;	30 ;	25 ;
20 ;	15 ;	12 ;	10 ;	8 ;	and	6 .

हरात्मक माध्य भी ज्ञात कीजिए; तथा ज्योमेतिक माध्य तथा हरात्मक माध्य के परस्पर सम्बन्ध पर टिप्पणी कीजिए।
Also compute the harmonic mean and comment upon the relationship between geometric and harmonic means.
[*GM*=Rs. 78·12 ; *HM*=Rs. 26·07] [*B. Com., Allahabad, 1973*]

72. निम्नलिखित श्रेणी मे एक प्रतिदर्श अनुसन्धान के पेचों के व्यास दिए हुए हैं। माध्य व्यास की गणना गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करते हुए कीजिए—
The following table gives the diameters of screws obtained in a sample inquiry. Calculate the mean diameter using geometric average.

Diameter (m m) :	130	135	140	145	146	148	149	150	157
No. of Screws :	3	4	6	6	3	5	2	1	1

[*GM*=142 5 m.m] [*B. Com., Allahabad, 1969, 1967*]

73. दो सरल अंको 2 और 8 की सहायता से समान्तर, गुणोत्तर और हरात्मक माध्यों के पारस्परिक सम्बन्ध को उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।
Explain, with example, the relationship between arithmetic, geometric and harmonic means with the help of two numbers 2 and 8.
[$\bar{x}=5$; $GM=4$; $HM=3{\cdot}2$; $\bar{x} > G > H$; $\bar{x} \times H = G^2$] [*B. Com., Allahabad, 1964*]

व्यावसायिक माध्य (Business Averages)—

74. एक बड़ी फर्म की निम्नलिखित वार्षिक बिक्री से त्रिवर्षीय चल माध्य और प्रगामी माध्य निकालिए—
From the following figures of annual turnover of a big firm, calculate the three-yearly moving averages and progressive averages.

Year :	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972
Sales (Lakh Rs) :	50	52	57	54	56	[redacted]	51	60	63	70

[Moving averages : 53, 54·3, 55·7, 55, 54, 55·3, 58, 64·3
Progressive averages : 50, 51, 53, 53·3, 53·8, 54, 53 6, 54·4, 55·3, 56·8]

विविध प्रश्न (Miscellaneous Problems)—

75. बच्चों के एक क्लब के सदस्यों का आयु-वंटन निम्न प्रकार है—
The age-distribution of the members of a certain Children's Club is as follows—

Age last birthday (years) :	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frequency :	5	9	18	35	42	32	15	7	3

क्लब में एक सदस्य A ऐसा है कि उससे जितने सदस्य आयु में छोटे हैं उसके दो गुने सदस्य उससे आयु में बड़े हैं। A की आयु दो दशमलव अंकों तक (वर्षों में) ज्ञात कीजिए।
There is a member A such that there are twice as many members older than A as there are members younger than A. Estimate his age in years upto two decimal places.

संकेत—(i) क्योंकि पिछले जन्म दिन पर आयु दी हुई है अतः 4–5, 5–6,...12–13 आयु वर्ग बनेंगे।
(ii) 166 बच्चे हैं A 56 वाँ सदस्य है। आयु 7 69 वर्ष है।

76. बनारस के साड़ी बुनकरों के एक निश्चित वर्ग के लिए मध्यका और चतुर्थक आय क्रमशः 44·3 रु०, 43 रु० और 45 9 रु० प्रति सप्ताह है। मजदूरी का वर्ग-विस्तार 40 और 50 रु० के बीच है। वर्ग के 10% बुनकर 42 रु० से कम कमाते हैं, 13% 47 रु० और उससे अधिक और 6% 48 रु० और अधिक कमाते हैं। इन तथ्यों को एक आवृत्ति बंटन के रूप में प्रस्तुत कीजिए और माध्य मजदूरी ज्ञात कीजिए।
For a certain group of 'saree' weavers of Banaras, the median and quartile earnings per week are Rs. 44.3 Rs. 43 0 and Rs. 45.9 respectively The earnings for the group range between Rs. 40 and 50. Ten per cent of the group earn under Rs. 42 per week, 13 per cent Rs. 47 and over and 6 per cent Rs. 48 and over. Put this data into the form of a frequency distribution and obtain an estimate of the mean wage.

[Wages (Rs.).:	40-42,	42–,	43–,	44·3–,	45 9–,	47–,	48–50	
Frequency :	10	15	25	25	12	7	6	$\bar{X}$=Rs. 44·5]

77. (i) रविवार को छोड़कर सप्ताह के शेष दिनों के लिए औसत वर्षा 0·50 इन्च थी। रविवार को तेज वर्षा होने के कारण पूरे सप्ताह के लिए औसत वर्षा बढ़कर 1·50 इन्च हो गई। बताइए रविवार को कितनी वर्षा हुई?
The average rainfall for a week, excluding Sunday; was 0·50 inch. Due to heavy rainfall on Sunday the average for the week rose to 1 5 inches. How much rainfall was there on Sunday? *[B. Com., Meerut, 1969, Delhi, 1968]*

(ii) एक रेलगाड़ी 25 मील 30 मील प्रति घण्टा की गति से, अगले 50 मील 40 मील प्रति घण्टा से, इसके बाद पटरी में मरम्मत कार्य होने के कारण 6 मिनट के लिए 10 मील प्रति घण्टा से और शेष 24 मील का फासला 24 मील प्रति घण्टा की गति से तय करती है। मील प्रति घण्टा में औसत रफ्तार क्या है?
A train runs 25 k
of 40 km. p.h.,
of 10 km. p.h. a
of 24 km. p.h.
[B. Com , Delhi, 1969]

(iii) 5 वर्षों में एक कारखाने के उत्पादन में वृद्धि की वार्षिक दरें क्रमशः 5 0, 7 5, 2·5, 5 0 और 10 0 प्रतिशत रहीं। पूरी अवधि के लिए वार्षिक उत्पादन-वृद्धि की चक्रवृद्धि दर क्या है?
The annual rates of growth of output of a factory for 5 years are 5 0, 7.5, 2.5, 5 0 and 10 0 per cent respectively. What is the compound rate of growth of output per annum for the period? *[B. Com., Delhi, 1968]*

[(i) 7·5" ; (ii) 31 414 M.P.H. ; Average Spead $=\frac{100}{191}\times 60$; (iii) 5·9%]

78. (i) यदि एक वस्तु की कीमत 4 वर्षों में दो गुनी हो जाती है तो वार्षिक वृद्धि की औसत प्रतिशत दर क्या होगी?
If the price of a commodity doubles in 4 years, what will be the average percentage rate of increase per year? *[B. Com , Lucknow, 1968]*

(ii) एक विनियोक्ता प्रति माह किसी कम्पनी के 1200 रु० के अंश खरीदता है। पहले पाँच महीनों में उसने कम्पनी के अंश क्रमशः 10 रु०, 12 रु०, 15 रु०, 20 रु० और 24 रु० प्रति अंश के हिसाब से खरीदे। 5 महीने बाद उसके द्वारा खरीदे गए अंशों की औसत कीमत क्या थी?
An investor buys Rs 1200 worth of shares in a company each month. During the first five months he bought the shares at a price of Rs. 10, Rs. 12, Rs 15, Rs. 20 and Rs. 24 per share. After 5 months what is the average price paid for the shares by him. *[B. Com., Delhi, 1971]*

(iii) किसी देश की जनसंख्या 1951 में 30 करोड़ थी जो 1969 में बढ़कर 52 करोड़ हो गई। वार्षिक वृद्धि की प्रतिशत चक्रवृद्धि दर ज्ञात कीजिए।
The population of a country which was 30 crores in 1951 increased to 52 crores in 1969. Find the percentage compound rate of annual increase.

[(i) 19% ; (ii) Rs. 14·63 ; (iii) 3·1%] [M. Com., Delhi, 1970]

79. (i) एक व्यक्ति लखनऊ से दिल्ली 30 मील प्रति घण्टा की गति से यात्रा करता है और उसी रास्ते से 60 मील प्रति घण्टा की गति से वापस होता है। पूरी यात्रा के लिए औसत रफ्तार बताइए।
A man travels from Lucknow to Delhi at a speed of 30 miles per hour and returns by the same route at 60 m. p.h. Find the average speed for the whole journey.

(ii) तीसरी योजना के प्रथम चार वर्षों में भारत की राष्ट्रीय आय में 2·6, 1·9, 5·0 और 7·7 प्रतिशत की वृद्धि हुई। इस अवधि में राष्ट्रीय आय की वृद्धि की औसत दर क्या थी?
During the first four years of the third plan the national income of India increased by 2·6, 1·9, 5·0 and 7·7%. What was the average rate of annual increase in the national income during this period?

[(i) 40 Miles per hour ; (ii) 4·2%] [M. A., Meerut, 1965]

80. (i) एक रेलगाड़ी पहले 16 मील, 20 मील प्रति घण्टा के हिसाब से, दूसरे 20 मील, 40 मील प्रति घण्टा के हिसाब से और अन्तिम 10 मील, 15 मील प्रति घण्टा के हिसाब से तय करती है। पूरी यात्रा की माध्य गति क्या है?
A train goes at a speed of 20 miles per hour for the first 16 miles, at a speed of 40 m. p.h. for 20 miles. It covers the last 10 miles at a speed of 15 m. p.h. Find out its average speed.

(ii) एक नगर में जनसंख्या में वृद्धि पहले दशक में 20% है, दूसरे में 30% और तीसरे में 45% है तो उस नगर की जनसंख्या में वृद्धि की माध्य दर निकालिये।
Find the average rate of increase in population which in the first decade has increased 20%, in the next, 30% and in the third 45%.

[(i) 23·4 Miles per hour ; (ii) 31·3%] [B. Com., Agra, 1969]

81. (i) एक वायुयान एक वर्ग की चारों भुजाओं पर क्रमशः 100, 200, 300 और 400 मील प्रति घण्टा की गति से उड़ता है। पूरे वर्ग पर उसकी उड़ान की औसत गति क्या है?
An aeroplane flies along the four sides of a square at speeds of 100, 200, 300 and 400 miles per hour respectively. What is the average speed of the plane in its flight around the square? [B. A., Hon., Delhi, 1969; B. Com., Poona, 1969]

(ii) एक कम्पनी के सभी कर्मचारियों का औसत वार्षिक वेतन 5000 रु० था। पुरुष और स्त्री कर्मचारियों का औसत वार्षिक वेतन क्रमशः 5200 रु० और 4200 रु० था। कम्पनी के कर्मचारियों में पुरुषों और स्त्रियों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
The mean annual salary paid to all employees of a company was Rs. 5,000. The mean annual salaries paid to male and female employees were Rs. 5200 and Rs. 4200 respectively. Determine the percentage of males and females employed by the company. [B. A., Hon., Delhi, 1966]

(iii) किसी वस्तु की कीमत पिछले माह की तुलना में मई 1977 में 9%, जून में 12% और जुलाई 1977 में 16% बढ़ गई। औसत प्रतिशत वृद्धि दर ज्ञात कीजिए और अपने उत्तर की जाँच कीजिए।
The price of an article increased over the preceding month by 9% in May 1977, 12% in June and 16% in July 1977. Find the average percentage rate of increase and verify your result.

[(i) 192 m p.h. ; (ii) Male 80%, Female 20% ; (iii) 12·3%]

82. (i) 25 विद्यार्थियों का औसत वजन 78·4 पौंड था। बाद में यह पता चला कि एक विद्यार्थी का वजन 96 पौंड के स्थान पर गलती से 69 पौंड लिखा गया। ठीक औसत ज्ञात कीजिए।
The average weight of a group of 25 boys was calculated to be 78·4 lbs. It was later discovered that one weight was misread as 69 lbs. instead of the correct value 96 lbs. Calculate the correct average. [B. Com., Poona, 1967]

(ii) एक थोड़े असममित बंटन में समान्तर माध्य 24·6 और बहुलक 26·1 है। मध्यका ज्ञात कीजिए।
In a moderately skewed distribution, arithmetic mean is 24·6 and the m
26·1. Find the value of the median. [C. A., Nov.

(iii) निम्न वंटन से अज्ञात आवृत्ति ज्ञात कीजिए—
Find the missing frequency in the following series—

Class :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
Frequency :	5	?	15	16	6

समान्तर माध्य 27 है।
The arithmetic mean is 27.

[(i) 79 48 Pounds ; (ii) $M=25{\cdot}1$; (iii) 8]

83. (i) आप एक यात्रा पर जा रहे हैं जिसमे 900 मील रेलगाड़ी से जाना है जिसकी गति 60 मील प्रति घण्टा है, 3000 मील नाव से जाना है जिसकी गति 25 मील प्रति घण्टा है, 400 मील हवाई जहाज से जाना है जिसकी गति 350 मील प्रति घण्टा है और अन्त में 15 मील टैक्सी से जाना है जिसकी गति 25 मील प्रति घण्टा है। पूरी दूरी (4315 मील) के लिए आपकी औसत गति क्या होगी ?
You take a trip which entails travelling 900 miles by train at an average speed of 60 miles per hour, 3000 miles by boat at an average of 25 m. p.h. 400 miles by plane at 350 m. p.h. and finally 15 miles by taxi at 25 m. p.h. What is your average speed for the entire distance ? *[M. Com , Agra, 1966]*

(ii) भारत की जनसंख्या 1961 में 43·9 करोड़ थी जो बढ़कर 1971 में 54·7 करोड़ हो गई। वृद्धि की चक्रवृद्धि प्रतिशत दर प्रति वर्ष ज्ञात कीजिए।
The population of India was 43·9 crores in 1961 which increased to 54·7 crores in 1971 Obtain the average compound percentage rate of increase.

[(i) 31·56 m.p.h. ; (ii) 2 2%] *[B. Com , Raj. 1972]*

84. (i) किसी श्रेणी के समान्तर माध्य पर क्या प्रभाव पड़ेगा यदि उसके प्रत्येक पद-मूल्य में एक अचर-मूल्य *a* (क) जोड़ दिया जाए, (ख) घटा दिया जाए अथवा प्रत्येक पद-मूल्य को उस अचर-मूल्य *a* से (ग) गुणा कर दिया जाए; (घ) भाग दे दिया जाए। उदाहरण द्वारा स्पष्ट कीजिए।
How will the arithmetic mean be affected by (*a*) adding a constant '*a*' to every item ; (*b*) subtracting *a* from every item ; (*c*) multiplying every item by *a*, and (*d*) dividing every item by *a* Illustrate by an example.

(ii) निम्न अंकों से वर्गकरणी माध्य ज्ञात कीजिए—
Calculate the quadratic mean from the following data—

3, 5, 6, —6, 7. 10, 12

(iii) वे दो मूल्य बताइए जिनका समान्तर माध्य 9 और गुणोत्तर माध्य 7·2 हो। उनका हरात्मक माध्य क्या होगा ?
Find the two values whose arithmetic mean and geometric mean are 9 and 7·2 respectively. What will be their harmonic mean ?

[(i) (*a*) $\bar{X}+a$; (*b*) $\bar{X}-a$; (*c*) $\bar{X}a$; (*d*) $\bar{X}\div a$; (ii) 7·55 ; (iii) 3 6 and 14 4 ; $HM=5{\cdot}76$]

85. यह सिद्ध कीजिए कि एक थर्मामीटर के पाठ्यांकों का समान्तर माध्य ज्ञात करने मे इस बात से कोई अन्तर नही पड़ता कि तापक्रम सेण्टीग्रेड मे नापा जा रहा है या फारेनहाइट अंशो मे, परन्तु उन पाठ्यांको का गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने में विभिन्न मापदण्डो मे अन्तर पड़ जाता है।
Show that in finding the arithmetic mean of a set of readings on a thermometer, it does not matter whether we measure the temperature in centigrade or fahrenheit degrees, but that in finding the geometric mean it does matter.

$$\left[Hint— F=\left(C\times\frac{9}{5}\right)+32 ;\ \bar{x}\text{ in }^\circ C=\frac{\Sigma C}{N} ;\ \bar{x}\text{ in }^\circ F=\frac{9}{5}\cdot\frac{\Sigma C}{N}+\frac{32N}{N}=\frac{9}{5}\bar{c}+32\right.$$

$$\left.G.M.\text{ in }^\circ C=(C_1\times C_2\times\ldots C_N)^{1/N} ;\ G.M.\text{ in }^\circ F=\left\{\frac{9}{5}(C_1\,.\,C_2\ldots C_N)^{1/N}+32\right\}\right]$$

9

अपकिरण तथा विषमता
(DISPERSION AND SKEWNESS)

कार्ल पियर्सन नामक एक प्रसिद्ध वैज्ञानिक का कथन है : 'निरपेक्ष समानता एक बिल्कुल काल्पनिक धारणा है जो मानव अनुभव में नही पाई जाती।'[1] विविधता जीवन में नहीं, सांख्यिकीय तथ्यों में भी न्यूनाधिक रूप में विद्यमान होती है।[2] एक समंकश्रेणी के विभिन्न पद आकार में एक दूसरे से काफ़ी भिन्न होते है। पद-मूल्यों की भिन्नता के कारण ही सांख्यिकीय माध्य द्वारा समंकमाला की केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप किया जाता है। परन्तु जैसा कि पिछले अध्याय में बतलाया जा चुका है, माध्यों से हमें इस बात का पता नही चलता कि श्रेणी के विभिन्न मूल्यों का उसकी क़ेन्द्रीय प्रवृत्ति से कितना औसत अन्तर है या समंकमाला की बनावट कैसी है। कभी-कभी तो व्यक्तिगत मूल्यों का माध्य से अन्तर ज्ञात न होने के अत्यन्त भ्रामक परिणाम निकलते हैं। आपने यह कहावत तो सुन ही रखी होगी कि 'लेखा-जोखा ज्यों का त्यों, सारा कुनबा डूबा क्यों ?' एक व्यक्ति ने सपरिवार नदी पार करने से पहले यह हिसाब लगाया कि नदी की औसत गहराई से उसके कुटुम्ब के सदस्यों की औसत ऊँचाई अधिक है। परन्तु एक स्थान पर नदी की गहराई औसत से बहुत अधिक होने के कारण उसका पूरा परिवार डूब गया। यदि वह नदी की अधिकतम गहराई और उसका औसत गहराई से अन्तर तथा अपने परिवार के सदस्यों की न्यूनतम ऊँचाई आदि की भी गणना कर लेता तो उसे इस विपत्ति का सामना नहीं करना पड़ता। अतः यह स्पष्ट है कि समंकश्रेणी के बारे में यथेष्ट ज्ञान प्राप्त करने के लिए, न केवल उसका माध्य जानना आवश्यक है बल्कि विभिन्न व्यक्तिगत मूल्यो का उस माध्य से औसत अन्तर और श्रेणी की रचना तथा स्वरूप आदि के बारे में पूरी जानकारी प्राप्त करना भी परमावश्यक है।

केन्द्रीय प्रवृत्ति तथा बनावट के आधार पर समंकश्रेणियाँ निम्न दो प्रकार की हो सकती हैं—

(क) उनके माध्य भिन्न हों परन्तु बनावट समान हो,

(ख) उनके माध्य समान हों परन्तु बनावट भिन्न हो।

(क) माध्यों में भिन्नता किन्तु बनावट में समानता—कुछ समंकमालाएँ ऐसी होती हैं जिनके माध्य भिन्न होते हैं परन्तु माध्य से विभिन्न मूल्यों के अन्तर बिल्कुल समान होते हैं जैसा कि अग्र सारणी से स्पष्ट है—

[1] 'Absolute sameness is a purely conceptual notion which is not in human experience.' —Karl Pearson, *The Grammar of Science*, p. 153.

[2] 'Variety is not only the spice of life but also the essence of Statistics.'—Ya lun Chou, *Applied Business and Economic Statistics*, p. 186.

समान रचना किन्तु भिन्न माध्यों वाली श्रेणियाँ

क्रम संख्या	अ		ब		स	
	मूल्य	विचलन	मूल्य	विचलन	मूल्य	विचलन
1	10	−2	50	−2	100	−2
2	11	−1	51	−1	101	−1
3	12	0	52	0	102	0
4	13	+1	53	+1	103	+1
5	14	+2	54	+2	104	+2
योग	60		260		510	
माध्य	12		52		102	

उपर्युक्त तीनों श्रेणियों में माध्य अलग-अलग है अर्थात् पहली श्रेणी में 12, दूसरी में 52 और तीसरी में 102 हैं परन्तु इन तीनों की बनावट या माध्य से विभिन्न पदों में विचलन बिल्कुल बराबर है।

(ख) माध्यों में समानता किन्तु बनावट में भिन्नता—दूसरे प्रकार की श्रेणियों में माध्य बिल्कुल समान हो सकते हैं, परन्तु उनकी बनावट मे अन्तर हो सकता है। निम्न सारणी में ऐसे तीन वटन प्रस्तुत किए गए है—

समान माध्य किन्तु विभिन्न रचनाओं वाली श्रेणियाँ

क्रम संख्या	अ		ब		स	
	मूल्य	विचलन	मूल्य	विचलन	मूल्य	विचलन
1	50	0	46	−4	2	−48
2	50	0	48	−2	18	−32
3	50	0	47	−3	40	−10
4	50	0	54	+4	88	+38
5	50	0	55	+5	102	+52
योग	250		250		250	
माध्य	50		50		50	

उक्त सारणी में तीनों वंटनों मे माध्य एक समान है, परन्तु उनकी बनावट में बहुत अन्तर है। प्रथम वटन (अ) में प्रत्येक मूल्य 50 है अतः इसमें माध्य पूर्ण रूप से समस्त समूह का उचित प्रतिनिधित्व कर रहा है। द्वितीय श्रेणी (ब) में भी माध्य 50 है परन्तु बनावट पहले से भिन्न है। इसमें न्यूनतम 46 तथा अधिकतम मूल्य 55 का अन्तर 9 है तथा इन मूल्यों के विचलन क्रमशः −4 व +5 हैं। इस श्रेणी का माध्य सभी मूल्यों का यथोचित प्रतिनिधि नहीं कहा जा सकता। फिर भी यह कुछ मात्रा में समूह का प्रतिनिधित्व करता है। तृतीय वंटन (स) में भी माध्य तो 50 ही है परन्तु पद-मूल्यों के विचलन बहुत अधिक हैं। इसमें न्यूनतम व अधिकतम मूल्य क्रमशः 2 और

102 हैं, उनका विस्तार 102—2=100 है और उनके विचलन क्रमशः —48 एवं +52 हैं। इस वंटन में माध्य, केन्द्रीय प्रवृत्ति का उचित प्रतिनिधित्व नहीं करता।

समंकमालाओं में उपर्युक्त अन्तर होने से कारण केवल उनके माध्य के आधार पर सही निष्कर्ष नहीं निकाले जा सकते। उनकी बनावट और स्वरूप के बारे में भी सूचना प्राप्त करना अत्यावश्यक है।

अंकसमूहों के सभी मौलिक लक्षणों को स्पष्ट रूप से व्यक्त करने के लिए निम्न चार प्रकार के माप ज्ञात किये जाते हैं—

(i) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (Measures of Central Tendency) अथवा माध्य (Averages) जिससे अंक-श्रेणी का सारांश या केन्द्रीय मूल्य ज्ञात हो जाता है। माध्यों का विस्तृत विवेचन पिछले अध्याय में किया जा चुका है।

(ii) अपकिरण के माप (Measures of Dispersion) जिनसे यह पता चलता है कि श्रेणी के विभिन्न मूल्य उसके माध्य से कितनी औसत दूरी पर हैं अर्थात् उनका बिखराव या फैलाव कैसा है ? अपकिरण से समंकश्रेणी की रचना का आभास होता है।

(iii) विषमता के माप (Measures of Skewness) जो यह सूचना प्रदान करते हैं कि अंकों के बिखराव की दिशा क्या है अर्थात् अधिकाधिक आवृत्तियाँ कम मूल्यों की ओर आकृष्ट होती हैं या अधिक मूल्यों की ओर। दूसरे शब्दों में, विषमता-मापों से समंकमालाओं के स्वरूप और उनकी सममित अथवा असममित प्रकृति का पता चलता है।

(iv) पृथुशीर्षत्व के माप (Measures of Kurtosis) जो आवृत्ति-वंटनों के नुकीलेपन या चपटेपन के माप होते हैं। इनसे यह ज्ञात होता है कि वंटन के केन्द्र में पदों का जमाव अधिक है या कम।

समंकश्रेणी के व्यापक विश्लेषण के लिए उपर्युक्त चारों मापों का निर्धारण आवश्यक होता है। इस अध्याय में हम अपकिरण एवं विषमता के मापों का अध्ययन करेंगे।

अपकिरण
(Dispersion)

परिभाषा (Definition)—डा० बाउले के अनुसार, 'अपकिरण पदों के विचरण [illegible] का माप है।'[1] समंकश्रेणी के विभिन्न मूल्यों का अन्तर [illegible] (Dispersion [illegible] कोनर के शब्दों में, 'जिस सीमा तक व्यक्तिगत [illegible] होती है [illegible] अपकिरण कहते हैं।'[2] स्पीगेल के मतानुसार, 'वह [illegible] ओर फैलने की प्रवृत्ति रखते हैं उन समकों का [illegible] कहलाती है। [illegible] डिक के अनुसार 'एक केन्द्रीय मूल्य के दोनों ओर [illegible] चरमूल्यों के बिखराव की सीमा ही अपकिरण है।'[4] अपकिरण को [illegible], बिखराव (S[illegible] (Variation) आदि अनेक नामों से पुकारा जाता है।

दो अर्थों में प्रयोग—अपकिरण शब्द का [illegible] में, अपकिरण का तात्पर्य समंकश्रेणी के [illegible] अर्थ के अनुसार, अपकिरण हमें उन [illegible]

[1] 'Dispersion is the [illegible] *Elementary Manual of Statistics.*

[2] 'Dispersion is a [illegible] *Statistics in Theory and Practice.*

[3] 'The degree to [illegible] called the *variation* or *dispersion* [illegible]

[4] 'The *dispersion* [illegible] about a central value.'—[illegible]

पाए जाते है। दूसरे अर्थ में, अपकिरण, श्रेणी के माध्य से निकाले गए 'विभिन्न पदों के विचलनों का माध्य' है। इस अर्थ के अनुसार अपकिरण हमें यह बताता है कि श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक निश्चित माप से विभिन्न मूल्यो की औसत दूरी क्या है ? अपकिरण के दोनों अर्थों मे काफी अन्तर है जैसा कि उन पर आधारित विभिन्न रीतियों के अध्ययन से स्पष्ट हो जाता है।

द्वितीय श्रेणी के माध्य (Averages of the second order)—केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप प्रथम श्रेणी के माध्य (Averages of the first order) कहलाते है क्योंकि वे वास्तविक पद-मूल्यो पर आधारित होते हैं। अपकिरण का माप ज्ञात करते समय पहले समंकमाला का सांख्यिकीय माध्य निकाला जाता है, फिर उस माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनों या अन्तरों का माध्य ज्ञात किया जाता है। माध्य से निकाले गए विचलनो का माध्य होने के कारण अपकिरण-माप द्वितीय श्रेणी के माध्य कहलाते हैं।

निरपेक्ष तथा सापेक्ष अपकिरण (Absolute and Relative Dispersion)—जब किसी समकश्रेणी के प्रसार, बिखराव या विचरण का माप निरपेक्ष रूप मे उस श्रेणी की इकाई मे ही ज्ञात किया जाता है तो वह अपकिरण का निरपेक्ष माप (absolute measure of dispersion) कहलाता है। उदाहरणार्थ, व्यक्तियों की आय, ऊँचाई, भार, आयु आदि के अपकिरण के निरपेक्ष माप क्रमशः रुपये, सेन्टीमीटर, किलोग्राम तथा वर्ष के रूप में प्रकट किए जायेंगे।

अपकिरण के निरपेक्ष माप में यह दोष है कि उसके आधार पर विभिन्न पद-मालाओं के अपकिरण की तुलना नहीं की जा सकती क्योंकि ये माप अलग-अलग इकाइयों में व्यक्त हो सकते हैं। तुलनात्मक अध्ययन के लिए निरपेक्ष माप को सम्बन्धित माध्य से भाग देने पर जो अनुपात या प्रतिशत आता है वह अपकिरण का सापेक्ष माप (relative measure of dispersion) कहलाता है। यह समंकमाला की इकाई में व्यक्त नही किया जाता वरन् एक अनुपात या प्रतिशत के रूप मे होता है इसे अपकिरण-गुणांक (Coefficient of Dispersion) भी कहते है। अपकिरण की तुलना करने के लिए सापेक्ष माप का ही प्रयोग किया जाता है। उदाहरणार्थ, दो कारखानों में औसत मजदूरी क्रमशः 100 तथा 200 रुपये है और उन दोनों में मजदूरी के अपकिरण के निरपेक्ष माप 20 रुपये हैं तो यह कहना गलत होगा कि दोनो कारखानों में अपकिरण या विचरण बराबर है। तुलनात्मक अध्ययन के लिए दोनों के अपकिरण गुणांक या सापेक्ष माप ज्ञात करने होंगे। पहले कारखाने मे अपकिरण का सापेक्ष माप 20÷100 अर्थात् ·2 या 20% है और दूसरे में 20÷200 या ·1 या 10% है। स्पष्ट है कि पहले कारखाने में अपकिरण अधिक है।

अपकिरण के उद्देश्य एवं महत्व (Objects and Importance)—अपकिरण का माप निम्न उद्देश्यो की पूर्ति के लिए किया जाता है—

(i) श्रेणी के माध्य से विभिन्न पद-मूल्यों की औसत दूरी ज्ञात करना,

(ii) श्रेणी की बनावट के बारे मे सूचना प्राप्त करना अर्थात् यह पता लगाना कि माध्य के दोनों ओर मूल्यो का फैलाव या बिखराव कैसा है,

(iii) पद-मूल्यों का सीमा-विस्तार ज्ञात करना,

(iv) दो या अधिक समकमालाओं में पाई जाने वाली असमानताओ की तुलना करके यह निश्चय करना कि किसमें विचरण की मात्रा अधिक है, तथा

(v) यह देखना कि माध्य द्वारा श्रेणी का किस सीमा तक प्रतिनिधित्व होता है। इस प्रकार अपकिरण-माप माध्यों के अनुपूरक होते हैं।

उपर्युक्त उद्देश्यों के कारण अपकिरण का माप किसी भी क्षेत्र मे विचरण सम्बन्धी समस्याओं का अध्ययन करने के लिए बहुत महत्त्वपूर्ण है। आर्थिक व सामाजिक क्षेत्र मे आय या सम्पत्ति के वितरण की असमानताओ का माप और तुलनात्मक अध्ययन करने के लिए अपकिरण के विभिन्न माप बहुत उपयोगी सिद्ध होते हैं। व्यापार एवं उद्योग मे माध्य लाभ, माध्य उत्पादन, माध्य लागत आदि से होने वाले परिवर्तनों का विश्लेषण करने से संस्था की प्रगति का अनुमान लगाया जाता है। एकाधिकार और आर्थिक सत्ता के सकेन्द्रण का मापन भी विभिन्न अपकिरण-मापों की सहायता से किया जाता है। उत्पादन-नियन्त्रण व किस्म-नियन्त्रण (Quality Control)

में निर्मित वस्तु के केन्द्रीय माप के अतिरिक्त उसके पूर्वनिश्चित प्रमाप से होने वाले विचरण का भी अध्ययन किया जाता है। इस प्रकार, प्रत्येक क्षेत्र में पद-मूल्यों के माध्य से प्राप्त आंशिक एव अपूर्ण सूचना की सम्पूर्ति अपकिरण-माप द्वारा की जाती है। केवल माध्य के आधार पर ही निष्कर्ष निकालना सदा हानिकर सिद्ध होता है। डैरेल हफ ने ठीक ही कहा है 'जब वे महत्त्वपूर्ण अंक (अपकिरण के माप) अज्ञात हों, तो केवल माध्य में विश्वास न कीजिए; अन्यथा आप उस अन्धे आदमी की भाँति होंगे जो केवल औसत तापमान की सूचना के आधार पर ही कैम्प-स्थल का चुनाव कर लेता है।'[1]

अपकिरण ज्ञात करने की रीतियाँ
(Methods of Measuring Dispersion)

यह पहले बताया जा चुका है कि सांख्यिकी में 'अपकिरण' शब्द दो अर्थों में प्रयोग किया जाता है। इन दोनों अर्थों के आधार पर अपकिरण ज्ञात करने की दो प्रमुख गणितीय रीतियाँ है। इन गणितीय रीतियों के अलावा रेखाचित्र द्वारा भी अपकिरण प्रदर्शित किया जा सकता है। इस प्रकार अपकिरण ज्ञात करने की निम्नलिखित रीतियाँ हैं—

(क) सीमा-रीति (Method of Limits)—
- (1) विस्तार या परास (Range),
- (2) अन्तर-चतुर्थक विस्तार (*Interquartile Range*),
- (3) शतमक विस्तार (Percentile Range),

(ख) विचलन-माध्य रीति (*Method of Averaging Deviations*)—
- (4) चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation),
- (5) माध्य-विचलन (Mean Deviation),
- (6) प्रमाप-विचलन (Standard Deviation),
- (7) अन्य माप (Other Measures),

(ग) बिन्दुरेखीय रीति (Graphic Method)—
- (8) लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)।

विस्तार
(*Range*)

किसी समंकमाला के सबसे बड़े और सबसे छोटे मूल्य के अन्तर को उसका विस्तार या परास (Range) कहते हैं। यह अपकिरण ज्ञात करने की सरलतम रीति है। इसकी गणना निम्न प्रकार की जाती है—

(*i*) पहले, श्रेणी के अधिकतम मूल्य (*Largest value*) और न्यूनतम मूल्य (Smallest value) ज्ञात किए जाते हैं। अविच्छिन्न श्रेणी में न्यूनतम वर्ग की निचली सीमा को न्यूनतम मूल्य और अधिकतम वर्ग की ऊपरी सीमा को अधिकतम मूल्य माना जाता है।

(ii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$R = L - S$$

[1] 'Place little faith in an average......when those important figures are missing. *Otherwise you are as blind as a man choosing a camp site from a report of mean temperature alone*......you can freeze or roast if you ignore the range.'—Darrell Huff, *How To Lie with Statistics*, pp. 51–52.

R संकेताक्षर विस्तार (Range) के लिए प्रयोग हुआ है,
L सबसे बड़े मूल्य (Largest value) के " " "
S सबसे छोटे मूल्य (Smallest value) " " "

विस्तार गुणांक (Coefficient of Range)—अपकिरण के तुलनात्मक अध्ययन के लिए विस्तार का सापेक्ष माप (relative measure of range) ज्ञात करना आवश्यक होता है। विस्तार के सापेक्ष माप को ही विस्तार-गुणांक या परास-गुणांक कहते हैं। इसकी गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाती है—

$$\text{विस्तार गुणांक (C.R.)} = \frac{L-S}{L+S}$$

उदाहरण (Illustration) 1 :

(i) 10 छात्रों के सांख्यिकी (Statistics) और लागत लेखांकन (Cost Accountancy) की मासिक परीक्षाओं में प्राप्तांक निम्न वर्णित हैं—

अनुक्रमांक :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
सांख्यिकी में प्राप्तांक :	20	35	25	30	16	40	18	28	10	25
लागत लेखा में प्राप्तांक :	31	39	23	42	20	45	15	25	19	24

दोनों विषयों में प्राप्तांकों के विस्तार की तुलना कीजिए।

(ii) निम्न वटन मे विस्तार तथा उसके गुणांक का परिकलन कीजिए—

वर्ग :	1–5	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30
आवृत्ति :	2	8	15	35	20	10

हल (Solution) :

(i) दोनों विषयों मे प्राप्तांको के विस्तार की तुलना करने के लिए निम्न सूत्र द्वारा विस्तार-गुणांक की गणना की जाएगी—

$$\text{विस्तार गुणांक}(C.\ R.) = \frac{L-S}{L+S}$$

सांख्यिकी

$L=40;\ S=10$

$$\text{C. of R.} = \frac{40-10}{40+10} \text{ या } \frac{30}{50} = {\cdot}6$$

लागत लेखांकन

$L=45;\ S=15$

$$\text{C. of R.} = \frac{45-15}{45+15} \text{ या } \frac{30}{60} = {\cdot}5$$

सांख्यिकी में प्राप्तांकों का विस्तार अधिक है।

(ii) समावेशी वर्गान्तरो को पहले अपवर्जी वर्गान्तरों मे बदल लिया जाता है। उक्त उदाहरण मे, न्यूनतम सीमा 0·5 है और अधिकतम सीमा 30·5 है।

विस्तार

$$R = L-S = 30{\cdot}5 - 0{\cdot}5 = 30$$

∴ विस्तार = 30

विस्तार-गुणांक

$$\text{C. of R.} = \frac{L-S}{L+S} \text{ या } \frac{30{\cdot}5-0{\cdot}5}{30{\cdot}5+0{\cdot}5} = \frac{30}{31}$$

विस्तार-गुणांक = ·97

विस्तार के गुण-दोष—विस्तार का सबसे महत्त्वपूर्ण गुण यही है कि यह सरलता से ज्ञात किया जा सकता है और आसानी से समझा जा सकता है। दूसरे, बड़े उद्योगों में वस्तुओं के निरम

नियन्त्रण (Quality Control) में इसका बहुत प्रयोग किया जाता है। परन्तु विस्तार में निम्न दोष पाये जाते हैं—

(i) अस्थिर माप—विस्तार किसी श्रेणी के विचरण का स्थिर माप नहीं है। वह केवल दो चरम मूल्यों (अधिकतम एवं न्यूनतम) पर आधारित है। अतः अधिकतम या न्यूनतम पद-मूल्य में होने वाले परिवर्तनों का विस्तार पर तुरन्त प्रभाव पड़ता है। उदाहरणार्थ, यदि किसी कक्षा में विद्यार्थियों की ऊँचाई 155 से०मी० और 175 से०मी० के बीच में पाई जाती है तो ऊँचाई का विस्तार 20 से०मी० होगा परन्तु बाद में यदि एक 185 से०मी० ऊँचाई वाले विद्यार्थी का प्रवेश हो जाता है तो विस्तार 20 से०मी० के स्थान पर 30 से०मी० हो जाएगा। विस्तार प्रतिदर्श-परिवर्तनों से भी बहुत प्रभावित होता है।

(ii) सभी मूल्यों पर आधारित न होना—विस्तार श्रेणी के सभी पद-मूल्यों पर आधारित नहीं होता। अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों के बीच के पदों में होने वाले परिवर्तनों का विस्तार पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

(iii) विस्तार से श्रेणी की बनावट की जानकारी प्राप्त नहीं होती। विस्तार का सबसे बड़ा दोष यह है कि उससे समंकमाला की बनावट या चरम मूल्यों के मध्य पद-मूल्यों के फैलाव या बिखराव का बिल्कुल पता नहीं चलता। दो समंकश्रेणियों का विस्तार समान होने पर भी उनकी बनावट में बहुत अन्तर हो सकता है।

(iv) आवृत्ति-बंटनों के लिए विस्तार सर्वथा अनुपयुक्त है क्योंकि उनमें पद-मूल्यों का अधिकतर केन्द्र में जमाव होता है। दूसरे, एक सममितीय वितरण का विस्तार वही हो सकता है जो असममितीय वितरण का, जबकि वास्तव में इन दोनों प्रकार की श्रेणियों के विचरण में बहुत अन्तर होता है।

उपयोग—उपर्युक्त दोषों के कारण विस्तार का प्रयोग सीमित क्षेत्र में होता है। उत्पादित वस्तुओं के किस्म-नियन्त्रण में विस्तार उपयोगी होता है। बड़े-बड़े उद्योगों में आधुनिक यन्त्रों की सहायता से उत्पादन करने पर भी निर्मित वस्तु की विभिन्न इकाइयों में कुछ अन्तर हो जाता है। ऐसी स्थिति में विस्तार ज्ञात करके उच्चतम एवं न्यूनतम नियन्त्रण सीमाएँ निश्चित कर ली जाती है और उन इकाइयों को अस्वीकार कर दिया जाता है जिनके माप इन सीमाओं के बाहर हों। ब्याज की दरों, विनिमय दरों, स्कन्ध-विपणि पर प्रतिभूतियों के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों का भी विस्तार की सहायता से अध्ययन किया जाता है।

अन्तर-चतुर्थक विस्तार
(Inter Quartile Range)

समंकश्रेणी के तृतीय चतुर्थक और प्रथम चतुर्थक के अन्तर को अन्तर-चतुर्थक विस्तार (Inter-Quartile Range) कहते हैं। इसको ज्ञात करने की रीति निम्न प्रकार है—

(i) पहले, दोनों चतुर्थक (Quartiles) ज्ञात किए जाते हैं।

(ii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$I.\ R. = Q_3 - Q_1$$

I. R. संकेताक्षर अन्तर चतुर्थक विस्तार (Inter-Quartile Range) के लिए है।

Q_3 व Q_1 क्रमशः तृतीय एवं प्रथम चतुर्थक (Third Quartile and First Quartile) के लिए हैं।

विस्तार की भाँति अन्तर-चतुर्थक विस्तार भी अपकिरण ज्ञात करने की सरल रीति है। यह भी दो मूल्यों पर आधारित है, परन्तु ये दो मूल्य सीमान्त मूल्य नहीं हैं वरन् प्रथम एवं तृतीय चतुर्थक है। यह विस्तार से श्रेष्ठ होता है क्योंकि इस पर सीमान्त पदों या चरम-मूल्यों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। यह श्रेणी के मध्य के आधे भाग का विस्तार बताता है जिसमें

50 प्रतिशत मूल्यों का समावेश होता है। इस प्रकार यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होता। विस्तार की भाँति यह भी एक अस्थिर माप है। इससे समंकमाला की बनावट का पता नहीं चलता। इन दोषों के कारण अन्तर चतुर्थक, विस्तार, अपकिरण का असन्तोषजनक माप है जिसका बीजगणितीय विवेचन नहीं होता।

शतमक विस्तार
(Percentile Range)

अपकिरण ज्ञात करने के लिए शतमक विस्तार का भी प्रयोग किया जा सकता है। 90 तथा 10 क्रमसंख्या के शतमकों (90th Percentile and 10th Percentile) का अन्तर, शतमक विस्तार ('10–90' Percentile Range) कहलाता है। इसे निम्न विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है—

(i) श्रेणी के 90th तथा 10th Percentile निकाले जाते हैं। (P_{90} व P_{10})

(ii) *निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—*

$$P.\ R. = P_{90} - P_{10}$$

P./R. संकेत शतमक विस्तार (Percentile Range) के लिए प्रयुक्त हुआ है।

अपकिरण की यह रीति विस्तार तथा अन्तर-चतुर्थक विस्तार से श्रेष्ठ मानी जाती है क्योंकि प्रथम तो यह चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होती ; दूसरे, यह श्रेणी के मध्य के 80% भाग पर आधारित होती है। इसे 1—9 दशमक विस्तार भी कहा जा सकता है क्योंकि P_{10} तथा P_{90}, D_1 और D_9 के बराबर होते हैं। शतमक विस्तार में वही गुण-दोष होते हैं जो विस्तार एवं अन्तर-चतुर्थक विस्तार में पाये जाते हैं।

अन्तर-चतुर्थक विस्तार तथा शतमक विस्तार समंकमाला के विभाजन-मूल्यों पर आधारित होते हैं। इनका प्रयोग यह निश्चित करने के लिए किया जाता है कि श्रेणी के मध्य के 50% मूल्य तथा 80% मूल्य किन सीमाओं के अन्तर्गत फैले हुए हैं। शिक्षा तथा मनोविज्ञान के क्षेत्र में ये रीतियाँ उपयोगी हैं।

उदाहरण (Illustration) 2 :

100 विद्यार्थियों को किसी परीक्षा में निम्नलिखित अंक प्राप्त हुए है—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
46–50	2	21–25	30
41–45	5	16–20	20
36–40	5	11–15	15
31–35	6	6–10	5
26–30	10	1–5	2

(क) मध्यवर्ती 50% विद्यार्थियों और (ख) मध्यवर्ती 80% विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का विस्तार ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

मध्य के 50% छात्रों के प्राप्तांकों की सीमाएँ, अन्तर-चतुर्थक विस्तार द्वारा तथा मध्य के 80% छात्रों के प्राप्तांकों की सीमाएँ शतमक विस्तार द्वारा ज्ञात की जायेंगी। Q_1 व Q_3 और P_{10} व P_{90} निर्धारित करने के लिए श्रेणी को आरोही क्रम में रखकर सचयी आवृत्तियाँ निकाली जायेंगी—

अंक	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
1–5	2	2
6–10	5	7
11–15	15	22
16–20	20	42
21–25	30	72
26–30	10	82
31–35	6	88
36–40	5	93
41–45	5	98
46–50	2	100
	$N=100$	

प्रथम चतुर्थक

$Q_1=$size of $\frac{N}{4}$th item

$=$size of $\frac{100}{4}$ or 25th item

$\therefore$ (16−20) is the Q_1-class

$$Q_1=l+\frac{i}{f}(q_1-c)$$

$$=15{\cdot}5+\frac{5}{20}(25-22)$$

$$=15{\cdot}5+\frac{5\times3}{20}=15{\cdot}50+{\cdot}75$$

$$\therefore \quad Q_1=16{\cdot}25$$

तृतीय चतुर्थक

$Q_3=$size of $\frac{3N}{4}$th item

$=$size of $\frac{300}{4}$ or 75th item

$\therefore$ (26−30) is the Q_3-class

$$Q_3=l+\frac{i}{f}(q_3-c)$$

$$=25{\cdot}5+\frac{5}{10}(75-72)$$

$$=25{\cdot}5+\frac{5\times3}{10}=25{\cdot}5+1{\cdot}5$$

$$\therefore \quad Q_3=27{\cdot}0$$

10 वाँ शतमक

$P_{10}=$size of $\frac{10N}{100}$th item

$=$size of 10th item

$\therefore$ (11−15) is the P_{10}-class

$$P_{10}=l+\frac{i}{f}(p_{10}-c)$$

$$=10{\cdot}5+\frac{5}{15}(10-7)$$

$$=10{\cdot}5+\frac{5\times3}{15}=10{\cdot}5+1{\cdot}0$$

$$\therefore \quad P_{10}=11{\cdot}5$$

90 वाँ शतमक

$P_{90}=$size of $\frac{90N}{100}$th item

$=$size of 90th item

$\therefore$ (36−40) is the P_{90}-class

$$P_{90}=l+\frac{i}{f}(p_{90}-c)$$

$$=35{\cdot}5+\frac{5}{5}(90-88)$$

$$=35{\cdot}5+2{\cdot}0$$

$$\therefore \quad P_{90}=37{\cdot}5$$

(क) अन्तर-चतुर्थक विस्तार

$$I.R.=Q_3-Q_1=27{\cdot}00-16{\cdot}25=10{\cdot}75$$

(ख) शतमक विस्तार

$$P.R.=P_{90}-P_{10}=37{\cdot}5-11{\cdot}5=26$$

$\therefore$ मध्यवर्ती 50% विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का विस्तार $=10{\cdot}75$

$\therefore$ मध्यवर्ती 80% विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का विस्तार $=26$

विस्तार, अन्तर-चतुर्थक विस्तार और शतमक विस्तार अपकिरण ज्ञात करने की सीमा-रीतियाँ (methods of limits) हैं। इनमें मुख्य दोष यह है कि इनसे केवल दो मूल्यों या दो विभाजन-मूल्यों का अन्तर ही ज्ञात होता है; समंकश्रेणी की का कुछ पता नहीं चलता। श्रेणी की बनावट या पद-मूल्यों का बिखराव ज्ञात करने के अपकिरण की विचलन-माध्य रीतियाँ प्रयोग की जाती हैं।

चतुर्थक विचलन
(Quartile Deviation)

तृतीय चतुर्थक तथा प्रथम चतुर्थक के अन्तर के आ तुर्थक विचलन (Quartile

Deviation) या अर्द्ध-अन्तर-चतुर्थक विस्तार (Semi Inter-Quartile Range) कहते है।

चतुर्थक विचलन ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Q. D. संकेत चतुर्थक-विचलन (quartile deviation) के लिए प्रयोग हुआ है।

Q_3 और Q_1 क्रमशः तृतीय व प्रथम चतुर्थक (third and first quartiles) के लिए प्रयोग हुए हैं।

चतुर्थक-विचलन का गुणांक (Coefficient of Quartile Deviation)—चतुर्थक-विचलन अपकिरण का निरपेक्ष माप है। विभिन्न श्रेणियों के चतुर्थक-विचलन की तुलना करने के लिए इसका सापेक्ष माप निकाला जाता है। यह सापेक्ष माप, चतुर्थक-विचलन गुणाक कहलाता है। इसे ज्ञात करने के लिए चतुर्थक-विचलन के निरपेक्ष माप को दोनों चतुर्थकों के माध्य से भाग दे दिया जाता है। इसका सूत्र निम्न प्रकार है—

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक} = \frac{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}{\frac{Q_3 + Q_1}{2}} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

उदाहरण (Illustration) 3 :

निम्नांकित दो श्रेणियों में अपकिरण (dispersion) की तुलना चतुर्थक मापों द्वारा कीजिए—

(अ) ऊँचाई (इचो में) :	58	56	62	61	63	64	65	59	62	65	55
(ब) भार (पौण्ड मे) :	117	112	127	123	125	130	106	119	121	132	108

[*B. Com., Vikram, 1970*]

हल (Solution) :

चतुर्थक मापों द्वारा अपकिरण की तुलना करने के लिए दोनों श्रेणियों के चतुर्थक-विचलन गुणाक ज्ञात किए जाएँगे। प्रथम तथा तृतीय चतुर्थक निर्धारित करने के लिए दोनों व्यक्तिगत समंकमालाओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाएगा—

आरोही क्रम में विन्यसित पद-मूल्य

क्रमाक	(अ) ऊँचाई (इंच)	(ब) भार (पौण्ड)
1	55	106
2	56	108
3	58	112
4	59	117
5	61	119
6	62	121
7	62	123
8	63	125
9	64	127
10	65	130
11	65	132

(अ) ऊँचाई

Q_1 = size of $\left(\frac{N+1}{4}\right)$th item

= size of $\frac{11+1}{4}$ या 3rd item

= 58

(ब) भार

Q_1 = size of $\left(\frac{N+1}{4}\right)$th item

= size of $\frac{11+1}{4}$ या 3rd item

= 112

Q_3=size of $\frac{3(N+1)}{4}$th item

Q_3=size of $\frac{3(11+1)}{4}$ या 9th item

=64

Q_3=size of $\frac{3(N+1)}{4}$th item

Q_3=size of $\frac{3(11+1)}{4}$ या 9th item

=127

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक} = \frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$$

ऊँचाई

$C.\ of\ Q.\ D. = \frac{64-58}{64+58}$ या $\frac{6}{122}$

=·049

भार

$C.\ of\ Q.\ D. = \frac{127-112}{127+112}$ या $\frac{15}{239}$

=·063

अतः भार में ऊँचाई की अपेक्षा अधिक अपकिरण है।

उदाहरण (Illustration) 4 :

निम्न वंटन से अपकिरण के चतुर्थक गुणांक (Quartile Coefficient of Dispersion) का परिकलन कीजिए—

पद का केन्द्रीय मान :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
आवृत्ति :	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2

हल (Solution) :

पहले, इन मध्य-बिन्दुओं के आधार पर वर्गान्तर निश्चित किये जायेंगे। मध्य-बिन्दुओं का अन्तर 1 है इसलिए 1 का आधा ·5 प्रत्येक केन्द्रीय मूल्य में जोड़ा जाएगा तथा घटाया जाएगा। इस प्रकार वर्ग सीमाएँ प्राप्त हो जायेंगी।

चतुर्थकों का परिकलन

मध्यमान	वर्गान्तर	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
1	·5–1·5	2	2
2	1·5–2·5	9	11
3	2·5–3·5	11	22
4	3·5–4·5	14	36
5	4·5–5·5	20	56
6	5·5–6·5	24	80
7	6·5–7·5	20	100
8	7·5–8·5	16	116
9	8·5–9·5	5	121
10	9·5–10·5	2	123
		N=123	

Q_1=size of $\frac{N}{4}$th item

=size of $\frac{123}{4}$ या 30·75th item

∴ (3·5—4·5) Q_1 वर्ग है

$Q_1 = l + \frac{i}{f}(q_1 - c)$

$= 3·5 + \frac{1}{14}(30·75 - 22)$

$= 3·5 + \frac{8·75}{14}$ या $3·5 + ·625$

$= 4·125$

Q_3=size of $\frac{3N}{4}$th item

=size of $\frac{3 \times 123}{4}$ या 92·25th item

∴ (6·5—7·5) Q_3 वर्ग है

$Q_3 = l + \frac{i}{f}(q_3 - c)$

$= 6·5 + \frac{1}{20}(92·25 - 80)$

$= 6·5 + \frac{12·25}{20}$ या $6·5 + ·6125$

$= 7·1125$

अपकिरण का चतुर्थक गुणांक $=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$ या $\frac{7\cdot1125-4\cdot1250}{7\cdot1125+4\cdot1250}=\frac{2\cdot9875}{11\cdot2375}$

अतः चतुर्थक विचलन गुणांक $=\cdot27$

चतुर्थक-विचलन के गुण-दोष—चतुर्थक-विचलन के निम्न गुण हैं—

(i) **सरल**—इसका समझना और इसकी गणना करना बहुत आसान है।

(ii) **चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव**—अपकिरण के इस माप पर चरम मूल्यों का बहुत कम प्रभाव पड़ता है।

(iii) **मध्य भाग का अपकिरण**—यह माप वहाँ उपयोगी होता है जहाँ श्रेणी के मध्य के आधे भाग का ही अध्ययन करना हो।

चतुर्थक-विचलन में निम्न दोष पाये जाते हैं—

(i) इससे समंकमाला की बनावट का ठीक पता नहीं चलता। यदि दो श्रेणियों में चतुर्थक समान हैं तो चतुर्थक-विचलन भी बराबर होगा जबकि दोनों में मूल्यों का बिखराव या श्रेणी की रचना भिन्न हो सकती है।

(ii) यह सभी मूल्यों पर आधारित नहीं है इसलिए इससे अपकिरण का ठीक माप नहीं होता। यह तो केवल दोनों चतुर्थकों से ही ज्ञात किया जाता है।

(iii) यह निदर्शन-परिवर्तनों से बहुत प्रभावित होता है।

(iv) इसमे बीजगणितीय विवेचन का अभाव है अर्थात् इसका प्रयोग आगे की रीतियों मे नही किया जाता।

(v) इसका बहुत कम प्रयोग होता है। यह मध्य के आधे भाग के अपकिरण की सामान्य जानकारी प्राप्त करने के लिए ही उपयुक्त है।

माध्य विचलन
(Mean Deviation)

समकश्रेणी के किसी साख्यिकीय माध्य (समान्तर माध्य, मध्यका या बहुलक) से निकाले गए विभिन्न मूल्यों के विचलनों का समान्तर माध्य, उसका माध्य-विचलन (mean deviation) कहलाता है। मूल्यों के विचलन निकालते समय बीजगणितीय चिह्न + तथा — को छोड़ दिया जाता है अर्थात् ऋणात्मक विचलन (negative deviation) भी धनात्मक (positive) मान लिए जाते हैं।[1]

माध्य-विचलन ज्ञात करने में निम्न बातों का ध्यान रखा जाता है—

(i) **माध्य का चुनाव**—सैद्धान्तिक दृष्टि से तो माध्य-विचलन समान्तर माध्य, मध्यका या बहुलक में से किसी एक से निकाला जा सकता है परन्तु व्यवहार में मध्यका को ही आधार मानना चाहिए क्योंकि यह स्थिर, निश्चित एवं प्रतिनिधि माध्य है तथा इससे निकाले गये विचलनों का जोड़ सबसे कम होता है। समान्तर माध्य से भी माध्य-विचलन ज्ञात किया जा सकता है। यदि प्रश्न में यह निर्देश नही है कि किस माध्य से माध्य-विचलन निकालना है तो मध्यका से ही विचलन निकालना चाहिए।

(ii) **बीजगणितीय चिन्हों की उपेक्षा**—माध्य-विचलन निकालते समय + व — को छोड़ दिया जाता है अर्थात् ऋणात्मक विचलनों को भी धनात्मक मान लिया जाता है। ऐसे

[1] Mean Deviation or Average Deviation is the arithmetic average of deviations of all the values taken from a statistical average (mean, median or mode) of the series. In taking deviations of values, algebraic signs + and — are not taken into consideration, that is, negative deviations are also treated as positive deviations.

विचलनों को व्यक्त करने के लिए d के दोनों ओर सीधी खड़ी रेखाएँ | | (Modulus) बना दी जाती हैं। इस प्रकार $|d|$ का अर्थ यह है कि विचलन निकालते समय चिन्हों को छोड़ दिया गया है। चिन्हों को छोड़ने का कारण यह कि विचलनों का बीजगणितीय जोड़ समान्तर माध्य से निकालने पर शून्य होता है और मध्यका से निकालने पर लगभग शून्य होता है।

(iii) **विचलनों का माध्य**—सभी विचलनों के जोड़ को मूल्यों की संख्या से भाग देने पर माध्य-विचलन ज्ञात हो जाता है। आवृत्ति वंटन में विचलनों और आवृत्तियों की गुणा करके प्राप्त कुल विचलनों का जोड़ निकाला जाता है।

(iv) **संकेताक्षर**—माध्य-विचलन के लिए ग्रीक वर्णमाला का अक्षर δ डेल्टा (Small Delta) प्रयोग किया जाता है। जिस माध्य से माध्य-विचलन निकाला जाता है δ के बाद उसका सकेताक्षर नीचे की ओर उपसंकेत (subscript) के रूप में निम्न प्रकार लिख दिया जाता है—

मध्यका से माध्य विचलन (Mean Deviation from Median) $=\delta_M$

स० माध्य से माध्य विचलन (Mean Deviation from Mean) $=\delta_{\bar{X}}$

माध्य-विचलन गुणांक (Coefficient of Mean Deviation)—माध्य-विचलन एक निरपेक्ष माप है। तुलनात्मक विवेचन के लिए माध्य-विचलन का सापेक्ष माप निकाला जाता है जिसे माध्य-विचलन गुणांक कहते हैं। इसके लिए माध्य-विचलन के निरपेक्ष माप को उस माध्य से भाग दिया जाता है जिससे विचलन निकाले गए हैं अर्थात्—

(क) मध्यका से माध्य विचलन गुणांक $=\dfrac{\delta_M}{M}$

(ख) माध्य से माध्य विचलन गुणांक $=\dfrac{\delta_{\bar{x}}}{\bar{X}}$

व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series) में माध्य-विचलन व उसके गुणांक का परिगणन—माध्य-विचलन ज्ञात करने की दो रीतियाँ हैं—प्रत्यक्ष तथा लघु रीति।

प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)—इस रीति के अनुसार माध्य-विचलन निम्न प्रकार ज्ञात किया जाता है—

(i) पहले उस माध्य को ज्ञात किया जाता है जिससे माध्य-विचलन निकालना होता है। व्यवहार में अधिकतर मध्यका को ही आधार माना जाता है।

(ii) बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ते हुए मध्यका या अन्य माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलन $|d|$ निकाले जाते हैं।

(iii) इन विचलनों का जोड़ $\Sigma|d|$ प्राप्त किया जाता है।

(iv) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\delta_M=\frac{\Sigma|d_M|}{N};\quad \delta_{\bar{X}}=\frac{\Sigma|d_{\bar{X}}|}{N};\quad \delta_Z=\frac{\Sigma|d_Z|}{N}$$

(v) माध्य-विचलन गुणांक ज्ञात करने के लिए माध्य-विचलन को सम्बन्धित माध्य से भाग दे दिया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 5 :

एक कक्षा के 9 छात्रों के भार के आँकड़े निम्न वर्णित हैं। मध्यका और समान्तर माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए तथा उनके गुणांकों का भी निर्धारण कीजिए—

भार (कि० ग्रा०) : 47, 50, 58, 45, 53, 59, 47, 60, 49

हल (Solution) :

पहले इन मूल्यों को आरोही क्रम में लिखकर इनका मध्यका तथा समान्तर माध्य ज्ञात किया जाएगा। फिर इन माध्यों से विचलन निकाले जायेंगे—

माध्य-विचलन का परिगणन

क्रमांक	भार (किलो०) X	मध्यका 50 से विचलन (+ व − छोड़कर) $\|d_M\|=\|X-M\|$	माध्य 52 से विचलन (+ व − छोड़कर) $\|d_{\bar{X}}\|=\|X-\bar{X}\|$
1	45	5	7
2	47	3	5
3	47	3	5
4	49	1	3
5	50	0	2
6	53	3	1
7	58	8	6
8	59	9	7
9	60	10	8
योग	468	42	44
$N=9$	ΣX	$\Sigma\|d_M\|$	$\Sigma\|d_{\bar{X}}\|$

मध्यका से

$$\text{Median}=\text{size of }\left(\frac{N+1}{2}\right)\text{th item}$$

$$=\text{size of }\frac{9+1}{2}=5\text{th item}=50$$

माध्य विचलन

$$\delta_M=\frac{\Sigma|d_M|}{N}=\frac{42}{9}\text{ या }4{\cdot}67$$

माध्य विचलन गुणांक

$$C\text{ of }\delta_M=\frac{\delta_M}{M}\text{ या }\frac{4{\cdot}67}{50}={\cdot}0934$$

समान्तर माध्य से

$$\bar{X}=\frac{\Sigma X}{N}=\frac{468}{9}\text{ या }52$$

माध्य विचलन

$$\delta_{\bar{X}}=\frac{\Sigma|d_{\bar{X}}|}{N}=\frac{44}{9}\text{ या }4{\cdot}89$$

माध्य विचलन गुणाक

$$C\text{ of }\delta_{\bar{X}}=\frac{\delta_{\bar{X}}}{\bar{X}}\text{ या }\frac{4{\cdot}89}{52}={\cdot}05\text{[illegible]}$$

लघु रीति (Short-Cut Method)—व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य-विचलन लघु रीति द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है।

जब मध्यका से माध्य-विचलन की गणना की जाती है तो निम्न क्रिया-विधि अपनाई जाती है।

(i) पदों को आरोही क्रम में रखकर उनका मध्यका निर्धारित किया जाता है, (M)।

(ii) मध्यका-मूल्य से अधिक मूल्यों (अर्थात् मध्यका-पद से बाद के पदों के मूल्यों) का योग [ΣX_A] ज्ञात कर लिया जाएगा। इसी प्रकार, मध्यका पद से कम या पहले के पदों के मूल्यों का जोड़ [ΣX_B] निकाल लिया जाएगा। [A=Above, B=Below]

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगा—

$$\delta_M=\frac{\Sigma X_A-\Sigma X_B}{N}$$

δ_M संकेताक्षर मध्यका से माध्य-विचलन (Mean Deviation from Median) के लिए प्रयोग हुआ है।

ΣX_A मध्यका से अधिक या बाद के मूल्यों का जोड़ (total of values of items above the Median) के लिए प्रयोग हुआ है।

ΣX_B मध्यका से कम या पहले के मूल्यों का जोड़ (total of values of items below the Median) के लिए प्रयोग हुआ है।

यदि समान्तर माध्य से माध्य विचलन निकालना हो तो लघु रीति में कुछ संशोधन करना पड़ता है। संक्षेप में, यह लघु रीति इस प्रकार है—

(i) समान्तर माध्य ($\bar{X}$) ज्ञात किया जाता है।

(ii) समान्तर माध्य से अधिक आकार वाले मूल्यों का जोड़ (ΣX_A) तथा उससे कम आकार वाले मूल्यों का जोड़ (ΣX_B) निकाला जाता है।

(iii) इसी प्रकार, समान्तर माध्य से अधिक आकार वाले पदों की संख्या (N_A) तथा उससे कम मूल्य के पदो की संख्या (N_B) भी ज्ञात की जाती है।

$$\delta_{\bar{X}}=\frac{\Sigma X_A-\Sigma X_B-(N_A-N_B)\,\bar{X}}{N}$$

$\delta_{\bar{X}}$ समान्तर माध्य से माध्य विचलन (Mean Deviation from Mean) है।

ΣX_A व ΣX_B क्रमशः माध्य से अधिक तथा माध्य से कम मूल्यों के जोड़ (totals of values above and below the mean) है।

N_A व N_B क्रमशः माध्य से अधिक व माध्य से कम मूल्यों की संख्या (number of items above and below the mean) हैं।

N कुल संख्या (total number of items) के लिए है।

मध्यका से लघु रीति द्वारा माध्य-विचलन निकालते समय मध्यका-मूल्य से अधिक और कम मूल्यो की संख्या को इसलिए ध्यान मे नही रखा जाता क्योकि मध्यका बिल्कुल केन्द्र मे होता है और उसके दोनों ओर के मूल्यों की संख्या बराबर होती है। ऐसी स्थिति में यदि N_A में से N_B घटाया जाय तो परिणाम सदैव शून्य होगा। इसलिए मध्यका से विचलन वाले सूत्र म $(N_A-N_B)\,M$ का प्रयोग नही किया जाता।

पिछले उदाहरण में लघु रीति द्वारा निम्न प्रकार माध्य विचलन ज्ञात किया जाएगा—

क्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9
भार (किलो०) आरोही क्रम :	45	47	47	49	50	53	58	59	60

लघु रीति द्वारा माध्य विचलन की गणना

मध्यका से

$M=50$

$\Sigma X_A=53+58+59+60=230$

$\Sigma X_B=49+47+47+45=188$

$$\delta_M=\frac{\Sigma X_A-\Sigma X_B}{N}$$

$$=\frac{230-188}{9} \text{ या } \frac{42}{9}$$

$\therefore\ \delta_M=4{\cdot}67$

माध्य से

$\bar{X}=52$

$\Sigma X_A=53+58+59+60=230$

$\Sigma X_B=50+49+47+47+45=238$

$N_A=4;\ N_B=5$

$$\delta_{\bar{X}}=\frac{\Sigma X_A-\Sigma X_B-(N_A-N_B)\,X}{N}$$

$$=\frac{230-238-(4-5)\,52}{9}$$

$$=\frac{230-238+52}{9} \text{ या } \frac{44}{9}$$

$\therefore\ \delta_{\bar{X}}=4{\cdot}89$

व्यक्तिगत श्रेणी मे प्रत्यक्ष रीति द्वारा माध्य-विचलन निकालना अधिक सरल व सुविधाजनक है। इसलिए व्यक्तिगत समकमाला में माध्य-विचलन प्रत्यक्ष रीति द्वारा ही ज्ञात करना चाहिए।

खण्डित या विच्छिन्न श्रेणी (Discrete Series)—

प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)—खण्डित श्रेणी में माध्य-विचलन ज्ञात करने की निम्नलिखित प्रत्यक्ष रीति है—

(i) वह माध्य ज्ञात किया जाता है जिससे विचलन निकालना है।

(ii) उस माध्य से प्रत्येक आकार (size) का चिह्न-रहित विचलन निकाल लिया जाता है। [$|d_M|$ या $|d_{\bar{X}}|$]

(iii) विचलनों में आवृत्तियों की गुणा करके जोड़ [$\Sigma f|d_M|$ या $\Sigma f|d_{\bar{X}}|$] लगा लिया जाता है।

(iv) निम्न सूत्र प्रयुक्त किया जाता है—

$$\delta_M=\frac{\Sigma f|d_M|}{N};\ \delta_{\bar{X}}=\frac{\Sigma f|d_{\bar{X}}|}{N};\ \delta_Z=\frac{\Sigma f|d_Z|}{N}$$

(v) माध्य-विचलन गुणांक निकालने के लिए, निरपेक्ष माप को उस माध्य से भाग दे दिया जाता है जिससे विचलन ज्ञात किये गये हैं।

उदाहरण (Illustration) 6 :

निम्न समंकों से (क) अपकिरण का मध्यका गुणांक (Median Coefficient of Dispersion) और (ख) अपकिरण का माध्य-गुणांक (Mean Coefficient of Dispersion) निकालिए—

पद-आकार :	4	6	8	10	12	14	16
आवृत्ति :	2	4	5	3	2	1	4

हल (Solution) :

पहले मध्यका तथा समान्तर माध्य का निर्धारण किया जाएगा।

मध्यका व समान्तर माध्य की गणना

पद-आकार X	आवृत्ति f	संचयी आवृत्ति	आकार व आवृत्ति की गुणा $f\times X$
4	2	2	8
6	4	6	24
8	5	11	40
10	3	14	30
12	2	16	24
14	1	17	14
16	4	21	64
योग	21		204
	N		ΣfX

Median = size of $\frac{N+1}{2}$th item

= size of $\frac{21+1}{2}$ = 11th item = 8

Mean = $\frac{\Sigma fX}{N}$

= $\frac{204}{21}$ = 9·71

माध्य-विचलन का परिकलन

आकार	आवृत्ति	मध्यका 8 से		माध्य 9·71 से	
		विचलन ± छोड़कर	कुल विचलन	विचलन ± छोड़कर	कुल विचलन
X	f	$\|d_M\|$	$f\times\|d_M\|$	$\|d_{\bar{X}}\|$	$f\times\|d_{\bar{X}}\|$
4	2	4	8	5·71	11·42
6	4	2	8	3·71	14·84
8	5	0	0	1·71	8·55
10	3	2	6	0·29	0·87
12	2	4	8	2·29	4·58
14	1	6	6	4·29	4·29
16	4	8	32	6·29	25·16
योग	21		68		69·71
	N		$\Sigma f\|d_M\|$		$\Sigma f\|d_{\bar{X}}\|$

मध्यका से

$$\delta_M = \frac{\Sigma f|d_M|}{N} = \frac{68}{21} = 3.24$$

(क) अपकिरण का मध्यका गुणांक—

$$C. \text{ of } \delta_M = \frac{\delta_M}{M} \text{ या } \frac{3.24}{8} = 0.405$$

समान्तर माध्य से

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{\Sigma f|d_{\bar{X}}|}{N} = \frac{69.71}{21} = 3.32$$

(ख) अपकिरण का माध्य-गुणांक—

$$C. \text{ of } \delta_{\bar{X}} = \frac{\delta_{\bar{X}}}{\bar{X}} \text{ या } \frac{3.32}{9.71} = 0.342$$

अविच्छिन्न श्रेणी (Continuous Series)—

प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)—अविच्छिन्न श्रेणी में माध्य-विचलन ज्ञात करने की वही रीति है जो विच्छिन्न या खण्डित श्रेणी में प्रयुक्त होती है। अन्तर केवल इतना है कि वर्गान्तरो के *मध्य-बिन्दु (mid-points)* निकालकर उन्हें मूल्य (X) मान लिया जाता है। इस प्रकार अविच्छिन्न श्रेणी को खण्डित श्रेणी में बदल लिया जाता है। बाकी सभी क्रियाएँ पूर्ववत् रहती हैं।

उदाहरण (Illustration) 7 :

100 छात्रों के निम्न प्राप्तांक-बंटन की सहायता से (क) मध्यका से, और (ख) समान्तर माध्य से, माध्य विचलन ज्ञात कीजिए—

से अधिक अक :	5	15	25	35	45	55	65	75	85
छात्रों की सख्या :	100	97	89	74	54	29	19	10	4

हल (Solution) :

समान्तर माध्य एवं मध्यका की गणना

प्राप्तांक	मध्य-बिन्दु X	आवृत्ति f	सचयी आवृत्ति	कुल मूल्य $f \times X$
5–15	10	3	3	30
15–25	20	8	11	160
25–35	30	15	26	450
35–45	40	20	46	800
45–55	50	25	71	1250
55–65	60	10	81	600
65–75	70	9	90	630
75–85	80	6	96	480
85–95	90	4	100	360
योग		100		4760
		N		ΣfX

$$\text{Median} = \text{size of } \frac{N}{2}\text{th item} = \text{size of } \frac{100}{2} \text{ or 50th item}$$

∴ (45—55) मध्यका-वर्ग है।

$$M = l + \frac{i}{f}(m - c) = 45 + \frac{10}{25}(50 - 46)$$

$$= 45 + \frac{10 \times 4}{25} \text{ या } 46.6$$

$$\text{Mean या } \bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{4760}{100} = 47.6$$

∴ मध्यका = 46·6   माध्य = 47·6

माध्य विचलन का परिकलन (प्रत्यक्ष रीति)

प्राप्तांक	मध्य मूल्य	आवृत्ति	M (46·6) से		$\bar{X}$ (47·6) से	
			विचलन ± छोड़कर	कुल विचलन	विचलन ± छोड़कर	कुल विचलन
	X	f	$\|d_M\|$	$f \times \|d_M\|$	$\|d_{\bar{X}}\|$	$f \times \|d_{\bar{X}}\|$
5–15	10	3	36 6	109·8	37·6	112·8
15–25	20	8	26 6	212·8	27·6	220 8
25–35	30	15	16 6	249·0	17·6	264 0
35–45	40	20	6·6	132 0	7·6	152 0
45–55	50	25	3·4	85 0	2·4	60·0
55–65	60	10	13 4	134 0	12·4	124 0
65–75	70	9	23·4	210·6	22·4	201·6
75–85	80	6	33·4	200·4	32 4	194·4
85–95	90	4	43·4	173·6	42·4	169·6
योग		100		1507·2		1499·2
		N		$\Sigma f\|d_M\|$		$\Sigma f\|d_{\bar{X}}\|$

$$\delta_M = \frac{\Sigma f|d_M|}{N} = \frac{1507 \cdot 2}{100} = 15 \cdot 07$$

मध्यका से मा० वि० = **15·07**

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{\Sigma f|d_{\bar{X}}|}{N} = \frac{1499 \cdot 2}{100} = 14 \cdot 99$$

माध्य से मा० वि० = **14·99**

लघु रीति (Short-Cut Method)—खण्डित व अविच्छिन्न श्रेणी मे लघु रीति द्वारा माध्य विचलन का परिगणन—

खण्डित व अविच्छिन्न समंकमाला में गणन-क्रिया को सरल बनाने के लिए लघु रीति द्वारा माध्य-विचलन निकाला जा सकता है। खण्डित श्रेणी में गणनक्रिया का आधार मूल्य (size) तथा अविच्छिन्न श्रेणी में वर्गों के मध्य-विन्दु (mid-points) आधार होते हैं, वे ही मूल्य माने जाते हैं।

प्रक्रिया—(i) जिस माध्य से माध्य-विचलन निकालना हो उसकी गणना की जाती है।

(ii) मूल्य या मध्य-विन्दु (X) तथा आवृत्ति (f) की गुणा की जाती है।

(iii) जिस माध्य से विचलन ज्ञात करना है उससे अधिक मूल्यों (या मध्य-विन्दुओं) व उनकी आवृत्तियों की गुणाओं का जोड़ ($\Sigma f X_A$) निकाला जाता है और इसी प्रकार माध्य-मूल्य से कम मूल्यों (या मध्य-विन्दुओं) और उनकी आवृत्तियों की गुणाओं का जोड़ ($\Sigma f X_A$) निकाल लिया जाता है। माध्य के बिल्कुल बराबर मूल्य या मध्य-विन्दु से सम्बद्ध fX को छोड़ दिया जाता है।

(iv) माध्य से क्रमशः अधिक व कम मूल्यों (या मध्य-विन्दुओं) की आवृत्तियों के जोड (Σf_A) व (Σf_B) निकाल लिए जाते हैं। माध्य के बराबर मूल्य से सम्बन्धित आवृत्ति की गणना नहीं की जाती।

(v) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

मध्यका से $\delta_M = \dfrac{\Sigma f X_A - \Sigma f X_B - (\Sigma f_A - \Sigma f_B)\, M}{N}$

माध्य से $\delta_{\bar{X}} = \dfrac{\Sigma f X_A - \Sigma f X_B - (\Sigma f_A - \Sigma f_B)\, \bar{X}}{N}$

$\Sigma f X_A$ व $\Sigma f X_B$ संकेताक्षर क्रमशः माध्य-मूल्य से अधिक और कम मूल्य आकार या मध्य-विन्दुओं और तत्सम्बन्धी आवृत्तियों के गुणनफल के योग के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

Σf_A व Σf_B क्रमशः माध्य-मूल्य से अधिक व कम आकार या मध्य-विन्दुओं से सम्बन्धित आवृत्तियों के जोड़ के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

पिछले उदाहरण (Illustration 7) में उपर्युक्त लघु रीति का निम्न प्रकार प्रयोग किया जाएगा—

लघु रीति द्वारा माध्य विचलन का परिगणन

प्राप्तांक	मध्य-मूल्य	आवृत्ति	$f \times X$ का गुणनफल	M (46·6) से	$\bar{X}$ (47·6) से
	X	f	fX		
5–15	10	3	30	$\Sigma fX_B = 1440$	$\Sigma fX_B = 1440$
15–25	20	8	160	$\Sigma f_B = 46$	$\Sigma f_B = 46$
25–35	30	15	450		
35–45	40	20	800		
45–55	50	25	1250	$\Sigma f_A = 54$	$\Sigma f_A = 54$
55–65	60	10	600	$\Sigma fX_A = 3320$	$\Sigma fX_A = 3320$
65–75	70	9	630		
75–85	80	6	480		
85–95	90	4	360		
योग		$N = 100$			

मध्यका से माध्य विचलन

$$\delta_M = \frac{\Sigma fX_A - \Sigma fX_B - (\Sigma f_A - \Sigma f_B)\, M}{N}$$

$$= \frac{3320 - 1440 - (54 - 46)\, 46{\cdot}6}{100}$$

$$\therefore\ \delta_M = \frac{1880 - 372{\cdot}8}{100} \text{ या } \frac{1507{\cdot}2}{100} = 15{\cdot}07$$

माध्य से माध्य विचलन

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{\Sigma fX_A - \Sigma fX_B - (\Sigma f_A - \Sigma f_B)\bar{X}}{N}$$

$$= \frac{3320 - 1440 - (54 - 46)\, 47{\cdot}6}{100}$$

$$\therefore\ \delta_{\bar{X}} = \frac{1880 - 380{\cdot}8}{100} \text{ या } \frac{1499{\cdot}2}{100} = 14{\cdot}99$$

उदाहरण (Illus. 6)—खण्डित श्रेणी—को लघु रीति द्वारा निम्न प्रकार हल किया जा सकता है—

लघु रीति द्वारा खण्डित श्रेणी में माध्य विचलन की गणना

आकार Y	आवृत्ति f	कुल आकार $f \times X$	$M = 8$ से	$\bar{X} = 9{\cdot}71$ से
4	2	8	$\Sigma f_B = 6$	$\Sigma f_B = 11$
6	4	24	$\Sigma fX_B = 32$	$\Sigma fX_B = 72$
8	5	40	$\Sigma fX_A = 132$	$\Sigma fX_A = 132$
10	3	30	$\Sigma f_A = 10$	$\Sigma f_A = 10$
12	2	24		
14	1	14		
16	4	64		
योग	21			

$$\delta_M = \frac{\Sigma fX_A - \Sigma fX_B - (\Sigma f_A - \Sigma f_B)\, M}{N}$$

$$= \frac{132 - 32 - (10 - 6)\, 8}{21} = \frac{100 - 32}{21} = \frac{68}{21}$$

$$\delta_M = 3{\cdot}24$$

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{\Sigma fX_A - \Sigma fX_B - (\Sigma f_A - \Sigma f_B)\, \bar{X}}{N}$$

$$= \frac{132 - 72 - (10 - 11)\, 9{\cdot}71}{21} = \frac{69{\cdot}71}{21}$$

$$\delta_{\bar{X}} = 3{\cdot}32$$

खण्डित श्रेणी में यदि मध्यका से माध्य विचलन निकालना हो तो प्रत्यक्ष रीति का प्रयोग सरल होता है।

द्वितीय लघु रीति (Alternative Short-Cut Method)—जहाँ मध्य-बिन्दु दशमलव मे हों (2·5, 7·5, 12·5........) तथा आवृत्ति बहुत अधिक हों वहाँ पर दूसरी लघु रीति का प्रयोग किया जा सकता है। यह रीति कल्पित माध्य से निकाले जाने वाले विचलनों पर आधारित है।

इस रीति में निम्न क्रियाएँ करनी पड़ती हैं—

(*i*) वह माध्य ज्ञात किया जाता है जिससे माध्य विचलन निकालना है।

(ii) दिए हुए मध्य-बिन्दुओं मे से उस वर्ग के मध्य-बिन्दु को कल्पित माध्य (Assumed Mean A_x) या कल्पित मध्यका (Assumed Median M_x) मान लिया जाता है जिसमें वास्तविक माध्य या वास्तविक मध्यका स्थित हो। यदि माध्य 17·8 है जो (15—20) वर्ग मे स्थित है तो इस वर्ग के मध्य-बिन्दु 17·5 को ही कल्पित माध्य मानना चाहिए।

(iii) इस कल्पित माध्य-मूल्य से सभी मध्य-बिन्दुओं के चिन्ह-रहित विचलन $|dx|$ या $|d_{Mx}|$ निकाल कर उनकी आवृत्ति में गुणा करके गुणनफलों का योग $\Sigma f|dx|$ या $\Sigma f|d_{Mx}|$ निश्चित कर लिया जाता है।

(iv) माध्य या मध्यका-मूल्य से क्रमशः अधिक (Above) और कम (Below) मध्य-बिन्दुओ से सम्बन्धित आवृत्तियों के जोड़ (Σf_A and Σf_B) निकाले जाते हैं।

(v) निम्न सूत्र प्रयुक्त किया जाता है—

$$\text{मध्यका से } \delta_M=\frac{\Sigma f|d_{Mx}|+(M-Mx)(\Sigma f_B-\Sigma f_A)}{N}$$

$\Sigma f|d_{Mx}|$ संकेत, कल्पित मध्यका से विभिन्न मध्य-बिन्दुओं के चिन्ह-रहित विचलनो व आवृत्तियों की गुणाओं का जोड़ व्यक्त करता है।

M व Mx क्रमशः वास्तविक एवं कल्पित मध्यका व्यक्त करते हैं।

Σf_B व Σf_A क्रमशः वास्तविक मध्यका से कम और अधिक मध्य-मूल्यों की आवृत्तियों के जोड़ व्यक्त करते हैं।

समान्तर माध्य से—

$$\delta_{\bar{X}}=\frac{\Sigma f|dx|+(\bar{X}-A)(\Sigma f_B-\Sigma f_A)}{N}$$

उदाहरण 7 को द्वितीय लघु रीति द्वारा हल करने से ये सभी क्रियाएँ स्पष्ट हो जाएंगी—

द्वितीय लघु रीति द्वारा माध्य विचलन का परिकलन

अंक	मध्य मूल्य	आवृत्ति	M से		$\bar{X}$ से	
			विचलन Mx 50 से	कुल विचलन	विचलन $Ax=50$ से	कुल विचलन
		f	$\|d_{Mx}\|$	$f\times\|d_{Mx}\|$	$\|dx\|$	$f\times\|dx\|$
5–15	10	3	40	120	40	120
15–25	20	8	30	240	30	240
25–35	30	15	20	300	20	300
35–45	40	20	10	200	10	200
45–55	50	25	0	0	0	0
55–65	60	10	10	100	10	100
65–75	70	9	20	180	20	180
75–85	80	6	30	180	30	180
85–95	90	4	40	160	40	160
योग		100 N		1480 $\Sigma f\|d_{Mx}\|$		1480 $\Sigma f\|dx\|$

यहाँ पर कल्पित माध्य तथा कल्पित मध्यका बराबर रखे गए है इसलिए दोनों से निकाले गये कुल विचलनों का योग भी समान है ।

वास्तविक मध्यका (46·6) से—

$\Sigma f_A=25+10+9+6+4=54 \qquad \Sigma f_B=20+15+8+3=46$

$$\delta_M=\frac{\Sigma f|d_{Me}|+(M-Mx)(\Sigma f_B-\Sigma f_A)}{N}=\frac{1480+(46·6-50)(46-54)}{100}$$

$$\therefore\ \delta_M=\frac{1480+(-3·4\times-8)}{100}=\frac{1480+27·2}{100}=15·07$$

वास्तविक माध्य (47·6) से—

$\Sigma f_A=54,\ \Sigma f_B=46$

$$\delta_{\bar{X}}=\frac{\Sigma f|d_x|+(\bar{X}-A_x)(\Sigma f_B-\Sigma f_A)}{N}=\frac{1480+(47·6-50)(46-54)}{100}$$

$$\therefore\ \delta_{\bar{X}}=\frac{1480+(-2·4\times-8)}{100}=\frac{1480+19·2}{100}=14·99$$

समान वर्गान्तरों वाली श्रेणी में कल्पित माध्य से पद-विचलन (Step-Deviations) लेकर गणन क्रिया को और अधिक सरल बनाया जा सकता है। पद-विचलन लेने में समान वर्ग विस्तार (i) को common factor मानते हुए कल्पित माध्य के सामने 0 तथा उसके दोनों ओर क्रमानुसार 1, 2, 3, 4 आदि अक लिख दिये जाते हैं। बाकी सभी क्रियाएँ पूर्ववत् रहती हैं, केवल सूत्र में $\Sigma f|d'_{Me}|$ या $\Sigma f|d'x|$ को i से गुणा कर दिया जाता है।

पद-विचलन (Step deviations) लेकर—

$$\text{माध्य से } \delta_{\bar{X}}=\frac{\Sigma f|d'x|\times i+(\bar{X}-A_x)\ (\Sigma f_B-\Sigma f_A)}{N}$$

$$\text{मध्यका से } \delta_M=\frac{\Sigma f|d'_{Me}|\times i+(M-Mx)\ (\Sigma f_B-\Sigma f_A)}{N}$$

माध्य-विचलन के गुण-दोष—माध्य-विचलन के निम्नलिखित गुण हैं—

(i) **सरल व बुद्धिगम्य**—माध्य-विचलन की गणन-क्रिया सरल है और यह आसानी से समझ मे आ जाता है। यह किसी भी माध्य से निकाला जा सकता है।

(ii) **सभी मूल्यों पर आधारित**—यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है। इसलिए इससे श्रेणी की बनावट की यथेष्ट जानकारी प्राप्त हो जाती है।

(iii) **चरम मूल्यों से कम प्रभावित**—माध्य-विचलन पर चरम या अतिसीमान्त पद-मूल्यों का बहुत कम प्रभाव पड़ता है।

(iv) **उपयोगिता**—आर्थिक, व्यापारिक एवं सामाजिक क्षेत्र में अपकिरण के इस माप का काफी प्रयोग होता है। आय व धन के वितरण की असमानताओं का अध्ययन अधिकतर इस रीति द्वारा किया जाता है। अमरीका के राष्ट्रीय आर्थिक शोध संस्थान (National Bureau of Economic Research) द्वारा व्यावसायिक चक्रों का पूर्वानुमान लगाने में विचरण का यह व्यावहारिक माप—माध्य विचलन—ही प्रयुक्त किया जाता है।

माध्य-विचलन में निम्न प्रमुख दोष भी पाये जाते हैं—

(i) **बीजगणितीय चिन्हों का परित्याग**—माध्य-विचलन का सबसे बड़ा दोष यह है कि विचलन निकालते समय बीजगणितीय चिन्ह + व — को छोड़ दिया जाता है। यदि ऐसा न किया जाए तो माध्य से कुल विचलन सदा शून्य के बराबर आए। परन्तु चिन्हों का परित्याग कर देने से यह माप गणितीय दृष्टिकोण से अशुद्ध एवं अवैज्ञानिक हो जाता है तथा उच्च-स्तरीय प्रयोग के योग्य नही रहता।

(ii) अनिश्चित एवं अतुलनीय—माध्य-विचलन एक अनिश्चित माप है क्योंकि यह समान्तर माध्य, मध्यका व बहुलक में से किसी भी माध्य से ज्ञात किया जा सकता है। बहुलक से निकाला गया माध्य-विचलन सदा असन्तोषजनक होता है, दूसरे यदि विभिन्न समंकमालाओं के माध्य-विचलन अलग-अलग माध्यों से निकाले जाएँ तो वे तुलना-योग्य नहीं होते।

प्रमाप विचलन
(Standard Deviation)

प्रमाप विचलन या मानक-विचलन (Standard Deviation)—यह वस्तुतः एक आदर्श व वैज्ञानिक अपकिरण-माप है जिसका सांख्यिकी मे सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है। प्रमाप विचलन में दो प्रमुख विशेषताएं हैं—एक तो मूल्य के विचलन सदैव समान्तर माध्य से ही लिए जाते हैं दूसरे, + व — को छोड़ा नहीं जाता बल्कि प्राप्त विचलनों के वर्ग (squares) कर लिए जाते हैं जिससे ऋणात्मक विचलनों के वर्ग भी स्वय धनात्मक हो जाते हैं। अन्त मे विचलन-वर्गों का माध्य निकालकर उसका वर्गमूल ज्ञात कर लिया जाता है। यही प्रमाप विचलन कहलाता है। इस प्रकार, यह माप माध्य-विचलन के दोषों से सर्वथा मुक्त है।

किसी श्रेणी के समान्तर माध्य से निकाले गये उसके विभिन्न पद-मूल्यो के विचलनो के वर्गों के माध्य का वर्गमूल, उस श्रेणी का प्रमाप विचलन होता है।[1] माध्य से विचलनों के वर्गों का समान्तर माध्य द्वितीय अपकिरण घात (Second Moment of Dispersion) अथवा प्रसरण (Variance) कहलाता है। प्रमाप विचलन इसी मूल्य का वर्गमूल है।

अपकिरण की प्रमाप विचलन रीति का सर्वप्रथम प्रयोग करने का श्रेय प्रसिद्ध प्राणिशास्त्र-विशेषज्ञ एवं सांख्यिक कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) को दिया जाता है। प्रमाप विचलन को माध्य-विभ्रम (Mean Error), माध्य-वर्ग विभ्रम (Mean Square Error) अथवा माध्य से निकाला जाने वाला विचलन-वर्ग-माध्य-मूल (Root Mean Square Deviation from Mean) आदि भी कहा जाता है। प्रमाप विचलन के लिए ग्रीक वर्णमाला का अक्षर σ सिगमा (Small Sigma) प्रयुक्त किया जाता है।

प्रमाप विचलन का गुणांक—दो श्रेणियों के अपकिरण की तुलना करने के लिए प्रमाप विचलन का सापेक्ष माप (*Relative Measure of Standard Deviation*) निकाला जाता है जिसे प्रमाप-विचलन-गुणांक (Coefficient of Standard Deviation) कहते हैं। इसे ज्ञात करने के लिए प्रमाप विचलन (σ) को समान्तर माध्य ($\bar{X}$) से भाग दिया जाता है, अर्थात्—

$$\text{प्रमाप विचलन गुणांक (Coefficient of S. D.)} = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

व्यक्तिगत श्रेणी में प्रमाप विचलन का परिगणन—व्यक्तिगत समकश्रेणी मे मानक विचलन ज्ञात करने की दो रीतियाँ हैं—(क) प्रत्यक्ष रीति, तथा (ख) लघु रीति।

(क) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)—यदि समान्तर माध्य का मूल्य पूर्णांक मे आता है तो यह रीति उपयुक्त होती है। प्रत्यक्ष रीति द्वारा प्रमाप विचलन निकालने की निम्नलिखित गणना-क्रिया है—

(i) पहले, श्रेणी का समान्तर माध्य निकाला जाता है। $(\bar{X})$

(ii) फिर, प्रत्येक मूल्य मे से माध्य-मूल्य घटाकर विचलन ज्ञात कर लिए जाते हैं— $d = (X - \bar{X})$

(iii) विचलनो के वर्गों का जोड़ Σd^2 प्राप्त कर लिया जाता है।

[1] Standard Deviation is the square root of the arithmetic mean of the squares of deviations of items from their arithmetic mean.

(iv) विचलन-वर्गों के जोड़ को पदों की संख्या से भाग दिया जाता है। यह द्वितीय अपकिरण-घात या प्रसरण है। $(\Sigma d^2 \div N)$

(v) भाग देकर प्राप्त मूल्य का वर्गमूल निकाल दिया जाता है। यही प्रमाप विचलन है। निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} \text{ या } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{N}}$$

σ संकेत प्रमाप विचलन के लिए प्रयुक्त हुआ है।

Σd^2 सकेत माध्य से विचलन-वर्गों के जोड़ के लिए प्रयुक्त हुआ है।

X व $\bar{X}$ सकेत क्रमशः व्यक्तिगत मूल्य तथा समान्तर माध्य के लिए हैं।

उदाहरण (Illustration) 8 :

10 विद्यार्थियों के निम्नांकित भार (किलो० में) के समकों से प्रमाप विचलन (Standard Deviation) और उसका गुणांक (Coefficient) निकालिए।

41, 44, 45, 49, 50, 53, 55, 55, 58, 60

हल (Solution) :

समान्तर माध्य व प्रमाप विचलन की गणना (प्रत्यक्ष रीति)

क्रमांक	भार (किलो) X	विचलन $\bar{X}=51$ से $d=(X-\bar{X})$	विचलनों के वर्ग $d^2=(X-\bar{X})^2$
1	41	−10	100
2	44	−7	49
3	45	−6	36
4	49	−2	4
5	50	−1	1
6	53	+2	4
7	55	+4	16
8	55	+4	16
9	58	+7	49
10	60	+9	81
योग	510		356
	ΣX		$\Sigma d^2 = \Sigma (X-\bar{X})^2$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{510}{10} = 51 \text{ किलोग्राम}$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} = \sqrt{\frac{356}{10}} \text{ या } \sqrt{35.6} = 5.97 \text{ किलोग्राम}$$

प्रमाप विचलन-गुणांक—

$$C. \text{ of } \sigma = \frac{\sigma}{\bar{X}} \text{ या } \frac{5.97}{51.00} = .117$$

∴ प्रमाप विचलन=5·97 किलो० प्रमाप विचलन गुणांक=0·117

(ख) लघु रीतियाँ (Short-Cut Methods)—लघु रीति द्वारा प्रमाप विचलन

कल्पित माध्य से विचलन निकालकर ज्ञात किया जा सकता है या बिना विचलन निकाले मूल्य-वर्गों के आधार पर इसकी गणना की जा सकती है। ये रीतियाँ इस प्रकार हैं—

कल्पित माध्य से विचलनों के आधार पर—लघु रीति द्वारा प्रमाप विचलन ज्ञात करने की गणना-विधि इस प्रकार है—

(i) दिए हुए मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य (A) मान लिया जाता है।

(ii) कल्पित माध्य से सब मूल्यों के विचलन ($dx=X-A$) निकालकर उनका जोड़ (Σdx) प्राप्त कर लिया जाता है।

(iii) विचलनों के वर्ग करके उन वर्गों का जोड़ (Σd^2x) लगा लिया जाता है।

(iv) निम्न सूत्रों में से किसी एक का प्रयोग करके प्रमाप विचलन ज्ञात कर लिया जाता है—

प्रथम सूत्र—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2}$$

द्वितीय सूत्र—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-(\bar{X}-A)^2}$$

तृतीय सूत्र—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x-N(\bar{X}-A)^2}{N}}$$

चतुर्थ सूत्र—

$$\sigma=\frac{1}{N}\sqrt{N.\Sigma d^2x-(\Sigma dx)^2}$$

उपर्युक्त सूत्रों में से प्रथम सूत्र का सबसे अधिक प्रयोग किया जाता है। यदि वास्तविक समान्तर माध्य भी निकालना हो तो द्वितीय या तृतीय सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है। प्रत्येक स्थिति में परिणाम एक ही होगा।

आधार—वास्तव में मूल्यों के विचलन उनके समान्तर माध्य ($\bar{X}$) से लेने चाहिएँ परन्तु लघु रीति में कल्पित माध्य (A) से विचलन लेने के कारण प्रत्येक विचलन (dx) में वास्तविक तथा कल्पित माध्य के अन्तर ($\bar{X}-A$) के बराबर अशुद्धि हो जाती है। (dx) के वर्गों का जोड़ करने से $(\bar{X}-A)^2$ का भी जोड़ हो जाता है। प्रत्येक मूल्य का $(\bar{X}-A)^2$ बराबर होने के कारण, कुल अशुद्धि $N(\bar{X}-A)^2$ हो जाती है। अन्त में, $\frac{\Sigma d^2x}{N}$ में कुल अशुद्धि की मात्रा $\frac{N(\bar{X}-A)^2}{N}$ अर्थात् $(\bar{X}-A)^2$ हो जाती है। इस अशुद्धि को $\frac{\Sigma d^2x}{N}$ में से घटा दिया जाता है जिससे वास्तविक माध्य से निकाले गए विचलन-वर्गों का माध्य $\frac{\Sigma d^2}{N}$ प्राप्त हो जाए।

अतः $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-\frac{N(\bar{X}-A)^2}{N}}$ या $\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-(\bar{X}-A)^2}$ (द्वितीय रूप)

या $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x-N(\bar{X}-A)^2}{N}}$ (तृतीय रूप)

$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-(\bar{X}-A)^2}=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2}$ (प्रथम रूप)

$\because \bar{X}=A+\frac{\Sigma dx}{N} \quad \therefore (\bar{X}-A)=\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-\frac{(\Sigma dx)^2}{N\times N}}$$

$=\sqrt{\frac{N.\Sigma d^2x-(\Sigma dx)^2}{N\times N}}=\frac{1}{N}\sqrt{N.\Sigma d^2x-(\Sigma dx)^2}$ (चतुर्थ रूप)

मूल्य-वर्गों के आधार पर निम्न प्रक्रिया द्वारा प्रमाप-विचलन ज्ञात हो सकता है—

(i) प्रत्येक मूल्य का वर्ग करके उन वर्गों का जोड़ ज्ञात कीजिए, (ΣX^2)

(ii) मूल्यों का समान्तर माध्य निकालकर उसका वर्ग प्राप्त कीजिए, $(\bar{X})^2$

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-(\bar{X})^2} \text{ या } \sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2} \quad \because \quad \bar{X}=\frac{\Sigma X}{N}$$

आधार—इस सूत्र का आधार यह है कि यदि कल्पित माध्य शून्य (0) मान लिया जाए तो प्रत्येक पद-मूल्य का विचलन भी वही होगा जो उसका मूल्य है। सूत्र का निम्न रूप हो जाएगा—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(X-0)^2}{N}-(\bar{X}-0)^2} \text{ या } \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-\bar{X}^2} \qquad \because \quad A=0$$

इस सूत्र का प्रयोग बहुत कम किया जाता है क्योंकि इसमें गणन-क्रिया सरल नहीं है। व्यवहार में, प्रथम सूत्र द्वारा ही प्रमाप विचलन ज्ञात किया जाता है। पिछले उदाहरण (Illustration 8) में लघु रीति के विभिन्न सूत्रों द्वारा प्रमाप विचलन का परिगणन करने से यह स्पष्ट हो जाएगा कि कौन-सा सूत्र अधिक उपयुक्त है।

उदाहरण (Illustration) 9 :

उदाहरण 8 में दी गई सामग्री से लघु रीति के विभिन्न सूत्रों का प्रयोग करते हुए प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

प्रमाप विचलन का परिकलन (लघु रीतियाँ)

क्रमांक	भार (किलो०)	A=50 से विचलन	विचलनों के वर्ग	पद-मूल्यों के वर्ग[1]
	X	dx	d^2x	X^2
1	41	−9	81	1681
2	44	−6	36	1936
3	45	−5	25	2025
4	49	−1	1	2401
5	50	0	0	2500
6	53	+3	9	2809
7	55	+5	25	3025
8	55	+5	25	3025
9	58	+8	64	3364
10	60	+10	100	3600
योग (N=10)	510 (ΣX)	+31−21 =+10 (Σdx)	366 (Σd^2x)	26366 (ΣX^2)

विचलनों के आधार पर

प्रथम सूत्र के अनुसार—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{366}{10}-\left(\frac{10}{10}\right)^2}$$

द्वितीय सूत्र के अनुसार—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-(\bar{X}-A)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{366}{10}-(51-50)^2}$$

[1] अन्तिम कॉलम मूल्य-वर्गों के अनुसार प्रमाप विचलन ज्ञात करने की रीति को प्रदर्शित करने के लिए बनाया गया है।

$$=\sqrt{36{\cdot}6-1{\cdot}0}=\sqrt{35{\cdot}6}$$
$$\therefore\ \sigma=5{\cdot}97$$

तृतीय सूत्र के अनुसार—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x-N(\bar{X}-A)^2}{N}}$$
$$=\sqrt{\frac{366-10(51-50)^2}{10}}$$
$$=\sqrt{\frac{366-10}{10}}=\sqrt{\frac{356}{10}}$$
$$\therefore\ \sigma=5{\cdot}97$$

$$=\sqrt{36{\cdot}6-1{\cdot}0}=\sqrt{35{\cdot}6}$$
$$\therefore\ \sigma=5{\cdot}97$$

चतुर्थ सूत्र के अनुसार—

$$\sigma=\frac{1}{N}\sqrt{N\cdot\Sigma d^2x-(\Sigma dx)^2}$$
$$=\frac{1}{10}\sqrt{10\times 366-(10)^2}$$
$$=\frac{1}{10}\sqrt{3660-100}$$
$$\therefore\ \sigma=\frac{1}{10}\sqrt{3560}\ \text{या}\ \frac{59{\cdot}7}{10}=5{\cdot}97$$

मूल्य-वर्गों के आधार पर

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-(\bar{X})^2}=\sqrt{\frac{26366}{10}-(51)^2}$$
$$\therefore\ \sigma=\sqrt{2636{\cdot}6-2601}=\sqrt{35{\cdot}6}=5{\cdot}97$$

उदाहरण (Illustration) 10 :

निम्न दो श्रेणियों के प्रमाप विचलन (standard deviation) ज्ञात कीजिए। किस श्रेणी में विचरण अधिक है।

श्रेणी A :	192	288	236	229	184	260	384	291	330	243
श्रेणी B :	[redacted]	87	93	109	124	126	126	101	102	108

[B. Com., Gorakhpur, 1971, Vikram, 1968]

हल (Solution) :

प्रमाप विचलन गुणांक का परिगणन (लघु रीति)

श्रेणी *A*			श्रेणी *B*		
पद-मूल्य	*A*=260 से विचलन	विचलनों के वर्ग	पद-मूल्य	*A*=109 से विचलन	विचलन-वर्ग
X	*dx*	d^2x	*X*	*dx*	d^2x
192	−68	4,624	83	−26	676
288	+28	784	87	−22	484
236	−24	576	93	−16	256
229	−31	961	109	0	0
184	−76	5,776	124	+15	225
260	0	0	126	+17	289
348	+88	7,744	126	+17	289
291	+31	961	101	−8	64
330	+70	4,900	102	−7	49
243	−17	289	108	−1	1
योग	+217−216 =+1	26,615		+49−80 =−31	2,333
N=10	Σ*dx*	Σd^2x	*N*=10	Σ*dx*	Σd^2x

श्रेणी A

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma dx}{N}$$
$$=260+\frac{1}{10} \text{ या } 260{\cdot}1$$
$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{26615}{10}-\left(\frac{1}{10}\right)^2}$$
$$=\sqrt{2661{\cdot}50-{\cdot}01}$$
$$=\sqrt{2661{\cdot}49}$$
$$\therefore\ \sigma=51{\cdot}6$$

श्रेणी B

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma dx}{N}$$
$$=109+\frac{-31}{10} \text{ या } 105{\cdot}9$$
$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{2333}{10}-\left(\frac{-31}{10}\right)^2}$$
$$=\sqrt{233{\cdot}30-9{\cdot}61}$$
$$=\sqrt{223{\cdot}69}$$
$$\therefore\ \sigma=14{\cdot}96$$

प्रमाप विचलन-गुणांक (Coefficient of S. D.)

$$\text{C. of } \sigma=\frac{\sigma}{\bar{X}} \text{ या } \frac{51{\cdot}6}{260{\cdot}1}={\cdot}198$$

$$\text{C. of } \sigma=\frac{\sigma}{\bar{X}} \text{ या } \frac{14{\cdot}96}{105{\cdot}90}={\cdot}141$$

श्रेणी A में अपकिरण अधिक है।

खण्डित समंक श्रेणी (Discrete Series)—

प्रत्यक्ष रीति—खण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन निकालने की प्रत्यक्ष रीति में निम्न क्रियाएँ करनी पड़ती हैं—

(i) श्रेणी का समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है। ($\bar{X}$)

(ii) मूल्यों में से समान्तर माध्य घटाकर विचलन निकाले जाते हैं। ($d=X-\bar{X}$)

(iii) विचलनों के वर्ग किये जाते हैं। (d^2)

(iv) विचलन-वर्गों की तत्सम्बन्धी आवृत्तियों से गुणा करके उन गुणाओं का जोड़ प्राप्त किया जाता है। (Σfd^2)

(v) अन्त में निम्न सूत्र प्रयुक्त होता है—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}} \text{ या } \sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f(X-\bar{X})^2}{N}}$$

σ संकेत प्रमाप विचलन (standard deviation) के लिए है।

Σfd^2 विचलन-वर्गों व आवृत्तियों की गुणाओं का जोड़ के लिए है।

N या Σf कुल आवृत्ति (total frequencies) के लिए है।

जब समान्तर माध्य सरल पूर्णांक के रूप में होता है तब प्रत्यक्ष रीति का प्रयोग सुविधाजनक होता है।

उदाहरण (Illustration) 11 :

निम्न श्रेणी मे प्रत्यक्ष रीति द्वारा प्रमाप विचलन और उसका गुणांक (Standard Deviation and its Coefficient) ज्ञात कीजिए।

आकार :	10	12	14	16	18	20	22	24
आवृत्ति :	5	8	21	24	18	15	7	2

हल (Solution) :

प्रमाप विचलन की गणना (प्रत्यक्ष रीति)

आकार	आवृत्ति	$\overline{X}$=16·5 से विचलन	विचलन वर्ग	आवृत्ति व विचलन वर्गों की गुणा	आकार×आवृत्ति
X	f	d	d^2	$f\times d^2$	$f\times X$
10 12 14 16 18 20 22 24	5 8 21 24 18 15 7 2	−6·5 −4·5 −2·5 −0·5 +1·5 +3·5 +5·5 +7·5	42·25 20·25 6 25 0·25 2·25 12·25 30·25 56·25	211·25 162·00 131·25 6 00 40 50 183·75 211·75 112·50	50 96 294 384 324 300 154 48
योग	100			1059·00	1650
	N			Σfd^2	ΣfX

समान्तर माध्य

$$\overline{X}=\frac{\Sigma fX}{N}=\frac{1650}{100}=16{\cdot}5$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}=\sqrt{\frac{1059}{100}}=3{\cdot}25$$

प्रमाप विचलन-गुणांक—

$$\text{C. of } \sigma=\frac{\sigma}{\overline{X}} \text{ या } \frac{3{\cdot}25}{16{\cdot}50}=0{\cdot}197$$

अतः प्रमाप विचलन=3·25 ; प्रमाप विचलन गुणांक=0·197

लघु रीतियाँ (Short-Cut Method)—यदि समान्तर माध्य में दशमलव भाग भी होता है तो प्रत्यक्ष रीति द्वारा प्रमाप विचलन निकालने में गणन-क्रिया अत्यन्त जटिल हो जाती है। ऐसी स्थिति में कल्पित मांध्य से विचलन निकालकर निम्न लघु रीति का प्रयोग करना चाहिए—

(i) दिए हुए मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य (A) मान लेना चाहिए। अधिकतर उस मूल्य को A मान लिया जाता है जिसकी आवृत्ति अधिक होती है।

(ii) कल्पित माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलन निकाल लिए जाते हैं। $dx=(X-A)$

(iii) विचलनों व उनकी आवृत्तियों की आपस में गुणा करके गुणनफलों का योग प्राप्त कर लिया जाता है। (Σfdx)

(iv) विचलनों व आवृत्तियों की गुणाओं (fdx) में फिर विचलनों (dx) की गुणा देकर इन गुणनफलों का भी जोड़ (Σfd^2x) निकाल लिया जाता है।

(v) अन्त में निम्न सूत्रों में से एक का प्रयोग किया जाता है—

प्रथम सूत्र—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$$

द्वितीय सूत्र—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N}-(\overline{X}-A)^2}$$

तृतीय सूत्र—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2x-N(\overline{X}-A)^2}{N}}$$

चतुर्थ सूत्र—

$$\sigma=\frac{1}{N}\sqrt{N\,\Sigma fd^2x-(\Sigma fdx)^2}$$

अधिकतर प्रथम सूत्र का प्रयोग करना चाहिए।

मूल्यों के वर्ग निकालकर (अर्थात् $A=0$ मानकर) भी प्रमाप विचलन ज्ञात किया जा सकता है। इसमें वही क्रियाएँ अपनायी जाती हैं जो व्यक्तिगत श्रेणी में। केवल मूल्यों के वर्गों (X^2) को आवृत्ति (f) से गुणा करना पड़ता है। इसका सूत्र इस प्रकार है—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2 f}{N}-(\bar{X})^2} \text{ या } \sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2 f}{N}-\left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2}$$

उदाहरण (Illustration) 12 :

उदाहरण 11 में दिए गये समंकों से लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य एवं प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए—

हल (Solution) :

समान्तर माध्य व प्रमाप विचलन की गणना (लघु रीति)

आकार	आवृत्ति	$A=16$ से विचलन	f व dx का गुणनफल	fdx व dx की गुणा
X	f	dx	fdx	fd^2x
10	5	−6	−30	180
12	8	−4	−32	128
14	21	−2	−42	84
16	24	0	0	0
18	18	+2	+36	72
20	15	+4	+60	240
22	7	+6	+42	252
24	2	+8	+16	128
योग	100		+154−104 =+50	1084
	N		Σfdx	Σfd^2x

समान्तर माध्य

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fdx}{N} \text{ या } 16+\frac{50}{100}=16{\cdot}5$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1084}{100}-\left(\frac{50}{100}\right)^2}$$

$$=\sqrt{10{\cdot}84-{\cdot}25}=\sqrt{10{\cdot}59}$$

$$\therefore \quad \sigma=3{\cdot}25$$

इसी प्रकार अन्य सूत्रों के अनुसार भी प्रमाप विचलन ज्ञात किया जा सकता है।

अविच्छिन्न या सतत श्रेणी (Continuous Series)—अविच्छिन्न श्रेणी में प्रमाप विचलन ज्ञात करने से पूर्व वर्गों के मध्य-बिन्दु निकाले जाते हैं। फिर मध्य-बिन्दुओं को मूल्य मानकर खण्डित श्रेणी की भाँति प्रमाप विचलन का मान निकाल लिया जाता है। अविच्छिन्न समंकमाला में प्रमाप विचलन ज्ञात करने की निम्नलिखित रीतियाँ हैं—

(1) प्रत्यक्ष रीति, (2) लघु रीति,
(3) पद-विचलन रीति, (4) आकलन या योग रीति।

(1) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)—इस रीति के अनुसार, पहले, श्रेणी का ... माध्य निकाला जाता है। इसके बाद प्रत्येक मध्य-बिन्दु में से माध्य घटाकर विचलन प्राप्त ...

जाते हैं, शेष सभी क्रियाएँ उसी प्रकार रहती हैं जिस प्रकार खण्डित रीति में। वही सूत्र अपनाया जाता है—

अर्थात्
$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$$

(2) लघु रीतियाँ (Short-Cut Methods)—

कल्पित माध्य से विचलन निकालकर—इस रीति में खण्डित श्रेणी में प्रयुक्त लघु रीति की भाँति ही क्रियाएँ करनी पड़ती हैं। केवल इतना अन्तर रहता है कि मूल्य के स्थान पर मध्य-बिन्दुओं का प्रयोग होता है। वही सूत्र प्रयुक्त होते हैं जो खण्डित श्रेणी में अपनाए जाते हैं, अर्थात्—

प्रथम सूत्र—
$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$$

द्वितीय सूत्र—
$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N}-(\bar{X}-A)^2}$$

तृतीय सूत्र—
$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2x-N(\bar{X}-A)^2}{N}}$$

चतुर्थ सूत्र—
$$\sigma=\frac{1}{N}\sqrt{N.\Sigma fd^2x-(\Sigma fdx)^2}$$

मूल्य-वर्ग रीति के अनुसार मध्य-बिन्दुओं के वर्ग (X^2) निकालकर भी निम्न सूत्र द्वारा प्रमाप विचलन ज्ञात किया जा सकता है—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2f}{N}-(\bar{X})^2} \text{ या } \sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2f}{N}-\left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2}$$

उदाहरण (Illustration) 13 :

निम्न श्रेणी में प्रत्यक्ष तथा लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए—

'से कम अंक' :	10	20	30	40	50	60	70
परीक्षार्थियों की संख्या :	10	25	50	75	85	95	100

हल (Solution) :

पहले संचयी आवृत्ति श्रेणी को साधारण अविच्छिन्न आवृत्तिमाला में बदल लिया जाएगा। तत्पश्चात् प्रमाप विचलन का परिगणन किया जाएगा।

प्रत्यक्ष रीति द्वारा माध्य व प्रमाप विचलन की गणना

अंक	मध्य बिन्दु	आवृत्ति	$\bar{X}=31$ से विचलन	विचलन वर्ग	f व d^2 की गुणा	कुल अंक
	X	f	d	d^2	fd^2	fX
0–10	5	10	−26	676	6760	50
10–20	15	15	−16	256	3840	225
20–30	25	25	− 6	36	900	625
30–40	35	25	+ 4	16	400	875
40–50	45	10	+14	196	1960	450
50–60	55	10	+24	576	5760	550
60–70	65	5	+34	1156	5780	325
योग		100			25,400	3,100
		$N=\Sigma f$			Σfd^2	ΣfX

माध्य (Mean)	प्रमाप विचलन (Standard Deviation)
$\bar{X}=\frac{\Sigma fX}{N}$	$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$
$=\frac{3100}{100}$	$=\sqrt{\frac{25,400}{100}}$ या $\sqrt{254}$
$\therefore\ \bar{X}=31$ अंक	$\therefore\ \sigma=15\cdot94$ अंक

लघु रीति द्वारा माध्य व प्रमाप विचलन का परिगणन

अंक	मध्य बिन्दु	आवृत्ति	35 से विचलन	f व dx की गुणा	fdx व dx की गुणा
	X	f	dx	fdx	fd^2x
0-10	5	10	−30	−300	9000
10-20	15	15	−20	−300	6000
20-30	25	25	−10	−250	2500
30-40	35	25	0	0	0
40-50	45	10	+10	+100	1000
50-60	55	10	+20	+200	4000
60-70	65	5	+30	+150	4500
योग		100		+450−850 = −400	27,000
				Σfdx	Σfd^2x

समान्तर माध्य	प्रमाप विचलन
$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fdx}{N}$	$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$
$=35+\frac{-400}{100}$	$=\sqrt{\frac{27000}{100}-\left(\frac{-400}{100}\right)^2}$
$=35-4$	$=\sqrt{270-16}$ या $\sqrt{254}$
$\therefore\ \bar{X}=31$ अंक	$\therefore\ \sigma=15\cdot94$ अंक

(3) **पद-विचलन रीति (Step Deviation Method)**—यदि वर्ग-विस्तार समान (equal intervals) हो, तो कल्पित मध्य-बिन्दु से विचलन ज्ञात करते समय समान वर्ग-विस्तार के बराबर समापवर्तक (common factor) निकाल लिया जाता है अर्थात् विचलन वर्ग-विस्तार-इकाइयों (class-interval units) में प्राप्त किये जाते हैं। शेष सभी क्रियाएँ प्रमाप विचलन की लघु रीति की भाँति होती हैं। केवल सूत्र मे समान वर्ग-विस्तार (i) की गुणा दे दी जाती है, अर्थात्—

$$\sigma=i\times\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'x}{N}\right)^2}$$

(4) **आकलन या योग रीति (Summation Method)**—यदि वर्ग-विस्तार समान हो तो आकलन रीति द्वारा भी प्रमाप विचलन का परिगणन हो सकता है। इसकी क्रिया-विधि निम्नलिखित है—

(i) पहले सचयी आवृत्तियाँ बनाकर उनका जोड़ अर्थात् प्रथम सचयी योग (first cumulation) निकाला जाता है। फिर उस जोड़ को कुल आवृत्ति से भाग देकर F_1 प्राप्त

किया जाता है—

$$F_1 = \frac{\Sigma cf_1}{\Sigma f} \text{ या } \frac{\text{प्रथम संचयी योग}}{\text{आवृत्तियों का योग}}$$

(ii) इसी प्रकार सचयी आवृत्तियों के आधार पर द्वितीय संचयी योग (Sum of Second Cumulation) निकाल कर उसमें कुल संख्या का भाग देकर F_2 निकाला जाता है—

$$F_2 = \frac{\Sigma cf_2}{\Sigma f} \text{ या } \frac{\text{द्वितीय संचयी योग}}{\text{कुल आवृत्ति}}$$

(iii) अन्त में निम्न सूत्र प्रयुक्त किया जाता है—

$$\sigma = i \times \sqrt{2F_2 - F_1 - F_1^2}$$

i संकेत वर्गान्तर के विस्तार के लिए है।

F_1 प्रथम संचयी योग को कुल संख्या से भाग देकर प्राप्त की गई संख्या है।

F_2 द्वितीय सचयी योग को कुल संख्या से भाग करने पर प्राप्त संख्या है।

इस रीति का प्रयोग बहुत कम होता है।

उदाहरण (Illustration) 14 :

निम्न आवृत्ति वंटन में माध्य और प्रमाप विचलन (i) पद-विचलन रीति; तथा (ii) आकलन रीति द्वारा ज्ञात कीजिए—

वर्गान्तर :	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35
आवृत्ति :	5	7	18	25	20	4	1

हल (Solution) :

पद विचलन एवं योग रीति द्वारा माध्य व प्रमाप विचलन की गणना

वर्ग	मध्य मूल्य	आवृत्ति	(i) पद विचलन			(ii) योग	
			$A=18$ से पद विचलन	f & $d'x$ की गुणा	$fd'x$ & $d'x$ की गुणा	प्रथम सचयी आवृत्तियाँ	द्वितीय सचयी आवृत्तियाँ
	X	f	$d'x$	$fd'x$	fd'^2x	cf_1	cf_2
1-5	3	5	−3	−15	45	5	5
6-10	8	7	−2	−14	28	12	17
11-15	13	18	−1	−18	18	30	47
16-20	18	25	0	0	0	55	102
21-25	23	20	+1	+20	20	75	177
26-30	28	4	+2	+ 8	16	79	256
31-35	33	1	+3	+ 3	9	80	336
योग		80		+31 − 47 = −16	136	336	940
	$i=5$	$N=\Sigma f$		$\Sigma fd'x$	$\Sigma fd'^2x$	Σcf_1	Σcf_2

(i) पद-विचलन रीति द्वारा—

माध्य

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fd'x}{N}\times i$$

$$=18+\frac{-16}{80}\times 5$$

$$=18-1$$

$$\therefore \bar{X}=17$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma=i\times\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'x}{N}\right)^2}$$

$$=5\times\sqrt{\frac{136}{80}-\left(\frac{-16}{80}\right)^2}$$

$$=5\times\sqrt{1{\cdot}70-{\cdot}04}$$

$$=5\times\sqrt{1{\cdot}66}$$

$=5\times 1{\cdot}288$ या $6{\cdot}44$

(ii) आकलन (Summation) रीति द्वारा—

$$F_1=\frac{\Sigma cf_1}{\Sigma f}=\frac{336}{80}=4{\cdot}2$$

$$F_2=\frac{\Sigma cf_2}{\Sigma f}=\frac{940}{80}=11{\cdot}75$$

माध्य

$$\bar{X}=M-i\,(F_1-1)$$

$$=33-5\,(4{\cdot}2-1)$$

$$=33-5\times 3{\cdot}2$$

$$=33-16{\cdot}0$$

$$\therefore \bar{X}=17$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma=i\times\sqrt{2F_2-F_1-F_1^2}$$

$$=5\times\sqrt{2\times 11{\cdot}75-4{\cdot}2-(4{\cdot}2)^2}$$

$$=5\times\sqrt{23{\cdot}50-4{\cdot}20-17{\cdot}64}$$

$=5\times\sqrt{1{\cdot}66}$ या $5\times 1{\cdot}288$

$$\therefore \sigma=6{\cdot}44$$

उपयुक्त रीति—उपर्युक्त चारों रीतियों में से प्रत्यक्ष रीति का प्रयोग तब किया जाता है जब माध्य पूर्णांक में हो तथा आवृत्तियाँ बहुत कम हों। अधिक आवृत्तियों वाले ऐसे समूह में जिसके माध्य पूर्णांक में न हों, लघु रीति उपयुक्त होती है। वर्ग-विस्तार समान होने पर पद-विचलन रीति का प्रयोग सुविधाजनक रहता है। आकलन रीति का प्रयोग बहुत कम होता है।

चार्लियर की शुद्धता जाँच (Charlier Check)—समान्तर माध्य की भाँति प्रमाप विचलन में भी गणन-सम्बन्धी क्रियाओं की शुद्धता की जाँच करने के लिए चार्लियर की शुद्धता जाँच का प्रयोग किया जा सकता है। इसके लिए पहले, प्रत्येक विचलन या पद-विचलन में 1 जोड़कर $(dx+1)$ या $(d'x+1)$ निकाल लिए जाते हैं। फिर आवृत्ति से गुणा करके जोड़ $\Sigma\{f(dx+1)\}$ या $\Sigma\{f(d'x+1)\}$ प्राप्त कर लिया जाता है तथा $f(dx+1)$ में पुनः $(dx+1)$ की गुणा देकर तथा गुणाओं का जोड़ $\Sigma\{f(dx+1)^2\}$ निकालकर अन्त में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

लघु रीति मे, $\Sigma\{f(dx+1)^2\}=\Sigma fd^2x+2\Sigma fdx+\Sigma f$

पद-विचलन रीति मे, $\Sigma\{f(d'x+1)^2\}=\Sigma fd'^2x+2\Sigma fd'x+\Sigma f$

यदि इस समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हैं तो गणन-क्रिया शुद्ध है अन्यथा नहीं। पिछले उदाहरण (Illustration 14) मे चार्लियर जाँच का प्रयोग निम्न प्रकार होगा—

$$d'x+1=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$f(d'x+1)=-10,\ -7,\ 0,\ 25,\ 40,\ 12,\ 4$$

$$f(d'x+1)^2=\ 20,\ 7,\ 0,\ 25,\ 80,\ 36,\ 16$$

$$\Sigma\{f(d'x+1)\}=-17+81=+64 \quad \Sigma\{f(d'x+1)^2\}=184$$

$$\Sigma\{f(d'x+1)^2\}=\Sigma fd'^2x+2\Sigma fd'x+\Sigma f$$

$$184=136+(2\times -16)+80=216-32=184$$

अतः गणन-क्रिया में कोई अशुद्धि नहीं है।

समूहित प्रमाप विचलन
(Combined Standard Deviation)

जिस प्रकार अलग समूहों के समान्तर माध्य तथा पदों की संख्या की सहायता से पूरे वितरण का समूहित माध्य निकाला जा सकता है उसी प्रकार विभिन्न समूहों के प्रमाप विचलनों, माध्यों व पद-संख्याओं के आधार पर समूहित प्रमाप विचलन का परिगणन किया जा सकता है।

समूहित प्रमाप विचलन ज्ञात करने की निम्न क्रिया है—

(i) पहले सामूहिक समान्तर माध्य ($\bar{X}$) निकाला जाता है।

(ii) प्रत्येक समूह के माध्य में से सामूहिक माध्य घटाकर अन्तर (D_1, D_2 .... आदि) निकाल लिए जाते हैं, अर्थात्—

$$D_1=\bar{X}_1-\bar{X} \qquad D_2=\bar{X}_2-\bar{X} \qquad D_3=\bar{X}_3-\bar{X}$$

(iii) अन्त में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\sigma=\sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2+D_1^2)+N_2(\sigma_2^2+D_2^2)+N_3(\sigma_3^2+D_3^2)\ldots}{N_1+N_2+N_3\ldots}}$$

N_1, N_2, N_3 संकेताक्षर अलग-अलग समूहों में मूल्यों की संख्या के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ संकेताक्षर प्रत्येक समूह के प्रमाप विचलन के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

D_1, D_2, D_3 संकेताक्षर प्रत्येक समूह के माध्य के सामूहिक माध्य से अन्तर के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

उपर्युक्त सूत्र को निम्न रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है—

$$N.\sigma^2=N_1(\sigma_1^2+D_1^2)+N_2(\sigma_2^2+D_2^2)+N_3(\sigma_3^2+D_3^2)+\ldots$$

इस सूत्र की सहायता से समूहित प्रमाप विचलन तथा अन्य समूहों के प्रमाप विचलन ज्ञात होने पर बाकी एक समूह का प्रमाप विचलन निकाला जा सकता है।

उदाहरण (Illustration) 15 :

(i) एक बंटन के तीन भाग हैं जिनका विवरण निम्न प्रकार है—

भाग	पदों की संख्या	समान्तर माध्य	प्रमाप विचलन
1	200	25	3
2	250	10	4
3	300	15	5

सिद्ध कीजिए कि पूरे बंटन का समान्तर माध्य 16 है और प्रमाप विचलन लगभग 7·2 है।
[M. A., Agra, 1966]

(ii) दो उपसमूहों में से एक उपसमूह में 100 वस्तुएँ हैं जिनमें समान्तर मध्यक (mean) और प्रमाप विचलन (standard deviation) क्रमशः 15 और 3 हैं। यदि पूर्ण समूह में 250 वस्तुएं हों जिनमें मध्यक और प्रमाप विचलन क्रमशः 15·6 और $\sqrt{13\cdot44}$ हों तो द्वितीय उपसमूह का मध्यक और प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए। [M. A., Meerut, 1973]

हल (Solution) :

(i)

भाग	संख्या	मध्यक	प्रमाप विचलन
1	$N_1=200$	$\bar{X}_1=25$	$\sigma_1=3$
2	$N_2=250$	$\bar{X}_2=10$	$\sigma_2=4$
3	$N_3=300$	$\bar{X}_3=15$	$\sigma_3=5$
समूहित	$N=750$	$\bar{X}=?$	$\sigma=?$

$$\bar{X}=\frac{\bar{X}_1N_1+\bar{X}_2N_2+\bar{X}_3N_3}{N_1+N_2+N_3}=\frac{(25\times200)+(10\times250)+(15\times300)}{200+250+300}$$

$$\overline{X}=\frac{5000+2500+4500}{750} \text{ या } \frac{12000}{750}=16$$

$$\begin{array}{lllll} D_1=\overline{X}_1-\overline{X} & =25-16 & =9 & D_1^2=81 & \sigma_1^2=9 \\ D_2=\overline{X}_2-\overline{X} & =10-16 & =-6 & D_2^2=36 & \sigma_2^2=16 \\ D_3=\overline{X}_3-\overline{X} & =15-16 & =-1 & D_3^2=1 & \sigma_3^2=25 \end{array}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2+D_1^2)+N_2(\sigma_2^2+D_2^2)+N_3(\sigma_3^2+D_3^2)}{N_1+N_2+N_3}}$$

$$=\sqrt{\frac{200(9+81)+250(16+36)+300(25+1)}{750}}$$

$$=\sqrt{\frac{(200\times90)+(250\times52)+(300\times26)}{750}}$$

$$=\sqrt{\frac{38,800}{750}} \text{ या } \sqrt{51\cdot73}=7\cdot2$$

$\therefore$ समूहित माध्य $=16$ समूहित प्रमाप विचलन $=7\cdot2$

(ii)

	संख्या	मध्यक	प्रमाप विचलन
उपसमूह 1.	$N_1=100$	$\overline{X}_1=15$	$\sigma_1=3$
उपसमूह 2.	$N_2=150$	$\overline{X}_2=?$	$\sigma_2=?$
समूहित	$N=250$	$\overline{X}=15\cdot6$	$\sigma=\sqrt{13\cdot44}$

$$\overline{X}=\frac{\overline{X}N-\overline{X}_1N_1}{N-N_1}=\frac{(15\cdot6\times250)-(15\times100)}{250-100}$$

$$\overline{X}_2=\frac{3900-1500}{150} \text{ या } \frac{2400}{150}=16$$

$$\sigma^2=(\sqrt{13\cdot44})^2=13\cdot44 \qquad \sigma_1^2=9$$

$$D_1=\overline{X}_1-\overline{X}=15-15\cdot6=-\cdot6; \qquad D_1^2=\cdot36$$

$$D_2=\overline{X}_2-\overline{X}=16-15\cdot6=\cdot4 \qquad D_2^2=\cdot16$$

$$N\sigma^2=N_1(\sigma_1^2+D_1^2)+N_2(\sigma_2^2+D_2^2)$$

$$250\times13\cdot44=100(9+\cdot36)+150(\sigma_2^2+\cdot16)$$

$$3360=936+150\sigma_2^2+24=150\sigma_2^2+960$$

$$150\sigma_2^2=3360-960=2400$$

$$\sigma_2^2=\frac{2400}{150} \text{ या } 16 \qquad \sigma_2=\sqrt{16} \text{ या } 4$$

$\therefore$ द्वितीय उपसमूह का समान्तर मध्यक $=16$

द्वितीय उपसमूह का प्रमाप विचलन $=4$

समान्तर माध्य तथा प्रमाप विचलन
(Mean and S. D.)

किसी समंकमाला के यथोचित विश्लेषण के लिए समान्तर माध्य एवं प्रमाप विचलन का प्रयोग अत्यन्त लाभप्रद होता है। दोनों आदर्श माप माने जाते हैं। इन दोनों मापों की सहायता से समूहित प्रमाप विचलन ज्ञात किया जा सकता है तथा एक प्रसामान्य वंटन (Normal Distribution) में निश्चित प्रतिशत पद-मूल्यों की विभिन्न सीमाएँ निर्धारित की जा सकती है।

मूल्य-वर्गों का जोड़ (Sum of Squares of Values)—यदि माध्य, प्रमाप विचलन तथा पदों की संख्या ज्ञात हो तो मूल्यों का जोड़ तथा मूल्य-वर्गों का जोड़ निकाले जा सकते। मूल्य-वर्गों के जोड़ के लिए प्रमाप विचलन की मूल्य-वर्ग रीति का सूत्र अपनाया जाएगा—

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-(\overline{X})^2} \text{ या } \sigma^2=\frac{\Sigma X^2}{N}-\overline{X}^2 \text{ या } \sigma^2+\overline{X}^2=\frac{\Sigma X^2}{N}$$

मूल्य-वर्गों का जोड़ (Sum of Squares of Values)—

व्यक्तिगत श्रेणी— $\Sigma X^2 = N(\sigma^2 + \bar{X}^2)$

आवृत्ति श्रेणी— $\Sigma X^2 f = N(\sigma^2 + \bar{X}^2)$

अशुद्धियों का सुधार (Correction)—यदि किसी गलत मूल्य को शामिल करके प्रमाप विचलन निकाल लिया जाये तो उस गलती को सुधार कर सही प्रमाप विचलन ज्ञात किया जा सकता है। इसके लिए, व्यक्तिगत श्रेणी में, पहले ΣX^2 ज्ञात किया जाता है, फिर इसमें से गलत मूल्य का वर्ग घटाकर और सही मूल्य का वर्ग जोड़कर सही ΣX^2 प्राप्त कर लिया जाता है। फिर संशोधित माध्य का प्रयोग करके सही प्रमाप विचलन मूल्य-वर्ग वाले सूत्र द्वारा ज्ञात कर लिया जाता है। आवृत्ति वंटन में भी गलती को ठीक करने के लिए इसी प्रकार संशोधन किया जाता है। अन्तर केवल यह है कि $\Sigma X^2 f$ में से उस वर्गान्तर के मध्य-विन्दु के वर्ग को घटा देते हैं जिसमें गलत मूल्य स्थित है तथा उस वर्गान्तर के मध्य-विन्दु के वर्ग को जोड़ देते हैं जिसमें सही मूल्य स्थित है। इस प्रकार सही $\Sigma X^2 f$ मालूम हो जाता है। फिर मूल्य-वर्ग सूत्र का प्रयोग करके सही प्रमाप विचलन निकाल लिया जाता है।

$$\text{सही } \Sigma X^2 = \text{गलत } \Sigma X^2 - (\text{गलत पद-मूल्य})^2 + (\text{सही पद मूल्य})^2$$

$$\text{Correct } \Sigma X^2 = \text{Incorrect } \Sigma X^2 - (\text{Wrong Item})^2 + (\text{Correct Item})^2$$

$$\text{सही (Correct) } \sigma = \sqrt{\frac{\text{सही } \Sigma X^2}{N} - (\text{सही माध्य})^2}$$

$$\text{Correct } \sigma = \sqrt{\frac{\text{Correct } \Sigma X^2}{N} - (\text{Correct } \bar{X})^2}$$

उदाहरण (Illustration) 16 :

(i) 100 पदों का औसत (mean) 50 है और उनका प्रमाप विचलन (standard deviation) 4 है। पदों का योग (sum of item values) और उनके वर्गों का योग (sum of squares of item values) मालूम कीजिए। *[B. Com., Gorakhpur, 1972, Meerut, 1969]*

(ii) एक 20 पद वाली श्रेणी के समान्तर माध्य (Mean) तथा प्रमाप विचलन (S. D.) के मूल्य क्रमश: 20 और 5 से० मी० (cm.) हैं। इनका आकलन (calculation) करते समय एक पद जिसका मूल्य 13 है भूल से 30 पढ़ लिया गया। अतः समान्तर माध्य व प्रमाप विचलन के शुद्ध मूल्य (Correct mean and correct standard deviation) ज्ञात कीजिए। *[B. Com., Delhi, 1972, Rajasthan, 1971]*

हल (Solution) :

(i) पद-मूल्यों का योग (Sum of item-values)—

$N = 100;\quad \bar{X} = 50,\quad \sigma = 4 \qquad \Sigma X = \bar{X} \times N$

$\therefore\ \Sigma X = 50 \times 100 = 5{,}000$

मूल्यवर्गों का योग (Sum of squares of values)— ΣX^2

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - (\bar{X})^2};\qquad \sigma^2 = \frac{\Sigma X^2}{N} - \bar{X}^2$$

$\therefore\ N(\sigma^2 + \bar{X}^2) = \Sigma X^2 = 100\,(16 + 2500) = 2{,}51{,}600$

$\therefore\ \Sigma X = 5000;\qquad \Sigma X^2 = 251600$

(ii) $N = 20$; $\bar{X} = 20$; $\sigma = 5$; सही पद-मूल्य $= 13$; अशुद्ध पद $= 30$

$\Sigma X = \bar{X} \times N = 20 \times 20 = 400$

सही योग (Correct ΣX) = गलत ΣX — (अशुद्ध पद) + (सही पद)

$= 400 - 30 + 13 = 383$

$$\text{सही माध्य} = \frac{383}{20} = 19{\cdot}15$$

मूल्य-वर्गों का योग $(\Sigma X^2) = N(\sigma^2 + \bar{X}^2) = 20(25 + 400) = 8500$
वर्गों का सही योग (Correct ΣX^2) = अशुद्ध योग − (अशुद्ध पद)² + (सही पद)²

$$= 8500 - (30)^2 + (13)^2 = 7769$$

$$\text{सही प्रमाप विचलन} = \sqrt{\frac{\text{सही } \Sigma X^2}{N} - (\text{सही } \bar{X})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{7769}{20} - (19{\cdot}15)^2} = \sqrt{388{\cdot}45 - 366{\cdot}7225}$$

∴ सही प्रमाप विचलन $= 4{\cdot}66$

उदाहरण (Illustration) 17 :

(i) 200 परीक्षार्थियों के इतिहास की परीक्षा में प्राप्तांकों के आवृत्ति वंटन (0–5, 5–10, 10–15............ में वर्गित) से समान्तर माध्य (Mean) और प्रमाप विचलन (S. D.) क्रमशः 40 और 15 परिकलित किए गए। बाद में, यह पता चला कि आवृत्ति वंटन की रचना करते समय एक परीक्षार्थी के प्राप्तांक 43 के स्थान पर गलती से 53 पढ़ें गए। सही आवृत्ति वंटन के अनुरूप सही माध्य (Corrected Mean) और सही प्रमाप विचलन (Corrected S. D.) ज्ञात कीजिए। *[M. A., Rajasthan, 1972, I. A. S., 1957]*

(ii) 100 पदों के समान्तर माध्य (Mean) और प्रमाप विचलन (S. D.) क्रमशः 40 और 5 प्राप्त किए गए। बाद में यह पता चला कि दो मूल्यों को गलती से 53 और 24 पढ़ लिया गया था जबकि वास्तविक मूल्य क्रमशः 35 और 42 थे। सही माध्य और सही प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

(i) $N = \Sigma f = 200$; $\bar{X} = 40$; $\sigma = 15$

सही प्राप्तांक 43 वर्गान्तर 40–45 में स्थित है जिसका मध्य-मूल्य 42·5 है।
अशुद्ध प्राप्तांक 53 वर्गान्तर 50–55 में स्थित है जिसका मध्य-मूल्य 52·5 है।

$$\text{सही माध्य (Correct } \bar{X}) = \frac{(40 \times 200) - 52{\cdot}5 + 42{\cdot}5}{200} = \frac{7990}{200} = 39{\cdot}95$$

मूल्य-वर्गों का योग $(\Sigma X^2 f) = N(\sigma^2 + \bar{X}^2) = 200(15^2 + 40^2) = 200(225 + 1600)$
$= 200 \times 1825 = 3{,}65{,}000$

मूल्य-वर्गों का सही योग

$$(\text{Correct } \Sigma X^2 f) = 3{,}65{,}000 - (52{\cdot}5)^2 + (42{\cdot}5)^2$$
$$= 3{,}65{,}000 - 2756{\cdot}25 + 1806{\cdot}25 = 3{,}64{,}050$$

$$\text{Correct } \sigma = \sqrt{\frac{\text{Correct } \Sigma X^2 f}{N} - (\text{Correct } \bar{X})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{364050}{200} - (39{\cdot}95)^2} = \sqrt{1820{\cdot}25 - 1596{\cdot}0025}$$

$$= \sqrt{224{\cdot}2475} = 14.97$$

∴ सही माध्य $= 39{\cdot}95$; सही प्रमाप विचलन $= 14{\cdot}97$

(ii) $N = 100$; $\bar{X} = 40$; $\sigma = 5$; गलत पद-मूल्य = 53 व 24 ; सही पद-मूल्य = 35 व 42
$\Sigma X = N \times \bar{X} = 100 \times 40 = 4000$; $\Sigma X^2 = N(\sigma^2 + \bar{X}^2) = 100(5^2 + 40^2)$
$= 100 \times 1625 = 1{,}62{,}500$

मूल्यों का सही जोड़ (Correct ΣX) $= 4000 - 53 - 24 + 35 + 42 = 4000$

$$\text{सही माध्य (Correct } \bar{X}) = \frac{4000}{100} = 40$$

मूल्य-वर्गों का सही जोड़ $=162500-(53)^2-(24)^2+(35)^2+(42)^2$
$=162500-2809-576+1225+1764=162104$

$$\text{Correct } \sigma=\sqrt{\frac{\text{Correct } \Sigma X^2}{N}-(\text{Correct } \bar{X})^2}=\sqrt{\frac{162104}{100}-(40)^2}$$
$$=\sqrt{1621{\cdot}04-1600}=\sqrt{21{\cdot}04}=4{\cdot}59$$

$\therefore$ सही माध्य $=40$; सही प्रमाप विचलन $=4{\cdot}59$

उदाहरण (Illustration) 18 :

निम्न सतत आवृत्ति बंटन के पद-विचलन रीति द्वारा प्राप्त समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन के मूल्य क्रमशः 41·7 और 14·9 हैं—

$d'x$	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	योग
f	19	3	2	49	24	2	0	1	100

वास्तविक वर्गान्तर निर्धारित कीजिए।

हल (Solution) :

पद-विचलन रीति (Step Deviation Method)

$d'x$	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	योग	
f	19	3	2	49	24	2	0	1	100	N
$fd'x$	−57	−6	−2	0	+24	+4	0	+4	−33	$\Sigma fd'x$
fd'^2x	171	12	2	0	24	8	0	16	233	$\Sigma fd'^2x$

$$\sigma=i\times\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'x}{N}\right)^2}$$
$$14{\cdot}9=i\times\sqrt{\frac{233}{100}-\left(\frac{-33}{100}\right)^2}$$
$$14{\cdot}9=i\times\sqrt{2{\cdot}33-{\cdot}1089}$$
$$=i\times1{\cdot}49$$
$$\therefore\ i=\frac{14{\cdot}9}{1{\cdot}49} \text{ या } 10$$

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fd'x}{N}\times i$$
$$41{\cdot}7=A+\frac{-33}{100}\times10$$
$$41{\cdot}7=A-3{\cdot}3$$
$$\therefore\ A=45{\cdot}0$$

$\therefore$ कल्पित माध्य (मूल बिन्दु) $=45$

$d'x$	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4
मध्य-बिन्दु	15	25	35	45	55	65	75	[illegible]

$$\text{वर्ग सीमाएँ}=X\pm\frac{i}{2} \text{ या } X\pm\frac{10}{2}$$

वास्तविक वर्गान्तर निम्न प्रकार हैं—

10–20 20–30 30–40 40–50 50–60 60–70 70–80 80–90

उदाहरण (Illustration) 19 :

निम्न सारणी में 100 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त प्राप्तांक दिए गए हैं—

प्राप्तांक	अंक (Digits-Division of Class-Intervals)										योग
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0—9	2		4		3	1			1	1	12
10—19	5	3		4		2			1		15
20—29		1	7	8	10	5		4	3	2	40
30—39			3	5	10	2		1		1	22
40—49			4	3	2		2				11

इस प्रकार 4 अंक 3 विद्यार्थियों ने, 13 अंक 4 ने, 35 अंक 2 विद्यार्थियों ने अ. इसी प्रकार······प्राप्त किये हैं। प्राप्तांकों का माध्य और प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए—

(क) केवल जोड़ों का प्रयोग करते हुए ;

(ख) सम्पूर्ण सामग्री (whole data) का प्रयोग करके।

हल (Solution) :

(क) केवल योगों का प्रयोग करके (By using totals only)—

माध्य व प्रमाप विचलन का गणन (मध्यविचलन रीति)

प्राप्तांक	मध्य-मूल्य	आवृत्ति	$A=24.5$ से विचलन	f व $d'x$ की गुणा	$fd'x$ व $d'x$ की गुणा
	X	f	$d'x$	$fd'x$	fd'^2x
0-9	4·5	12	−2	−24	48
10-19	14·5	15	−1	−15	15
20-29	24·5	40	0	0	0
30-39	34·5	22	+1	+22	22
40-49	44·5	11	+2	+22	44
योग	$i=10$	100 N		+44−39 $\Sigma fd'x=+5$	129 $\Sigma fd'^2x$

माध्य

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fd'x}{N}\times i$$

$$=24.5+\frac{5}{100}\times 10$$

$$=24.5+0.5$$

$$\therefore \quad \bar{X}=25 \text{ अंक}$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma=i\times\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'x}{N}\right)^2}$$

$$\sigma=10\times\sqrt{\frac{129}{100}-\left(\frac{5}{100}\right)^2}$$

$$=10\times\sqrt{1.29-0.0025}$$

$$=10\times\sqrt{1.2875}=10\times 1.134$$

$$\therefore \quad \sigma=11.34 \text{ अंक}$$

(ख) सम्पूर्ण सामग्री का उपयोग करके (By using the whole data)—प्रस्तुत सारणी मे प्रत्येक वर्ग में 0 से 9 तक 1, 1 की इकाइयों में अंको का विभाजन दिया हुआ है। प्रथम वर्ग (0—9) मे 12 छात्र हैं जिनमें से 2 के प्राप्तांक 0+0=0 हैं, 4 के 0+2=2 हैं, 3 के 0+4=4 हैं। 1, 1 के क्रमशः 5, 8 व 9 अंक हैं। इसी प्रकार अन्तिम वर्ग 40—49 में 4 के 40+2=42 अंक हैं और 3 के 40+3=43 अंक हैं।

पूरी सामग्री के आधार पर समान्तर माध्य प्रत्यक्ष रीति द्वारा तथा प्रमाप विचलन मूल्य-वर्ग वाले सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाएगा। प्रत्येक कोष्ठक (Cell) की आवृत्ति की तत्सम्बन्धी मूल्य से गुणा करके fX निकाला जाएगा जिसे कोष्ठक में बाईं ओर लिख दिया जाएगा। प्रत्येक के fX को फिर सम्बद्ध X से गुणा करके X^2f प्राप्त किया जाएगा जिसे कोष्ठक में दायीं ओर लिख दिया जाएगा। अगली सारणी में पहले कोष्ठक में $f=2$, $X=0$, $\therefore fX=0$; $X^2f=fX\times X=0$, अगले कोष्ठक में $fX=2\times4=8$, $X^2f=2\times2\times4=16$......... अन्तिम कोष्ठक में $fX=46\times2=92$ $X^2f=92\times46=4232$.

प्राप्तांक	अंक (वर्गान्तरों के समान) 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	योग f	कुल आकार fX	मूल्य वर्गों का जोड़ X^2f
0—9	0 / 2 / 0		8 / 4 / 16		12 / 3 / 48	5 / 1 / 25			8 / 1 / 64	9 / 1 / 81	12	42	234
10—19	50 / 5 / 500	33 / 3 / 363		32 / 4 / 676		30 / 2 / 450			18 / 1 / 324		15	183	2313
20—29		21 / 1 / 441	154 / 7 / 3388	184 / 8 / 4232	240 / 10 / 5760	125 / 5 / 3125		108 / 4 / 2916	84 / 3 / 2352	58 / 2 / 1682	40	974	23896
30—39			96 / 3 / 3072	165 / 5 / 5445	340 / 10 / 11560	70 / 2 / 2450		37 / 1 / 1369		39 / 1 / 1521	22	747	25417
40—49			168 / 4 / 7056	129 / 3 / 5547	88 / 2 / 3872		32 / 2 / 4232				11	577	20707
										योग	$N=100$	$\Sigma fX=2423$	$\Sigma X^2f=72{,}567$

समान्तर माध्य	प्रमाप विचलन
$\bar{X}=\frac{\Sigma fX}{N}$	$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2 f}{N}-(\bar{X})^2}=\sqrt{\frac{72567}{100}-(24.23)^2}$
$=\frac{2423}{100}=$ **24·23 अंक**	$=\sqrt{725.67-587.0929}=\sqrt{138.58}$
	$\therefore\ \sigma=$ **11·77 अंक**

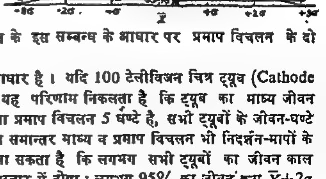
पद-सीमाओं का निर्धारण—एक प्रसामान्य या समभित (Normal or Symmetrical) वंटन में माध्य एव प्रमाप विचलन के आधार पर वे सीमाएँ निर्धारित की जा सकती हैं जिनमें निश्चित पद-मूल्य पाये जाने की निश्चित सम्भावनाएँ होती हैं। प्रतिचयन एवं निर्वचन में ये सीमाएँ बहुत महत्त्वपूर्ण होती हैं। ये सीमाएँ निम्न प्रकार हैं—

विशिष्ट सीमाओं के अधीन सम्मिलित पद-मूल्यों का प्रतिशत

न्यूनतम सीमा	अधिकतम सीमा	सीमाओं में समाविष्ट पद-मूल्यों का प्रतिशत
$\bar{X}-1\sigma$	$\bar{X}+1\sigma$	68·27%
$\bar{X}-2\sigma$	$\bar{X}+2\sigma$	95 45%
$\bar{X}-3\sigma$	$\bar{X}+3\sigma$	99·73%

इस प्रकार $\bar{X}\pm\sigma$ के अन्तर्गत श्रेणी के लगभग $\frac{2}{3}$ मूल्य सम्मिलित होते हैं; तथा $\bar{X}\pm3\sigma$ में लगभग सभी पद आ जाते हैं। इन सीमाओं का आधार सामान्य-वक्र (Normal curve) है जिसमें माध्य केन्द्र में होता है। वक्र के दोनों ओर के मोड़-बिन्दुओं (Points of Inflection) से लम्ब डालने पर $\pm\sigma$ द्वारा निर्धारित सीमाएँ ज्ञात हो जाती हैं। बायीं ओर न्यूनतम सीमाएँ तथा दाहिनी ओर अधिकतम सीमाएँ होती हैं। $\bar{X}\pm\sigma$ के अन्दर 68·27% क्षेत्रफल आ जाता है। इसी प्रकार $\bar{X}\pm3\sigma$ मे लगभग सम्पूर्ण क्षेत्रफल शामिल हो जाता है। निम्नांकित चित्र से ये सीमाएँ स्पष्ट हो जायेंगी—

निश्चित प्रमाप विचलन सीमाओं में सम्मिलित प्रसामान्य वक्र के क्षेत्रफल का अनुपात



प्रमाप विचलन एवं प्रसामान्य वंटन के इस सम्बन्ध के आधार पर प्रमाप विचलन के दो अन्य महत्त्वपूर्ण उपयोग हैं—

(i) यह सम्बन्ध पूर्वानुमान का आधार है। यदि 100 टेलीविजन चित्र ट्यूब (Cathode Ray Tubes) के प्रतिदर्श की जाँच से यह परिणाम निकलता है कि ट्यूब का माध्य जीवन (average burning life) 500 घण्टे तथा प्रमाप विचलन 5 घण्टे है, सभी ट्यूबों के जीवन-घण्टे प्रसामान्य रूप से वितरित हैं, पूरे समग्र का समान्तर माध्य व प्रमाप विचलन भी निदर्शन-मापों के समान हैं तो यह सहज अनुमान लगाया जा सकता है कि लगभग सभी ट्यूबों का जीवन काल $\bar{X}\pm3\sigma$ अर्थात् 350—650 घण्टो के विस्तार में होगा; लगभग 95% का जीवन क्रम $\bar{X}\pm2\sigma$ अर्थात् 400—600 घण्टो में तथा $\frac{2}{3}$ का $\bar{X}\pm1\sigma$ अर्थात् 450—550 घण्टों में वितरित होगा। इस प्रकार के पूर्वानुमान की शुद्धता बहुत कुछ प्रतिदर्श के आकार पर भी निर्भर होती है।

(ii) इस सम्बन्ध के आधार पर विभिन्न वंटनों के अलग-अलग व्यक्तिगत पद-मूल्यों की भी तुलना की जा सकती है। ऐसा करने के लिए यथा-प्राप्त समंकों (Raw Scores) को समायोजित या मानकीकृत समंकों (Adjusted or Standardised scores) में परिणत

लिया जाता है। इस प्रकार परिणीत समंक के लिए Z संकेत प्रयुक्त होता है। वस्तुतः Z-समंक व्यक्तिगत मूल्य (X) और माध्य-मूल्य (μ or $\bar{X}$) के अन्तर को प्रमाप विचलन की इकाइयों में व्यक्त करता है। Z-score निम्न सूत्रानुसार ज्ञात किया जाता है—

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \text{ or } \frac{X-\bar{X}}{S}$$

μ व σ समग्र का माध्य व प्रमाप विचलन के लिए प्रयुक्त हुए हैं;

$\bar{X}$ व S प्रतिदर्श का माध्य व प्रमाप विचलन के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

शैक्षणिक व मनोवैज्ञानिक क्षेत्र में विभिन्न छात्रों के परीक्षा-परिणामों की न्यायोचित तुलना में Z-scores का काफी प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 20 :

बीस वर्षों के संसार के स्वर्ण-उत्पादन (10 लाख पौण्ड में) के समंकों से माध्य व प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए—

92	94	95	93	86	78	72	68	67	66
77	81	82	88	94	102	107	116	126	96

माध्य के दोनों ओर $\pm\sigma$, $\pm2\sigma$, $\pm3\sigma$ के अन्तर पर कितने प्रतिशत मूल्य स्थित हैं? इस परिणाम के आधार पर क्या आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वंटन प्रसामान्य (normal) है?
[M. A., Banaras, 1962]

हल (Solution) :

$\bar{X}$ व σ का परिकलन

पद-मूल्य X	$A=90$ से विचलन dx	विचलन-वर्ग d^2x
92	+2	4
94	+4	16
95	+5	25
93	+3	9
86	−4	16
78	−12	144
72	−18	324
68	−22	484
67	−23	529
66	−24	576
77	−13	169
81	−9	81
82	−8	64
88	−2	4
94	+4	16
102	+12	144
107	+17	289
116	+26	676
126	+36	1296
96	+6	36
योग ($N=20$)	−135+115 = −20 (Σdx)	4902 (Σd^2x)

समान्तर माध्य

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma dx}{N}$$

$$=90+\frac{-20}{20} \text{ या } 89$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-(\bar{X}-A)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{4902}{20}-(89-90)^2}$$

$$=\sqrt{245{\cdot}1-1} \text{ या } \sqrt{244{\cdot}1}$$

$\therefore$ $\sigma=$**15·62**

$\bar{X}+\sigma=89+15{\cdot}62=104{\cdot}62$

$\bar{X}-\sigma=89-15{\cdot}62=73{\cdot}38$

73·38 से अधिक लेकिन 104·62 से कम पद-मूल्य $=13$

$\bar{X}\pm\sigma$ के अन्तर्गत आने वाले पद-मूल्यों का प्रतिशत $=\frac{13}{20}\times100=65\%$

$\bar{X}+2\sigma=89+31{\cdot}24=120{\cdot}24$

$\bar{X}-2\sigma=89-31{\cdot}24=57{\cdot}76$

57·76 से अधिक किन्तु 120·24 से कम पद-मूल्य $=19$

$\bar{X}\pm\sigma$ के अन्तर्गत आने वाले पद-मूल्यों का प्रतिशत $=\frac{19}{20}\times100=95\%$

$\bar{X}+3\sigma=89+46{\cdot}86=135{\cdot}86$

$\bar{X}-3\sigma=89-46{\cdot}86=42{\cdot}14$

42·14 से अधिक लेकिन 135·86 से कम मूल्य $=20$

$\bar{X}\pm3\sigma$ के अन्तर्गत आने वाले पद-मूल्यों का प्रतिशत $=\frac{20}{20}\times100$ या 100%

अतः निश्चित सीमाओं के अन्तर्गत सम्मिलित पद-मूल्यों के प्रतिशत निम्न प्रकार हैं—

$\bar{X}\pm 1\sigma=65\%$; $\bar{X}\pm 2\sigma=95\%$; $\bar{X}\pm 3\sigma=100\%$

बटन लगभग प्रसामान्य (nearly normal) प्रतीत होता है।

उदाहरण (Illustration) 21 :

एक कॉलर निर्माता नवयुवकों को आकर्षित करने के उद्देश्य से एक नवीन प्रकार के कॉलर का उत्पादन करने की योजना पर विचार कर रहा है। कॉलिज-छात्रों के एक प्रतिनिधि प्रतिदर्श-समूह के मापों पर आधारित गर्दन की परिधि के आँकड़े निम्न प्रकार हैं—

मध्य-मूल्य (इंच) :	12·5	13·0	13·5	14·0	14·5	15·0	15·5	16·0	16·5
छात्रों की संख्या :	4	19	30	63	66	29	18	1	1

प्रमाप विचलन (S. D.) का परिकलन कीजिए और $\bar{X}\pm 3\sigma$ की कसौटी (सीमाओं) का प्रयोग करते हुए कॉलर का अधिकतम और न्यूनतम आकार बतलाइए जो अपने सभी ग्राहकों की आवश्यकता पूरी करने के लिए उसे बनाने चाहिएँ। इस बात का ध्यान रखिए कि कॉलर-माप, गर्दन-माप से, औसत रूप से, $\frac{3}{4}$ इंच ढीला रखा जाएगा। *[M.A., Delhi, 1962, B.Com., Pb., 1973]*

हल (Solution) :

समान्तर माध्य व प्रमाप विचलन का गणन (लघु रीति)

मध्य मूल्य (इंच)	आवृत्ति	14·0 से विचलन	f व dx की गुणा	fdx व dx की गुणा
X	f	dx	fdx	fd^2x
12·5	4	−1·5	−6·0	9·0
13·0	19	−1·0	−19·0	19·0
13·5	30	−0·5	−15·0	7·5
14·0	63	0·0	0·0	0·0
14·5	66	+0·5	+33·0	16·5
15·0	29	+1·0	+29·0	29·0
15·5	18	+1·5	+27·0	40·5
16·0	1	+2·0	+2·0	4·0
16·5	1	+2·5	+2·5	6·25
योग	231		+93·5−40·0 =53·5	131·75
	N		Σfdx	Σfd^2x

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fdx}{N}$$
$$=14{\cdot}0+\frac{53{\cdot}5}{231}$$
$$=14{\cdot}0+{\cdot}23$$
$$=14{\cdot}23 \text{ इन्च}$$

कॉलर का अधिकतम आकार
$$=\bar{X}+3\sigma+0{\cdot}75$$
$$=14{\cdot}23+3\times{\cdot}72+0{\cdot}75$$
$$=17{\cdot}14 \text{ इन्च}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{131{\cdot}75}{231}-\left(\frac{53{\cdot}5}{231}\right)^2}$$
$$=\sqrt{{\cdot}570-{\cdot}053} \text{ या } \sqrt{{\cdot}517}$$
$$=0{\cdot}72 \text{ इन्च}$$

न्यूनतम आकार
$$=\bar{X}-3\sigma+0{\cdot}75$$
$$=14{\cdot}23-3\times{\cdot}72+0{\cdot}75$$
$$=12{\cdot}82 \text{ इन्च}$$

अतः कॉलर के अधिकतम और न्यूनतम आकार क्रमशः *17·14* और *12·82* इंच हैं।

उदाहरण (Illustration) 22 :

किसी परीक्षा में दो परीक्षार्थियों के कुल प्राप्तांक समान आए और उन दोनों को एक ही स्थान दिया गया। निम्न अंकों का प्रयोग करके यह निर्णय दीजिए कि उनका यह कोटिकरण न्यायोचित था या किसी एक का परीक्षाफल दूसरे से अच्छा है।

प्रत्याशी	मूल अंक: अंग्रेजी	मूल अंक: गणित	योग
A	84	75	159
B	74	85	159

अंग्रेजी में माध्य प्राप्तांक 60 है और प्रमाप विचलन (S. D.) 13 है।
गणित में माध्य प्राप्तांक 50 है और प्रमाप विचलन (S. D.) 11 है।

हल (Solution) :

दोनों परीक्षार्थियों के प्राप्तांकों की तुलना करने के लिए यथा-प्राप्त समंकों को Z-समंकों में बदला जाएगा—

$$Z=\frac{X-\bar{X}}{\sigma}$$

Z-अंक

A

अंग्रेजी—

$$\frac{84-60}{13}=1{\cdot}85$$

गणित—

$$\frac{75-50}{11}=2{\cdot}27$$

कुल Z-अंक—

$$1{\cdot}85+2{\cdot}27=4{\cdot}12$$

B

अंग्रेजी—

$$\frac{74-60}{13}=1{\cdot}08$$

गणित—

$$\frac{85-50}{11}=3{\cdot}18$$

कुल Z-अंक—

$$1{\cdot}08+3{\cdot}18=4{\cdot}26$$

अतः B का परीक्षाफल A से अच्छा है।

प्रथम क्रमानुसार प्राकृतिक अंकों का प्रमाप विचलन (Standard deviation of first 'N' natural numbers)—यदि 1 से लेकर क्रमानुसार कुछ प्राकृतिक संख्याओं का प्रमाप विचलन ज्ञात करना हो तो निम्न सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है—

$$\sigma=\sqrt{\tfrac{1}{12}(N^2-1)}$$

उदाहरणार्थ 1, 2, 3, 4, 5—इन प्रथम 5 अंकों का प्रमाप विचलन $\sigma=\sqrt{\tfrac{1}{12}(5^2-1)}=\sqrt{2}=1{\cdot}414$ हुआ। प्रत्यक्ष रीति से प्रमाप विचलन निकालकर इस गुण का परीक्षण किया जा सकता है।

प्रमाण (Proof)—मूल्य-वर्ग रीति के अनुसार $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$

ΣX संकेत प्रथम N प्राकृतिक अंकों के योग के लिए प्रयुक्त हुआ है।

ΣX^2 संकेत प्रथम N प्राकृतिक अंकों के वर्गों के योग के लिए प्रयुक्त हुआ है।

$$\Sigma X=1+2+3+\ldots N=\frac{N(N+1)}{2}$$

$$\Sigma X^2=1^2+2^2+3^2+\ldots N^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\therefore \quad \sigma=\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{N\times 6}-\left[\frac{N(N+1)}{N\times 2}\right]^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(N+1)(2N+1)}{6}-\left(\frac{N+1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{N+1}{2}\right)\left[\frac{(2N+1)}{3}-\left(\frac{N+1}{2}\right)\right]}$$

$$\therefore \quad \sigma=\sqrt{\frac{N+1}{2}\left[\frac{4N+2-3N-3}{6}\right]}=\sqrt{\left(\frac{N+1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{6}\right)}$$

$$\therefore \quad \sigma=\sqrt{\tfrac{1}{12}(N^2-1)}$$

विचरण-गुणांक
(Coefficient of Variation)

दो या दो से अधिक श्रेणियों में विचरण (Variation) की तुलना करने के लिए विचरण गुणांक (Coefficient of Variation) का प्रयोग किया जाता है। विचरण-गुणाक वस्तुतः प्रमाप विचलन गुणांक का प्रतिशत रूप है अर्थात् प्रमाप विचलन को समान्तर माध्य से भाग देकर भजनफल में 100 की गुणा करने से प्राप्त प्रतिशत ही विचरण-गुणांक होता है। इस सापेक्ष माप का सर्वप्रथम प्रयोग करने का श्रेय प्रसिद्ध वैज्ञानिक कार्ल पियर्सन को है। यही कारण है कि इसे कार्ल पियर्सन का विचरण गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Variation) कहते हैं। कार्ल पियर्सन के शब्दों में विचरण गुणांक 'माध्य में होने वाला प्रतिशत विचरण है जबकि प्रमाप विचलन को माध्य में होने वाला कुल विचरण माना जाता है।'[1] इस प्रकार, यदि $\bar{X}$ में विचरण σ के बराबर है तो 1 में $\frac{\sigma}{\bar{X}}$ हुआ तथा 100 में $\frac{\sigma}{\bar{X}}\times 100$ हुआ। अतः विचरण-गुणांक का सूत्र निम्न है—

$$\text{विचरण-गुणाक (C. of V.)}=\frac{\sigma}{\bar{X}}\times 100 \text{ या } [\text{C. of } \sigma]\times 100$$

विचरण-गुणांक का प्रयोग दो समूहों की अस्थिरता (variability), सजातीयता (homogeneity), स्थिरता (stability), एकरूपता (uniformity) अथवा संगति (consistency) की तुलना करने में किया जाता है।

जिस समंकश्रेणी का विचरण-गुणाक अधिक होता है उसमे विचरण अधिक होता है अर्थात् वह अधिक अस्थिर (variable) मानी जाती है। इसके विपरीत जिस श्रेणी में विचरण गुणांक कम होता है वह अधिक स्थिर (stable), एकरूप (uniform), सजातीय (homogeneous) अथवा संगत (consistent) कहलाती है। उदाहरणार्थ, इसी अध्याय के उदाहरण 10 में श्रेणी A का C. of V. $=\frac{51\cdot5}{260\cdot1}\times 100$ या 19·8% तथा B का C. of V. $=\frac{14\cdot96}{105\cdot9}\times 100=14\cdot1\%$। अतः A में अधिक विचरण है अथवा B अधिक स्थिर, सजातीय या एकरूप है।

प्रसरण
(Variance)

प्रसरण (Variance) भी प्रमाप विचलन पर आधारित माप है। वास्तव में यह किसी

[1] Coefficient of variation is the 'percentage variation in the mean, the standard deviation being treated as the total variation in the mean.' —Karl

श्रेणी के प्रमाप विचलन का वर्ग (square of standard deviation) होता है। इसे द्वितीय अपकिरण घात (second moment of dispersion) भी कहते हैं।

यदि किसी समंकमाला का प्रमाप विचलन ज्ञात हो तो उसका वर्ग करके प्रसरण निकाला जा सकता है तथा प्रसरण का वर्गमूल निकाल कर प्रमाप विचलन प्राप्त किया जा सकता है, अर्थात्—

$$\text{प्रसरण (Variance or V)} = \sigma^2 \text{ तथा } \sigma = \sqrt{V}$$

यदि व्यक्तिगत, खण्डित या अविच्छिन्न श्रेणी में प्रसरण ज्ञात करना हो तो प्रमाप विचलन की विधि अपनायी जाती है, अन्तर केवल इतना होता है कि प्रमाप विचलन का सूत्र लिखकर वर्गमूल का चिह्न नहीं लगाया जाता। उदाहरण (Illustration) 20 में प्रसरण का मूल्य 244·1 है।

उदाहरण (Illustration) 23.

किसी वर्ष के सूत व जूट अंशों (Shares) के मूल्य सूचकांक निम्न प्रकार थे—

माह	सूत-अंश (सूचकांक)	जूट-अंश (सूचकांक)	माह	सूत-अंश (सूचकांक)	जूट-अंश (सूचकांक)
जनवरी	188	131	जुलाई	184	127
फरवरी	178	130	अगस्त	185	127
मार्च	173	130	सितम्बर	211	130
अप्रैल	164	129	अक्टूबर	217	137
मई	172	129	नवम्बर	232	140
जून	183	120	दिसम्बर	240	142

आपकी राय में दोनों अंशों में से किसके मूल्य में विचरण अधिक है ?

[B. Com., Agra, 1966, Banaras, 1960, M. Com., Agra, 1964]

हल (Solution) :

समान्तर माध्य व प्रमाप विचलन का परिकलन

माह	सूत के अंश			जूट के अंश		
	सूचकांक	विचलन	विचलन-वर्ग	सूचकांक	विचलन	विचलन-वर्ग
	X	d	d^2	X	d	d^2
जनवरी	188	−6	36	131	0	0
फरवरी	178	−16	256	130	−1	1
मार्च	173	−21	441	130	−1	1
अप्रैल	164	−30	900	129	−2	4
मई	172	−22	484	129	−2	4
जून	183	−11	121	120	−11	121
जुलाई	184	−10	100	127	−4	16
अगस्त	185	−9	81	127	−4	16
सितम्बर	211	+17	289	130	−1	1
अक्टूबर	217	+23	529	137	+6	36
नवम्बर	232	+38	1444	140	+9	81
दिसम्बर	240	+46	2116	142	+11	121
योग	2327		6797	1572		402
	ΣX		Σd^2	ΣX		Σd^2

सूत-अंश	जूट-अंश
$\bar{X}=\frac{\Sigma X}{N}=\frac{2327}{12}=193\cdot9$	$\bar{X}=\frac{\Sigma X}{N}=\frac{1572}{12}$
$\therefore\ \bar{X}=194$	$=131$
$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$ या $\sqrt{\frac{6797}{12}}$	$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$ या $\sqrt{\frac{402}{12}}$
$=\sqrt{566\cdot42}=23\cdot8$	$=\sqrt{33\cdot5}=5\cdot79$

विचरण-गुणाक

C. of V. $=\frac{\sigma}{\bar{X}}\times100=\frac{23\cdot8}{194}\times100$	C. of V. $=\frac{\sigma}{\bar{X}}\times100=\frac{5\cdot79}{131}\times100$
$=12\cdot3\%$	$=4\cdot42\%$

सूत-अशों के मूल्यों में जूट-अंशों की तुलना में अधिक विचरण है।

उदाहरण (Illustration) 24 :

किसी उद्योग की दो फर्मों A और B की मासिक मजदूरी के विश्लेषण से निम्न परिणाम प्राप्त हुए—

	फर्म A	फर्म B
मजदूरों की सख्या	586	648
औसत मासिक मजदूरी	Rs. 52·5	Rs. 47·5
प्रसरण (Variance)	100	121

(i) कौन-सी फर्म—A या B—मासिक मजदूरी के रूप में अधिक धनराशि देती है ?

(ii) किस फर्म—A या B—में मजदूरी मे अधिक विचरण (greater variability) है ?

(iii) दोनों फर्मों के मजदूरों की एक साथ मिलाकर (क) औसत मासिक मजदूरी और (ख) मजदूरी में विचरण (variability) के माप क्या होगे ?

[I. A. S., 1961, P. C. S., 1969, M. Com , Jabalpur, 1962, B. Com., Gorakhpur, 1972]

हल (Solution) :

(i) कुल मजदूरी = माध्य मजदूरी × मजदूरों की सख्या

फर्म A द्वारा भुगतान की गई कुल मजदूरी Rs. 52·5 × 586 = Rs. 30,765

फर्म B द्वारा दी गई कुल मजदूरी . Rs. 47·5 × 648 = Rs. 30,780

∴ फर्म B अधिक कुल मजदूरी देती है।

(ii) विचरण-गुणांक (C. of V.) $=\frac{\sigma}{\bar{X}}\times100$

फर्म A	फर्म B
$\sigma=\sqrt{\text{Var.}}$ या $\sqrt{100}=10$	$\sigma=\sqrt{\text{Var.}}=\sqrt{121}=11$
C. of V. $=\frac{10}{52\cdot5}\times100=19\cdot1\%$	C. of V. $=\frac{11}{47\cdot5}\times100=23\cdot2\%$

फर्म B मे व्यक्तिगत मजदूरी में अधिक विचरण है।

(iii) समूहित माध्य तथा समूहित विचरण—

$$\text{समूहित माध्य या } \bar{X}=\frac{\bar{X}_1N_1+\bar{X}_2N_2}{N_1+N_2}$$

या $$\frac{(52\cdot5\times586)+(47\cdot5\times648)}{586+648}=\frac{30765+30780}{1234}=49\cdot9$$

समूहित विचरण—

$$D_1=\bar{X}_1-\bar{X}=52\cdot5-49\;9=2\cdot6$$
$$D_2=\bar{X}_2-\bar{X}=47\cdot5-49\cdot9=-2\cdot4$$

समूहित प्रमाप विचलन—

$$\sigma=\sqrt{\frac{N_1\,(\sigma_1^2+D_1^2)+N_2\,(\sigma_2^2+D_2^2)}{N_1+N_2}}$$
$$=\sqrt{\frac{586\,[100+(2\cdot6)^2]+648\,[121+(-2\cdot4)^2]}{586+648}}$$
$$=\sqrt{\frac{586\times106\cdot76+648\times126\cdot76}{1234}}=\sqrt{\frac{62561\cdot36+82140\;48}{1234}}$$
$$=\sqrt{\frac{144701\cdot84}{1234}}\text{ या }\sqrt{117\cdot26}=10\cdot83$$

$$\text{विचरण-गुणांक (C. of V.)}=\frac{\sigma}{\bar{X}}\times100\text{ या }\frac{10\cdot8}{49\cdot9}\times100=21\cdot64$$

∴ A व B का समूहित माध्य $=49\cdot9$

तथा A व B का समूहित विचरण $=21\cdot64\%$

प्रमाप विचलन के बीजगणितीय गुण (Algebraic Properties of Standar Deviation)—प्रमाप विचलन में निम्नलिखित प्रमुख बीजगणितीय गुण पाये जाते हैं—

(i) **सामूहिक प्रमाप विचलन**—विभिन्न उपवर्गों के प्रमाप विचलनों के आधार पर पू ..समूह का सामूहिक प्रमाप विचलन मालूम किया जा सकता है।

(ii) **क्रमानुसार प्राकृतिक अंकों ('n' natural numbers) का प्रमाप विचलन**—नि सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है—

$$\sigma=\sqrt{\tfrac{1}{12}\,(n^2-1)}$$

(iii) समान्तर माध्य से विचलन के लिए जाने के कारण प्रमाप विचलन मे विचलन-व का जोड़ न्यूनतम होता है। [$\Sigma d^2=$ Minimum] पिछले अध्याय मे समान्तर माध्य के गुणों विश्लेषण में इस विशेषता को उदाहरण सहित स्पष्ट किया जा चुका है।

(iv) **प्रमाप विचलन पर गणितीय क्रियाओं का प्रभाव**—किसी समक-श्रेणी के प्रत्ये पद-मूल्य में एक स्थिरांक या अचर-मूल्य (Constant) जोड़ने, घटाने, गुणा करने या भाग कर का उस श्रेणी के माध्य और प्रमाप विचलन पर निम्नांकित प्रभाव पड़ता है—

(क) **स्थिरांक जोड़ने पर**—श्रेणी के प्रत्येक मूल्य में एक अचर-मूल्य (Constant 'a' जोड़ने पर, समान्तर माध्य अचर-मूल्य से बढ़ जाता है ($\bar{X}+a$) परन्तु प्रमाप विचलन (σ पूर्ववत् रहता है।

(ख) **स्थिरांक घटाने पर**—श्रेणी के प्रत्येक मूल्य में से यदि किसी अचर मूल्य (a) घटा दिया जाए तो समान्तर माध्य उस मूल्य से कम हो जाता है ($\bar{X}-a$) परन्तु प्रमाप विचल (σ) पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। अगले उदाहरण से ये स्थितियाँ स्पष्ट हो जाएँगी—

मूल समंक (X)	विचलन dx	वि० वर्ग d^2x
7	−3	9
9	−1	1
9	−1	1
15	+5	25
$\Sigma X=40$		$\Sigma d^2x=36$

$N=4 \quad \sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}}$

$\bar{X}=10 \quad \sigma=\sqrt{\frac{36}{4}}=3$

(क) अचर मूल्य (2) जोड़ने पर—

$(X+2)$	dx	d^2x
9	−3	9
11	−1	1
11	−1	1
17	+5	25
48		$\Sigma d^2x=36$

$\bar{X}=12 \quad \sigma=\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}$

$\bar{X}=10+2 \quad \therefore \sigma=3$

(ख) अचर मूल्य (2) घटाने पर—

$X-2$	dx	dx^2
5	−3	9
7	−1	1
7	−1	1
13	+5	25
32		$\Sigma d^2x=36$

$\bar{X}=8 \quad \sigma=\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}$

$\bar{X}=10-2 \quad \therefore \sigma=3$

(ग) स्थिरांक से गुणा करने पर—यदि प्रत्येक मूल्य में एक अचर मूल्य (a) की गुणा की जाए तो उस श्रेणी के समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन में भी उस अचर मूल्य की गुणा हो जाती है— $[\bar{X}\times a$ तथा $\sigma\times a]$

(घ) स्थिरांक से भाग देने पर—श्रेणी के प्रत्येक मूल्य में अचर मूल्य (a) का भाग देकर समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन निकालने पर इन दोनों मापों में भी उस अचरांक का भाग हो जाता है— $[\bar{X}\div a$ और $\sigma\div a]$

उदाहरण—

(ग) अचर-मूल्य (2) से गुणा करने पर—

$X\times a$	dx	d^2x
14	− 6	36
18	− 2	4
18	− 2	4
30	+10	100
80		$\Sigma d^2x=144$

$\bar{X}=20$ अर्थात् $10\times2 \quad \sigma=\sqrt{\frac{144}{4}}=6$ अर्थात् 3×2

(घ) अचर-मूल्य (2) से भाग देने पर—

$X\div a$	dx	d^2x
3·5	−1·5	2·25
4·5	−0·5	0·25
4·5	−0·5	0·25
7·5	+2·5	6·25
20·0		$\Sigma d^2x=9·00$

$\bar{X}=5$ अर्थात् $\frac{10}{2}$; $\sigma=\sqrt{\frac{9}{4}}=1·5$ अर्थात् $3\div2$

(v) प्रमाप विचलन का प्रसामान्य-वक्र के क्षेत्रफल से एक विशिष्ट सम्बन्ध होता है। इसके फलस्वरूप प्रसामान्य एवं साधारण असममित बंटन में $\bar{X}\pm\sigma$ में 68·27%, $\bar{X}\pm2\sigma$ में 95·45% तथा $\bar{X}\pm3\sigma$ में 99·73% मूल्यों का समावेश होता है। उदाहरण एवं चित्र द्वारा इस गुण का भी विवेचन किया जा चुका है।

उपर्युक्त गुणों के कारण प्रमाप विचलन का उच्चतर गणितीय अध्ययन में सर्वाधिक प्रयोग होता है।

प्रमाप विचलन के लाभ-दोष—प्रमाप विचलन के निम्नलिखित लाभ हैं—

(i) सभी मूल्यों पर आधारित—प्रमाप विचलन श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है। इसमें किसी मूल्य को छोड़ा नहीं जाता।

(ii) उच्चतर बीजगणितीय अध्ययन में प्रयोग—प्रमाप विचलन निकालने में विचलनों का वर्ग करने से ऋणात्मक विचलन गणितीय रीति से स्वयं ही धनात्मक हो जाते हैं। विचलन समान्तर माध्य से निकाले जाते हैं जो एक आदर्श माध्य है। अतः उच्चतर गणितीय रीतियों में इसका काफी प्रयोग होता है।

(iii) प्रतिचयन परिवर्तनों का न्यूनतम प्रभाव—प्रमाप विचलन पर अन्य अपकिरण-मापों की अपेक्षा निदर्शन परिवर्तनों का सबसे कम प्रभाव पड़ता है।

(iv) स्पष्ट व निश्चित माप—प्रमाप विचलन अपकिरण का एक स्पष्ट और निश्चित माप है जो प्रत्येक स्थिति में ज्ञात किया जा सकता है।

(v) उपयोगिता—प्रमाप विचलन अपकिरण का सर्वश्रेष्ठ माप है जो विभिन्न समूहों के

विचरण की तुलना करने में तथा दैव प्रतिदर्शों में विभिन्न मापों की अर्थ-पूर्णता की जाँच (test of significance) करने में, प्रसामान्य वक्र के अधीनस्थ क्षेत्रफल ज्ञात करने, सहसम्बन्ध-विश्लेषण में, श्रेणी में मूल्य-वितरण की सीमाएँ निर्धारित करने में, तथा सही तुलना व निर्वचन में अत्यन्त उपयोगी है।

दोष—प्रमाप विचलन में दो प्रमुख दोष हैं—प्रथम, यह ज्ञात करने व समझने में अन्य मापों की अपेक्षा कठिन है। दूसरे, यह चरम मूल्यों को अत्यधिक महत्त्व देता है। इन दोषों के कारण अर्थशास्त्र व व्यापार-वाणिज्य के क्षेत्र में इस माप का अधिक प्रयोग नहीं किया जाता परन्तु फिर भी जिस प्रकार केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों में समान्तर माध्य सन्तोषजनक माध्य होता है उसी प्रकार अपकिरण के मापों में प्रमाप विचलन आदर्श माना जाता है।

अपकिरण के अन्य माप
(Other Measures of Dispersion)

घनक (Modulus)—घनक द्वितीय अपकिरण-घात पर आधारित माप है जिसका व्यवहार में बहुत कम प्रयोग होता है। इसे ज्ञात करने के लिए समान्तर माध्य से मूल्यों के विचलन प्राप्त कर उनके वर्गों के योग के दुगुने को संख्या से भाग दे दिया जाता है। भजनफल का वर्गमूल ही घनक कहलाता है। इसके लिए सकेताक्षर C का प्रयोग किया जाता है। इसका सूत्र इस प्रकार है—

व्यक्तिगत श्रेणी : $$C=\sqrt{\frac{2\Sigma d^2}{N}}$$

आवृत्ति श्रेणी : $$C=\sqrt{\frac{2\Sigma fd^2}{\Sigma f}}$$

$$C=\sigma\sqrt{2}$$

यदि घनक के लिए प्रयुक्त सूत्र में वर्गमूल न निकाला जाये तो परिणाम उच्चावचन (fluctuation) कहलाता है। दूसरे शब्दों में, उच्चावचन घनक का वर्ग (Square of Modulus) होता है।

सुतथ्यता (Precision)—घनक के व्युत्क्रम (Reciprocal of Modulus) को सुतथ्यता कहते हैं। इसका निम्न सूत्र है—

$$\text{सुतथ्यता } (P)=\frac{1}{C}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2\Sigma d^2}{N}}} \text{ या } \frac{1}{\sqrt{\frac{2\Sigma fd^2}{N}}}=\frac{1}{\sigma\times\sqrt{2}}$$

सम्भाव्य-विभ्रम (Probable Error)—प्रमाप विचलन का ·67449 या $\frac{2}{3}$ सम्भाव्य विभ्रम कहलाता है। एक सममित या साधारण असममित वंटन में सम्भाव्य विभ्रम, चतुर्थक विचलन के बराबर होता है।

$$\text{P. E. या Q.D.}=\cdot 6745\times\sigma \text{ या } \tfrac{2}{3}\sigma$$

माध्य-अन्तर (Mean Difference)—इटली के सांख्यिक कोरेडो गिनी (Corrado Gini) के अनुसार मूल्यों का विचलन किसी माध्य से नहीं लेना चाहिए वरन् प्रत्येक मूल्य का बाकी सभी मूल्यों से क्रमानुसार अन्तर लेकर उन सब अन्तरों के जोड़ को अन्तरों की संख्या से भाग दे देना चाहिए। इस प्रकार जो माध्य आता है वही माध्य-अन्तर कहलाता है। उदाहरणार्थ, 20, 25, 28 व 35 का माध्यान्तर निम्न प्रकार ज्ञात किया जायेगा।

मूल्य	अन्तर			योग
20				
25	5			5
28	8	3		11
30	10	5	2	17
योग	23	8	2	33ΣΔ

अन्तरों की संख्या n निम्न सूत्र से निकाली जाती है—

$$n=\frac{1}{2}N(N-1)$$

n अन्तरों की संख्या है।

N मूल्यों की संख्या है।

$$n=\frac{1}{2}\times 4(4-1) \text{ या } 6$$

उपर्युक्त सारणी में अन्तरों का कॉलम देखने से भी यही ज्ञात होता है। अन्तरों की संख्या $3+2+1=6$ है।

$$\text{गिनी का माध्यान्तर (Gini's M. D.)}=\frac{\Sigma\Delta}{n}$$

$\Sigma\Delta$ सकेत अन्तरों के योग के लिए है।

n सकेत अन्तरों की संख्या के लिए है।,

$$\text{गिनी की माध्यान्तर या M. D.}=\frac{33}{6}=5{\cdot}5$$

अपकिरण के मापों का सम्बन्ध
(Relationship between Measures of Dispersion)

सामान्य या समित तथा साधारण रूप से असममित (symmetrical or moderately asymmetrical) वंटनों में अपकिरण के विभिन्न-मापों का निम्न पारस्परिक सम्बन्ध पाया जाता है। यह सम्बन्ध पर्याप्त सीमा तक ठीक उतरता है।

(i) चतुर्थक विचलन प्रमाप विचलन का '6745 गुना या $\frac{2}{3}$ होता है।

$Q.\,D.=\frac{2}{3}\sigma$ $\quad\quad$ $\sigma=\frac{3}{2}\,Q.\,D.$

(ii) माध्य विचलन प्रमाप विचलन का '7979 गुना या $\frac{4}{5}$ होता है।

$\delta=\frac{4}{5}\sigma$ $\quad\quad$ $\sigma=\frac{5}{4}\delta$

(iii) चतुर्थक विचलन माध्य विचलन का $\frac{5}{6}$ होता है।

$Q.\,D.=\frac{5}{6}\delta$ $\quad\quad$ $\delta=\frac{6}{5}\,Q.\,D.$

यह सम्बन्ध उपर्युक्त दो सम्बन्धों पर आधारित है।

$Q.\,D.=\frac{2}{3}\sigma=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}\delta=\frac{5}{6}\delta$

(iv) प्रमाप विचलन का 6 गुना, चतुर्थक विचलन का 9 गुना और माध्य विचलन का 7'5 गुना आपस में बराबर होते हैं—

$6\sigma=9\,Q.\,D.=7{\cdot}5\delta.$

(v) विस्तार, अधिकतम मूल्य व न्यूनतम मूल्य का अन्तर है अतः उसमें श्रेणी के सभी मूल्य आ जाते हैं। अन्तर-चतुर्थक विस्तार में श्रेणी के मध्य के 50% मूल्य, अन्तर-शतमक विस्तार में मध्य के 80% मूल्य सम्मिलित होते हैं। चतुर्थक विचलन को मध्यका के दोनों ओर रखने से ($M\pm Q.\,D.$) अन्तर-चतुर्थक विस्तार ज्ञात हो जाता है जिसमें मध्य के 50% मूल्य शामिल होते हैं।

(vi) $\bar{X}\pm\sigma$ की सीमाओं में कुल वितरण की 68'27% इकाइयाँ शामिल होती हैं।

$\bar{X}\pm 2\sigma$ की सीमाओं में कुल वितरण की 95'45% इकाइयाँ शामिल होती हैं।

$\bar{X}\pm 3\sigma$ की सीमाओं में कुल वितरण की 99'73% इकाइयाँ शामिल होती हैं।

ये सभी सम्बन्ध प्रसामान्य-वक्र की विशेषताओं (Properties of Normal Curve) पर आधारित हैं।

उदाहरण (Illustration) 25 :

(i) दो श्रेणियो के विचरण गुणाक (C. V.) 58% और 69% हैं। उनके प्रमाप

विचलन (σ) क्रमशः 21·2 और 15·6 हैं। उनके समान्तर माध्य क्या हैं ?

[B. Com., Meerut, 1969]

(ii) एक अल्प-असममित श्रेणी में माध्य-विचलन (δ) 4 है। प्रमाप विचलन (σ) तथा चतुर्थक विचलन (Q. D.) ज्ञात कीजिए। *[B. Com., Raj. 1972]*

(iii) एक श्रेणी में प्रमाप विचलन (S. D.) 5·6 है। घनक (modulus), सुतथ्यता (Precision) और प्रसरण (Variance) ज्ञात कीजिए।

(iv) प्रत्यक्ष परिकलन द्वारा 1 से 10 तक की संख्याओं का प्रमाप विचलन निकालिए।

हल (Solution) :

(i) $C.\ V. = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$:

प्रथम श्रेणी में—	दूसरी श्रेणी में—
$58 = \frac{21\cdot2}{\bar{X}} \times 100$ या $58\bar{X} = 2120$	$69 = \frac{15\cdot6}{\bar{X}} \times 100$ या $69\bar{X} = 1560$
$\therefore\ \bar{X} = \frac{2120}{58} = 36\cdot55$	$\therefore\ \bar{X} = \frac{1560}{69} = 22\cdot61$

(ii) $\sigma = \frac{5}{4}\delta$ या $\frac{5}{4} \times 4 = 5$; Q. D. $= \frac{5}{6}\delta = \frac{5}{6} \times 4 = 3\cdot33$

(iii) घनक (Modulus या C) $= \sigma \times \sqrt{2} = 5\cdot6 \times 1\cdot414 = 7\cdot92$

सुतथ्यता (Precision या P) $= \frac{1}{C} = \frac{1}{7\cdot92} = \cdot126$

प्रसरण (Variance या V) $= \sigma^2 = (5\cdot6)^2 = 31\cdot36$

(iv) प्रथम 10 प्राकृतिक अंकों का प्रमाप विचलन—

$$= \sqrt{\tfrac{1}{12}(N^2 - 1)} \text{ या } \sqrt{\tfrac{1}{12}(10^2 - 1)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{12} \times 99} \text{ या } \sqrt{8\cdot25}$$

$\therefore$ 1 से 10 तक के अंकों का $\sigma = 2\cdot87$

लॉरेंज़ वक्र
(Lorenz Curve)

अपकिरण का प्रदर्शन बिन्दुरेखीय रीति द्वारा भी किया जा सकता है। इस रीति के अन्तर्गत श्रेणी का एक रेखाचित्र बनाया जाता है जिसे लारेंज वक्र कहते हैं। इस प्रकार के वक्र का प्रयोग सर्वप्रथम डा० मैक्स लॉरेंज (Dr. Max Lorenz) नामक सांख्यिक ने किया था। इसी कारण इसे लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve) कहा जाता है।

लॉरेंज वक्र एक संचयी प्रतिशत वक्र (cumulative percentage curve) है जिसे बनाने की निम्नलिखित क्रिया है—

(i) मूल्यों या मध्य-बिन्दुओं के संचयी योग (cumulative totals) निकाले जाते हैं। अन्तिम संचयी योग को 100 मानकर प्रत्येक संचयी मूल्य को प्रतिशत में बदल दिया जाता है।

(ii) मूल्यों की भाँति ही आवृत्तियों को संचयी (cumulative frequency) करके अन्तिम संचयी आवृत्ति को 100 मानते हुए सभी आवृत्तियों को प्रतिशतों में बदल दिया जाता है।

(iii) संचयी मूल्यों के प्रतिशत उदग्र या खड़ी माप श्रेणी (Vertical Scale or y-axis) पर तथा संचयी आवृत्तियों के प्रतिशत क्षैतिज या पड़ी माप श्रेणी (Horizontal Scale or x-axis) पर प्रदर्शित किये जाते हैं। इससे विपरीत क्रम भी रखा जा सकता है परन्तु वह उपयुक्त नहीं है।

(iv) y-axis का मापदण्ड 0 से 100 तक लिखा जाता है परन्तु x-axis का मापदण्ड उल्टा अर्थात् 100 से लेकर 0 तक लिखा जाता है। 1 cm.=10% का मापदण्ड उपयुक्त रहता है।

(v) x-axis या क्षैतिज माप श्रेणी के 0 तथा y-axis या उदग्र माप श्रेणी के 100 को एक सीधी रेखा द्वारा मिला दिया जाता है। इसे समान-वितरण की रेखा (Line of Equal Distribution) कहते हैं। यदि मूल्यों का बिल्कुल समान वितरण (10% आवृत्तियों के 10%, 20% के 20% मूल्य आदि) हों तो सभी बिन्दु इस रेखा पर होवे हैं।

(vi) संचयी आवृत्तियों के प्रतिशत और संचयी मूल्यों के प्रतिशत बिन्दुओं को क्रमश: x-axis और y-axis के मापानुसार रेखाचित्र पर अंकित किया जाता है।

इस प्रकार से अंकित बिन्दुओं को आपस से मिला देने से जो वक्र बनता है वही लॉरेंज वक्र होता है।

लॉरेंज वक्र समान-वितरण-रेखा के जितना पास होगा, अपकिरण की मात्रा उतनी ही कम होगी अर्थात् वितरण में उतनी ही कम असमानताएँ होंगी। इसके विपरीत लॉरेंज वक्र समान-वितरण-रेखा से जितना दूर होगा, अपकिरण या असमानता की मात्रा उतनी ही अधिक होगी। दो वक्रों मे से जो सम वितरण-रेखा से अधिक दूरी पर होगा, उस समंकमाला में ही अपकिरण की मात्रा अधिक होगी।

गुण-दोष—लॉरेंज वक्र आकर्षक और प्रभावशाली होता है। यह सरलता से समझ मे आ जाता है। इसके आधार पर तुलना सरल हो जाती है तथा धन, आय, मजदूरी, लाभ आदि के वितरण की असमानताओं का एक ही दृष्टि में अनुमान लगाने के लिए यह वक्र अत्यन्त उपयोगी होता है। उद्योगों में एकाधिकार या संकेन्द्रण (Concentration) की प्रवृत्ति का अनुमान भी लॉरेंज वक्र की सहायता से लगाया जा सकता है। परन्तु लॉरेंज वक्र में यह मुख्य दोष है कि इससे अपकिरण का प्रकारमक माप नहीं ज्ञात होता। दूसरे, इसे बनाने की क्रिया कठिन है और बनाने से पहले श्रेणी में काफी संशोधन करना पड़ता है। इसलिए लॉरेंज वक्र का प्रयोग वही पर किया जाता है जहां एक ही दृष्टि में कम समय में अपकिरण की प्रवृत्ति मात्र ज्ञात करनी हो।

निम्न उदाहरण से लॉरेंज वक्र सम्बन्धी प्रक्रिया स्पष्ट हो जायेगी—

उदाहरण (Illustration) 26 :

दो कारखानों में मजदूरी-वितरण की असमानताओं की तुलना करने के लिए एक लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve) की रचना कीजिए।

मजदूरी (रु०) :		50-70	70-90	90-110	110-130	130-150
मजदूरों की संख्या :	A	20	15	20	25	20
	B	150	100	90	110	50

हल (Solution) :

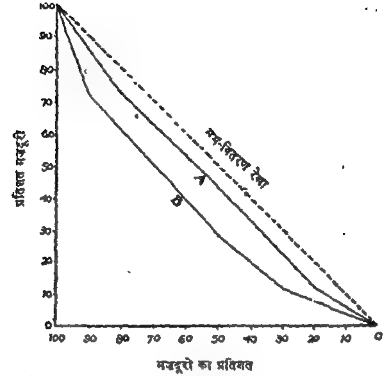
संचयी योग व प्रतिशतों का परिकलन

मजदूरी (मध्य-मूल्य)	संचयी योग	संचयी %	कारखाना A			कारखाना B		
			मजदूरों की संख्या	संचयी आवृत्ति	संचयी %	मजदूरों की संख्या	संचयी आवृत्ति	संचयी %
60	60	12	20	20	20	150	150	30
80	140	28	15	35	35	100	250	50
100	240	48	20	55	55	90	340	68
120	360	72	25	80	80	110	450	90
140	500	100	20	100	100	50	500	100

उपर्युक्त संचयी प्रतिशतों की सहायता से अग्रांकित रेखाचित्र खींच लिया जायेगा।

लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)

मापदण्ड 1 cm. = 10%



चित्र मे बने हुए दोनों वक्रों का निरीक्षण करने से यह कहा जा सकता है कि मजदूरी के वितरण में कारखाना B में कारखाना A की अपेक्षा अधिक असमानता है।

व्यवसाय संकेन्द्रण के माप

(Measures of Business Concentration)

व्यावसायिक क्षेत्र में अधिकतर कुछ बड़ी व्यावसायिक संस्थाओं का किसी उद्योग या व्यापार की लगभग सम्पूर्ण क्रिया पर एकाधिपत्य होता है। समाज में आय के वितरण, विभिन्न संस्थाओं में उत्पादन या लाभ आदि के वितरण में भी अधिकतर यही जमाव की प्रवृत्ति पाई जाती है।

कुल व्यावसायिक क्रिया पर बड़े आकार वाली कुछ संस्थाओ के आधिपत्य की मात्रा को व्यावसायिक सकेन्द्रण (Business Concentration) कहा जाता है।[1] सकेन्द्रण के अध्ययन व मापन से यह ज्ञात होता है कि उद्योग व व्यवसाय में एकाधिकार की प्रवृत्ति (Monopolistic Tendency) बढ़ रही है या घट रही है।

व्यावसायिक सकेन्द्रण का माप करने की दो प्रमुख विधियाँ हैं—(क) लॉरेंज-वक्र, तथा (ख) गिनी का सकेन्द्रण-गुणाक।

(क) लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)—यह अपकिरण ज्ञात करने की बिन्दुरेखीय रीति है। इस विधि का विस्तृत विश्लेषण किया जा चुका है। लॉरेंज-वक्र में सम-वितरण-रेखा (Line of Equal Distribution) और प्रांकित संकेन्द्रण वक्र (Concentration Curve) के बीच का क्षेत्र असमानता या जमाव का क्षेत्र (Area of Concentration) कहलाता है। यह जितना अधिक होगा, सकेन्द्रण की मात्रा भी उतनी ही अधिक होगी। यदि सभी व्यावसायिक इकाइयाँ एक

[1] By *Business Concentration* we mean the amount of dominance of a few business establishments over the total business activity.

समान आकार की हैं और एकाधिकार की प्रवृत्ति बिल्कुल नहीं पायी जाती तो संकेन्द्रण-वक्र सम-वितरण रेखा के अनुरूप होगा। परन्तु एकाधिकार की स्थिति में यह वक्र समान वितरण रेखा से दूर होता जाएगा और असमानता का क्षेत्र निरन्तर बढ़ता रहेगा।

लॉरेंज वक्र में प्रमुख दोष यह है कि उससे संकेन्द्रण का संख्यात्मक माप उपलब्ध नहीं होता। वक्र को देखकर एकाधिकार प्रवृत्ति का केवल अनुमान लगाया जा सकता है। अंकात्मक मूल्य ज्ञात करने के लिए गिनी का सकेन्द्रण-गुणांक निकालना चाहिए।

(ख) गिनी का संकेन्द्रण-गुणांक (Gini's Coefficient of Concentration)—कोरेडो गिनी ने *माध्य-अन्तर के आधार पर, संकेन्द्रण गुणांक या सकेन्द्रण अनुपात (Concentration Ratio)* का सूत्रपात किया है।[1] यह गिनी के माध्य-अन्तर को समानान्तर माध्य के दोगुने से भाग देने पर प्राप्त होता है।

सूत्रानुसार—

$$G=\frac{\Delta_1}{2\bar{X}}$$

G संकेताक्षर गिनी का सकेन्द्रण-गुणांक के लिए प्रयुक्त हुआ है।
Δ_1 संकेताक्षर गिनी के माध्य-अन्तर के लिए प्रयुक्त हुआ है।
$\bar{X}$ सकेताक्षर समान्तर माध्य के लिए प्रयुक्त हुआ है।

गिनी-गुणांक का मूल्य 0 और 1 के बीच पाया जाता है। समान वितरण के लिए गिनी-गुणाक 0 होता है। जैसे-जैसे असमानता बढ़ती जाती है गुणांक का मूल्य भी बढ़ता जाता है।

वस्तुतः, गिनी-गुणांक सकेन्द्रण-क्षेत्र का कुल लॉरेंज-त्रिकोण पर अनुपात (Ratio of area of concentration to the total area of the lower triangle below the line of equal distribution) होता है।

अपकिरण के उपयुक्त माप का चुनाव
(Choice of a Suitable Measure of Dispersion)

किसी श्रेणी में अपकिरण का माप करने की पांच प्रमुख रीतियां हैं—विस्तार (Range), चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation), मध्यक विचलन (Mean Deviation) प्रमाप विचलन (Standard Deviation) और लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)। 'किस परिस्थिति में कौन-सी रीति अपनायी जाए'—इस बात का निर्णय (i) उक्त मापों के विशिष्ट अभिलक्षणों, (ii) दी हुई सामग्री की प्रकृति, और (iii) अपकिरण ज्ञात करने के उद्देश्य पर निर्भर करता है। विस्तार गणना में सरलतम है परन्तु यह केवल दो चरम मूल्यो का अन्तरमात्र है, अतः इसका प्रयोग गुण-नियन्त्रण, मौसम-पूर्वानुमान आदि ऐसे क्षेत्रों मे उचित रहता है जहां न्यूनतम एव अधिकतम का अन्तर निकालना हो। खुले सिरे वाली श्रेणी मे (series with open-end classes) अपकिरण निकालने या चरम-मूल्यों के प्रभाव को कम करने के लिए चतुर्थक विचलन का प्रयोग उपयुक्त होता है। जहां अपकिरण का माप मध्यका से विचलन निकालकर ज्ञात करना हो या सामाजिक व आर्थिक स्थितियो की सामान्य तुलना करनी हो वहां मध्यक विचलन का परिगणन उचित रहता है। दो या दो से अधिक श्रेणियों में बिन्दुरेखीय विधि से विचरण या संकेन्द्रण की तुलना करने के लिए लॉरेंज वक्र का प्रयोग किया जाता है। परन्तु इन विशिष्ट परिस्थितियों को छोड़कर *अधिकाश स्थितियों में विचरण-मापन के लिए प्रमाप विचलन एक आदर्श माप माना जाता है।* यह वस्तुतः अपकिरण-मापन की सर्वोत्तम विधि है क्योंकि यह अन्य रीतियों की अधिकाश त्रुटियों से मुक्त है और इसका अन्य उच्चतर विधियों मे भी काफी प्रयोग होता है।

[1] 'Coefficient of Concentration or the Concentration ratio......is equal to the mean difference divided by twice the arithmetic mean.' —Kendall & Buckland, *A Dictionary of Statistical Terms.*

ब्लेयर के शब्दों में 'ये दो माप (समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन) सांख्यिक के लिए वही कार्य सम्पन्न करते हैं जो कुल्हाड़ी और आरी लकड़हारे के लिए करती हैं—ये उसके कच्चे माल पर कार्य करने के मौलिक उपकरण हैं।'[1] अतः जब तक किसी अन्य माप के प्रयोग का कोई विशिष्ट कारण हो न हो तब तक अपकिरण मापन के लिए प्रमाप विचलन का ही प्रयोग किया जाना चाहिए।

विषमता
(Skewness)

सांख्यिकीय माध्य एवं अपकिरण के माप श्रेणी की महत्त्वपूर्ण विशेषताओं पर प्रकाश डालते हैं। परन्तु इनसे यह नहीं मालूम हो पाता कि समंकमाला का स्वरूप कैसा है अर्थात् वह समित (symmetrical) है या असममित (asymmetrical)। समंकश्रेणी के समित व असममित स्वरूप का अध्ययन करने के लिए विषमता-माप (Measures of skewness) का प्रयोग किया जाता है।

अर्थ—किसी समंकमाला में सममिति के अभाव को विषमता (Skewness) अथवा असममिति (Asymmetry) कहते हैं। दूसरे शब्दों में, किसी वितरण की सममिति से दूर हटने की प्रवृत्ति विषमता कहलाती है।[2] विषमता के माप से हमें यह पता चलता है कि यदि आवृत्ति वंटन का वक्र बनाया जाय तो वह सममित होगा या असममित, तथा असममिति की दिशा व मात्रा क्या होगी।

सममित तथा असममित वितरण—पिछले अध्याय में यह स्पष्ट किया जा चुका है कि सममित प्रकृति के आधार पर आवृत्ति वंटन दो प्रकार के हो सकते हैं—(1) सममित अथवा (2) असममित। सममित वंटन में आवृत्तियाँ नियमित क्रम से बढ़ती हैं, फिर अधिकतम आवृत्ति के उसी नियमित क्रम से घटती हैं। उनका वक्र घण्टी के आकार वाला (Bell-shaped) होता है जिसे प्रसामान्य वक्र (Normal curve) कहते हैं [देखिये चित्र 'अ' (Fig. A)]। सममित या प्रसामान्य वंटन में समान्तर माध्य, मध्यका व बहुलक बराबर होते हैं तथा मध्यका से दोनों चतुर्थक मूल्यों के अन्तर भी आपस में समान होते हैं। इस प्रकार के वंटन में विषमता नहीं होती। इसके विपरीत, असममित वंटन वह होता है जिसमें आवृत्तियाँ जिस क्रम से बढ़ती हैं, अधिकतम से फिर उसी क्रम से नहीं घटती। ऐसे वंटन का वक्र प्रसामान्य या सममित नहीं होता। इसमें माध्यों के मूल्य बराबर नहीं होते तथा मध्यका से दोनों चतुर्थकों के पारस्परिक अन्तर भी असमान होते हैं। असममित वंटन में विषमता होती है।

धनात्मक एवं ऋणात्मक विषमता (Positive and Negative Skewness)—असममित वंटन का वक्र या तो केन्द्र से दाहिनी ओर को अधिक झुका हुआ हो सकता है या बाईं ओर को। जब इस वक्र का झुकाव दाहिनी ओर को अधिक होता है तो वितरण में धनात्मक विषमता होती है।[3] [देखिये चित्र 'ब' (Fig. B)]। धनात्मक विषमता वाले वंटन में समान्तर माध्य का मूल्य मध्यका-मूल्य से अधिक होता है और मध्यका बहुलक से अधिक होता है तथा मध्यका से तृतीय चतुर्थक का अन्तर, उससे प्रथम चतुर्थक के अन्तर की तुलना में अधिक होता है।

[1] 'These two measures (mean and S. D.) are to the statistician what the axe and cross-cut saw are to the woodsman—the basic tools for working up his raw material.' —M. M. Blair.

[2] Skewness or Asymmetry denotes the tendency of a distribution to depart from symmetry.

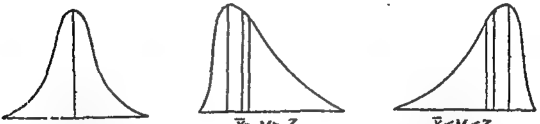
[3] 'If the frequency curve of a distribution has a longer *tail* to the right of the central maximum than to the left, the distribution is said to be *skewed to the right* or to have positive skewness.'—Spiegel.

जब असममित वक्र का झुकाव बायीं ओर अधिक होता है तो श्रेणी में ऋणात्मक विषमता होती है। [देखिये चित्र 'स' (Fig. C)]। ऋणात्मक विषमता वाले वंटन में समान्तर माध्य, मध्यका से कम तथा मध्यका बहुलक से कम होता है और मध्यका व तृतीय चतुर्थक का अन्तर, मध्यका व प्रथम चतुर्थक के अन्तर की अपेक्षा कम होता है। अगले पृष्ठ पर दिए गये सारणी व चित्रों से ये बातें स्पष्ट हो जायेंगी—

विषमता के विभिन्न स्वरूप

आकार	क	ख	ग
	आवृत्ति	आवृत्ति	आवृत्ति
8 10 12 14 16 18 20	2 6 10 14 10 6 2	2 18 10 8 6 4 2	2 4 6 8 10 18 2
विषमता	विषमता का अभाव	धनात्मक विषमता	ऋणात्मक विषमता
माध्य	$\bar{X}=M=Z$	$\bar{X}>M>Z$	$\bar{X}<M<Z$
विभाजन-मूल्य	$(Q_3-M)=(M-Q_1)$	$(Q_3-M)>(M-Q_1)$	$(Q_3-M)<(M-Q_1)$
वक्र	प्रसामान्य	दाहिनी ओर झुकाव	बाईं ओर झुकाव

Fig. A Fig. B Fig. C



$\bar{X}=M=Z$, $Q_3-M=M-Q_1$, विषमता का अभाव — $\bar{X}>M>Z$, धनात्मक विषमता — $\bar{X}<M<Z$, ऋणात्मक विषमता

विषमता की जाँच (Tests of Skewness)—किसी श्रेणी में विषमता की जाँच निम्न आधार पर की जाती है—

(i) **माध्यों का सम्बन्ध**—यदि वंटन में समान्तर माध्य, मध्यका व बहुलक के मूल्य बराबर न हों तो उसमें विषमता होती है। माध्य व बहुलक में जितना अधिक अन्तर होगा उतनी ही विषमता की मात्रा अधिक होगी।

(ii) **मध्यका से विभाजन-मूल्यों की दूरी**—यदि दोनों चतुर्थक मध्यका से समान दूरी पर न हों अर्थात् $(Q_3-M) \neq^* (M-Q_1)$, तो विषमता पाई जाती है। इसी प्रकार, यदि मध्यका

* $\neq$ चिन्ह का अर्थ है 'बराबर नहीं' (is not equal to)।

के दोनों ओर के दशमक (D_1 and D_9) तथा शतमक (P_{10} and P_9) मध्यका से समान दूरी पर न हों तो श्रेणी में विषमता होती है।

(iii) विचलन—यदि मध्यका या बहुलक से निकाले गये पद-मूल्यों के विचलनों का बीजगणितीय योग शून्य हो तो समंक-समूह विषम होता है। इस प्रकार के विचलनों का जोड़ तभी शून्य हो सकता है जब उनके मान समान्तर माध्य के बराबर हों। इन तीनों माध्यों के बराबर होने पर श्रेणी सममित होती है।

(iv) वक्र—यदि रेखाचित्र पर अंकित करने से वटन का घण्टी के आकार वाला वक्र न बनता हो तो यह विषमता की उपस्थिति का प्रमाण होता है। असममित वक्र के दाहिनी ओर झुके होने से धनात्मक तथा बायीं ओर झुके होने पर ऋणात्मक विषमता मानी जाती है।

विषमता के माप (Measures of Skewness)—विषमता की धनात्मक एवं ऋणात्मक प्रकृति तथा मात्रा ज्ञात करने के लिए विषमता के माप का प्रयोग किया जाता है। विषमता-माप निरपेक्ष हो सकता है या सापेक्ष। विषमता के निरपेक्ष माप (Absolute Measure of Skewness) द्वारा श्रेणी में असममिति या विषमता की कुल मात्रा का तथा उसके धनात्मक (+) या ऋणात्मक (—) होने का पता चल जाता है परन्तु निरपेक्ष माप तुलनायोग्य नहीं होते। अतः तुलनात्मक अध्ययन के लिए विषमता के निरपेक्ष माप को उपयुक्त आधार से भाग देकर उसका सापेक्ष माप (Relative Measure) निकाला जाता है जिसको विषमता-गुणांक (Coefficient of Skewness) कहते है। विषमता-गुणांक के लिए संकेताक्षर J का प्रयोग किया जाता है। जिस श्रेणी का विषमता-गुणांक अधिक होता है वह अधिक विषम (skewed) माना जाता है। इसके विपरीत जिस श्रेणी मे विषमता-गुणाक कम होता है उनमें आवृत्तियाँ अधिक सममित रूप से वितरित होती हैं।

विषमता का मापन करने की निम्न रीतियाँ हैं—

(क) विषमता का प्रथम माप (First Measure of Skewness)।
(ख) विषमता का द्वितीय माप (Second Measure of Skewness)।
(ग) अन्य रीतियाँ (Other Methods)।

(क) विषमता का प्रथम माप—यह समंक-श्रेणी में माध्यों की स्थिति पर आधारित है। एक विषम आवृत्ति वटन में समान्तर माध्य, मध्यका एवं बहुलक के मूल्य बराबर नहीं होते तथा माध्य का बहुलक से सबसे अधिक अन्तर होता है, अतः इन माध्यों का अन्तर ही विषमता का प्रथम माप कहलाता है। विषमता-गुणांक निकालने के लिए इस माप को प्रमाप विचलन या माध्य-विचलन से विभाजित कर दिया जाता है। इस सम्बन्ध में कार्ल पियर्सन द्वारा प्रयुक्त माप व गुणांक को सर्वश्रेष्ठ माना जाता है। ये सूत्र निम्न प्रकार हैं—

कार्ल पियर्सन का विषमता माप	कार्ल पियर्सन का विषमता-गुणांक
$Sk=\bar{X}-Z$	$J=\frac{\bar{X}-Z}{\sigma}$

यदि किसी श्रेणी में अनिश्चितता एवं अस्पष्टता के कारण बहुलक मूल्य का निर्धारण असम्भव हो तो माध्यों के परस्पर सम्बन्ध के आधार पर निम्न वैकल्पिक सूत्र (alternative formula) प्रयुक्त करना चाहिए—

कार्ल पियर्सन का वैकल्पिक विषमता माप	पियर्सन का वैकल्पिक विषमता-गुणांक
$Sk=3(\bar{X}-M)$	$J=\frac{3(\bar{X}-M)}{\sigma}$

$$\because \quad (\bar{X}-Z)=3(\bar{X}-M)$$

माध्यों के अन्तर को माध्य-विचलन से भाग देकर निम्न सूत्रों द्वारा भी विषमता-गुणांक ज्ञात किया जा सकता है, परन्तु माध्य विचलन के दोषों के कारण इसका प्रयोग उचित नहीं है।

$$J=\frac{\bar{X}-Z}{\delta_Z};\quad J=\frac{\bar{X}-M}{\delta_M} \text{ या } \frac{\bar{X}-M}{\delta_{\bar{X}}};\quad J=\frac{M-Z}{\delta_M} \text{ या } \frac{M-Z}{\delta_Z}$$

कार्ल पियर्सन के वैकल्पिक सूत्र द्वारा ज्ञात विषमता-गुणांक के अतिरिक्त अन्य सभी विषमता-गुणांकों की सीमायें -1 व $+1$ हैं। वैकल्पिक सूत्र में गुणांक की सीमायें ± 3 हैं परन्तु व्यवहार में इसका मूल्य बहुत कम होता है। यदि J का मूल्य 0 होता है तो वंटन में विषमता नहीं होती। यदि यह $+$ में होता है तो धनात्मक और $-$ में होता है तो ऋणात्मक विषमता पाई जाती है।

उदाहरण (Illustration) 27 :

निम्न सारणी से अपकिरण-गुणांक और विषमता-गुणांक ज्ञात कीजिए—

मजदूरी (रु०) :	70–80	80–90	90–100	100–110	110–120	120–130	130–140	140–150
व्यक्तियों की संख्या :	12	18	35	42	50	45	20	8

[M. Com., Agra, 1965, M. A., Punjab, 1969, Jiwaji, 1965, Vikram, 1962, 1963, B. Com., Indore, 1965, Agra, 1962]

हल (Solution) :

अपकिरण-गुणांक व विषमता-गुणांक ज्ञात करने के लिए समान्तर माध्य ($\bar{X}$), प्रमाप विचलन (σ) तथा बहुलक (Z) निकाले जायेंगे।

माध्य व प्रमाप विचलन का परिगणन (प्रवविचलन रीति)

मजदूरी (रु०)	मध्य-बिन्दु	व्यक्तियों की संख्या	115 से पद विचलन	f व $d'x$ की गुणा	$d'x$ व $fd'x$ की गुणा
	X	f	$d'x$	$fd'x$	fd'^2x
70– 80	75	12	−4	−48	192
80– 90	85	18	−3	−54	162
90–100	95	35	−2	−70	140
100–110	105	42	−1	−42	42
110–120	115	50	0	0	0
120–130	125	45	+1	+45	45
130–140	135	20	+2	+40	80
140–150	145	8	+3	+24	72
योग		230		+109−214 = −105	733
		N		$\Sigma fd'x$	$\Sigma fd'^2x$

माध्य—

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fd'x}{N}\times i$$

$$=115+\frac{-105}{230}\times 10=110{\cdot}43$$

प्रमाप विचलन—

$$\sigma=i\times\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'x}{N}\right)^2}$$

$$=10\times\sqrt{\frac{733}{230}-\left(\frac{-105}{230}\right)^2}$$

$$=10\times\sqrt{3{\cdot}187-{\cdot}208}$$

$$=10\times 1{\cdot}726 \text{ या } 17{\cdot}26$$

बहुलक—

अधिकतम आवृत्ति 40 है, अतः (110—120) modal group हुआ।

$$Z=l+\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times i=110+\frac{50-42}{100-42-45}\times 10=110+\frac{80}{13}$$

$\therefore$ बहुलक $=110+6{\cdot}15$ या **116·15**

प्रमाप विचलन-गुणांक—

$$\text{C. of S. D.}=\frac{\sigma}{\bar{X}}$$

$$=\frac{17{\cdot}26}{110{\cdot}43}$$

$$={\cdot}156$$

विषमता-गुणांक—

$$J=\frac{\bar{X}-Z}{\sigma} \text{ या } \frac{110{\cdot}43-116{\cdot}15}{17{\cdot}26}$$

$$=\frac{-5{\cdot}72}{17.26} \text{ या } -{\cdot}331$$

$$=-{\cdot}331$$

उदाहरण (Illustration) 28 :

निम्नांकित आंकड़ों से कार्ल पियर्सन का विषमता-गुणांक ज्ञात कीजिए—

से अधिक अंक :	0	10	20	30	40	50	60	70	80
विद्यार्थियों की संख्या :	150	140	100	80	80	70	30	14	0

[B. Com., Agra, 1973, Delhi, 1969, Vikram, 1969, M. A., Raj., 1956, 1959, Gorakhpur, 1961]

हल (Solution) :

संचयी आवृत्तियों के आधार पर साधारण आवृत्ति वितरण बनाकर निम्न प्रकार कार्ल पियर्सन का विषमता-गुणांक ज्ञात किया जायेगा—

पियर्सन के विषमता-गुणांक का परिकलन

प्राप्तांक	मध्य-मूल्य	छात्रों की संख्या	45 से पद-विचलन	f व $d'x$ की गुणा	$d'x$ व $fd'x$ की गुणा	संचयी आवृत्ति
	X	f	$d'x$	$fd'x$	fd'^2x	c. f.
0–10	5	10	−4	−40	160	10
10–20	15	40	−3	−120	360	50
20–30	25	20	−2	−40	80	70
30–40	35	0	−1	0	0	70
40–50	45	10	0	0	0	80
50–60	55	40	+1	+40	40	120
60–70	65	16	+2	+32	64	136
70–80	75	14	+3	+42	120	150
योग		150		+114−200 =−86	830	
		N		$\Sigma fd'x$	$\Sigma fd'^2x$	

इस श्रेणी में बहुलक का मूल्य अनिश्चित है अतः कार्ल पियर्सन के वैकल्पिक सूत्र द्वारा विषमता-गुणांक निकाला जाएगा।

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fd'x}{N}\times i$$

$$=45+\frac{-86}{150}\times 10$$

$$=45-5{\cdot}7 \text{ या } 39{\cdot}3$$

$$M=\text{size of } \left(\frac{n}{2}\right)\text{th item}$$

$$=\text{size of 75th item}$$

∴ (40—50) मध्यका वर्ग है।

$$M=l+\frac{i}{f}(m-c)$$

$$=40+\frac{10}{10}(75-70)=45$$

$$\sigma=i\times\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'x}{N}\right)^2}$$

$$=10\times\sqrt{\frac{830}{150}-\left(\frac{-86}{150}\right)^2}$$

$$=10\times\sqrt{5{\cdot}53-{\cdot}33}$$

$$=10\times 2{\cdot}28$$

$$\therefore\ \sigma=22{\cdot}8$$

कार्ल पियर्सन का विषमता-गुणांक, $J=\frac{3(\bar{X}-M)}{\sigma}$

$$\therefore\ J=\frac{3(39{\cdot}3-45{\cdot}0)}{22{\cdot}8}=\frac{3\times-5{\cdot}7}{22{\cdot}8}=\frac{-17{\cdot}1}{22{\cdot}8}=-{\cdot}75$$

(ख) विषमता का द्वितीय माप—समंमित वंटन में मध्यका से प्रथम व तृतीय चतुर्थकों के अन्तर समान होते हैं तथा उनके असमान होने पर वितरण में विषमता होती है। इन अन्तरों के आधार पर किया जाने वाला विषमता का अध्ययन विषमता का द्वितीय माप कहलाता है। यह

सरल होता है परन्तु इससे श्रेणी के केवल आधे भाग की विषमता का ही अध्ययन होता है। इस माप का प्रयोग सर्वप्रथम डा० बाउले ने किया था, अतः इसे Bowley's Measure of Skewness भी कहते हैं। यह ध्यान रखना चाहिए कि चतुर्थक रीति द्वारा प्राप्त विषमता-माप या गुणांक पियर्सन के विषमता-माप या गुणांक के बराबर नहीं होते। इसके सूत्र निम्न प्रकार है—

बाउले का विषमता-माप (विषमता का चतुर्थक माप)—

$$Sk_Q=(Q_3-M)-(M-Q_1)=Q_3+Q_1-2M$$

बाउले का विषमता-गुणांक (विषमता का चतुर्थक गुणांक)—

$$J_Q=\frac{(Q_3-M)-(M-Q_1)}{(Q_3-M)+(M-Q_1)}=\frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$$

उदाहरण (Illustration) 29 :

निम्न सामग्री से अपकिरण का चतुर्थक गुणांक और विषमता का चतुर्थक गुणांक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
आवृत्ति :	3	9	15	24	12	8	7	5

हल (Solution) :

मध्यका व चतुर्थकों का निर्धारण

प्राप्तांक	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
0–10	3	3
10–20	9	12
20–30	15	27
30–40	24	51
40–50	12	63
50–60	8	71
60–70	7	78
70–80	5	83
योग	$N=83$	

$Q_1=$ size of $\frac{N}{4}$th item

$=$ size of $\frac{83}{4}$ या 20·75th item

(20–30) Q_1 वर्ग है।

$$Q_1=l+\frac{i}{f}(q_1-c)$$

$$=20+\tfrac{10}{15}(20{\cdot}75-12)$$

$$=20+\frac{10\times 8{\cdot}75}{15} \text{ या } 20+5{\cdot}83$$

$$Q_1=25{\cdot}83$$

$$\text{C. of Q. D.}=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}=\frac{49{\cdot}38-25{\cdot}83}{49{\cdot}38+25{\cdot}83}=\frac{23{\cdot}55}{75{\cdot}21}={\cdot}313$$

∴ अपकिरण का चतुर्थक गुणाक $={\cdot}313$

मध्यका—

$M=$ size of $\frac{N}{2}$th item

$=$ size of $\frac{83}{2}$ या 41·5th item

(30–40) मध्यका वर्ग है।

$$M=l+\frac{i}{f}(m-c)$$

$$=30+\tfrac{10}{24}(41{\cdot}5-27)$$

$$=30=\frac{10\times 14{\cdot}5}{24} \text{ या } 30+\frac{145}{24}$$

$$\therefore M=36{\cdot}04$$

$Q_3=$ size of $\frac{3N}{4}$th item

$=$ size of 62·25th item

(40–50) Q_3 वर्ग है।

$$Q_3=l+\frac{i}{f}(q_3-c)$$

$$=40+\tfrac{10}{12}(62{\cdot}25-51)$$

$$=40+\frac{10\times 11{\cdot}25}{12}$$

$$Q_3=49{\cdot}38$$

$$J_Q=\frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}=\frac{49{\cdot}38+25{\cdot}83-2\times 36{\cdot}04}{49{\cdot}38-25{\cdot}83}=\frac{75{\cdot}21-72{\cdot}08}{23{\cdot}55}=\frac{3{\cdot}13}{23{\cdot}55}=+{\cdot}133$$

∴ विषमता का चतुर्थक-गुणाक $=+{\cdot}133$

(ग) विषमता माप की अन्य रीतियाँ—अन्य विभाजन-मूल्यों तथा अपकिरण घातों के आधार पर विषमता का निरपेक्ष व सापेक्ष माप करने की निम्न रीतियाँ हैं—

(i) शतमक या दशमक रीति—एक समसित वंटन में मध्यका (M or P_{50} or D_5) से P_{10} या D_1 का अन्तर, उससे P_{90} या D_9 के अन्तर के बराबर होता है। यदि ऐसा न हो तो विषमता पाई जाती है। इस आधार पर निम्न सूत्रों द्वारा विषमता का परिगणन किया जा सकता है।

विषमता का शतमक माप—

$$Sk_P=(P_{90}-P_{50})-(P_{50}-P_{10})=P_{90}+P_{10}-2P_{50}$$

विषमता का शतमक-गुणांक—

$$J_P=\frac{(P_{90}-P_{50})-(P_{50}-P_{10})}{(P_{90}-P_{50})+(P_{50}-P_{10})}=\frac{P_{90}+P_{10}-2P_{50}}{P_{90}-P_{10}}$$

कैली (Kelley) ने उपर्युक्त सूत्र का निम्न रूपान्तर प्रस्तुत किया है। कैली का विषमता माप—

$$(Sk)=\frac{P_{90}+P_{10}}{2}-P_{50} \text{ या } Sk=\frac{P_{90}+P_{10}-2P_{50}}{2}$$

स्पष्ट है कि कैली का विषमता-माप शतमक-माप का आधा होगा। यह रीति सरल है किन्तु केवल मध्य के 80% भाग की विषमता का माप करती है। अतः इसका अधिक प्रयोग नहीं किया जाता।

(ii) घन-विचलन रीति—इसे विषमता का तृतीय माप भी कहते हैं। इस रीति के अनुसार विषमता का निरपेक्ष माप तृतीय अपकिरण-घात का घनमूल है। विषमता-गुणांक तृतीय घात को प्रमाप विचलन से भाग देने पर ज्ञात होता है। इसके सूत्र इस प्रकार हैं—

साधारण-श्रेणी में—

$$Sk_3=\sqrt[3]{\frac{\Sigma d^3}{N}}$$

$$J_3=\sqrt[3]{\frac{\Sigma d^3}{N}}\div\sigma$$

आवृत्ति श्रेणी में—

$$Sk_3=\sqrt[3]{\frac{\Sigma fd^3}{N}}$$

$$J_3=\sqrt[3]{\frac{\Sigma fd^3}{N}}\div\sigma$$

गणन-क्रिया की कठिनाइयों के कारण इस माप का अधिकतर प्रयोग नहीं किया जाता।

उदाहरण (Illustration) 30 :

(i) निम्न से विषमता गुणांक (Coefficient of skewness) ज्ञात कीजिए—
दोनों चतुर्थकों (quartiles) के मूल्यों में अन्तर $=8$; मध्यका (Median) $=10{\cdot}5$;
दोनों चतुर्थकों के मूल्यों का योग $=22$

[B Com., Raj., 1972, Agra, 1964]

(ii) एक वंटन में बाउले का विषमता गुणांक (Bowley's coefficient of skewness) $-0{\cdot}36$, प्रथम चतुर्थक (Q_1) $=8{\cdot}6$ और मध्यका (Median) $=12{\cdot}3$ है। उसमें अपकिरण का चतुर्थक-गुणांक (quartile coefficient of dispersion) क्या होगा? [B. Com., Punjab, 1965]

(iii) नीचे दिए हुए मूल्यों से प्रमाप विचलन (S. D.) का मूल्य ज्ञात कीजिए—
माध्य (Mean) $=45$; मध्यका (Median) $=48$
विषमता गुणांक (Coefficient of skewness) $=-{\cdot}4$

[B. Com., Raj, 1972, C. A., 1965]

(iv) किसी वंटन में कार्ल पियर्सन का विषमता-गुणांक (Karl Pearson's coefficient of skewness) $+0{\cdot}32$ है; उसका प्रमाप विचलन $6{\cdot}5$ और समान्तर माध्य $29{\cdot}6$ है। बहुलक (Mode) और मध्यका (Median) ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

(i) $Q_3 - Q_1 = 8$; $Q_3 + -Q_1 = 22$; $M = 10.5$

$$J_Q = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{22 - 2 \times 10.5}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$$

(ii) $J_Q = -0.36$; $Q_1 = 8.6$; $M = 12.3$ पहले Q_3 का मान ज्ञात किया जाएगा

$$J_Q = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} \text{ या } -0.36 = \frac{Q_3 + 8.6 - 24.6}{Q_3 - 8.6}$$

$-0.36\,(Q_3 - 8.6) = Q_3 - 16.0$ या $-.36Q_3 + 3.096 = Q_3 - 16.0$

$-0.36Q_3 - Q_3 = -3.096 - 16.0$ या $1.36Q_3 = 19.096$; $Q_3 = 14.041$

अपकिरण का चतुर्थक-गुणांक (C. of Q.D.) $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{14.041 - 8.6}{14.041 + 8.6} = \frac{5.441}{22.641}$

$\therefore$ C. of Q.D. $= 0.24$

(iii) $\bar{X} = 45$; $M = 48$; $J = -.4$; $\sigma = ?$

$$J = \frac{3\,(\bar{X} - M)}{\sigma} \text{ या } -.4 = \frac{3\,(45 - 48)}{\sigma} \text{ या } -.4\sigma = -9$$

$\therefore \sigma = \frac{90}{4} = 22.5$ प्रमाप विचलन $= 22.5$

(iv) $J = 0.32$; $\sigma = 6.5$; $\bar{X} = 29.6$; $Z = ?$ $M = ?$

$$J = \frac{\bar{X} - Z}{\sigma} \text{ या } .32 = \frac{29.6 - Z}{6.5};\ .32 \times 6.5 = 29.6 - Z$$

$2.08 = 29.6 - Z$; $Z = 29.60 - 2.08 = 27.52$

$\bar{X} - Z = 3\,(\bar{X} - M)$; $29.60 - 27.52 = 3\,(29.6 - M)$

$2.08 = 88.80 - 3M$ $\therefore 3M = 86.72$; $M = 28.91$

अतः बहुलक $= 27.52$ और मध्यका $= 28.91$

परिघात-अनुपात (Moment-Ratio) द्वारा भी अपकिरण का माप किया जा सकता है। इस विधि का वर्णन अगले अध्याय मे किया जाएगा।

अपकिरण एवं विषमता का अन्तर

(Difference between Dispersion and Skewness)

अपकिरण तथा विषमता मे निम्न अन्तर हैं—

(i) अपकिरण के अन्तर्गत किसी समकश्रेणी के विभिन्न पद-मूल्यों का बिखराव या वटन की बनावट का अध्ययन किया जाता है। विभिन्न अपकिरण मापों तथा गुणांकों की सहायता से यह ज्ञात हो जाता है कि श्रेणी के मूल्यों का आपस में या किसी माध्य से कितना विचलन है।

विषमता के माप व गुणांक हमें यह बताते है कि श्रेणी के माध्य से दोनो ओर के भागो का विचरण बराबर है या किसी एक भाग का अधिक है। दूसरे शब्दों मे, विषमता से यह ज्ञात होता है कि आवृत्ति-वक्र सममित है या असममित और यदि असममित है तो किस ओर है और कितनी मात्रा में है। अतः अपकिरण से पूरे समूह की बनावट (composition) का अध्ययन होता है जबकि विषमता से उसके स्वरूप (shape) का पता चलता है।

(ii) अपकिरण से पूरी समकमाला के बिखराव या फैलाव (scatter or spread) का पता चलता है। उससे यह ज्ञात नही होता कि माध्य से किस दिशा मे मूल्यों का विचरण अधिक है। विषमता से माध्य के दोनों ओर के भागों के विचरण की तुलना हो जाती है। यही कारण है कि विषमता धनात्मक या ऋणात्मक होती है।

(iii) अपकिरण के माप या गुणांक द्वितीय श्रेणी के माध्यों (averages of the second order) पर आधारित होते हैं जबकि विषमता-माप एवं गुणांक प्रथम तथा, द्वितीय—दोनों श्रेणी के माध्यों (averages of first and second orders) के आधार पर ज्ञात किये जाते हैं।

(iv) अपकिरण-माप प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय परिघातों (Moments) पर आधारित हैं। इसके विपरीत, विषमता के माप प्रथम एवं तृतीय परिघातों के आधार पर ही निकाले जाते हैं।

उपर्युक्त अन्तर होते हुए भी अपकिरण एवं विषमता के माप एक दूसरे के अनुपूरक हैं। वस्तुतः, आवृत्ति वंटन के वैज्ञानिक एवं विधिवत् विश्लेषण के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, अपकिरण तथा विषमता-माप—इन तीनों का विस्तृत अध्ययन परमावश्यक है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप या माध्य प्रतिरूपी मूल्य होते हैं। उनसे पूरे आवृत्ति-वंटन का सारांश ज्ञात हो जाता है। अपकिरण से इस बात का संकेत मिलता है कि श्रेणी में समंकों का बिखराव कैसा है और विभिन्न मूल्य माध्य से कितनी दूरी पर हैं तथा विषमता से यह पता चलता है कि माध्य से किस ओर का अपकिरण अधिक है अर्थात् आवृत्ति वक्र की असममिति की मात्रा और दिशा क्या है।[1] इस प्रकार, माध्य, अपकिरण तथा विषमता एक आवृत्ति-वंटन के समझने में एक दूसरे के अनुपूरक होते हैं।

[1] 'Averages are typical values; but measures of dispersion indicate the scatter of the data, and coefficients of skewness denote the extent and direction of lopsidedness.'—Spurr and Smith.

महत्त्वपूर्ण सूत्र—अपकिरण (Dispersion)

व्यक्तिगत समंक	आवृत्ति श्रेणी (खण्डित व सतत)
1. विस्तार (Range)	
$R = L - S$	$R = L - S$
गुणांक (Coeff. of R) $= \frac{L-S}{L+S}$	$C.$ of $R. = \frac{L-S}{L+S}$
2. चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)	
$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$	$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$
Coeff. of $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$	$C.$ of $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
3. माध्य विचलन (Mean Deviation) प्रत्यक्ष रीति (Direct)	
$\delta_{\bar{X}} = \frac{\Sigma \lvert d_{\bar{X}} \rvert}{N}$, $\delta_M = \frac{\Sigma \lvert d_M \rvert}{N}$, $\delta_Z = \frac{\Sigma \lvert d_Z \rvert}{N}$	$\delta_{\bar{X}} = \frac{\Sigma f \lvert d_{\bar{X}} \rvert}{N}$, $\delta_M = \frac{\Sigma f \lvert d_M \rvert}{N}$, $\delta_Z = \frac{\Sigma f \lvert d_Z \rvert}{N}$
लघु रीति (Short Cut)	δ_M or $\delta_{\bar{X}}$
$\delta_M = \frac{\Sigma m_A - \Sigma m_B}{N}$	$N = \frac{\Sigma f X_A - \Sigma f X_B - (\Sigma f_A - \Sigma f_B)\ M \text{ or } \bar{X}}{N}$
$\delta_{\bar{X}} = \frac{\Sigma m_A - \Sigma m_B - (N_A - N_B)\ \bar{X}}{N}$	$\delta_M = \frac{\Sigma f \lvert d_{Ma} \rvert + (M - M_a)(\Sigma f_B - \Sigma f_A)}{N}$
A = Above the average (अधिक) B = Below the average (कम)	$\delta_{\bar{X}} = \frac{\Sigma f \lvert d_a \rvert + (\bar{X} - A)(\Sigma f_B - \Sigma f_A)}{N}$
माध्य-विचलन-गुणांक :	
C of $\delta = \frac{\delta}{\bar{X} \text{ or } M \text{ or } Z}$	$C.$ of $\delta = \frac{\delta}{\bar{X} \text{ or } M \text{ or } Z}$

व्यक्तिगत श्रेणी	आवृत्ति श्रेणी
प्रमाप विचलन (Standard Deviation)	
प्रत्यक्ष : $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$	$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$
लघु : $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2}$	$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$
$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-(\overline{X})^2}$	$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2f}{N}-(\overline{X})^2}$
	अवविचलन : समान वर्गान्तर $\sigma=i\times\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'x}{N}\right)^2}$

सामूहिक प्रमाप विचलन (Combined S. D.)—

$$\sigma_{123}=\sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2+D_1^2)+N_2(\sigma_2^2+D_2^2)+N_3(\sigma_3^2+D_3^2)}{N_1+N_2+N_3}}$$

$$D_1=\overline{X}_1-\overline{X},\ D_2=\overline{X}_2-\overline{X},\ D_3=\overline{X}_3-\overline{X}.$$

विचरण-गुणांक (Coefficient of Variation)—

$$C.\ of\ V.=\frac{\sigma}{\overline{X}}\times 100$$

सम्बन्ध—

$$Q.\ D.=\tfrac{2}{3}\sigma;\ \delta=\tfrac{4}{5}\sigma$$

गिनी का संकेन्द्रण-गुणांक—

$$G.=\frac{\Delta_1}{2\overline{X}};\ \Delta_1=\text{माध्यान्तर}$$

विषमता
(Skewness)

माप	सूत्र
कार्ल पियर्सन का माप :	$Sk=\overline{X}-Z$ or $Sk=3(\overline{X}-M)$
कार्ल पियर्सन का गुणाक :	$J=\frac{\overline{X}-Z}{\sigma}$ or $J=\frac{3(\overline{X}-M)}{\sigma}$
बाउले का विषमता माप :	$Sk_Q=Q_3+Q_1-2M$
चतुर्थक विषमता-गुणांक :	$J_Q=\frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

प्रश्न

1. 'आवृत्ति वटन या तो अपनी बनावट में समान होते हुए अपने माध्यों के मूल्य में भिन्न हो सकते हैं या माध्य-मूल्य एक समान होते हुए भी वे अपनी बनावट मे भिन्न हो सकते हैं।'
इस कथन को स्पष्ट कीजिए और यह समझाइये कि किस प्रकार अपकिरण के माप, माध्यो द्वारा प्रदान की गई आवृत्ति वंटन से सम्बन्धित सूचना के अनुपूरक होते हैं।
'Frequency distributions may either differ in the numerical size of their averages though not necessarily in their formation, or they may have the same values of their averages yet differ in their respective formations.'
Explain and illustrate how the measures of dispersion afford a supplement to the information about frequency distribution furnished by averages.
[M. A., Gorakhpur, 1966, B. Com., Raj., 1973, 1961, M Com , Raj., 1952]

2. प्रदर्शित कीजिए कि अपकिरण-माप किस प्रकार यह स्पष्ट करने मे सहायक होते हैं कि आवृत्ति वटनो के माध्य समान होते हुए भी उनकी रचना या बनावट में अन्तर हो सकते है। साख्यिकी में अपकिरण-माप कौन-सी अन्य वातों मे उपयोगी होते हैं ?
Show how the measures of dispersion help in explaining that though frequency distributions may have the same values of their averages, they may differ in their respective formations. In what other respects are measures of dispersion useful in Statistics ? *[M. A., Raj., 1964]*

3. 'अपकिरण' को समझाइये। अपकिरण को मापने की कौन-कौन सी विधियाँ हैं ?
Explain the term Dispersion. What are the various methods of measuring dispersion ? *[B Com., Agra, 1973]*

4. अपकिरण का क्या अर्थ है ? अपकिरण का माप करने की कौन-कौन सी रीतियाँ हैं ? उनकी तुलनात्मक उपयोगिता की व्याख्या कीजिए।
What is meant by Dispersion ? What are the methods of computing dispersion ? Discuss their comparative usefulness. *[M. Com., Vikram, 1972, Agra, 1960, I. C. W. A., 1967, B. Com , Bombay, 1968, Agra, 1966]*

5. अपकिरण के मापो के रूप मे प्रयुक्त विस्तार, प्रमाप-विचलन एव माध्य-विचलन के तुलनात्मक गुणों का विवेचन कीजिए।
Discuss the relative merits of range, standard deviation and mean deviation as measures of dispersion.
[M. A., Meerut, 1968, M. Com., Saugar, 1963, B. Com., Banaras, 1967]

6. प्रमाप विचलन की परिभाषा दीजिए और यह प्रदर्शित कीजिए कि वह मूल-माध्य-वर्ग विचलन का न्यूनतम मूल्य है। माध्य-विचलन की अपेक्षा प्रमाप विचलन का अधिक प्रयोग क्यो किया जाता है ?
Define standard deviation and show that it is the lowest value of the root-mean-square deviation. Why is standard deviation more used than mean deviation ?
[M. A. (Prev.), Agra, 1966]

7. व्यावसायिक सकेन्द्रण से आप क्या समझते हैं ? व्यावसायिक सकेन्द्रण का माप करने की विधियों को स्पष्ट कीजिए।
What is meant by business concentration ? Explain the methods of measuring business concentration.

8. अपकिरण तथा विषमता मे क्या अन्तर है ? विषमता की जाँच आप किस प्रकार से कर सकते है ? उसके माप के उद्देश्य क्या है ?
Distinguish between dispersion and skewness. What are the tests of skewness ? Explain the objects of measuring it. *[B. Com., Lucknow, 1968]*

9. (i) अपकिरण का क्या अभिप्राय है ? यह विषमता से किस प्रकार भिन्न है ?
What is meant by Dispersion ? How does it differ from Skewness ?
[M. A. Meerut, 1973, B. Com , Delhi, 1969, Meerut, 1968]

(ii) 'साख्यिकीय माध्य तथा अपकिरण के माप एक आवृत्ति वंटन को भली-भाँति समझने मे बहुत उपयोगी होते हैं।' उक्त कथन को उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए।
'Averages and measures of dispersion are useful in understanding a frequency distribution.' Elucidate the statement giving illustrations. *[U. P. C. S., 1971]*

10. (अ) केन्द्रीय मूल्य के माप, (ब) वितरण के अपकिरण के माप, (स) सापेक्ष अपकिरण के माप और (द) विषमता-माप क्या होते हैं ? व्याख्या कीजिए और उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए।
What are—(a) measures of central value, (b) measures for calculating the dispersion of a distribution, (c) measures of relative dispersion, (d) measures of skewness? Explain and illustrate. [*B. Com., Delhi, 1965*]

11. 'माध्य, अपकिरण तथा विषमता किसी भी आवृत्ति-वितरण के समझने मे एक-दूसरे के पूरक हैं।' इस कथन को स्पष्ट कीजिए।
'Averages, measures of dispersion and skewness are complementary to one another in understanding a frequency distribution.' Elucidate. [*B. Com., Agra, 1960, 1952*]

12. (i) अपकिरण के अन्य मापो की तुलना मे प्रमाप विचलन क्यों अधिक अच्छा माना जाता है ? समझाइये इसका प्रमुख दोष क्या है ?
Explain why the standard deviation is regarded as superior to other measures of dispersion. What is its chief defect ? [*C. A., 1968, 1963*]
(ii) यदि किसी श्रेणी के प्रत्येक मूल्य मे एक अचर-मूल्य (constant) (क) जोड़ दिया जाए, (ख) घटा दिया जाए, (ग) गुणा कर दिया जाए; या (घ) भाग दे दिया जाए तो उस श्रेणी के समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन पर इन क्रियाओ का क्या प्रभाव पड़ेगा ? उदाहरण देकर समझाइये।
What will be the effect upon arithmetic mean and standard deviation of a series if each value of the distribution is subjected to the processes of addition, subtraction, multiplication or division by a constant value ? Explain giving illustrations.

13. अपकिरण और विषमता, के अन्तर स्पष्ट कीजिए। निम्नांकित वटनों की प्रकृति की समीक्षा कीजिए—
Point out the difference between dispersion and skewness. Comment on the nature of the following distributions—

वटन	I	14	14	14	14	14
,,	II	11	12	14	16	17
,,	III	1	3	6	18	42

[*B. Com., Raj., 1973*]

14. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए—
Write short notes on the following—
(i) अपकिरण के निरपेक्ष व सापेक्ष माप (Absolute and relative measures of dispersion)
(ii) प्रसरण एवं विचरण-गुणांक (Variance and Coefficient of Variation)
(iii) लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)
(iv) गिनी का सकेन्द्रण-अनुपात (Gini's Concentration Ratio)
(v) प्रमाप विचलन के बीजगणितीय गुण (Algebraic properties of the standard deviation)

सीमा-रीति (Method of Limits)—

15. (i) विद्यार्थियों के दो समूहो की लम्बाई (सें० मी०) के आँकड़े निम्नांकित है—

समूह (Group) I	167,	162,	155,	180,	182,	175,	185,	158
समूह (Group) II	169,	172,	168,	165,	177,	180,	195,	167

दोनों समूहो की लम्बाई के विस्तार (range) की तुलना कीजिए।
(ii) एक श्रेणी में विस्तार का सापेक्ष माप 0·29 और अधिकतम मूल्य 64·5 है। न्यूनतम मूल्य बताइए।
[(i) C. R. I ·038. II ·083. (ii) 35·5]

16. किसी परीक्षा में 25 छात्रों को निम्न अंक प्राप्त हुए—

अंक :	5–9	10–14	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39
छात्रों की संख्या :	1	3	8	5	4	2	2

(i) विस्तार-गुणांक (coefficient of range) ; (ii) मध्य के 50% अंकों का विस्तार ; (iii) केन्द्रीय 80% का विस्तार ज्ञात कीजिए।
[(i) C. R. ·793. (ii) 10·73. (iii) 21·25]

अपकिरण के माप (Measures of dispersion)—

17. निम्नलिखित समकों के चतुर्थक विचलन और उसका गुणाक मालूम कीजिए—
From the following data, find the quartile deviation and its coefficient—

Month :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Income :	39	40	40	41	41	42	42	43	43	44	44	45

[Q D.=1·75 ; C. of Q. D.=·042] [*B. Com., IV Sem., Meerut, 1970*]

18. निम्नलिखित अकों से चतुर्थक विचलन तथा उसका गुणाक ज्ञात कीजिए—
From the following figures find the quartile deviation and its coefficient—

Height (cms.) :	150	151	152	153	154	155	156	157	158
No. of Students :	15	20	32	35	33	22	20	12	10

[Q. D.=1·5 ; C. of Q. D.=·0098] [*B. Com., Vikram, 1969*]

19. निम्नलिखित सारणी से चतुर्थक विचलन् मालूम कीजिए—
Find the quartile deviation from the following table—

Size :	4—8	8—12	12—16	16—20	20—24	24—28	28—32	32—36	36—40
Frequency :	6	10	18	30	15	12	10	6	2

[Q. D =5·21] [*B. Com., IV Sem., Meerut, 1971, III Sem. 1972; C. A., 1965*]

20. एक लोक सेवा परीक्षा मे प्राप्तांकों के निम्न वंटन से चतुर्थक विचलन-गुणाक ज्ञात कीजिए।
Calculate the Coefficient of Quartile Deviation from the following distribution of marks obtained in a public service examination—

Marks.	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80
No. of Students :	3	9	12	20	8	6	6	5

[C. of Q. D.=·342] [*B. Com., Alld, 1965*]

21. किसी कक्षा मे विद्यार्थियों की ऊँचाई के आँकड़े निम्न सारणी में दिए गए हैं। चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए—
The following table gives the height of students. Find the quartile deviation—

Height (Inches) :	50—53	53—56	56—59	59—62	62—65	65—68
No. of Students :	2	7	24	27	13	3

[Q. D.=2·21] [*B. Com., Raj., 1973*]

22. निम्न सारणी से अर्द्ध अन्तर-चतुर्थक विस्तार और चतुर्थक विचलन-गुणाक परिकलित कीजिए—
Calculate the Semi-Interquartile Range and the Coefficient of Quartile Deviation from the following table—

Class :	33-36	30-33	28-30	25-28	24-25	20-24	18-20	14-18	12-14	9-12	6-9	0-6
Frequency :	2	7	7	8	5	17	13	15	10	8	4	4

[Semi I. R —5 52, C. of Q. D.= 28]

23. चतुर्थक विचलन का प्रयोग करके यह बतलाइये कि निम्न दो चरमूल्यों—A और B—में किसमें विचरण अधिक है।
Using quartile deviation, state which of the two variables—*A* and *B* is more variable—

A Mid-point	*A* Frequency	*B* Mid-point	*B* Frequency
15	15	100	340
20	33	150	492
25	56	200	890
30	103	250	1420
35	40	300	620
40	32	350	360
45	10	400	187
		450	140

[C. of Q. D.—*A*=0 155, *B*=0·208, *B* में विचरण अधिक है] [*C. A.*, ·

24. विभिन्न दुकानों पर रेडियो सेट के एक मॉडल की निम्न कीमतें हैं—
A particular model of a radio set carries the following price-tags—

Rs. 210, 220, 225, 225, 225, 235, 240, 250, 270, 280

माध्य विचलन कीमत निकालिए (Find the mean deviation price)।

[$\delta_M = 17$] [B. Com., Alld., 1964]

25. निम्न दो श्रेणियों का माध्य विचलन ज्ञात कीजिए और बताइए कौन-सी श्रेणी में अधिक विचरण है—
Calculate the mean deviation of the following two series and say which series has greater variation—

Month	Calcutta Index	Delhi Index	Month	Calcutta Index	Delhi Index
April	93	107	October	97	107
May	97	108	November	97	105
June	95	102	December	92	102
July	95	102	January	93	100
August	95	102	February	89	97
September	95	104	March	89	96

[δ_M कलकत्ता सूचकांक 2·1, दिल्ली सूचकांक 2·83, C of δ_M ·02 और ·028, दिल्ली सूचकांक में अधिक विचरण है।]

26. निम्न सारणी में किसी कारखाने के 1000 कर्मचारियों की मासिक मजदूरी का वितरण दिया हुआ है—
The following table gives the distribution of monthly wages of 1000 workers of a factory—

Wages (Rs.)	No. of Workers	Wages (Rs.)	No. of Workers	Wages (Rs.)	No. of Workers
20	3	100	175	180	[illegible]
40	13	120	220	200	25
60	43	140	204	220	6
80	102	160	139	240	1

उक्त समूह का माध्य विचलन ज्ञात कीजिए और अपकिरण-गुणांक भी निकालिए।
Find the mean deviation of the above group and also compute the coefficient of dispersion.

[δ_M = Rs. 28, C. of δ_M = ·233] [B. Com., Banaras, 1962]

27. 50 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों के वितरण के आधार पर माध्य से और मध्यका से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए—
On the basis of the distribution of marks obtained by 50 students, compute the mean deviation from mean and from median.

Marks obtained :	140—150	150—160	160—170	170—180	180—190	190—200
Frequency :	4	6	10	18	9	3

[$\delta_{\bar{X}} = 10.56$; $\delta_M = 10.24$] [M. A., Banaras, 1961, Vikram, 1962]

28. नीचे लिखे समंकों से माध्य द्वारा माध्य विचलन निकालिए—
Calculate the mean deviation from mean in the following data—

Size :	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
Frequency :	3	7	22	60	85	32	8

[$\bar{X} = 7.09$; $\delta_{\bar{X}} = .915$] [B. Com., IV Sem., Meerut, 1989]

29. निम्न आवृत्ति बटन से मध्यका और माध्य विचलन परिगणित कीजिए—
Calculate the median and mean deviation from the following frequency distribution—

Age (years) :	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45
No. of Persons :	7	10	16	32	24	18	10	5	[illegible]

[$M = 19.95$ years; $\delta_M = 7.10$ years] [B. Com., Vikram, 1970, Lucknow, 1962]

(1)

30. एक समुदाय में पति व पत्नी की आयुओं का अन्तर निम्न प्रकार है। माध्य विचलन (समान्तर माध्य से) ज्ञात कीजिए—

The difference in ages of husbands and wives in a community is as follows. Find the mean deviation from arithmetic mean—

Difference (in yrs.)	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
Frequency	449	705	507	281	109	32	16	4

[$\bar{X}$ = 10·46, $\delta_{\bar{X}}$ = 5·31] *[B. A. II, Raj., 1973; B. Com., Vikram, 1967, Agra, 1955]*

31. निम्न सारणी में दो कारखानों के श्रमिकों की मजदूरी के आँकड़े दिए गए हैं। माध्य विचलन निकालिए और यह बताइए किस कारखाने में मजदूरी में विचरण अधिक है ?

The following table gives the figures of wages earned by workers of two factories. Calculate the mean deviation and state which factory has greater variation in wages—

Weekly Wages (Rs.)	No. of Workers Factory *A*	Factory *B*
Less than 5	20	15
5—10	18	20
10—15	30	35
15—20	25	30
20—25	20	18
25—30	15	17

[Factory *A*: δ_M = Rs. 6·68, C. of δ_M = ·47
Factory *B*: δ_M = Rs. 6·26, C. of δ_M = ·43] *[B. Com., Jabalpur, 1962]*

प्रमाप विचलन (Standard Deviation)—

32. पाँच और सात सदस्यों के दो आय-वर्गों के माध्य विचलन तथा प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए।

Calculate the mean deviation and standard deviation from two income groups of 5 and 7 members.

I Rs. 4,000; 4,200; 4,400; 4,600; 4,800

II Rs. 3,000; 4,000; 4,200; 4,400; 4,600; 4,800; 5,800

[I δ = Rs. 240, σ = Rs. 282·84
II δ = Rs. 571·41, σ = Rs. 785·60] *[B. Com., Delhi, 1963]*

33. 'In the beginning', said a Persian poet, 'Allah took a rose, a lily, a dove, a serpent, a little honey, a Dead Sea apple and a handful of clay. When he looked at the amalgam—it was a woman.'

उपर्युक्त गद्यांश से एक खण्डित आवृत्ति श्रेणी की रचना कीजिए और समान्तर माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए।

Construct a discrete frequency series from the above passage and find the arithmetic mean and standard deviation.

[$\bar{X}$ = 3·564, σ = 2·1]

35. निम्न आँकड़ो से (i) समान्तर माध्य और (ii) प्रमाप विचलन निकालिए—
From the following data calculate (i) arithmetic mean, (ii) standard deviation—

Age (yrs.) :	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80
Frequency :	2	4	4	8	6	3	2

[$\bar{X}$=45 yrs., σ=15·9 yrs.] [*B. Com*, *Raj.*, *1964*]

36. नीचे दिए हुए आँकड़ो का समान्तर माध्यक और प्रमाप विचलन निकालिए—
From the following data compute the arithmetic mean and standard deviation—

Age-group :	Less than 20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55 and above
No. of Workers :	20	26	44	60	101	109	84	66	10

[$\bar{X}$=39·51 yrs., σ=9·57 yrs.] [*B. Com., Delhi, 1971*]

37. एक बड़े कारखाने के 5000 कर्मचारियो की साप्ताहिक मजदूरी के निम्न वितरण से माध्य एवं प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए—
Calculate the mean and standard deviation from the following distribution of weekly wages of 5000 employees of a factory—

Wages (Rs.) :	50—55	45—50	40—45	35—40	30—35	25—30	20—25
No. of Workers :	250	300	400	450	800	1100	1700

[$\bar{X}$=Rs. 31·15, σ=Rs. 9] [*M. Com., Agra, 1967; M. A., Agra, 1972; Kanpur, 1971*]

38. निम्न आँकड़ो से माध्य और प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए—
From the following figures find the mean and standard deviation—

Age (less than) :	10	20	30	40	50	60	70	80
No. of Persons :	15	30	53	75	100	110	115	125

[$\bar{X}$=35 16 yrs., σ=19·76 yrs.] [*B Com., Kerala, 1968 ; Raj , 1966*]

39. निम्न श्रेणी में माध्य और प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए—
In the following series calculate the mean and standard deviation—

Marks (more than) :	0	10	20	30	40	50	60	70
No. of Students :	100	90	75	50	25	15	5	0

[$\bar{X}$=31 yrs., σ=15 94 yrs.] [*M. Com., Agra, 1963*]

शुद्धता की चार्लियर जाँच का भी प्रयोग कीजिए।
Also apply Charlier's Check.

विचरण गुणांक (Coefficient of Variation)—

40. किसी फर्म के उत्पादन मे से 5 वस्तुओ का एक प्रतिदर्श लिया गया। पाँचो वस्तुओ की लम्बाई तथा उनका भार निम्नलिखित है—
A sample of 5 items was taken from the output of a factory. The length and weight of 5 items are given below—

Length (Inches) :	3	4	6	7	10
Weight (ozs) :	9	11	14	15	16

इन दो विशेषताओ के विचरण-गुणांक की तुलना करके निष्कर्ष निकालिए कि किसमें विचरण अधिक है।
By comparing the coefficients of variation of the two characteristics state which one is more variable.
[C. V.=लम्बाई 40 8% ; भार 20%, लम्बाई में विचरण अधिक है] [*B. Com., Agra, 1970*]

41. निम्नलिखित श्रेणियों द्वारा प्रमाप विचलन-गुणांक निकालिए और उसके आधार पर टिप्पणी कीजिए कि उन श्रेणियों मे से किसमे अधिक विचरण है—
From the following data find the coefficients of standard deviation and on that basis state which of the two series is more variable—

Series '*A*' :	195	280	238	239	185	265	340	290	235	250
Series '*B*' :	80	88	95	110	125	128	125	100	105	108

[C. of σ='*A*' ·171 ; '*B*' ·145 ; '*A*' में अधिक विचरण है] *[B. Com., Meerut, 1972]*

42. दो विद्यार्थी जिन्होंने समान विषय लिया था निम्नलिखित अंक प्राप्त करते हैं। ज्ञात कीजिए कि उनमें कौन अधिक सगत है ?
Two students offering the same course obtain the following marks. Find who is more consistent ?

A :	58	59	60	65	66	52	75	31	46	48
B :	56	87	89	46	93	65	44	54	78	[illegible]

[B. Com . IV Sem., Meerut, 1972 ; M. A., Delhi, 1963]

[C. V =*A* 29·9% ; *B* 25·2% ; *B* अधिक सगत है]

43. *A* और *B* दो बल्लेबाजो की विभिन्न पारियो मे दौड़-संख्या निम्न है—
The number of runs scored by two batsmen *A* and *B* in different innings, is as follows—

A	12	115	6	73	7	19	119	36	84	29
B	47	12	76	42	4	51	37	48	13	0

दोनो में कौन अच्छा दौड़ बनाने वाला है ? कौन अधिक सगत है ?
Who is the better run-getter ? Who is more consistent ?

[*A* (50), *B* (33) से अधिक अच्छा दौड़ बनाने वाला ; *[B Com., Meerut, 1968]*
C. V.=*A* 83·66%, *B* 70·9%, *B* अधिक सगत है]

44. एक फुटबाल-सत्र मे दो टीमो—A व B—द्वारा विभिन्न मैचों मे किये गये गोल निम्न प्रकार हैं—
Goals scored by two teams—*A* and *B* in a football season were as follows—

No of goals scored in a match :		0	1	2	3	4
No. of Matches :	*A*	27	9	8	5	4
	B	17	9	6	5	3

ज्ञात कीजिए कि कौन-सी टीम का खेल अधिक संगत माना जा सकता है।
Find which team may be considered more consistent.

[C. V.=*A* 123·6% ; *B* 109% ; *B* का खेल अधिक सगत है] *[M. A., Vikram, 1974]*

45. निम्न सामग्री से प्रमाप विचलन और विचरण गुणाक ज्ञात कीजिए—
From the following data find the standard deviation and coefficient of variation—

Wages (less than) :	10	20	30	40	50	60	70	80
No. of Persons :	12	30	65	107	157	202	222	230

[σ=17·26 ; C. V.=42·7%] *[B Com., Raj., 1970, Lucknow, 1968, Agra, 1967]*

46. नीचे ससद के 542 सदस्यों का आयु के अनुसार बटन दिया गया है। इसका प्रमाप विचलन और विचरण गुणाक ज्ञात कीजिए—
The following is the age-distribution of 542 members of Parliament. Find the standard deviation and coefficient of variation—

Age :	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80	80—90
No. of Members :	3	61	132	153	140	51	2

[σ=11·9 ; C. V.=21·8%] *[B. A., II, Raj., 1972 ; B. Com., Vikram, 1971]*

47. निम्न सारणी मे एक स्कूल की दो कक्षाओं के विद्यार्थियों का वितरण तौल के हिसाब से दिखाया गया है। प्रत्येक माला का विचरण गुणाक निकालिए। कौन-सी माला मे विचरण अधिक है ?
In the following table, distribution of students is shown according to their weights in kgms. Find the coefficient of variation of each series. Which series has greater variation ?—

Weight in Kg. :	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	Total
Class *A* :	7	10	20	18	7	62
Class *B* :	5	9	21	15	6	56

[C. V.=*A* 25% ; *B* 23·5% ; *A* में विचरण अधिक है] *[B. Com., Agra, 1971]*

48. विचरण-गुणांक का परिकलन करके यह ज्ञात कीजिए कि निम्न दोनो श्रेणियों में से किसमें अधिक विचरण है।
By calculating the coefficient of variation, find which of the following two series has greater variation—

Age-group :	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80
Population (000)—								
Town *A* :	18	16	15	12	10	5	2	1
Town *B* :	10	12	24	32	29	11	3	1

[C. V.=*A* 67·3%; *B* 44·4%; *A* में विचरण अधिक है] [*B. Com., Saugar, 1965*]

विषमता (Skewness)—

49. निम्न समंको से विचरण गुणांक और विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए—
From the following data calculate the coefficient of variation and coefficient of skewness—

Year :	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919
Price Indices of Wheat :	83	87	93	109	124	126	130	118	106	104

[C. V.=14·6%; $J=\frac{3(\bar{X}-M)}{\sigma}=\cdot095$] [*B. Com, Agra, 1961*]

50. चतुर्थक माप द्वारा विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए—
Find the coefficient of skewness through quartile measures—

Mid-point :	15	20	25	30	35	40
Frequency :	30	28	25	24	20	21

[$J_Q=\cdot058$] [*B. Com., Kanpur, 1971*]

51. निम्न समंको के आधार पर कार्ल पियर्सन की रीति द्वारा विषमता-गुणांक ज्ञात कीजिए—
On the basis of following data calculate Karl Pearson's coefficient of skewness—

Size of item :	58	59	60	61	62	63	64	65
Frequency :	10	18	30	42	35	28	16	8

[$J=\cdot228$] [*B. Com., Raj., 1966*]

52. निम्नलिखित सारणी से चतुर्थक विचलन तथा विषमता-गुणांक, चतुर्थको तथा मध्यका को मालूम करके, निकालिए—
From the following table, calculate the coefficient of quartile deviation and coefficient of quartile skewness with the help of median and quartiles—

Measurement :	4—8	8—12	12—16	16—20	20—24	24—28	28—32	32—36	36—40
Frequency :	6	10	18	30	15	12	10	6	2

[Q. D.=5·[illegible]; $J_Q=0·1881$] [*B. Com., Meerut, 1972; M. A., Ranchi, 1962*]

53. निम्न आँकड़ों से चतुर्थक तथा मध्यका पर आधारित विषमता-गुणांक ज्ञात कीजिए—
From the following figures calculate the coefficient of skewness based on median and quartiles—

Measurement :	40—36	36—32	32—28	28—24	24—20	20—16	16—12	12—8	8—4
Frequency :	2	6	10	12	15	30	18	10	6

[$J_Q=0·188$] [*M. Com., Agra, 1969; C. A., 1969*]

54. समान्तर मध्यक, बहुलांक और प्रमाप विचलन निकालकर कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक को निकालिए—
Find Karl Pearson's coefficient of skewness by calculating arithmetic mean, mode and standard deviation—

Measurement :	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70
Frequency :	10	12	18	25	16	14	5

[$J=-\cdot04$] [*B. Com., Kanpur, 1973*]

55. निम्न समंकों से कार्ल पियर्सन का विषमता-गुणाक ज्ञात कीजिए—
From the following figures, find Karl Pearson's Coefficient of Skewness—

Measurement :	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80
Frequency :	30	40	50	48	24	162	132	14

[$J = -\cdot 6$] [*M. A., Kanpur, 1970 ; Gorakhpur, 1968*]

56. निम्नलिखित आंकड़ो से कार्ल पियर्सन का विषमता गुणाक ज्ञात कीजिए—
From the following data calculate the Karl Pearson's coefficient skewness—

Wages (more than) :	5	15	25	35	45	55	65	75	85
No. of Workers :	120	105	96	85	72	58	32	12	0

[$J = -\cdot 714$] [*B. Com., Gorakhpur, 1970 ; Agra, 1968*]

57. कॉलिज परीक्षा और प्रतियोगितात्मक परीक्षा मे परीक्षार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों की निम्नांकित श्रेणियो से यह, बताइए कि बुद्धिमत्ता में कौन-सा समूह अधिक सजातीय है और कौन-सा अधिक असमंमितीय है—
From the following series of marks obtained by candidates in a college examination and a competitive examination, state which group is more homogeneous and which is more skew in intelligence—

College Examination		*Competitive Examination*	
Marks	*No. of Students*	*Marks*	*No. of Candidates*
100—150	20	1200—1250	50
150—200	45	1250—1300	85
200—250	50	1300—1350	72
250—300	25	1350—1400	60
300—350	19	1400—1450	16

[कॉलिज परीक्षा : C. V.=27·1% ; $J = \cdot 182$
प्रतियोगितात्मक परीक्षा : C V.=4·42% ; $J = \cdot 213$ यह अधिक सजातीय और विषम है]

विविध प्रश्न (Miscellaneous Problems)—

58 निम्न आंकड़ो से सम्पूर्ण समूह का समूहित समान्तर माध्य और समूहित प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए—
From the following data, find the combined arithmetic mean and combined standard deviation of the whole group—

Sub-group	*No. of Persons*	*Average Wages (Rs)*	*Standard Deviation (Rs)*
A	50	61 0	8 0
B	100	70 0	9 0
C	120	80 5	10 0
D	30	83 0	11·0

[$\bar{X}_{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$=Rs. 74, $\sigma_{1\text{-}4}$=Rs. 12·18 ; $\bar{X}_{1\cdot 2\cdot 3}$=Rs. 73, $\sigma_{1\cdot 2\cdot 3}$=Rs. 11·9]

59. (i) किसी समूह से सम्बद्ध निम्न मापें दी हुई हैं—
The following measures relate to a group—

$$\bar{X}=10 ; \ \sigma^2=4 ; \ N=60$$

यदि उक्त समूह के एक उप-समूह का—
If the measures of its sub-group are—

$$\bar{X}_1=11, \ \sigma_1^2=2\cdot 25, \text{ and } N_1=40$$

इसके दूसरे उप-समूह का समान्तर माध्य तथा प्रमाप-विचलन ज्ञात कीजिए।
Find the mean and standard deviation of its other sub-group.

(ii) एक विद्यालय मे पढ़ने वाले लड़को और लड़कियो के भार के आंकड़े इस प्रकार हैं—
The figures of weights of boys and girls studying in a school are as under—

	Boys	Girls
Number	100	50
Mean Weight	60 kgms.	45 kgms.
Variance	9	4

(*a*) समूहित प्रमाप विचलन निकालिए।
Compute the combined standard deviation

(*b*) कौन-से बटन में विचरण अधिक है।
Which distribution is more variable ?

[(i) $\bar{X}_2=8$; $\sigma_2=1·225$; (ii) (*a*) 6·11 kgms. (*b*) C. V. 5%, 4·44%] [*I.C.W.A.*, *1970*]

60. (i) 70 श्रमिकों के एक समूह की औसत दैनिक मजदूरी 3·5 रु० है और प्रमाप विचलन 1·4 रु० है। 80 श्रमिकों के एक अन्य समूह की औसत दैनिक मजदूरी 5 रु० है और प्रसरण 4 रु० है। सभी 150 श्रमिकों के लिए औसत मजदूरी, प्रसरण और विचरण-गुणाक ज्ञात कीजिए।
The mean and standard deviation of daily wages of a group of 70 workers are Rs. 3·5 and Rs. 1·4 respectively. The mean and variance of daily wages of another group of 80 workers are Rs. 5 and Rs. 4 respectively. Find the mean wages, variance and coefficient of variation of all 150 workers.

(ii) निम्न सारणी में अज्ञात मूल्यों का परिगणन कीजिए—
From the following table, compute the missing values—

Sub-group	Number N	Arithmetic Mean $(\bar{X})$	Variance (V)
I	?	25	9
II	250	?	16
III	300	15	?
Combined	750	16	51·733

[(i) $\bar{X}$=Rs. 4·30 ; V=3·608 ; C. V.=44·16% ; (ii) $N_1=200$; $\bar{X}_2=10$; $V_3=25$]

61. (i) (*a*) एक मौलिक आवृत्ति सारणी जिसमे माध्य 11 और प्रसरण 9·9 था खोया गया परन्तु उस पर आधारित निम्न व्युत्पन्न सारणी मिल गयी। मूल सारणी की रचना कीजिए—
An original frequency table with mean 11 and variance 9·9 was lost but the following table derived from it was found. Construct the original table—

Value :	−2	−1	0	+1	+2
Frequency :	1	6	7	4	2

(*b*) यदि उपर्युक्त व्युत्पन्न सारणी एक दूसरी स्थिति में प्राप्त हो और ऐसी मौलिक सारणी पर आधारित हो जिसमे माध्य 20 और प्रसरण 9·9 हो तो दोनो परिस्थितियो पर आधारित एक समूहित मौलिक सारणी की रचना कीजिए।
If the above given frequency table was similarly found in another case with mean 20 and variance 9·9, construct the original combined table for both cases together. [*M. A.*, *Meerut*, *1972*].

(ii) 5 अवलोकनो का माध्य 4·4 और प्रसरण 8·24 है। यदि 5 मे से 3 अवलोकनो के मूल्य 1, 2 और 6 हो, तो शेष दो के मूल्य ज्ञात कीजिए।
The mean and variance of 5 observations are 4·4 and 8·24 respectively. If the values of 3 observations are 1, 2 and 6 find the values of the remaining two observations.

[(i) (*a*) $i=9$; $A=11$: Class-intervals −11·5 to −2·5, −2·5 to 6·5, 6·5−15·5, 15·5−24·5, 24·5−33·5 ;
(*b*) $i=9$; $A=20$; Class-intervals −2·5 to 6·5, 6·5−15·5, 15·5−24·5, 24·5−33·5, 33·5−42·5]

(ii) अज्ञात मूल्य 9 और 4 है]

62. (i) नीचे दी हुई सतत श्रेणी मे वर्गान्तर निकालकर वर्ग-समूह निश्चित कीजिए जबकि समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन के मूल्य क्रमश: 31·15 और 9 किलोग्राम हैं—

Specify the actual class-intervals in the following continuous frequency distribution by finding out the magnitude of interval, if the arithmetic mean and standard deviation are 31·15 and 9 kgms respectively—

X:	3	2	1	0	−1	−2	−3	Total
f:	25	30	40	45	80	110	170	500

(ii) एक सतत चर के निम्न आवृत्ति वंटन से समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन के मूल्य क्रमश 135 3 पौंड और 9 6 पौंड प्राप्त हुए—

The values of the arithmetic mean and standard deviation of the following distribution of a continuous variate are 135·3 and 9 6 pounds respectively—

$d'x$:	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	Total
f:	2	5	8	18	22	13	8	4	80

वास्तविक वर्गान्तर निर्धारित कीजिए।

Determine the actual class-intervals.

[(i) i=5, 50—55, 45—50,...20—25 ; (ii) i=6, 109·5—115·5,...151·5—157·5]

63. (i) समझौते के पश्चात् एक कारखाने की साप्ताहिक औसत मजदूरी 10 रु० से बढ़कर 15 रु० हो गई और प्रमाप विचलन 2 से बढ़कर 3 रु० हो गया। समझौते के पश्चात् मजदूरी में वृद्धि तथा अधिक समानता आ गई। समीक्षा कीजिए।

As a result of an agreement, the weekly average wages in a factory increased from Rs. 10 to Rs. 15 and the standard deviation went up from Rs. 2 to Rs. 3. After the agrerment there was an increase and greater uniformity in wages. Comment. [*B. Com., Raj., 1970*]

(ii) एक साधारण रूप से असममित वितरण में चतुर्थक विचलन का गुणाक 0 6 तथा तृतीय चतुर्थक 16, मध्यका तथा बहुलक क्रमश: 14 एव 12 हैं। कार्ल पियर्सन का विचरण गुणांक ज्ञात कीजिए।

In a moderately asymmetrical distribution, the coefficient of quartile deviation was 0 6 and the third quartile, median and mode were 16, 14 and 12 respectively. Calculate Karl Pearson's coefficient of variation. [*B. Com., Raj., 1970*]

[(i) मजदूरी में वृद्धि हुई किन्तु विचरण पूर्ववत् रहा ; (ii) C. V.=60%]

64. (i) नीचे दिए हुए मूल्यो से प्रमाप विचलन का मूल्य ज्ञात कीजिए—

From the following values find the standard deviation—

Mean=45 ; Median=48 ; and Coefficient of Skewness=−·4

(ii) अपकिरण का चतुर्थक गुणाक ज्ञात कीजिए, यदि विषमता का चतुर्थक-गुणाक=−·36; मध्यका=16·5 और प्रथम चतुर्थक=13 8

Find the quartile coefficient of dispersion, if the quartile coefficient of skewness=−·36 ; Median=16·5 ; and first quartile=13·8 [*M. A., Jiwaji 1971*]

(iii) प्रथम 11 प्राकृतिक अकों का प्रमाप विचलन प्रत्यक्ष रूप से ज्ञात कीजिए।

Obtain directly the standard deviation of first 11 natural numbers.

(iv) निम्न मूल्यों की सहायता से गिनी का माध्य-अन्तर और गिनी का सकेन्द्रण गुणाक ज्ञात कीजिए—

From the following values find the Gini's mean difference and Gini's concentration coefficient—

15, 19, 25, 28 and 30

[(i) σ=22·5 ; (ii) C. of Q.D.=0·126 ; (iii) σ=3 16 ; (iv) Gini's M.d.=7·8 ; C C.=0·17]

65. 20 वर्षों के लिए ससार के वार्षिक स्वर्ण-उत्पादन (दस लाख पौंड मे) के निम्नलिखित मूल्यो का समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए—

Find the arithmetic mean and standard deviation of the following values of annual gold-production (in million pounds) of the world for 20 years—

94	95	96	93	87	79	73	69	68	67
78	82	83	89	95	103	108	117	130	97

समान्तर माध्य से $\pm\sigma$, $\pm\sigma$, $\pm\sigma$ अन्तरों के बाहर आने वाले मूल्यों का प्रतिशत निकालिए।
Find the percentages of values lying outside mean $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, and $\pm 3\sigma$.

[$\bar{x}$=90 15 mln. pounds., σ=15·99 m. $\bar{x}\pm 2\sigma$, $\bar{x}\pm 2\sigma$ and $\pm 3\sigma$ के बाहर क्रमश: 35%, 5% 0% मूल्य है]

66. किसी परीक्षा में तीन प्रत्याशियों के बिल्कुल समान प्राप्तांक थे और उन्हें एक समान स्थान दिया गया। निम्न समंकों का प्रयोग करते हुए यह निश्चित कीजिए कि क्या तीनों को समान स्थान देना न्यायोचित था—
In an examination, three candidates had exactly equal marks and they were all bracketed together for one rank. Using the following figures, determine whether the assignment of equal rank to all the three candidates was just and equitable—

	Marks out of 100			
Candidate	*English*	*Science*	*Maths.*	*Total*
A	95	70	61	226
B	69	83	74	226
C	70	74	82	226

तीन विषयों (अंग्रेजी, विज्ञान व गणित) में माध्य-प्राप्तांक 55, 53 और 50 तथा प्रमाप विचलन क्रमश: 16, 12 और 11 थे।
Mean marks in the three subjects (English, Science, and Maths.) are 55, 53, and 50 and standard deviation are respectively 16, 12, and 11.

[Z-समंक *A*=4·92, *B*=5 56 और *C*=5 59 अत: प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय स्थान क्रमश: *C*, *B* व *A* को दिये जाने चाहिए]

67. निम्न सारणी में किसी स्कूल के 137 विद्यार्थियों के कुल प्राप्तांक दिए गए हैं—
The following table gives the total marks obtained by 137 students of a school—

Marks	Digits—Division of Class-interval										Total
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
80—89	1	2	1	—	1	2	1	—	—	2	10
90—99	3	4	5	2	8	6	4	2	5	3	42
100—109	8	5	2	4	2	5	3	1	4	5	39
110—119	7	5	3	3	2	3	2	4	2	—	31
120—129	2	1	1	2	3	—	—	4	1	1	15

1 विद्यार्थी के प्राप्तांक 80 हैं, 2 के 81, 1 के 82, 8 के 94, 4 के 127 और इसी प्रकार...।
उक्त प्राप्तांकों से विचरण-गुणांक ज्ञात कीजिए—
(*a*) केवल जोड़ों का ही प्रयोग करके, तथा
(*b*) सम्पूर्ण सामग्री का प्रयोग करके।
1 student gets 80 marks, 2 get 81, 1 gets 82, 8 get 94, 4 get 127 and so on...From the marks obtained, find the coefficient of variation—(a) using totals only, (*b*) using the whole data.

[C. V.—(*a*) 10·76% ; (*b*) 10·94%]

68. निम्नलिखित आँकड़ों से एक लॉरेंज वक्र खींचिए—
Draw a Lorenz Curve from the following data—

Income (000 Rs.) :		20	40	80	100	160
No. of Persons (000's) :	*A*	10	20	40	50	80
	B	16	14	10	6	4

69. नीचे लिखी संख्याओं से लॉरेंज वक्र खींचिए और यह बताइए कि कौन-सा वर्ग अधिक असमानता लिए हुए है—
From the following figures draw a Lorenz Curve and state which group has greater inequality—

Income (Rs)	*No. of Persons A–State*	*No. of Persons B–State*
0— 500	6000	5000
500—1000	4250	4500
1000—2000	3600	4800
2000—3000	1500	2200
3000—4000	650	1500

[*A* में अधिक असमानता है] [*B. Com., Meerut, 1969; Agra, 1965*]

70. दो व्यापारों '*A*' और '*B*' के लाभ इस प्रकार हैं—
The profits of two businesses '*A*' and '*B*' are as follows—

Business 'A' Profit (Lakh Rs)	*Number of Factories*	*Business 'B' Profit (Lakh Rs)*	*Number of Factories*
100	12	40	40
120	16	60	48
140	24	80	52
160	18	90	30
200	20	100	24
280	10	130	6

बिन्दु-रेख प्रणाली द्वारा यह बताइये कि दोनों में से किस व्यापार के लाभों में विचरण अधिक है।
Use graphical method to determine which business has greater variability in profits.
['*B*' में विचरण अधिक है] [*M. Com., 1965*]

71. निम्नांकित समंकों से लॉरेंज वक्र बनाइए—
Prepare a Lorenz Curve from the following data—

Earnings (Rs.)	*Number of Persons Group 'A'*	*Number of Persons Group 'B'*
1000	600	1500
1200	800	1000
1400	1200	900
1600	900	1100
2000	1000	300
2800	500	200

[*B. Com., Meerut, 1975*]

10

परिघात एवं पृथुशीर्षत्व

(MOMENTS AND KURTOSIS)

आवृत्ति वंटन की विभिन्न विशेषताओं का सांख्यिकीय विश्लेषण करने में परिघातों (Moments) का बहुत महत्त्व है। विभिन्न अपकिरण-परिघातों की सहायता से समंकश्रेणी के समान्तर माध्य, अपकिरण, विषमता, प्रसामान्यता तथा पृथुशीर्षत्व का माप किया जाता है।

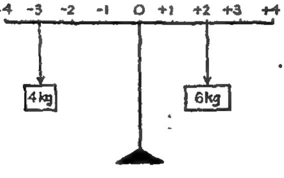
'परिघात' अथवा 'आघूर्ण' शब्द का प्रयोग अधिकतर यान्त्रिक विज्ञान (Mechanics) में किया जाता है। फ्रेडरिक मिल्स के अनुसार यन्त्र-विज्ञान में प्रचलित शब्द 'परिघात' या 'आघूर्ण' का अभिप्रायः घुमाव उत्पन्न करने वाली प्रवृत्ति से सम्बन्धित शक्ति के माप से है। यह प्रवृत्ति निम्न दो तत्वों पर निर्भर होती है—

(i) शक्ति की मात्रा, तथा

(ii) मूलबिन्दु से उस बिन्दु का अन्तर जिस पर शक्ति का भार पड़ता है।[1]

निम्न चित्र से यह बात स्पष्ट हो जाती है—

परिघात-प्रवधारणा का प्रतिरूप-चित्र



आलम्ब

उपर्युक्त चित्र में मूल बिन्दु (Origin) आलम्ब (Fulcrum) पर स्थित है। इस बिन्दु से दो सेन्टीमीटर दाहिनी ओर (+2 पर) 6 किलोग्राम का भार डाला गया है जो मूलबिन्दु से तीन सेन्टीमीटर बायीं ओर (—3 पर) 4 किलोग्राम के भार से सन्तुलित हो जाता है। आलम्ब के दोनों ओर के बिन्दुओं (—3 और +2) पर क्रमशः 4 व 6 किलोग्राम का भार पड़ने से दोनों ओर के कुल भार की शक्ति बराबर हो जाती है।

[1] "Moment is a familiar mechanical term for the measure of a force with reference to its tendency to produce rotation. The strength of this tendency depends, obviously, upon the *amount of the force* and upon the *distance from the origin* of the point at which the force is exerted."—Frederick Mills, *Statistical Methods*, p. 166.

बायीं ओर का भार (शक्ति)		दाहिनी ओर का भार
4 किलो × 3 से० मी०	=	6 किलो × 2 से० मी०
12		12

शक्ति-सन्तुलन की स्थिति में धनात्मक गुणनफल (दाहिनी ओर का भार), ऋणात्मक गुणनफल (बायी ओर के भार) के बिल्कुल बराबर होता है।

यन्त्र-विज्ञान में घुमाव उत्पन्न करने की शक्ति एक बिन्दु पर पड़ने वाले भार और मूलबिन्दु से उस बिन्दु के अन्तर (फासले) के गुणनफल के बराबर होती है। सांख्यिकी में, 'परिघात' शब्द इसी अर्थ में प्रयोग होता है। अन्तर केवल यह है कि विभिन्न बिन्दुओं पर पड़ने वाले भार के स्थान पर वर्ग-आवृत्तियाँ (Class-frequencies, or f) और मूलबिन्दु से उन बिन्दुओं के फासले के स्थान पर समान्तर माध्य (या अन्य कोई कल्पित मूलबिन्दु) से विभिन्न मूल्यों के विचलन (deviations or d) ज्ञात होते हैं। आवृत्ति श्रेणी में प्रथम परिघात (First Moment) समान्तर माध्य से मूल्यों के विचलनो (d) और आवृत्तियो (f) के गुणनफलों का समान्तर माध्य होता है। यह सदा शून्य (0) होगा। द्वितीय परिघात (Second Moment) विचलन-वर्गों (d^2) की आवृत्ति से गुणा करके गुणनफल को कुल आवृत्ति से भाग देकर ज्ञात किया जाता है। वस्तुतः समान्तर माध्य से निकाला गया द्वितीय अपकिरण-घात, प्रसरण अथवा प्रमाप विचलन का वर्ग (Variance or Square of Standard Deviation) होता है। माध्य से विचलनों के घन या तृतीय घात (d^3) तथा विचलनों के चतुर्थ घात (d^4) के समान्तर माध्य क्रमशः तृतीय एव चतुर्थ अपकिरण-घात (Third and Fourth Moments) कहलाते हैं।

केन्द्रीय परिघात (Central Moments)—किसी समंक-श्रेणी के समान्तर माध्य से निकाले गए अपकिरण-परिघातों को केन्द्रीय परिघात (Central Moments) अथवा माध्य से अपकिरण-परिघात (Moments about the Arithmetic Mean) कहा जाता है। सांख्यिकी मे अधिकतर केन्द्रीय परिघातों का ही प्रयोग किया जाता है। इन परिघातों के लिए ग्रीक वर्णमाला का अक्षर μ (म्यू—Greek Alphabet 'Mu') प्रयुक्त होता है। घात से सम्बद्ध अंक इस चिह्न के बाद उपलेख (Subscript) के रूप में लिख दिया जाता है। जैसे $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \ldots\ldots \ldots\ldots \mu_n$ आदि।

केन्द्रीय परिघातों का परिगणन
(Calculation of Central Moments)

केन्द्रीय परिघात ज्ञात करने की निम्न विधियाँ है—

(1) प्रत्यक्ष रीति, (2) लघु रीति, तथा (3) पद-विचलन रीति।

(1) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)—

(i) इस रीति के अनुसार पहले श्रेणी के समान्तर माध्य (Arithmetic Mean) का निर्धारण किया जाता है। $(\bar{X})$

(ii) प्रत्येक पद-मूल्य का समान्तर-माध्य से विचलन निकाला जाता है। $(d=X-\bar{X})$

(iii) विचलनो के क्रमशः वर्ग (d^2), घन (d^3) व चतुर्थ घात (d^4) करके जोड़ $\Sigma d, \Sigma d^2, \Sigma d^3$, व Σd^4 प्राप्त किए जाते हैं।

आवृत्ति श्रेणी में इन विचलन-घातों की क्रमानुसार आवृत्ति से गुणा करके उन गुणाओं के जोड़—$\Sigma fd, \Sigma fd^2, \Sigma fd^3$ व Σfd^4 ज्ञात कर लिए जाते हैं।

(iv) अन्त में अग्रांकित सूत्रों द्वारा प्रथम चार केन्द्रीय परिघातो की गणना की

व्यक्तिगत श्रेणी	आवृत्ति श्रेणी
$\mu_1=\frac{\Sigma(X-\bar{X})}{N}=\frac{\Sigma d}{N}=0$	$\mu_1=\frac{\Sigma f(X-\bar{X})}{N}=\frac{\Sigma fd}{N}=0$
$\mu_2=\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N}=\frac{\Sigma d^2}{N}=\sigma^2$	$\mu_2=\frac{\Sigma f(X-\bar{X})^2}{N}=\frac{\Sigma fd^2}{N}=\sigma^2$
$\mu_3=\frac{\Sigma(X-\bar{X})^3}{N}=\frac{\Sigma d^3}{N}$	$\mu_3=\frac{\Sigma f(X-\bar{X})^3}{N}=\frac{\Sigma fd^3}{N}$
$\mu_4=\frac{\Sigma(X-\bar{X})^4}{N}=\frac{\Sigma d^4}{N}$	$\mu_4=\frac{\Sigma f(X-\bar{X})^4}{N}=\frac{\Sigma fd^4}{N}$

(2) लघु रीति (Short-Cut Method)—यदि श्रेणी का समान्तर माध्य किसी पूर्णाङ्क के रूप में नहीं है तो उससे विचलन निकालने में गणन-क्रिया अत्यन्त जटिल हो जाती है; अतः अधिकतर लघु रीति द्वारा परिघातों की गणना करना सुविधाजनक रहता है। लघु रीति के अनुसार पहले, किसी कल्पित मूल-बिन्दु (Arbitrary Origin) से चारों परिघात निकाल लिए जाते हैं। फिर उनकी सहायता से केन्द्रीय परिघात उपलब्ध कर लिए जाते हैं। संक्षेप में, लघु रीति निम्न प्रकार है—

(i) सर्वप्रथम, किसी सुविधाजनक मूल्य को कल्पित माध्य (A) मान लिया जाता है।

(ii) इस कल्पित मूल्य से विचलन (dx) निकालकर चारों अपकिरण-परिघात ठीक उसी प्रकार प्राप्त कर लिए जाते हैं जिस प्रकार प्रत्यक्ष रीति में समान्तर माध्य से विभिन्न परिघात ज्ञात किए जाते हैं।

इन परिघातों को कल्पित मूलबिन्दु से निकाले गए अपकिरण-परिघात (Moments about an Arbitrary Origin) कहते हैं। इन परिघातों के लिए ग्रीक वर्णमाला का अक्षर ν (न्यू—Greek Alphabet —Nu) उपयुक्त उपलेख सहित प्रयुक्त किया जाता है—जैसे ν_1, ν_2, ν_3 और ν_4 इनके सूत्र निम्न हैं—

कल्पित मूल बिन्दु से परिघात (Moments about an Arbitrary Origin)—

व्यक्तिगत श्रेणी	आवृत्ति श्रेणी
$\nu_1=\frac{\Sigma(X-A)}{N}=\frac{\Sigma dx}{N}$	$\nu_1=\frac{\Sigma f(X-A)}{N}=\frac{\Sigma fdx}{N}$
$\nu_2=\frac{\Sigma(X-A)^2}{N}=\frac{\Sigma d^2x}{N}$	$\nu_2=\frac{\Sigma f(X-A)^2}{N}=\frac{\Sigma fd^2x}{N}$
$\nu_3=\frac{\Sigma(X-A)^3}{N}=\frac{\Sigma d^3x}{N}$	$\nu_3=\frac{\Sigma f(X-A)^3}{N}=\frac{\Sigma fd^3x}{N}$
$\nu_4=\frac{\Sigma(X-A)^4}{N}=\frac{\Sigma d^4x}{N}$	$\nu_4=\frac{\Sigma f(X-A)^4}{N}=\frac{\Sigma fd^4x}{N}$

(iii) अन्त में निम्न सूत्रों के अनुसार कल्पित मूलबिन्दु से निकाले गए परिघातों की सहायता से समान्तर माध्य से चारों परिघात (अर्थात् केन्द्रीय परिघात) उपलब्ध कर लिए जाते हैं—

कल्पित माध्य से निकाले गए परिघातों से केन्द्रीय परिघातों का निर्धारण (Moments about the Mean from Moments about the Arbitrary Origin)—

$$\mu_1=\nu_1-\nu_1=0$$
$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2=\sigma^2$$
$$\mu_3=\nu_3-3\nu_2.\nu_1+2\nu_1^3$$
$$\mu_4=\nu_4-4\nu_3.\nu_1+6\nu_2.\nu_1^2-3\nu_1^4$$

सूत्रों का आधार—उपर्युक्त सूत्रों का आधार यह है कि समान्तर माध्य के स्थान पर किसी कल्पित माध्य (arbitrary origin) से विचलन लेने से प्रत्येक विचलन में $(\bar{X}-A)=\bar{d}x$ अर्थात् v_1 के बराबर अन्तर का विभ्रम हो जाता है, अतः केन्द्रीय परिघात निकालने के लिए कल्पित मूल बिन्दु से ज्ञात परिघात (v) में निम्नलिखित संशोधन किए जाते हैं—

प्रथम परिघात—

$$\mu_1=(v-\bar{d}x)^1=v_1-dx \text{ या } v_1-(\bar{X}-A)=v_1-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)=v_1-v_1=0$$

$$\text{वास्तव में } \bar{d}x=(\bar{X}-A)=\frac{\Sigma dx}{N}=v_1$$

द्वितीय-परिघात—

$$\mu_2=(v-\bar{d}x)^2=v_2-2v_1\bar{d}x+\bar{d}x^2=v_2-2\bar{d}x.\bar{d}x+\bar{d}x^2$$
$$=v_2-2\bar{d}x^2+\bar{d}x^2=v_2-\bar{d}x^2=v_2-v_1^2 \qquad [\because \bar{d}x=v_1]$$

द्वितीय केन्द्रीय परिघात वस्तुतः प्रमाप विचलन का वर्ग अर्थात् प्रसरण (Variance) ही है।

$$\therefore \quad \mu_2=\sigma^2=\frac{\Sigma fd^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2=v_2-v_1^2$$

तृतीय परिघात—

$$\mu_3=(v-\bar{d}x)^3=v_3-3v_2\bar{d}x+3v_1\bar{d}x^2-\bar{d}x^3$$
$$=v_3-3v_2.v_1+3\bar{d}x.\bar{d}x^2-\bar{d}x^3=v_3-3v_2v_1+3\bar{d}x^3-\bar{d}x^3$$
$$\therefore \quad \mu_3=v_3-3v_2v_1+2v_1^3$$

चतुर्थ-परिघात—

$$\mu_4=(v-\bar{d}x)^4=v_4-4v_3\bar{d}x+6v_2\bar{d}x^2-4v_1\bar{d}x^3+\bar{d}x^4$$
$$=v_4-4v_3.v_1+6v_2.v_1^2-4\bar{d}x^4+\bar{d}x^4$$
$$\therefore \quad \mu_4=v_4-4v_3.v_1+6v_2.v_1^2-3v_1^4$$

केन्द्रीय-परिघातों की सहायता से किसी कल्पित मूल-बिन्दु पर आधारित चारों परिघात भी ज्ञात किए जा सकते हैं। इसके लिए सर्वप्रथम, समान्तर माध्य $(\bar{X})$ और कल्पित मूलबिन्दु (A) का अन्तर $(\bar{d}x)$ प्राप्त कर लिया जाता है।

तत्पश्चात्, निम्न सूत्रों द्वारा केन्द्रीय परिघातों की सहायता से उक्त मूल-बिन्दु पर आधारित चारों परिघात निश्चित कर लिए जाते हैं।

केन्द्रीय परिघातों से कल्पित माध्य पर आधारित परिघातों का निर्धारण (Moments about an Arbitrary Origin from Moments about the Mean)—

$$v_1=(\mu+\bar{d}x)^1=\mu_1+\bar{d}x=\bar{d}x \qquad [\because \mu_1=0] \qquad \ldots(i)$$
$$v_2=(\mu+\bar{d}x)^2=\mu_2+2\mu_1\bar{d}x+\bar{d}x^2=\mu_2+\bar{d}x^2 \qquad \ldots(ii)$$
$$v_3=(\mu+\bar{d}x)^3=\mu_3+3\mu_2\bar{d}x+3\mu_1\bar{d}x^2+\bar{d}x^3=\mu_3+3\mu_2\bar{d}x+\bar{d}x^3 \qquad \ldots(iii)$$
$$v_4=(\mu+\bar{d}x)^4=\mu_4+4\mu_3\bar{d}x+6\mu_2\bar{d}x^2+4\mu_1\bar{d}x^3+\bar{d}x^4$$
$$=\mu_4+4\mu_3\bar{d}x+6\mu_2\bar{d}x^2+\bar{d}x^4 \qquad \ldots(iv)$$

उदाहरण (Illustration) 1 :

100 छात्रों की ऊँचाई के निम्न वितरण से समान्तर माध्य पर आधारित चारों परिघात (first four moments about the mean) ज्ञात कीजिए—

ऊँचाई (इन्च) :	61	64	67	70	73
छात्रों की संख्या :	5	18	42	27	8

हल (Solution) :

केन्द्रीय-परिघातों का परिकलन (लघु रीति)

ऊँचाई (इन्च)	छात्रों की संख्या	$A=67$ से विचलन	f व dx की गुणा	fdx व dx की गुणा	fd^2x व dx की गुणा	fd^3x व dx की गुणा
X	f	dx	fdx	fd^2x	fd^3x	fd^4x
61	5	−6	−30	180	−1080	6480
64	18	−3	−54	162	− 486	1458
67	42	0	0	0	0	0
70	27	+3	81	243	+ 729	2187
73	8	+6	48	288	+1728	10368
	100		129−84 =45	873	+2457−1566 =+891	20,493
	N		Σfdx	Σfd^2x	Σfd^3x	Σfd^4x

कल्पित माध्य ($A=67$) से परिघात—

$$\nu_1=\frac{\Sigma fdx}{N}=\frac{45}{100}=\cdot45 \qquad \nu_3=\frac{\Sigma fd^3x}{N}=\frac{891}{100}=8\cdot91$$

$$\nu_2=\frac{\Sigma fd^2x}{N}=\frac{873}{100}=8\cdot73 \qquad \nu_4=\frac{\Sigma fd^4x}{N}=\frac{20\,493}{100}=204\cdot93$$

वास्तविक समान्तर माध्य से परिघात—

$$\mu_1=\nu_1-\nu_1=\cdot45-\cdot45=0$$
$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2=8\cdot73-(\cdot45)^2=8\cdot73-\cdot2025=8\cdot5275$$
$$\mu_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^3=8\cdot91-(3\times8\cdot73\times\cdot45)+2\times(\cdot45)^3$$
$$=8\cdot91-11\cdot7855+\cdot18225=-26\cdot9325$$
$$\mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4$$
$$=204\cdot93-4\times8\cdot91\times\cdot45+6\times8\cdot73\times(\cdot45)^2-3\times(\cdot45)^4$$
$$=204\cdot93-16\cdot038+10\cdot60695-\cdot1230=199\cdot3759$$

∴ प्रथम चार केन्द्रीय परिघात (central moments) निम्न हैं—

0, 8·5275, −2 6932 और 199·3759

उक्त उदाहरण में यदि चारों केन्द्रीय परिघात मालूम हों तो कल्पित मूल-बिन्दु (67) से परिघात निम्न प्रकार उपलब्ध किये जा सकते हैं—

$$\bar{X}=A+\frac{\Sigma fdx}{N} \text{ या } 67+\frac{45}{100}=67\cdot45$$
$$dx=\bar{X}-A=67\cdot45-67=\cdot45=\nu_1$$
$$\nu_1=\bar{d}x=\cdot45$$
$$\nu_2=\mu_2+\bar{d}x^2=8\cdot5275+(\cdot45)^2=8\cdot73$$
$$\nu_3=\mu_3+3\mu_2\bar{d}x+\bar{d}x^3=-2\cdot6932+3\times8\cdot5275\times\cdot45+(\cdot45)^3$$
$$=-2\cdot69325+11\cdot512125+\cdot091125=8\cdot91$$
$$\nu_4=\mu_4+4\mu_3\bar{d}x+6\mu_2\bar{d}x^2+\bar{d}x^4$$
$$=199\cdot3759-(4\times-2\cdot69325\times\cdot45)+6\times8\cdot5275\times(\cdot45)^2+(\cdot45)^4$$
$$=199\cdot3759-4\cdot84785+10\cdot36091+\cdot041006$$
$$=204\cdot93$$

∴ कल्पित माध्य 67 पर आधारित चारों परिघात हैं—

·45, 8·73, 8·91 तथा 204·93

उदाहरण (Illustration) 2 :

किसी चर के मूल्य 5 पर आधारित प्रथम चार परिघात क्रमशः 2, 20, 40 और 50 हैं। सिद्ध कीजिए कि समान्तर माध्य 7, प्रसरण (variance) 16 और तीसरे और चौथे केन्द्रीय परिघात क्रमशः −64 तथा 162 है।

हल (Solution) :

$A=5,\ \nu_1=2,\ \nu_2=20,\ \nu_3=40,\ \nu_4=50$

समान्तर माध्य $\overline{X}=A+\nu_1=5+2=7$

प्रसरण $\mu_2=\nu_2-\nu_1^2=20-(2)^2=16$

तृतीय परिघात $\mu_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^3=40-3\times20\times2+2\times(2)^3=40-120+16$
$=-64$

चतुर्थ परिघात $\mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4$
$=50-4\times40\times2+6\times20\times2^2-3\times(2)^4$
$=50-320+480-48$
$=530-368=162$

∴ समान्तर माध्य $=7$; प्रसरण $=16$; तृतीय परिघात $=-64$ और चतुर्थ परिघात $=162$

उदाहरण (Illustration) 3 :

किसी चर के मूल्य 2 पर आधारित प्रथम तीन परिघात क्रमशः 1, 16 और −40 हैं। उक्त वटन के समान्तर माध्य (mean), प्रसरण (variance) और तृतीय परिघात (μ_3) निकालिए। यह भी सिद्ध कीजिए कि शून्य (0) पर आधारित पहले तीन परिघातों के मान क्रमशः 3, 24 और 76 है। *[U. P. C. S., 1968, 1972]*

हल (Solution) :

ज्ञात है— $A=2,\ \nu_1=1,\ \nu_2=16,\ \nu_3=-40$

$\therefore\ \overline{X}=A+\frac{\Sigma dx}{N}=A+\nu_1=2+1=3$

प्रसरण (V या σ^2) $\mu_2=\nu_2-\nu_1^2=16-(1)^2=15$

$\mu_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^3=-40-(3\times16\times1)+2\times1^3$
$=-40-48+2=-86$

शून्य मूल बिन्दु पर आधारित परिघात (Moments about 0)—

$\overline{X}=3;\ A=0\quad \therefore\ \bar{d}x=(\overline{X}-A)=3$

प्रथम परिघात (0 से) $\nu_1=\mu_1+\bar{d}x=0+3=3$

द्वितीय परिघात (0 से) $\nu_2=\mu_2+\bar{d}x^2=15+(3)^2=24$

तृतीय परिघात (0 से) $\nu_3=\mu_3+3\mu_2dx+dx^3$
$=-86+3\times15\times3+(3)^3=-86+135+27=76$

अतः समान्तर माध्य, प्रसरण और तृतीय केन्द्रीय परिघात क्रमशः 3, 15 व −86 हैं। और शून्य मूल बिन्दु से सम्बद्ध तीनों परिघात क्रमशः 3, 24 और 76 हैं।

उदाहरण (Illustration) 4 :

एक वंटन में मूल्य 4 पर आधारित प्रथम चार परिघात −1·5, 17, −30 तथा 108 हैं। समान्तर माध्य पर आधारित परिघात और प्रारम्भिक मूल बिन्दु (0) पर आधारित चारों परिघात निकालिए।

[B. Com., Meerut, 1971, Raj., 1950, U. P. C. S., 1965, M. A., Alld., 1963]

हल (Solution) :

$$A=4,\ \nu_1=-1{\cdot}5,\ \nu_2=17,\ \nu_3=-30 \text{ तथा } \nu_4=180$$

समान्तर माध्य पर आधारित परिघात—

$$\mu_1=\nu_1-\nu_1=-1{\cdot}5-(1{\cdot}5)=0$$
$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2=17-(-1{\cdot}5)^2=17-2{\cdot}25=14{\cdot}75$$
$$\mu_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^3=-30-(3\times17\times-1{\cdot}5)+2\times(-1{\cdot}5)^3$$
$$=-30+76{\cdot}5-6{\cdot}75=39{\cdot}75$$
$$\mu_4=\nu_4-4\nu_3.\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4=108-(4\times-30\times-1{\cdot}5)$$
$$+(6\times17-1{\cdot}5^2)-3\times(-1{\cdot}5)^4=108-180+229{\cdot}5-15{\cdot}1875$$
$$=337{\cdot}50-195{\cdot}1875=142{\cdot}3125$$

मूलबिन्दु (0) पर आधारित परिघात—

$$\mu_1=0,\ \mu_2=14{\cdot}75,\ \mu_3=39{\cdot}75,\ \mu_4=142{\cdot}3125$$
$$\overline{X}=4+(-1{\cdot}5)=2{\cdot}5 \qquad A=0 \text{ [मूलबिन्दु]}$$
$$\bar{d}x=\overline{X}-A=2{\cdot}5-0=2{\cdot}5$$
$$\nu_1 \text{ (शून्य से)}=\bar{d}x=2{\cdot}5$$
$$\nu_2 \text{ (शून्य से)}=\mu_2+\bar{d}x^2=14{\cdot}75+(2{\cdot}5)^2$$
$$=14{\cdot}75+6{\cdot}25=21$$
$$\nu_3 \text{ (शून्य से)}=\mu_3+3\mu_2.\bar{d}x+\bar{d}x^3$$
$$=39{\cdot}75+3\times14{\cdot}75\times2{\cdot}5+(2{\cdot}5)^3$$
$$=39{\cdot}75+110{\cdot}625+15{\cdot}625=166$$
$$\nu_4 \text{ (शून्य से)}=\mu_4+4\mu_3\bar{d}x+6\mu_2\bar{d}x^2+\bar{d}x^4$$
$$=142{\cdot}3125+(4\times39{\cdot}75\times2{\cdot}5)+(6\times14{\cdot}75\times2{\cdot}5^2)+(2{\cdot}5)^4$$
$$=142{\cdot}3125+397{\cdot}5+553{\cdot}125+39{\cdot}0625=1132$$

∴ शून्य पर आधारित परिघात 2·5, 21, 166 तथा 1132 हैं।

उदाहरण (Illustration) 5 :

एक श्रेणी का समान्तर माध्य 5 है और पहले चार केन्द्रीय परिघातों के मान 0, 3, 0 और 26 है। प्रथम चार परिघात ज्ञात कीजिए—(i) कल्पित मूलबिन्दु 4 पर आधारित और (ii) शून्य पर आधारित।

हल (Solution) :

ज्ञात है— $\overline{X}=5,\ \mu_1=0,\ \mu_2=3,\ \mu_3=0$ तथा $\mu_4=26$

(i) कल्पित मूलबिन्दु $A=4$

$$\bar{d}x=\overline{X}-A=5-4=1$$

कल्पित मूलबिन्दु पर आधारित परिघात $(A=4)$—

$$\nu_1=\bar{d}x=1$$
$$\nu_2=\mu_2+\bar{d}x^2=3+(1)^2=4$$
$$\nu_3=\mu_3+3\mu_2\bar{d}x+\bar{d}x^3=0+3\times3\times1+1^3=10$$
$$\nu_4=\mu_4+4\mu_3\bar{d}x+6\mu_2\bar{d}x^2+\bar{d}x^4$$
$$=26+4\times0\times1+6\times3\times1^2+1^4=45$$

(ii) शून्य पर आधारित $(A=0)$

$$\bar{d}x=\overline{X}-A=5-0=5$$

शून्य पर आधारित परिघात (Moments about Zero)—

$$v_1 \text{ (0 से)} = \bar{d}x = 5$$
$$v_2 \text{ (0 से)} = \mu_2 + \bar{d}x^2 = 3 + (5)^2 = 28$$
$$v_3 \text{ (0 से)} = \mu_3 + 3\mu_2 \bar{d}x + \bar{d}x^3$$
$$= 0 + 3 \times 3 \times 5 + (5)^3 = 45 + 125 = 170$$
$$v_4 \text{ (0 से)} = \mu_4 + 4\mu_3 \bar{~}x + 6\mu_2 \bar{~}x^2 + \bar{d}x^4$$
$$= 26 + 4 \times 0 \times 5 + 6 \times 3 \times 5^2 + (5)^4$$
$$= 26 + 450 + 625 = 1101$$

$A = 4$ से सम्बद्ध परिघात = 1, 4, 10 तथा 45

$A = 0$ से सम्बद्ध परिघात = 5, 28, 170 तथा 1101

(3) पद विचलन रीति (Step Deviation Method)—समान वर्गान्तरों वाले अविच्छिन्न आवृत्ति-वंटन में केन्द्रीय परिघात ज्ञात करने की पद-विचलन रीति का प्रयोग अत्यधिक सुविधाजनक रहता है। यह रीति लघु रीति के ही समान है परन्तु इसमे कल्पित माध्य (A) से विचलन वर्ग-विस्तार की इकाई (In class-interval-units) में निकाले जाते हैं।

क्रियायें—(i) कल्पित मूल बिन्दु से पद-विचलन ($d'x$) निकाले जाते हैं।

(ii) कल्पित मूल बिन्दु से पद-विचलनों के आधार पर चारों परिघात $-v'_1$, v'_2, v'_3 और v'_4 ज्ञात किये जाते हैं।

(iii) निम्न सूत्रों द्वारा केन्द्रीय परिघात की गणना की जाती है—

$$\mu_1 = [v'_1 - v'_1] \times i = 0$$
$$\mu_2 = [v'_2 - v'^2_1] \times i^2 = \sigma^2$$
$$\mu_3 = [v'_3 - 3v'_2 v'_1 + 2v'^3_1] \times i^3$$
$$\mu_4 = [v'_4 - 4v'_3 v'_1 + 6v'_2 v'^2_1 - 3v'^4_1] \times i^4$$

उदाहरण (Illustration) 6 :

निम्नांकित आवृत्ति वंटन से समान्तर माध्य पर आधारित पहले चार परिघात ज्ञात कीजिए।

वर्गान्तर	2·5	7·5	12 5	17·5	22·5	27 5	32·5—37·5
आवृत्ति :	4	10	20	36	16	12	2

हल (Solution) :

पद-विचलन रीति द्वारा परिघातों का निर्धारण

वर्ग	मध्य मान	आवृत्ति	पद-विचलन	f व $d'x$ की गुणा	$fd'x$ व $d'x$ की गुणा	fd'^2x व $d'x$ की गुणा	fd'^3x व $d'x$ की गुणा
	X	f	$d'x$	$fd'x$	fd'^2x	fd'^3x	fd'^4x
2 5- 7·5	5	4	−3	−12	36	−108	324
7·5-12·5	10	10	−2	−20	40	−80	160
12 5-17·5	15	20	−1	−20	20	−20	20
17·5-22·5	20	36	0	0	0	0	0
22 5-27 5	25	16	+1	+16	16	+16	16
27·5-32·5	30	12	+2	+24	48	+96	192
32 5-37·5	35	2	+3	+6	18	+54	162
	$i=5$	100 N		+46−52 = −6 $\Sigma fd'x$	178 $\Sigma fd'^2x$	+166−208 = −42 $\Sigma fd'^3x$	874 $\Sigma fd'^4x$

संशोधित $\mu_1=\mu_1=0$ शुद्धि अनावश्यक

संशोधित $\mu_2=$ असंशोधित $\mu_2-\frac{i^2}{12}$

संशोधित $\mu_3=\mu_3$ शुद्धि अनावश्यक

संशोधित $\mu_4=\mu_4-\frac{1}{2}\mu_2.i^2+\frac{7}{240}.i^4$

i संकेत वर्ग-विस्तार (class-interval) के लिए है।

प्रथम एवं तृतीय परिघातों में संशोधन की कोई आवश्यकता नहीं होती, क्योंकि उनमें विचलनों के धनात्मक (+) व ऋणात्मक (—) चिह्न बने रहते है। अंतः अशुद्धि समकारी या क्षतिपूरक प्रकृति की होने के कारण लगभग समाप्त ही हो जाती है। परन्तु द्वितीय या चतुर्थ परिघातों में विचलनों के वर्ग एवं चतुर्थ घात हो जाने के कारण — भी + हो जाते है और अशुद्धि संचयी (cumulative) प्रकृति की हो जाती है। अतः इनमें संशोधन करना आवश्यक होता है।

द्वितीय परिघात के संशोधन के आधार पर प्रमाप विचलन मे वर्गीकरण की अशुद्धि दूर करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है—

$$\text{संशोधित } \sigma=\sqrt{\sigma^2-\frac{i^2}{12}}$$

उपयुक्तता—शेपर्ड के संशोधन निम्न परिस्थितियों में ही उपयुक्त होते है—

(i) जब आवृत्ति-वितरण, अविच्छिन्न श्रेणी के रूप मे हो।

(ii) जब आवृत्तियाँ श्रेणी के मध्य भाग से दोनों ओर लगातार घटती रहे और शून्य हो जाएँ (when frequency tapers off to zero in both directions)।

(iii) जब कुल आवृत्ति काफी अधिक हो अर्थात् लगभग 1000 से कम न हो।

(iv) जब वर्गान्तर समान हों और वर्ग-विस्तार न्यूनतम व अधिकतम मूल्यो के अन्तर (Range) के लगभग $\frac{1}{20}$ से अधिक न हो।

(v) जब आवृत्ति-वटन सममित या साधारण असममित हो तथा वह *J*- या *V*-आकार वाला या अत्यधिक विषम न हो।

(vi) केवल द्वितीय एवं चतुर्थ परिघातों मे ही शेपर्ड संशोधन आवश्यक होते है।

उदाहरण (Illustration) 7 :

(i) उदाहरण 6 मे परिगणित परिघातों पर शेपर्ड शुद्धियाँ प्रयोग कीजिए और संशोधित द्वितीय एवं चतुर्थ परिघात ज्ञात कीजिए।

(ii) किसी सतत आवृत्ति-वटन में 3–3 का वर्ग-विस्तार है और द्वितीय तथा चतुर्थ केन्द्रीय परिघात क्रमशः 8·5275 तथा 199·3759 है। शेपर्ड शुद्धि का प्रयोग करते हुए संशोधित परिघात ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

(i) ज्ञात है— $\mu_2=44\cdot41,\ \mu_4=5423\cdot5,\ i=5$

संशोधित $\mu_2=\mu_2-\frac{i^2}{12}=44\cdot41-\frac{25}{12}=44\cdot41-2\cdot08=42\cdot33$

संशोधित $\mu_4=\mu_4-\frac{1}{2}\mu_2.i^2+\frac{7}{240}.i^4$

$=5423\cdot5-(\frac{1}{2}\times44\cdot41\times25)+(\frac{7}{240}\times625)$

$=5423\cdot5-555\cdot125+18\cdot23=4886\cdot6$

∴ संशोधित μ_2 और μ_4, 42·33 और 4886·6 हैं।

(ii) ज्ञात है— $\mu_2=8\cdot5275,\ \mu_4=199\cdot3759,\ i=3$

संशोधित $\mu_2=\mu_2-\frac{i^2}{12}=8\cdot5275-\frac{9}{12}=8\cdot5275-\cdot75=7\cdot7775$

संशोधित $\mu_4 = \mu_4 - \frac{1}{2}\mu_2 . i^2 + \frac{7}{240} . i^4$

$= 199{\cdot}3759 - (\frac{1}{2} \times 8{\cdot}5275 \times 9) + \frac{7}{240} \times 81$

$= 199{\cdot}3759 - 38{\cdot}3738 + 2{\cdot}3625 = 163{\cdot}3646$

∴ संशोधित μ_2 तथा μ_4, 7·7775 और 163·3646 हैं।

केन्द्रीय परिघातों पर आधारित गुणांक (Coefficients based on Moments)—विभिन्न परिघातों के पारस्परिक अनुपात के आधार पर तीन प्रकार के गुणांकों का प्रयोग किया जाता है—एल्फा-गुणांक, बीटा-गुणांक एवं गामा-गुणांक (α, β-and γ-coefficients)* । इनके सूत्र निम्नांकित हैं—

एल्फा-गुणांक (Alpha-Coefficients)	बीटा-गुणांक (Beta-Coefficients)	गामा-गुणांक (Gamma-Coefficients)
$\alpha_1 = \frac{\mu_1}{\sigma} = 0$		
$\alpha_2 = \frac{\mu_2}{\sigma^2} = 1$	$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \alpha_3^2$	$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \alpha_3$
$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$	$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \alpha_3$	$\gamma_2 = \beta_2 - 3$
$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$	$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \alpha_4$	$= \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_2^2}$

जैसा कि उपर्युक्त सूत्रों से स्पष्ट है, α, β व γ-Coefficients कुछ महत्त्वपूर्ण परिघात-अनुपातों (Moment-Ratios) को व्यक्त करते हैं। β व γ-Coefficients का प्रयोग समंक-श्रेणी की विषमता एवं पृथुशीर्षत्व का माप करने में भी किया जाता है।

परिघातों पर आधारित विषमता-माप (Measures of Skewness based on Moments)—कार्ल पियर्सन के अनुसार परिघात-अनुपातों के आधार पर निम्न दो सूत्रों द्वारा विषमता गुणांक ज्ञात किये जा सकते हैं।

(1) **प्रथम (परिघात) विषमता गुणांक (First Coefficient of Skewness)**—

$$\sqrt{\beta_1}^{\dagger} = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} \text{ या } \alpha_3 \text{ या } \gamma_1$$

(2) **द्वितीय (परिघात) विषमता गुणांक (Second Coefficient of Skewness)**—

$$\text{विषमता का परिघात गुणांक} = \frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{2\,(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

$$\text{जहाँ } \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \text{ तथा } \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

दूसरे सूत्र का प्रयोग अधिकतर उस स्थिति में किया जाता है जब श्रेणी में बहुत थोड़ी मात्रा की विषमता पायी जाती है। इस सूत्र की सहायता से बहुलक के मूल्य का भी निम्न सूत्रानुसार निर्धारण किया जा सकता है—

$$Z = \bar{X} - \left[\sigma \frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{2\,(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}\right]$$

$$\therefore \frac{\bar{X} - Z}{\sigma} = \frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{2\,(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

* ग्रीक वर्णमाला के प्रथम तीन अक्षर (First three small letters of the Greek Alphabet—α—Alpha, β—Beta, γ—Gamma)।

† $\sqrt{\beta_1}$ का धनात्मक-ऋणात्मक चिन्ह वही रहेगा जो μ_3 का है।

$$\text{या} \quad \bar{X}-Z=\sigma\times\frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2+3)}{2\,(5\beta_2-6\beta_1-9)}$$

$$\therefore \qquad Z=\bar{X}-\left[\sigma\,\frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2+3)}{2\,(5\beta_2-6\beta_1-9)}\right].$$

उदाहरण (Illustration) 8 :

दो वंटनों में समान्तर माध्य से द्वितीय परिघात क्रमशः 16 तथा 25 हैं, जबकि तृतीय केन्द्रीय परिघात 12·8 और 31·25 है। दोनों समूहों की विषमता की तुलना कीजिए।

हल (Solution) :

समूह I	समूह II
$\mu_2=16,\ \mu_3=12{\cdot}8$	$\mu_2=25,\ \mu_3=31{\cdot}25$
$\sqrt{\beta_1}=\frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}=\frac{12{\cdot}8}{\sqrt{16^3}}$	$\sqrt{\beta_1}=\frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}=\frac{31{\cdot}25}{\sqrt{25^3}}$
$\because\ \frac{12{\cdot}8}{64}=+{\cdot}20$	$=\frac{31{\cdot}25}{125}=+{\cdot}25$

दूसरे वर्ग में अधिक विषमता है।

उदाहरण (Illustration) 9 :

दो-दो के विस्तार मे वर्णित एक सतत आवृत्ति वंटन में समान्तर माध्य (10) पर आधारित और वर्ग-विस्तार इकाई मे व्यक्त चारो परिघात क्रमशः 0, 2·81, −2·04 व 23·5025 हैं। चारों केन्द्रीय परिघात निकालिए और β_1 तथा β_2 की परिगणना कीजिए। परिघातों पर आधारित विषमता-गुणांक ज्ञात कीजिए तथा बहुलक भी निर्धारित कीजिए।

हल (Solution) :

वर्ग-विस्तार की इकाइयो में परिघात—

$$\mu'_1=0,\ \mu'_2=2{\cdot}81,\ \mu'_3=-2{\cdot}04,\ \mu'_4=23{\cdot}5025,\ i=2$$

$$\therefore\quad \mu_1=\mu'_1\times i=0$$

$$\mu_2=\mu'_2\times i^2=2{\cdot}81\times2^2=11{\cdot}24$$

$$\mu_3=\mu'_3\times i^3=-2{\cdot}04\times2^3=-16{\cdot}32$$

$$\mu_4=\mu'_4\times i^4=23{\cdot}5025\times2^4=376{\cdot}04$$

$$\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}=\frac{(-16{\cdot}32)^2}{(11{\cdot}24)^3}=\frac{\text{Antilog }(2\log 16{\cdot}32)}{\text{Antilog }(3\log 11{\cdot}24)}$$

$$=\text{Antilog }[(2\times1{\cdot}2127)-(3\times1{\cdot}0507)]=\text{Antilog }\bar{1}.2733={\cdot}1876$$

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=\frac{376{\cdot}04}{(11{\cdot}24)^2}=\frac{376{\cdot}04}{126{\cdot}34}=2{\cdot}98$$

प्रथम विषमता-गुणांक $\quad \sqrt{\beta_1}=\sqrt{{\cdot}1876}={\cdot}43$

द्वितीय विषमता-गुणांक

$$=\frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2+3)}{2\,(5\beta_2-6\beta_1-9)}=\frac{{\cdot}43\times(2{\cdot}98+3)}{2\,(5\times2{\cdot}98-6\times{\cdot}1876-9)}$$

$$=\frac{{\cdot}43\times5{\cdot}98}{2\,(14{\cdot}90-1{\cdot}1256-9)}=\frac{2{\cdot}57}{9{\cdot}55}=+{\cdot}27$$

$$Z=\bar{X}-\left[\sigma\,\frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2+3)}{2\,(5\beta_2-6\beta_1-9)}\right]=10-(\sqrt{\mu_2}\times{\cdot}27)$$

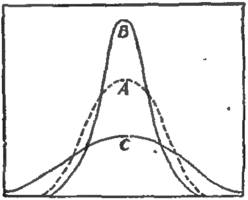
$$=10-(3{\cdot}352\times{\cdot}27)=10-{\cdot}905;\ Z=9{\cdot}1$$

पृथुशीर्षत्व
(Kurtosis)

आवृत्ति-वक्र के शीर्ष की प्रकृति का अध्ययन करने के लिए पृथुशीर्षत्व (Kurtosis) का माप निकाला जाता है। पृथुशीर्षत्व द्वारा आवृत्ति-वक्र की प्रसामान्यता (Normality) का विश्लेषण किया जाता है।

प्रसामान्य वक्र की तुलना में किसी आवृत्ति-वक्र के नुकीलेपन या शीर्षत्व (Peakedness) अथवा चपटेपन (Flatness) के माप को पृथुशीर्षत्व कहते हैं। क्राक्सटेन एवं काउडेन के शब्दों में 'पृथुशीर्षत्व का माप उस मात्रा को व्यक्त करता है जिसमें एक आवृत्ति-वंटन का वक्र नुकीला अथवा चपटे शीर्ष वाला होता है।'[1] पृथुशीर्षत्व के माप से हमें यह पता चलता है कि श्रेणी के मध्य भाग में आवृत्तियों का जमाव (Concentration of frequencies in the middle of the distribution) कैसा है। यदि केन्द्र में आवृत्तियों का जमाव सामान्य है तो वह आवृत्ति-वक्र मध्यम शीर्ष वाला या प्रसामान्य (Mesokurtic or Normal)[2] कहलाता है। यदि आवृत्तियाँ सामान्य वक्र की तुलना में श्रेणी के मध्यवर्ती भाग मे बहुत अधिक सघन (dense) रूप से केन्द्रित हैं तो वह वक्र लम्बे या नुकीले शीर्ष वाला (Lepto-kurtic or Peaked) कहलाता है तथा केन्द्र में आवृत्ति-जमाव बहुत कम होने पर वह चपटे शीर्ष वाला (Platy-kurtic or Flat) वक्र कहलाता है। निम्न चित्र से शीर्षत्व पर आधारित ये तीन प्रकार के वक्र स्पष्ट हो जाते है।

पृथुशीर्षत्व



A. मध्यम शीर्ष वाला *B.* नुकीले शीर्ष वाला *C.* चपटे शीर्ष वाला

उपर्युक्त चित्र में तीन वक्र प्रदर्शित किये गये है। वक्र 'अ' (Curve *A*) सामान्य शीर्ष वाला वक्र है, वक्र 'ब' (*B*) जो नोकदार या लम्बे शीर्ष वाला है, हमें यह बतलाता है कि उससे सम्बन्धित आवृत्ति-वंटन मे आवृत्तियाँ अत्यधिक रूप से मध्य भाग मे केन्द्रित हैं। इसके विपरीत, वक्र 'स' (*C*) सामान्य वक्र की अपेक्षा चपटे शीर्ष वाला है जिसमें आवृत्तियों का केन्द्र में बहुत कम जमाव है। स्टुडेन्ट नामक प्रसिद्ध सांख्यिक (गोसेट) ने चपटे-शीर्ष वाले वक्र की तुलना छोटी पूँछ और चपटी पीठ वाले जानवर प्लेटिपस से और नोकदार वक्र की तुलना ऊँचे शीर्ष व लम्बी पूँछ वाले कगारू से की है।[3]

पृथुशीर्षत्व का माप—पृथुशीर्षत्व का माप चतुर्थ एवं द्वितीय परिघातों के आधार पर

[1] 'A measure of *Kurtosis* indicates the degree to which a curve of a frequency distribution is peaked or flat-topped.'—Croxton and Cowden, *Applied General Statistics.*

[2] *Kurtic*=humpbacked or unimodal, *Meso*=In the middle, *Lepto*=narrow or peaked, *Platy*=flat.

[3] 'Platy-kurtic curves are like the platypus, squat with short tails, lepto-kurtic curves are like the kangaroo, high with long tails—noted for lepping.'—Student (real name W. S. Gossett), quoted by Johnson and Jackson.

परिघात-अनुपात (moment ratio) द्वारा किया जाता है। इसके लिए कार्ल पियर्सन ने निम्न सूत्र प्रयुक्त किया है—

शीर्षत्व का माप $$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=\frac{\text{चतुर्थ परिघात}}{(\text{द्वितीय परिघात})^2}$$

β_2 सकेताक्षर पृथुशीर्षत्व-माप (measure of Kurtosis) के लिए है।

निर्वचन—यदि β_2 का मूल्य 3 के बराबर होता है तो वक्र सामान्य होता है। β_2 का मूल्य 3 से अधिक तथा कम होने पर वक्र क्रमशः लम्बे शीर्ष वाला (Lepto-kurtic) और चपटे शीर्ष वाला (Platy-kurtic) माना जाता है।

यदि $\beta_2=3$, तो वक्र मध्यम शीर्ष वाला (meso-kurtic or normal) है।

यदि $\beta_2>3$, तो वक्र लम्बे या नुकीले शीर्ष वाला (lepto-kurtic) है।

यदि $\beta_2<3$, तो वक्र चपटे शीर्ष वाला (platy-kurtic) है।

पृथुशीर्षत्व के माप के लिए γ_2 का भी प्रयोग किया जा सकता है।

$$\gamma_2=\beta_2-3=\frac{\mu_4-3\mu_2^2}{\mu_2^2}$$

यदि γ_2 या $\beta_2-3=0$ तो वक्र मध्यम शीर्ष वाला है ;

यदि γ_2 धनात्मक है तो वक्र नुकीले शीर्ष वाला है। $\because \beta_2>3$

यदि γ_2 ऋणात्मक है तो वक्र चपटे शीर्ष वाला है। $\because \beta_2<3$

विषमता की भांति पृथुशीर्षत्व का माप भी जीव-विज्ञान तथा भौतिक-विज्ञानों में अधिक उपयोगी होता है। आर्थिक, सामाजिक व व्यापारिक घटनाओं मे इसका अधिक प्रयोग नहीं होता, क्योंकि इन क्षेत्रों मे प्रसामान्य वंटन बहुत कम पाये जाते हैं।

उदाहरण (Illustration) 10 :

किसी आवृत्ति वटन में समान्तर माध्य से द्वितीय, तृतीय व चतुर्थ परिघात 3, 0 व 26 हैं। परिघातों की सहायता से विषमता तथा शीर्षत्व ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

ज्ञात है $\mu_2=3,\ \mu_3=0$ तथा $\mu_4=26$

विषमता-माप $\sqrt{\beta_1}=\frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}=\frac{0}{\sqrt{3^3}}=\frac{0}{\sqrt{27}}=0$ विषमता नही है।

पृथुशीर्षत्व का माप—

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=\frac{26}{(3)^2}=\frac{26}{9}=2{\cdot}889$$

$\therefore\ \beta_2$ *i.e.* $2{\cdot}889<3$, वक्र चपटे शीर्ष वाला (platy-kurtic) है।

उदाहरण (Illustration) 11 :

एक सममितीय वटन मे प्रमाप विचलन 5 है। चतुर्थ केन्द्रीय परिघात का क्या मूल्य हो ताकि वंटन—(i) नुकीले शीर्ष वाला (lepto-kurtic) हो। (ii) मध्यम शीर्ष वाला (meso-kurtic) हो। (iii) चपटे शीर्ष वाला (platy-kurtic) हो।

हल (Solution) :

$\sigma=5 \quad \therefore\ \mu_2=5^2=25$

(i) Lepto-kurtic वटन मे $\mu_4>3\mu_2^2$
अत. $\mu_4>3\times(25)^2>1875$

(ii) Meso-kurtic वटन मे $\mu_4=3\mu_2^2$
अत $\mu_4=3\mu_2^2=3\times25^2=1875$

(iii) Platy-kurtic वटन मे $\mu_4<3\mu_2^2$
अत $\mu_4<3\times(25)^2$ या <1875

महत्त्वपूर्ण सूत्र

माप	सूत्र
1. समान्तर माध्य से परिघात— प्रत्यक्ष रीति : माध्य से विचलन लेकर :	$\mu_1=\frac{\Sigma fd}{N}=0$; $\mu_2=\frac{\Sigma fd^2}{N}=\sigma^2$ $\mu_3=\frac{\Sigma fd^3}{N}$; $\mu_4=\frac{\Sigma fd^4}{N}$.
लघु रीति : (i) कल्पित माध्य (A) से परिघात :	$\nu_1=\frac{\Sigma fd^1x}{N}$; $\nu_2=\frac{\Sigma fd^2x}{N}$; $\nu_3=\frac{\Sigma fd^3x}{N}$; $\nu_4=\frac{\Sigma fd^4x}{N}$
(ii) माध्य से परिघात—काल्पनिक मूल बिन्दु से :	$\mu_1=\nu_1-\nu_1=0$; $\mu_2=\nu_2-\nu_1^2=\sigma^2$ $\mu_3=\nu_3-3\nu_2.\nu_1+2\nu_1^3$; $\mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4$
2. कल्पित मूल बिन्दु पर आधारित परिघात— केन्द्रीय परिघातों से :	$dx=(\bar{X}-A)$ $\nu_1=dx$; $\nu_2=\mu_2+\bar{d}x^2$ $\nu_3=\mu_3+3\mu_2\bar{d}x+\bar{d}x^3$ $\nu_4=\mu_4+4\mu_3\bar{d}x+6\mu_2\bar{d}x^2+\bar{d}x^4$
3. शेपर्ड के संशोधन—	Corrected $\mu_2=\mu_2-\frac{i^2}{12}$ Corrected $\mu_4=\mu_4-\frac{1}{2}\mu_2 i^2+\frac{7}{240}.i^4$
4. परिघातों पर आधारित विषमता—	(i) $\sqrt{\beta_1}=\frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$ (ii) $\frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}$
5. पृथुशीर्षत्व—	$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=\frac{\mu_4}{\sigma^4}=\alpha_4$
मध्यम शीर्ष वाला :	यदि $\beta_2=3$ या $\gamma_2=\beta_2-3=0$
लम्बे शीर्ष वाला :	यदि $\beta_2>3$ या γ_2 धनात्मक (+) है,
चपटे शीर्ष वाला :	यदि $\beta_2<3$ या γ_2 ऋणात्मक (—) है।

प्रश्न

1. 'परिघात' किसे कहते हैं ? समान्तर माध्य से प्रथम चार परिघातों के परिगणन की विधि स्पष्ट कीजिए।
What are 'Moments'? Explain the procedure of calculating the first four moments about the Mean [B- Com., Meerut, 1977]

2. एल्फा, बीटा व गामा-गुणाको की व्याख्या कीजिए और विषमता एवं पृथुशीर्षत्व का मापन करने में इन गुणाको की उपयोगिता का विवेचन कीजिए।
Explain the Alpha, Beta and Gamma Coefficients and discuss their use in measuring Skewness and Kurtosis.

3 पृथुशीर्षत्व किसे कहते हैं ? उससे किस उद्देश्य की पूर्ति होती है ? क्या पृथुशीर्षत्व का अध्ययन आर्थिक एवं सामाजिक विज्ञानो मे उपयोगी है ? यदि नही, तो क्यो नही ?
What is 'Kurtosis'? What purpose does it serve? Is the study of kurtosis useful in economic and social sciences? If not, why?

4. अपकिरण, विषमता और पृथुशीर्षत्व का अर्थ बतलाते हुए सांख्यिकी मे इनके अध्ययन के महत्त्व पर प्रकाश डालिए।
Explain the terms 'dispersion', 'skewness' and 'kurtosis' and emphasize on the need of their study in Statistics. [B. Com, II, Raj, 1971]

5. 'परिघात' की परिभाषा दीजिए। 'माध्य से परिघात' की सहायता से विषमता और शीर्षत्व किस प्रकार परिकलित किये जाते हैं ? उत्तर उदाहरण देकर स्पष्ट कीजिए।
Define 'Moments'. How are skewness and kurtosis calculated from 'moments about the mean?' Illustrate your answer by an example. [M. Com, Raj, 1973]

6. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए—
Write short notes on the following—
(i) केन्द्रीय परिघात (Central Moments)।
(ii) शेपर्ड के संशोधन (*Sheppard's Corrections for Grouping*)।
(iii) परिघातो पर आधारित विषमता-माप (Measures of Skewness based on Moments)।
(iv) परिघातों का चार्लियर परीक्षण (Charlier's Check on Moments)।
(v) नुकीले व चपटे शीर्ष वाले वक्र (Leptokurtic and Platykurtic Curves)।

7. यह सिद्ध कीजिए कि समान्तर माध्य से परिघात की सहायता से प्रारम्भिक मूल बिन्दु पर आधारित परिघात निम्न सूत्रो द्वारा परिकलित किये जा सकते हैं—
Show that the moments about the origin may be derived from moments about mean by the following formulae—
$$v_2=\mu_2+\bar{d}x^2;\ v_3=\mu_3+3\mu_2\bar{d}x+\bar{d}x^3;\ v_4=\mu_4+4\mu_3\bar{d}x+6\mu_2\bar{d}x^2+\bar{d}x^4$$

8. किसी पद वितरण के मूल्य 3 से लिए गए प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय अपकिरण-घातो का मूल्य क्रमश. 2, 10 तथा 30 है। 0 से लिए गए इन प्रथम तीनो अपकिरण-घातो का मूल्य ज्ञात कीजिए। इस पद वितरण का प्रसरण या विचारणाक भी ज्ञात कीजिए।
The first three moments of a distribution about the value 3 of the variable are 2, 10 and 30 respectively. Obtain the first three moments about 0. Also calculate the variance of the distribution. [B Com. II Yr., Raj, 1968]
[$\mu_1=0$, $\mu_2=6$, $\mu_3=-14$, About 0, $v_1=5$, $v_2=31$, $v_3=201$]

9. एक वितरण मे मूल्य 2 ($A=2$) से लिए गए प्रथम चार परिघातो के मान 1, 2·5, 5·5, और 16 हैं। समान्तर माध्य ($\bar{X}$) से और शून्य (0) से चारो परिघातो के मूल्य ज्ञात कीजिए।
The first four moments of a distribution about the value 2 ($A=2$) are 1, 2·5, 5·5 and 16 respectively. Calculate the four moments about the arithmetic mean ($\bar{x}$) and about zero. [M. Com, Delhi, 1966]
[$\mu_1=0$, $\mu_2=1 5$, $\mu_3=0$, $\mu_4=6$; About 0, $v_1=3$, $v_2=10·5$, $v_3=40·5$, $v_4=168$]

10. एक पद वितरण मे मूल्य 4 पर आधारित चारो परिघातो के माप क्रमश: —1 5, 17, —30, और 108 हैं। β_1 और β_2 ज्ञात कीजिए और उनके मूल्यो की समीक्षा कीजिए।
In a distribution, the measures of four moments about the value 4 are respectively —1·5, 17, —30 and 108. Find β_1 and β_2 and comment on their values.
[$\beta_1=0·493$; $\beta_2=0 654$] [I. A. S., 1969]

11. (i) एक बटन के पहले चार परिघात 1, 4, 10 और 46 हैं। उस बटन के पहले चार केन्द्रीय परिघात तथा बीटा-गुणाक ज्ञात कीजिए। बटन की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए।
The first four moments of a distribution are 1, 4, 10 and 46 respectively Compute the first four central moments and the beta-constants. Comment the nature of the distribution. [M. Com, Delhi, ..

(ii) किसी बटन के प्रथम चार केन्द्रीय परिघात 0, 2·5, 0·7 और 18·75 हैं। उक्त बटन की विषमता और पृथुशीर्षत्व की जाँच कीजिए।
The first four central moments of a distribution are 0, 2·5, 0·7 and 18·75. Test the skewness and kurtosis of the distribution [*M. Com., Delhi, 1968*]

[(i) $\mu_1=0$, $\mu_2=3$, $\mu_3=0$, $\mu_4=27$, $\beta_1=0$, $\beta_2=3$ Distribution is perfectly symmetrical and mesokurtic ; (ii) $\sqrt{\beta_1}=\cdot177$, $\beta_2=3$]

12. निम्न संख्याओं का तृतीय परिघात ज्ञात कीजिए। इन संख्याओं का माध्य से तृतीय परिघात भी ज्ञात कीजिए—
Find the third moment for the following set of numbers. Find also the third moment about the mean of these numbers—

2, 3, 7, 8 and 10 [*B. Com., Meerut, 1976*]

[From $A=7$, ν's are -1, $10\cdot2$, $-32\cdot2$, $192\cdot6$ from $\bar{X}=6$, μ's are 0, $9\cdot2$, $-3\cdot6$, 122]

13. (i) शेपर्ड का संशोधन क्या है? उसका कब प्रयोग होता है। निम्न प्रदत्त मूल्यों का संशोधित परिघात निकालिए यदि वर्ग-विस्तार 3 हो—
What is Sheppard's correction? When is it used? Find the corrected moments of the following values if the magnitude of the class-interval is 3—
$\mu_2=43\cdot353$; $\mu_3=-9\cdot774$; $\mu_4=5508\cdot567$ [*M. Com., Raj., 1963*]

(ii) किसी चर के द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ परिघात क्रमशः 19·67, 29·26 तथा 866 हैं। β_2-गुणांक ज्ञात कीजिए।
The second, third and fourth moments of a variate are 19·67, 29·26 and 866 respectively. Find the β_2-coefficient.

[(i) Corrected $\mu_2=42\cdot603$, $\mu_4=5315\cdot83$; (ii) $\beta_1=\cdot1126$, $\beta_2=2\cdot239$]

14. निम्न बटन में समान्तर माध्य से परिघात निकालिए। β_1 तथा β_2 द्वारा विषमता और शीर्षत्व का मापन कीजिए—
From the following distribution, obtain the moments about the mean. Also measure Skewness and Kurtosis through β_1 and β_2—

Class-interval :	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9
Frequency :	5	38	65	92	70	40	10

[$\mu_1=0$, $\mu_2=1\cdot813125$, $\mu_3=0\cdot0791$, $\mu_4=8\cdot033$ $\beta_1=0\cdot001$, $\beta_2=2\cdot44$; $+\sqrt{\beta_1}=\cdot031$ अल्प विषमता है। वक्र चपटे शीर्ष वाला (Platy-kurtic) है]

15. निम्न समंक-सामग्री के समान्तर मध्यक, माध्य-विचलन, प्रमाप विचलन, विषमता और शीर्षत्व का निर्धारण कीजिए—
Determine the $\bar{x}$, M. D., S. D., skewness and kurtosis from the following data—

Measurement :	0–10	10–20	20–30	30–40
Frequency :	1	3	4	2

[$\bar{X}=22$, $\delta\bar{x}=7\cdot6$, $\sigma=9$, $\mu_2=81$, $\mu_4=14817$, $\sqrt{\beta_1}=-\cdot197$, $\beta_2=2\cdot26$, Platy-kurtic]

16. निम्नलिखित समंकों से माध्य पर आधारित प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय घूर्णों (परिघातों) की गणना कीजिए—
From the following data, calculate the first three moments about the mean—

Size :	2	4	8	10
Frequency :	10	15	8	7

[$\mu_1=0$, $\mu_2=8\cdot6775$, $\mu_3=10\cdot996$] [*B. Com., Meerut, 1970*]

17. निम्न समंकों से पहले चार परिघात ज्ञात कीजिए। यदि आवश्यक हो तो शेपर्ड के संशोधन भी कीजिए—
From the following data, obtain the first four moments. If necessary, also make Sheppard's corrections for grouping—

Value :	10–	20–	30–	40–	50–	60–	70–
Frequency :	1	20	69	108	78	22	2

[$\mu_1=0$, $\mu_2=113\cdot72$, $\mu_3=-8\cdot69$, $\mu_4=35224\cdot4$, संशोधित $\mu_2=105\cdot4$, $\mu_4=29830$ संशोधन अनावश्यक है]

18. एक प्रतिदर्श-अध्ययन में 250 व्यक्तियों के निम्न आयु-समंकों के आधार पर समान्तर माध्य से परिकलित द्वितीय तथा तृतीय परिघातों की सहायता से विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए—
From the following age-statistics of 250 persons in a sample study, find the coefficient of skewness with the help of second and third moments about the mean—

Age (less than) :	10	20	30	40	50	60	70	80	90
No. of persons :	15	35	60	84	96	127	188	200	250

(Assume 45 as the arbitrary origin) [B. Com., Raj., 1967]

[$\sqrt{\beta_1}=-\cdot376$ $\mu_2=-5939\cdot62$, $\mu_3=629\cdot96$]

19. किसी विश्वविद्यालय की कला सकाय के 346 स्नातकोत्तर विद्यार्थियो के भार का वितरण 59 इन्च से 73 इन्च तक 1–1 इन्च के 15 वर्गान्तरो मे किया गया। 67 को कल्पित मूल बिन्दु मानते हुए निम्नांकित माप उपलब्ध हुए—

For the distribution of weights of 346 P G. students in the Arts faculty containing 15 class-intervals of 1 inch ranging from 59 to 73 inches, the following values are obtained with 67 as working origin Compute μ_2 and μ_3 and a measure of skewness—

$$\Sigma fdx=118,\ \Sigma fd^2x=1668,\ \Sigma fd^3x=1546$$

[$\mu_2=4\cdot705$, $\mu_3=-\cdot3864$, $\sqrt{\beta_1}=-\cdot0381$] [M. A., Banaras, 1962]

20. निम्नलिखित सामग्री से किसी कल्पित मूल बिन्दु से पहले चार परिघात कीजिए। तत्पश्चात् (संशोधन सहित) समान्तर माध्य से प्रथम चार परिघातो का परिकलन कीजिए। β_2 भी परिगणित करके उसका समीक्षा कीजिए—

From the following data, obtain the first four moments about on arbitrary origin. Then calculate, with corrections for grouping, the four moments about the mean. Also calculate β_2 and comment on it—

Hours-worked :	30–33	33–36	36–39	39–42	42–45	45–48
No. of Industries :	2	4	26	47	15	6

[About 40 5, $v_1=2\ 61$, $v_2=15\ 57$, $v_3=83\ 43$, $v_4=665\ 01$; About Mean $\mu_1=0$, $\mu_2=8\ 76$, $\mu_3=-20\ 69$, $\mu_4=291\ 173$; Corrected $\mu_2=8\ 01$, $\mu_4=249\ 393$, $\beta_2=3\cdot9$ Lepto-kurtic]

21. किसी विश्वविद्यालय के 100 विद्यार्थियो की लम्बाई के वितरण से निम्न माप प्राप्त किए गए। बीटा-गुणको की सहायता से विषमता का मापन कीजिए—

From the distribution of heights of 100 students of a University the following measures were obtained Measure skewness with the help of beta-coefficients—

$$\mu_2=11\cdot24,\ \mu_3=-16\cdot32,\ \text{and}\ \mu_4=376\ 04$$

[$\sqrt{\beta_1}=\cdot43$, $\frac{\sqrt{\beta_1}\ (\beta_2+3)}{2\ (5\beta_2-6\beta_1-9)}=\cdot27$]

22. (i) निम्नांकित सामग्री आर्थिक विश्लेषण के उद्देश्य से एक अर्थशास्त्री को दी गई। ये समंक प्रतिदर्श के रूप में चुने गये कुछ गुड-ईयर टायरों की आयु से सम्बन्धित हैं। क्या आपकी राय में यह वटन चपटे शीर्ष वाला है ?

The following data are given to an economist for the purpose of economic analysis. The data refer to the length of life of a sample of Good-year Tyres. Do you think that the distribution is platykurtic ?

$$N=100,\ \Sigma fdx=50,\ \Sigma fd^2x=1967\cdot2,\ \Sigma fd^3x=2925\cdot8,\ \Sigma fd^4x=86650\ 2$$

(ii) दो वटनो मे द्वितीय केन्द्रीय परिघातो के मूल्य क्रमशः 9 और 16 हैं और तृतीय केन्द्रीय परिघातो के मान क्रमशः $-8\cdot1$ और $-12\cdot8$ हैं। दोनो वटनो मे से कौन-सा बाईं ओर को अधिक असममित है ?

In two distributions the second central moments are 9 and 16 and the third central moments are $-8\cdot1$ and $-12\cdot8$ respectively Which of the two series is more skewed to the left ?

[(i) $\mu_2=19\ 42$, $\mu_4=837\cdot31$, $\beta_2=2\cdot22$ Platykurtic.
(ii) $\sqrt{\beta}$ I $-\cdot3$, II $-\cdot2$, प्रथम]

23. 100 अवलोकनो पर आधारित एक आवृत्ति वटन के परिघात ज्ञात करते समय निम्न परिणाम प्राप्त हुए—बाद मे, यह मालूम चला कि एक अवलोकन 12 भूल से 21 पढ़ा गया। प्रथम तीन केन्द्रीय परिघातों के सही मान निकालिए।

The following results were obtained while calculating moments of a frequency distribution based on 100 observations. Later, it was discovered that an observation 12 was misread as 21. Find the correct measures of the first three central moments—

$$\text{Mean}=9,\ \text{Variance}=19,\ \beta_1=0\ 7$$

11

सह-सम्बन्ध
(CORRELATION)

पिछले अध्यायों मे हमने उन विभिन्न सांख्यिकीय रीतियों का विस्तृत अध्ययन किया है जिनसे एकचर समकमालाओं (univariate distributions) की केन्द्रीय प्रवृत्ति, रचना तथा स्वरूप का स्पष्टीकरण होता है; परन्तु अधिकतर इस प्रकार का सांख्यिकीय विश्लेषण अपर्याप्त होता है। आर्थिक, सामाजिक व वैज्ञानिक क्षेत्र में अक्सर दो या दो से अधिक समक-श्रेणियों में परस्पर सम्बन्ध पाया जाता है जिसके परिणामस्वरूप एक श्रेणी में परिवर्तन होने से दूसरी सम्बन्धित श्रेणी में भी परिवर्तन होते हैं। व्यावहारिक जीवन में अधिकतर यह पाया जाता है कि देश में प्रचलित मुद्रा की मात्रा के बढ़ने से सामान्य मूल्य-स्तर में भी वृद्धि हो जाती है, किसी वस्तु का उत्पादन बढ़ने से उसका मूल्य कम हो जाता है, लम्बे पिताओं के पुत्र भी लम्बे होते हैं, युवक पतियों की युवा पत्नियाँ होती है तथा प्रकाश के साथ-साथ ताप भी बढ़ता है। इन सभी परिस्थितियों मे द्विचर-श्रेणियों (bivariate distributions) मे होने वाले परिवर्तन एक दूसरे पर आश्रित होते है। दो सम्बद्ध समक-मालाओ मे इस प्रकार की परस्पर आश्रितता का विधिवत् सांख्यिकीय अध्ययन सह-सम्बन्ध के सिद्धान्त (Theory of Correlation) के अन्तर्गत किया जाता है। डेवनपोर्ट के अनुसार 'सह-सम्बन्ध का पूरा विषय पृथक् विशेषताओं के बीच पाये जाने वाले उस पारस्परिक सम्बन्ध की ओर संकेत करता है जिसके अनुसार वे कुछ मात्रा में साथ-साथ परिवर्तित होने की प्रवृत्ति रखते हैं।'[1]

परिभाषा और महत्त्व (Definition and Importance)—किंग के मतानुसार, 'यदि यह सत्य सिद्ध हो जाता है कि अधिकांश उदाहरणों में दो चर-मूल्य सदा एक दिशा में या विपरीत दिशा में घटने-बढ़ने की प्रवृत्ति रखते है तो ऐसी स्थितियों मे हम यह समझते है कि उनमे एक सम्बन्ध पाया जाता है। यह सम्बन्ध ही सह-सम्बन्ध कहलाता है।'[2] संक्षेप में, जब दो चर-मूल्यों मे इस प्रकार का सम्बन्ध हो कि एक में कमी या वृद्धि होने से दूसरे में भी उसी दिशा में या विपरीत दिशा मे परिवर्तन होते हों तो वे दोनों सह-सम्बन्धित कहलाते है। कोनर के शब्दों मे 'जब दो या अधिक राशियाँ सहानुभूति में परिवर्तित होती है जिससे एक मे होने वाले परिवर्तन के फलस्वरूप दूसरी राशि में भी परिवर्तन होने की प्रवृत्ति पाई जाती है, तो वे राशियाँ सह सम्बन्धित कहलाती हैं।'[3] इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि दो सम्बद्ध समक श्रेणियों में साथ-साथ परिवर्तन होने की प्रवृत्ति को ही सह-सम्बन्ध या सह-विचरण (Co-variation) कहते हैं।

[1] 'The whole subject of correlation refers to that inter-relation between separate characters by which they tend, in some degree, atleast, to move together.'—E. Davenport.

[2] 'If it is proved true that in a large number of instances two variables tend always to fluctuate in the same or in opposite directions we consider that the fact is established that a relationship exists. This relationship is called correlation.'—King, *Elements of Statistical Method*, p. 198.

[3] 'If two or more quantities vary in sympathy, so that movements in the one tend to be accompanied by corresponding movements in the other(s), then they are said to be correlated.'—Connor, *Statistics in Theory and Practice*, p. 135.

सांख्यिकी में सह-सम्बन्ध का सिद्धान्त बहुत महत्त्वपूर्ण है। इसके मूल-तत्वों का प्रतिपादन सर्वप्रथम फ्रांस के खगोल-शास्त्री ब्रावे (Bravais) ने किया था, परन्तु इस सिद्धान्त को विकसित करने व आधुनिक रूप देने का श्रेय प्रसिद्ध प्राणिशास्त्री फ्रांसिस गाल्टन (Francis Galton) तथा कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) को प्राप्त है। इन प्रसिद्ध वैज्ञानिकों ने प्राणिशास्त्र (Biology) तथा जनन-विद्या (Genetics) के क्षेत्र मे सहसम्बन्ध के सिद्धान्त के आधार पर अनेक समस्याओं का वैज्ञानिक विश्लेषण किया है। इस सिद्धान्त के आधार पर ही प्रत्येक क्षेत्र में दो या अधिक घटनाओं के परस्पर सम्बन्धों का स्पष्टीकरण होता है। सहसम्बन्ध विश्लेषण से हमें यह पता चलता है कि दो सम्बन्धित चर-मूल्यों में कितना और किस प्रकार का सम्बन्ध है। प्रतीपगमन (Regression) तथा विचरण-अनुपात (Ratio of Variation) की धारणायें सह-सम्बन्ध-सिद्धान्त पर आधारित है। इनकी सहायता से दो सम्बन्धित श्रेणियों में से एक के दिये हुए निश्चित चर-मूल्य के आधार पर दूसरी श्रेणी के सम्भावित चर-मूल्य का विश्वसनीय अनुमान लगाया जा सकता है। टिप्पेट का कथन है, 'सह-सम्बन्ध का प्रभाव हमारी भविष्यवाणी की अनिश्चितता (uncertainty of our prediction) के विस्तार को कम करना है।' सह-सम्बन्ध विश्लेषण पर आधारित अनुमान अधिक विश्वसनीय और निश्चित होते हैं।

इस प्रकार, व्यावहारिक जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में दो या दो से अधिक सम्बन्धित घटनाओं का तुलनात्मक अध्ययन करने, उनमें पारस्परिक सम्बन्ध का विवेचन करने तथा पूर्वानुमान लगाने में सहसम्बन्ध का सिद्धान्त बहुत उपयोगी सिद्ध होता है।

सह-सम्बन्ध के प्रकार
(Types of Correlation)

सम्बद्ध समंकमालाओं में चर-मूल्यों के परिवर्तनों की दिशा, अनुपात तथा मालाओं की संख्या के आधार पर सह-सम्बन्ध के निम्नलिखित भेद हैं—

(1) **धनात्मक और ऋणात्मक सह-सम्बन्ध (Positive and Negative Correlation)**—समकमालाओं मे होने वाले परिवर्तनो की दिशा के आधार पर उनका सह-सम्बन्ध धनात्मक हो सकता है या ऋणात्मक। जब दो चरों में एक ही दिशा मे परिवर्तन होता है अर्थात् एक मे वृद्धि (या कमी) होने से दूसरे चर के मूल्यों में भी वृद्धि (या कमी) होती है तो ऐसा सह-सम्बन्ध प्रत्यक्ष (direct) अथवा अनुलोम या धनात्मक (positive) कहलाता है। यदि अन्य बाते समान रहे तो किसी वस्तु की माँग बढ़ जाने से उसका मूल्य भी बढ जाता है और माँग के घटने से मूल्य कम हो जाता है। अतः वस्तु की माँग और उसके मूल्य में धनात्मक सह-सम्बन्ध है।

जब एक चर के मूल्यो में एक दिशा मे परिवर्तन होने से दूसरे सम्बद्ध चर के मूल्यों में विपरीत दिशा मे परिवर्तन होते है तो उनका सह-सम्बन्ध ऋणात्मक (negative), अप्रत्यक्ष या विलोम (inverse) कहलाता है। ऋणात्मक सह-सम्बन्ध वाली श्रेणियो में से एक के पद-मूल्यों में वृद्धि होती है तो दूसरी श्रेणी के मूल्यों में कमी हो जाती है तथा एक के घटने से दूसरे मूल्य बढ़ने लगते हैं। यदि अन्य बातें स्थिर रहे, तो वस्तु की पूर्ति मे वृद्धि होने से उसके मूल्य में कमी हो जाती है और पूर्ति घट जाने से उसका मूल्य बढ़ जाता है।

निम्नांकित उदाहरणों से धनात्मक तथा ऋणात्मक सह-सम्बन्ध स्पष्ट हो जाता है—

धनात्मक सह-सम्बन्ध				ऋणात्मक सह-सम्बन्ध			
I वृद्धि के लिए वृद्धि		II कमी के लिए कमी		I वृद्धि के लिए कमी		II कमी के लिए वृद्धि	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
90	12	28	100	50	16	120	12
95	13	25	90	63	13	105	18
105	18	19	72	72	12	95	19
118	25	12	56	81	10	80	22
132	27	10	31	90	9	50	35
150	30	8	25	95	5	20	41

(2) रेखीय तथा वक्र-रेखीय सह-सम्बन्ध (Linear and Curvilinear Correlation)—परिवर्तनों के अनुपात के आधार पर सह-सम्बन्ध रेखीय अथवा वक्र-रेखीय हो सकता है। यदि दो चर-मूल्यों के परिवर्तनों का अनुपात स्थायी (constant ratio) होता है तो उनका सह-सम्बन्ध रेखीय (linear) कहलाता है। उदाहरणार्थ, यदि मुद्रा की मात्रा में 10% वृद्धि होने से सामान्य मूल्य-स्तर में सदा 50% की वृद्धि हो जाती है तो उनमें रेखीय सह-सम्बन्ध हुआ। रेखीय सह-सम्बन्ध वाले चर-मूल्यों को बिन्दुरेख पर प्रांकित करने से एक सरल रेखा बन जाती है। इस प्रकार का सह-सम्बन्ध भौतिक व पूर्ण विज्ञानों में पाया जाता है। आर्थिक व सामाजिक क्षेत्र में अधिकतर वक्ररेखीय सह-सम्बन्ध पाया जाता है। जब दो चर-मूल्यों के परिवर्तनों का अनुपात अस्थिर (variable ratio) या परिवर्तनशील होता है तो उनका सह-सम्बन्ध वक्र-रेखीय (curvilinear) होता है। यदि मुद्रा की मात्रा में 10% वृद्धि होने से कभी सामान्य मूल्य-स्तर में 5% वृद्धि हो जाती है, कभी 6%, कभी 9% तो मुद्रा की मात्रा और सामान्य मूल्य-स्तर का सह-सम्बन्ध वक्ररेखीय कहलायेगा। ऐसी स्थिति में रेखाचित्र पर चर-मूल्यों को प्रांकित करने से एक वक्र-रेखा बनेगी। इसीलिए इसे वक्र-रेखीय सह-सम्बन्ध कहते हैं।

रेखीय सह-सम्बन्ध		वक्र-रेखीय सह-सम्बन्ध	
X	*Y*	*X*	*Y*
100	20	100	20
110	22	110	22
145	29	121	[illegible]
215	43	180	45
260	52	198	60

(3) सरल, बहुगुणी एवं आंशिक सह-सम्बन्ध (Simple, Multiple and Partial Correlation)—स्वतन्त्र तथा आश्रित चर-मूल्यों (variables) की संख्या के आधार पर सह-सम्बन्ध सरल, बहुगुणी या आंशिक हो सकता है।

दो चर-मूल्यों के सह-सम्बन्ध को सरल सह-सम्बन्ध (simple correlation) कहते हैं। इन चर-मूल्यों में से अनाश्रित या प्रधान चर-मूल्य (independent variable) को प्रमाप या आधार श्रेणी (subject series) कहा जाता है तथा दूसरा समंक-समूह आश्रित चर मूल्य (dependent variable) या सम्बद्ध माला (relative series) कहलाता है।

जब दो से अधिक चर-मूल्यों के बीच सम्बन्ध ज्ञात किया जाता है तो वह बहुगुणी हो सकता है या आंशिक। दो या अधिक अनाश्रित चर-मूल्यों के एक आश्रित चर-मूल्य पर सम्मिलित प्रभाव का अध्ययन, बहुगुणी सह सम्बन्ध (multiple correlation) कहलाता है। आंशिक सह-सम्बन्ध (partial correlation) के अन्तर्गत दो से अधिक चर-मूल्यों का अध्ययन किया जाता है परन्तु अन्य चर-मूल्यों के प्रभाव को स्थिर रखकर केवल दो चर-मूल्यों का पारस्परिक सम्बन्ध निकाला जाता है। उदाहरणार्थ, यदि वर्षा की मात्रा और तापक्रम दोनों के गेहूँ की उपज पर सामूहिक प्रभाव का गणितीय अध्ययन किया जाय तो वह बहुगुणी सह-सम्बन्ध कहलायेगा। इसके विपरीत यदि एक स्थिर तापक्रम में वर्षा की मात्रा और गेहूँ की उपज के सम्बन्ध का विवेचन किया जाय तो यह आंशिक सह-सम्बन्ध कहलायेगा। इस अध्याय में हम केवल सरल सह-सम्बन्ध का अध्ययन करेंगे।

सह-सम्बन्ध का परिमाण
(Degree of Correlation)

सह-सम्बन्ध का आंकिक परिमाण (degree) सह सम्बन्ध गुणांक (coefficient of correlation) द्वारा ज्ञात किया जाता है। इसके आधार पर धनात्मक और ऋणात्मक सह-सम्बन्ध के निम्न परिमाण हो सकते है—

(i) पूर्ण सह-सम्बन्ध (Perfect Correlation)—जब दो चर-मूल्यों के परिवर्तन समान रत में तथा एक ही दिशा में हो तो उनमें पूर्ण धनात्मक (perfect positive) सह-सम्बन्ध

होता है। ऐसी स्थिति में सह-सम्बन्ध गुणांक +1 होता है। इसके विपरीत, यदि दोनों चर-मूल्यों के परिवर्तन समान अनुपात परन्तु विपरीत दिशा में हों तो उनमें पूर्ण ऋणात्मक (perfect negative) सह-सम्बन्ध होता है तथा इसका गुणांक —1 होता है।

पूर्ण सह-सम्बन्ध भौतिक तथा गणितीय विज्ञानों में पाया जाता है। वृत्त की परिधि उसके व्यास के स्थिर अनुपात (π) मे बढ़ती-घटती है। प्रकाश और ताप में समान अनुपात में एक ही दिशा में परिवर्तन होते हैं। ऐसे सम्बन्ध पूर्ण धनात्मक होते हैं। बॉयल्स-नियम के अनुसार स्थिर तापक्रम की स्थिति मे गैस का दबाव बढ़ने से उसका आयतन उसी अनुपात में घट जाता है, अर्थात्, यदि दबाव दुगुना हो जाय तो आयतन आधा रह जायेगा। यह पूर्ण ऋणात्मक सह-सम्बन्ध है। आर्थिक व सामाजिक क्षेत्रों मे पूर्ण सह-सम्बन्ध दृष्टिगोचर नहीं होता।

(ii) **सह-सम्बन्ध की अनुपस्थिति** (Absence of Correlation)—यदि दो श्रेणियों में परस्पर आश्रितता बिल्कुल न पाई जाय अर्थात् उनके परिवर्तनों मे कोई भी सहानुभूतिपूर्ण सम्बन्ध न हो तो उस स्थिति को सह-सम्बन्ध का अभाव (no correlation) कहते हैं। ऐसी स्थिति मे गुणांक शून्य (0) होता है।

(iii) **सह-सम्बन्ध के सीमित परिमाण** (Limited Degrees of Correlation)—सह-सम्बन्ध के अभाव और पूर्ण सह-सम्बन्ध की स्थितियों के बीच सीमित परिमाण का धनात्मक या ऋणात्मक सह-सम्बन्ध होता है। आर्थिक, व्यावसायिक तथा सामाजिक क्षेत्रों में अधिकतर, सीमित मात्रा का सह-सम्बन्ध ही देखने में आता है। इन परिस्थितियों में सह-सम्बन्ध गुणांक शून्य (0) से अधिक किन्तु 1 से कम (>0 but <1) होता है।

सीमित सह-सम्बन्ध के निम्न तीन स्वरूप हो सकते हैं—

(क) **उच्च** (High)—जब दो श्रेणियों में सह-सम्बन्ध की काफी मात्रा हो तो वह उच्च मात्रा (high degree) का सह-सम्बन्ध कहलाता है।

उच्च स्तरीय सह-सम्बन्ध की दशा में उसका गुणांक ·75 और 1 के बीच होता है और अधिकांश स्थिति में ·9 के आस-पास पाया जाता है। गुणांक का चिन्ह + होने पर उच्च धनात्मक सह-सम्बन्ध (High Degree of Positive Correlation) तथा — होने पर उच्च ऋणात्मक सह-सम्बन्ध का बोध होता है।

(ख) **मध्यम** (Moderate)—जब सह-सम्बन्ध की मात्रा न बहुत अधिक हो न कम तो सह-सम्बन्ध गुणांक लगभग ·25 और ·75 के बीच आता है और उसे मध्यम कोटि का सह-सम्बन्ध (Moderate Degree of Correlation) कहा जाता है; यह भी धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है।

(ग) **निम्न** (Low)—जब दो सकममालाओं में कम अनुपात में सह-परिवर्तन होते हैं तो उनके सह-सम्बन्ध को निम्न-स्तर का सह-सम्बन्ध (Low Degree of Correlation) कहा जाता है। निम्न धनात्मक सह-सम्बन्ध होने पर गुणांक 0 और +·25 के बीच होता है तथा निम्न ऋणात्मक सह-सम्बन्ध की स्थिति में यह गुणांक 0 और —·25 के बीच पाया जाता है।

सह-सम्बन्ध का परिमाण

परिमाण	धनात्मक	ऋणात्मक
पूर्ण (Perfect)	+1	—1
उच्च (High)	+·75 और +1 के मध्य	—·75 और —1 के बीच
मध्यम (Moderate)	+·25 और +·75 के मध्य	—·25 और —·75 के बीच
निम्न (Low)	0 और +·25 के मध्य	0 और —·25 के बीच
अनुपस्थिति (Absence)	0	0

सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की रीतियाँ
(Methods of Determining Correlation)

सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की निम्नलिखित प्रमुख रीतियाँ है—

(1) विक्षेप-चित्र या बिन्दु-चित्र (Scatter Diagram or Dot Diagram),
(2) बिन्दुरेखीय रीति (Graphic Method),
(3) कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation),
(4) स्पियरमैन की कोटि-अन्तर विधि (Spearman's Ranking Method),
(5) सगामी विचलन रीति (Concurrent Deviations Method),
(6) अन्य रीतियाँ (Other Methods)।

विक्षेप-चित्र या बिन्दु-चित्र
(Scatter Diagram or Dot Diagram)

दो समकमालाओ में परस्पर सह-सम्बन्ध की दिशा और मात्रा का अनुमान विक्षेप-चित्र (Scatter Diagram) बनाकर किया जा सकता है। इस रीति के अनुसार स्वतन्त्र चर-मूल्यो (X) को बिन्दुरेखीय पत्र के भुजाक्ष (x-axis) पर तथा तत्सम्बन्धी आश्रित चर-मूल्यो (Y) को कोटि-अक्ष (y-axis) पर प्रांकित किया जाता है। एक पद के X-श्रेणी तथा Y-श्रेणी के दो मूल्यो के लिए एक बिन्दु अंकित किया जाता है। इस प्रकार जितने पद-युग्म (pairs of values) होते हैं उतने ही बिन्दु रेखापत्र पर अंकित हो जाते है जो एक निश्चित प्रवृत्ति प्रदर्शित करते है। इस प्रकार के चित्र को विक्षेप-चित्र या बिन्दु-चित्र कहते है।

विक्षेप-चित्रों का अध्ययन—विक्षेप-चित्रो के अध्ययन से निम्न प्रकार निष्कर्ष निकाले जाते है—

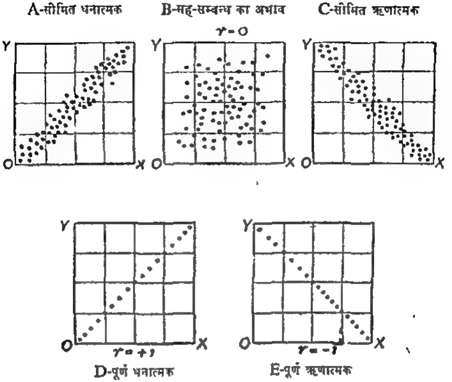
(i) **सीमित सह-सम्बन्ध** ($0 < r < 1$ or $-1 < r < 0$)—जब विक्षेप-चित्र पर प्रांकित बिन्दुओ से एक प्रवृत्ति दृष्टिगोचर होती है तथा वे एक निश्चित दिशा मे जाने वाले प्रवाह की भांति होते है तो दोनों चर-मूल्यों मे सीमित सह-सम्बन्ध पाया जाता है। विभिन्न बिन्दु जितने एक दूसरे के निकट होगे उतनी ही सह-सम्बन्ध की मात्रा अधिक होगी तथा वे जितने दूर होते जायेंगे सह-सम्बन्ध की मात्रा उतनी कम होती जायेगी।

सीमित सह-सम्बन्ध धनात्मक हो सकता है या ऋणात्मक। जब बिन्दुओं की उक्त धारा चित्र मे बायी ओर से दाहिनी ओर बढ़ती है तो सह-सम्बन्ध धनात्मक होता है। इस स्थिति में दोनों श्रेणियों के मूल्य साथ-साथ बढते जाते हैं। चित्र 1-A से यह प्रवृत्ति स्पष्ट है। इसके विपरीत यदि बिन्दुओं का प्रवाह बायी ओर के ऊपर वाले कोने से दाहिनी ओर के निचले कोने की ओर घटता जाता है तो सह-सम्बन्ध ऋणात्मक होता है तथा इसमें एक श्रेणी के मूल्यों के बढने पर दूसरी श्रेणी के मूल्य घटते जाते हैं। चित्र 1-C मे ऋणात्मक सह-सम्बन्ध की प्रवृत्ति प्रदर्शित की गई है।

(ii) **सह-सम्बन्ध का अभाव** ($r=0$)—जब विक्षेप-चित्र मे विभिन्न बिन्दु चारो ओर बिखरे हो तथा उनमे कोई निश्चित प्रवृत्ति स्पष्ट न होती हो तो सह-सम्बन्ध का अभाव होता है जैसा कि चित्र 1-B मे प्रदर्शित किया गया है।

(iii) **पूर्ण धनात्मक सह-सम्बन्ध** ($r=+1$)—यदि सभी बिन्दु बायी ओर के निचले कोने से दाहिनी ओर के ऊपर वाले कोने तक एक सरल व सीधी रेखा के रूप मे प्रांकित हों तो यह परिणाम निकलता है कि दोनों समकमालाओ मे पूर्ण धनात्मक सह-सम्बन्ध है जैसा कि चित्र 1-D मे स्पष्ट है।

विभिन्न प्रकार के विक्षेप चित्र



चित्र 1—विक्षेप चित्र (Scatter Diagrams)

(iv) **पूर्ण ऋणात्मक सह-सम्बन्ध** ($r=-1$)—जब सभी बिन्दु ऊपर से नीचे की ओर एक सीधी रेखा पर होते है तो चल-मूल्यों मे पूर्ण ऋणात्मक सह-सम्बन्ध पाया जाता है जैसा कि चित्र 1-E से स्पष्ट हो रहा है।

विक्षेप-चित्र पर बिन्दुओं को प्रांकित करने के बाद उनके बीच से गुजरने वाली एक ऐसी सीधी रेखा खीची जा सकती है जिसके एक ओर जितने बिन्दु हों लगभग उतने ही दूसरी ओर हो तथा दोनो ओर के बिन्दुओ का इस रेखा से लगभग समान अन्तर हो। इस रेखा को सर्वोपयुक्त अन्वायोजन रेखा या सर्वोत्तम उपयुक्तता रेखा (Line of Best Fit) कहते है। यदि एक श्रेणी का कोई मूल्य ज्ञात हो तो इस रेखा की सहायता से दूसरी श्रेणी का तत्सम्बन्धी सम्भावित मूल्य निकाला जा सकता है।

विक्षेप-चित्र दो मालाओं मे सह-सम्बन्ध की प्रवृत्ति ज्ञात करने का सरल और आकर्षक तरीका है। इस चित्र के आधार पर एक दृष्टि ही में यह पता चल जाता है कि चर-मूल्यो मे सह-सम्बन्ध है या नही और यदि है तो वह धनात्मक है या ऋणात्मक। परन्तु विक्षेप-चित्र से सह-सम्बन्ध के परिमाण के बारे में निश्चित और यथार्थ सूचना प्राप्त नही होती, मात्रा का अनुमान-मात्रा लगाया जा सकता है। इस रीति द्वारा सह-सम्बन्ध का सख्यात्मक माप ज्ञात नही होता।

सह-सम्बन्ध बिन्दुरेख
(Correlation Graph)

बिन्दुरेखीय विधि द्वारा भी सह-सम्बन्ध का अनुमान लगाया जा सकता है। इस रीति के अनुसार समय, स्थान, क्रम-सख्या आदि को क्षैतिज मापदण्ड या भुजाक्ष पर तथा दोनो सम्बद्ध समकमालाओं को उदग्र मापदण्ड या कोटि-अक्ष पर प्रकित करके दो वक्र बना लिये जाते हैं। यदि दोनो श्रेणियों के मूल्यों मे काफी समानता है और वे एक ही इकाई मे व्यक्त हैं तो बायी

ओर वाले कोटि-अक्ष पर ही मापदण्ड लिया जायेगा। परन्तु सम्बद्ध मालाओं के मूल्यों में काफी अन्तर होने या इकाइयों मे भिन्नता होने पर दोनों चर-मूल्यों के लिए दोनों ओर के कोटि-अक्ष का प्रयोग करना पड़ेगा। मापदण्ड का आयोजन इस प्रकार करना चाहिए कि दोनों श्रेणियों के वक्र एक दूसरे के अधिकाधिक निकट हों जिससे उनका सम्बन्ध आसानी से देखा जा सके। इस प्रकार बनाया गया रेखाचित्र सह-सम्बन्ध बिन्दुरेख (Correlation Graph) कहलाता है।

सह-सम्बन्ध बिन्दुरेख को देखने से ही सम्बद्ध मालाओं के पारस्परिक अन्तर्सम्बन्ध की दिशा व मात्रा का अनुमान लगाया जा सकता है। यदि दोनों समंकमालाओं के बिन्दुरेख साथ-साथ बढ़ते और घटते हैं तो उनमें धनात्मक सह-सम्बन्ध पाया जाता है जैसा कि चित्र 2 से स्पष्ट है। इसके विपरीत यदि दोनो श्रेणियों के बिन्दुरेख विपरीत दिशाओं में उतार-चढ़ाव प्रदर्शित करते हैं तो उनमें ऋणात्मक सह-सम्बन्ध होता है। दोनों वक्रों में उच्चावचन की गति जितनी समान होगी उतनी ही सह-सम्बन्ध की मात्रा भी अधिक होगी। यदि दोनों रेखाओं में एक ही दिशा या विपरीत दिशाओ मे परिवर्तित होने की कोई प्रवृत्ति दृष्टिगोचर नही होती तो यह समझना चाहिए कि दोनों में कोई सह-सम्बन्ध नहीं है।

उदाहरण (Illustration) 1 :

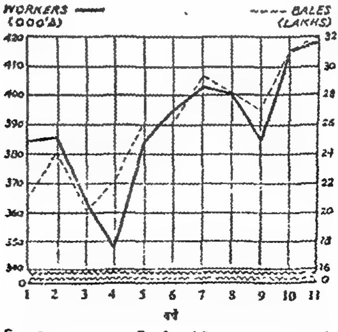
निम्न आँकड़ों से एक सह-सम्बन्ध बिन्दु रेखाचित्र बनाइए तथा दैनिक मजदूरों की औसत संख्या और कपास की गाँठो की संख्या के पारस्परिक सम्बन्ध पर टिप्पणी कीजिए।

वर्ष :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
मजदूरों की संख्या ('000 में) :	384	385	362	348	384	395	403	400	385	415	418
प्रयुक्त गाँठें (लाखों में) :	21	24	20	22	26	26	29	28	27	31	[illegible]

हल (Solution) :

बाँए कोटि-अक्ष पर श्रमिकों की संख्या तथा दाहिने कोटि-अक्ष पर गाँठों की संख्या अंकित की जायेंगी। पैमाना इस प्रकार माना जायेगा कि दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य (389 व 26) लगभग एक ही रेखा पर हों।

सह-सम्बन्ध बिन्दुरेख देखने से पता चलता है कि दोनों चर-मूल्यों मे काफी मात्रा में



चित्र 2. सह-सम्बन्ध बिन्दुरेख (Correlation Graph)

धनात्मक सह-सम्बन्ध है क्योंकि दोनों वक्रों में लगभग समान गति से एक ही दिशा में साथ-साथ उतार-चढ़ाव हो रहे है।

विक्षेप-चित्रों की भाँति सह-सम्बन्ध बिन्दुरेख से भी समंकमाला के सह-सम्बन्ध की दिशा का ही आभास होता है, उसके वास्तविक परिमाण का नही। सह-सम्बन्ध की प्रकृति और मात्रा दोनों का ही सन्तोषजनक निर्णय करने के लिए गणितीय सूत्र द्वारा सह-सम्बन्ध-गुणांक निकालना आवश्यक होता है।

कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक
(Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) नामक प्रसिद्ध प्राणिशास्त्री ने उन्नीसवीं शताब्दी मे सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की इस रीति का प्रतिपादन किया था। यह रीति सर्वोत्तम मानी जाती है क्योंकि इससे सह-सम्बन्ध की दिशा और परिणाम का सन्तोषजनक अंकात्मक माप ज्ञात हो जाता है।

मुख्य लक्षण (Main Features)—कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध-गुणांक के निम्नलिखित प्रमुख लक्षण है—

(i) **दिशा का आभास**—कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध-गुणाक से सह-सम्बन्ध की दिशा ज्ञात हो जाती है। गुणांक मे धन का चिह्न (+) धनात्मक सह-सम्बन्ध का द्योतक है और ऋण का चिह्न (—) ऋणात्मक सह-सम्बन्ध प्रदर्शित करता है।

(ii) **मात्रा और सीमायें**—इससे सह-सम्बन्ध की मात्रा का अंकात्मक माप प्राप्त हो जाता है। इस गुणांक का माप सदा +1 और —1 के बीच रहता है। +1 होने पर पूर्ण धनात्मक और —1 होने पर पूर्ण ऋणात्मक सह-सम्बन्ध पाया जाता है। यदि गुणांक 0 है तो सह-सम्बन्ध बिल्कुल नही है। जैसे-जैसे इस गुणाक का माप 0 से 1 की ओर बढता जाता है सह-सम्बन्ध की मात्रा भी बढ़ती जाती है।

(iii) **आदर्श माप**—यह गुणांक सह-सम्बन्ध का आदर्श माप है क्योंकि यह समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन पर आधारित हैं जो अनेक बीजगणितीय गुणों के कारण उच्चतर सांख्यिकीय रीतियों के लिए सर्वोपयुक्त माप है।

(iv) **सह-विचरण की मात्रा**—इस गुणांक को ज्ञात करने के लिए प्रत्येक समंकमाला मे समान्तर माध्य से विचलनों की मात्रा ज्ञात करनी पड़ती है। फिर दोनों मालाओं के तत्सम्बन्धी विचलनों की गुणा करके गुणनफलों के जोड़ को मूल्यों की संख्या से भाग दिया जाता है। इस प्रकार दोनों श्रेणियो के सह-विचरण (co-variance) की मात्रा ज्ञात हो जाती है। सूत्रानुसार—

$$\text{Co-variance} = \frac{\Sigma dxdy}{N}$$

dx तथा *dy* संकेत *X* और *Y*—श्रेणियो के समान्तर माध्यों से निकाले गये विचलन हैं।

सह-सम्बन्ध-गुणांक वास्तव में सह-विचरण के माप का ही गुणांक है। इस प्रकार सह-सम्बन्ध-गुणाक सह-विचरण की मात्रा को भी स्पष्ट रूप से व्यक्त करता है।

कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक का परिकलन
(Calculation of Karl Pearson's Correlation Coefficient)

कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणाक निकालने के लिए पहले सह-विचरण का माप (co-variance) ज्ञात किया जाता है, फिर इस निरपेक्ष माप को गुणाक मे परिवर्तित करने के लिए दोनो श्रेणियों के प्रमाप-विचलनों (standard deviations) के गुणनफल से भाग दे दिया

जाता है। इस प्रकार उपलब्ध अनुपात ही कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक कहलाता है। सूत्र के रूप में—

$$\frac{\frac{\Sigma dxdy}{N}}{\sigma_X\sigma_Y} \text{ या } \frac{X \text{ व } Y \text{ का सह-विचरण}}{\sqrt{\text{प्रसरण } X \times \text{प्रसरण } Y}} \text{ या } \frac{\Sigma dxdy}{N\sigma_X\sigma_Y}$$

यह पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक का मूल-सूत्र (original formula) है

प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)—व्यक्तिगत समंक श्रेणियों में कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक निकालने की निम्न क्रिया है—

(i) दोनों श्रेणियों (X तथा Y) का समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है।

(ii) दोनों समंकमालाओं के समान्तर माध्यों से उनके व्यक्तिगत मूल्यों के विचलन ज्ञात कर लिए जाते हैं। X और Y श्रेणियों के विचलनों के लिए क्रमशः dx और dy चिह्नों का प्रयोग होता है। $dx=(X-\bar{X})$; $dy=(Y-\bar{Y})$.

(iii) दोनों श्रेणियों के परस्पर सम्बन्धित विचलनों (corresponding deviations) अर्थात् dx और dy की गुणा करके उन गुणाओं का जोड़ ($\Sigma dxdy$) निकाला जाता है। इन गुणाओं को सारिणी के अन्तिम कालम में रखा जाता है।

(iv) दोनों श्रेणियों के विचलनों के वर्ग (square) करके अलग-अलग उन विचलन-वर्गों के जोड़ प्राप्त कर लिए जाते हैं। (Σd^2x व Σd^2y)

(v) दोनों श्रेणियों के प्रमाप-विचलन (σ_X तथा σ_Y) निकाल लिए जाते हैं।

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}};\ \sigma_Y=\sqrt{\frac{\Sigma d^2y}{N}}$$

(vi) अन्त में, निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$r=\frac{\Sigma dxdy}{N\sigma_X\sigma_Y} \qquad \text{(प्रथम सूत्र)}$$

r संकेत कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध-गुणांक का निरूपण करता है।

$\Sigma dxdy$ दोनों श्रेणियों के विचलनों की गुणाओं का जोड़ है।

σ_X, σ_Y संकेत दोनों मालाओं के प्रमाप-विचलनों को अभिव्यक्त करते हैं।

N पद-युग्मों की संख्या है

सरल प्रत्यक्ष रीति—उपर्युक्त प्रत्यक्ष रीति में दोनों श्रेणियों के अलग-अलग प्रमाप-विचलन भी निकालने पड़ते हैं जिसमें समय अधिक लगता है और गणन-क्रिया बढ़ जाती है। अतः पियर्सन के मूल-सूत्र में σ_X और σ_Y के स्थान पर उन्हें ज्ञात करने के सूत्र रखकर इस विधि को सरल बनाया जा सकता है। ऐसा करने में उपर्युक्त पाँचवीं प्रक्रिया (step v) नहीं करनी पड़ेगी। सूत्र निम्नलिखित है—

$$r=\frac{\Sigma dxdy}{N\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}}\times\sqrt{\frac{\Sigma d^2y}{N}}} \qquad \text{(द्वितीय सूत्र)}$$

$$r=\frac{\Sigma dxdy}{N\sqrt{\frac{\Sigma d^2x\times\Sigma d^2y}{N\times N}}} \text{ या } \frac{\Sigma dxdy}{\frac{N}{N}\sqrt{\Sigma d^2x\times\Sigma d^2y}}=\frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma d^2x\times\Sigma d^2y}} \qquad \text{(तृतीय सूत्र)}$$

तृतीय सूत्र सबसे अधिक सरल है। अतः व्यवहार में इसी सूत्र का प्रयोग करना चाहिए। अगले उदाहरण में तीनों सूत्रों का प्रयोग प्रदर्शित किया गया है। स्पष्ट है कि उत्तर एक समान होगा क्योंकि तीनों सूत्र मूल रूप में एक ही हैं।

उदाहरण (Illustration) 2 :

निम्न आँकड़ों से विवाह के समय पति-पत्नियों की आयु में कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणाक ज्ञात कीजिए—

पति की आयु :	23	27	28	28	29	30	31	33	35	36
पत्नी की आयु :	18	20	22	27	21	29	27	29	28	29

[*M. A., Agra, 1962, Saugar, 1963*]

हल (Solution) :

कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध-गुणांक (प्रत्यक्ष रीति)

पति की आयु (X)			पत्नी की आयु (Y)			dx व dy की गुणा
आयु (वर्ष)	$\bar{X}=30$ से विचलन	विचलन वर्ग	आयु (वर्ष)	$\bar{Y}=25$ से विचलन	विचलन वर्ग	
X	dx $(X-\bar{X})$	d^2x	Y	dy $(Y-\bar{Y})$	d^2y	$dxdy$
23	−7	49	18	−7	49	+49
27	−3	9	20	−5	25	+15
28	−2	4	22	−3	9	+ 6
28	−2	4	27	+2	4	−4
29	−1	1	21	−4	16	+ 4
30	0	0	29	+4	16	0
31	+1	1	27	+2	4	+ 2
33	+3	9	29	+4	16	+12
35	+5	25	28	+3	9	+15
36	+6	36	29	+4	16	+24
योग $N=10$		138 Σd^2x	योग $N=10$		164 Σd^2y	+127−4 =123 $\Sigma dxdy$

X-श्रेणी

$$\bar{X}=\frac{\Sigma X}{N}=\frac{300}{10}=30$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}}=\sqrt{\frac{138}{10}}=3{\cdot}71$$

Y-श्रेणी

$$\bar{Y}=\frac{\Sigma Y}{N}=\frac{250}{10}=25$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma d^2y}{N}}=\sqrt{\frac{164}{10}}=4{\cdot}05$$

मूल सूत्र के अनुसार—

$$r=\frac{\Sigma dxdy}{N\sigma_x\sigma_y}=\frac{123}{10\times 3{\cdot}71\times 4{\cdot}05}=\frac{123}{150{\cdot}3}=+{\cdot}82$$

द्वितीय सूत्र के अनुसार—

$$r=\frac{\Sigma dxdy}{N\times\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}}\times\sqrt{\frac{\Sigma d^2y}{N}}}=\frac{123}{10\times\sqrt{\frac{138}{10}}\times\sqrt{\frac{164}{10}}}=\frac{123}{10\times\sqrt{13{\cdot}8}\times\sqrt{16{\cdot}4}}=\frac{123}{150{\cdot}3}=+{\cdot}82$$

तृतीय सूत्र के अनुसार—

$$r=\frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma d^2x\times\Sigma d^2y}}=\frac{123}{\sqrt{138\times 164}}=+{\cdot}82$$

अतः पति और पत्नी की आयु में अधिक मात्रा का धनात्मक सह-सम्बन्ध (High degree of Positive Correlation) है।

तीनों सूत्रों की तुलना से यह स्पष्ट हो जाता है कि तीसरे सूत्र का प्रयोग सरल है क्योंकि इसमे प्रमाप-विचलन अलग से नही ज्ञात करने पड़ते।

तीसरे सूत्र मे लघुगणकों (Logarithms) का प्रयोग करके गणना-क्रिया और भी सरल की जा सकती है। लघुगणक के रूप में—

$$r = \text{Antilog}\left[\log \Sigma dxdy - \tfrac{1}{2}(\log \Sigma d^2x + \log \Sigma d^2y)\right]$$

उपर्युक्त उदाहरण को लघुगणक की सहायता से इस प्रकार हल किया जायेगा—

$$r = \text{Antilog}\left[\log 123 - \tfrac{1}{2}(\log 138 + \log 164)\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[2{\cdot}0899 - \tfrac{1}{2}(2{\cdot}1399 + 2{\cdot}2148)\right] = 2{\cdot}0899 - 2{\cdot}1774$$

$$= \text{Antilog } \bar{1}{\cdot}9125 = {\cdot}8175 = {\cdot}82$$

उदाहरण (Illustration) 3 :

(i) X तथा Y-श्रेणी के पद-युग्मों की संख्या $=15$

X श्रेणी : समान्तर माध्य $= 25{\cdot}0$
प्रमाप विचलन $= 3{\cdot}01$

Y-श्रेणी : समान्तर माध्य $= 18{\cdot}0$
प्रमाप विचलन $= 3{\cdot}03$

X व Y श्रेणी के तत्संवादी विचलनो की गुणाओं का योग $= +122{\cdot}0$

X और Y में सह-सम्बन्ध-गुणांक ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि X एव Y में सह-विचरण $+488$ हो, और उनके अलग-अलग प्रसरण 824 और 325 हो तो उनमें सह-सम्बन्ध गुणांक निकालिये।

(iii) X और Y-चरों में कार्ल-पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक $-{\cdot}75$ है। उनका सह-विचरण -15 है। यदि X-श्रेणी का प्रसरण 25 हो तो Y-श्रेणी का प्रमाप विचलन निकालिए।

हल (Solution) :

(i) ज्ञात है : $N=15,\ \bar{X}=25{\cdot}0,\ \bar{Y}=18,\ \sigma_x=3{\cdot}01,\ \sigma_y=3{\cdot}03$

और $\Sigma dxdy = +122{\cdot}0$

$$r = \frac{\Sigma dxdy}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{+122{\cdot}0}{15\times3{\cdot}01\times3{\cdot}03} = \frac{122{\cdot}0}{136{\cdot}8} = +{\cdot}89$$

अतः X और Y मे सह-सम्बन्ध गुणांक $+{\cdot}89$ है।

(ii) $$r = \frac{\text{Co-variance}}{\sqrt{(\text{Variance } X)\times(\text{Variance } Y)}} = \frac{+488}{\sqrt{824\times325}}$$

$$= \text{Antilog}\left[\log 488 - \tfrac{1}{2}(\log 824 + \log 325)\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[2{\cdot}6884 - \tfrac{1}{2}(2{\cdot}9159 + 2{\cdot}5119)\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[2{\cdot}6884 - 2{\cdot}7139\right] \text{ या Antilog } \bar{1}{\cdot}9745 = +{\cdot}943$$

(iii) $$r = \frac{\text{Co-variance}}{\sqrt{\text{Variance } X \times \text{Variance } Y}}$$

या $$-{\cdot}75 = \frac{-15}{\sqrt{25\times\text{Variance } Y}} = \frac{-15}{5\times\sigma_y} \quad (\because \sigma = \sqrt{\text{Variance}})$$

या $-\cdot 75\times 5\times \sigma_y=-15,\ \sigma_y=\frac{-15}{-3\cdot 75}=4$

$\therefore$ Y श्रेणी का प्रमाप विचलन 4 है।

लघु रीति (Short-Cut Method)—सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की प्रत्यक्ष रीति मे विचलन वास्तविक समान्तर माध्य (Actual Arithmetic Mean) से निकाले जाते हैं। यदि समान्तर माध्य पूर्णाङ्क में न हो तो गणन-क्रिया अत्यन्त कठिन हो जाती है। अतः सरलता के लिए लघु रीति द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है। इस रीति में विचलन वास्तविक समान्तर माध्य से न लेकर दोनो श्रेणियों के कल्पित माध्यों (Assumed Arithmetic Means) से लिए जाते हैं। सूत्र में $\Sigma dxdy$, Σd^2x तथा Σd^2y में वास्तविक व कल्पित माध्यों के अन्तरों के आधार पर आवश्यक संशोधन कर दिये जाते है।

लघु रीति द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक निकालने की निम्न क्रिया-विधि है—

(i) X और Y श्रेणियों में उपयुक्त व सुविधाजनक मूल्यों को कल्पित माध्य मान लिया जाता है। (A_x, A_y)

(ii) दोनों श्रेणियों के कल्पित माध्यो से मूल्यों के विचलन निकाले जाते है। (dx व dy) अथवा $(X-A_x)$ तथा $(X-A_y)$

(iii) उपर्युक्त विचलनो के जोड़ प्राप्त किये जाते है। (Σdx तथा Σdy)

(iv) विचलनों की आपस मे गुणा करके गुणाओं का जोड़ ($\Sigma dxdy$) निकाला जाता है।

(v) विचलनों के वर्ग (Squares) करके उन वर्गों के जोड़ क्रमशः Σd^2x व Σd^2y ज्ञात किये जाते हैं।

(vi) अन्त मे निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

प्रथम सूत्र—

$$r=\frac{\Sigma dxdy-N(\bar{X}-A_x)(\bar{Y}-A_y)}{N\sigma_x\sigma_y}$$

$\Sigma dxdy$	संकेताक्षर दोनो श्रेणियों के कल्पित माध्यो से निकाले गये विचलनों की गुणाओं का जोड है,
$\bar{X}$ व $\bar{Y}$	दोनों श्रेणियों के वास्तविक समान्तर माध्य हैं,
A_x व A_y	दोनो मालाओ के कल्पित माध्य हैं,
σ_x व σ_y	दोनों मालाओं के प्रमाप विचलन हैं, और
N;	पद-युग्मों की संख्या है।

उपर्युक्त सूत्र के अनुसार सह-सम्बन्ध गुणांक निकालने के लिए दोनों पद-मालाओं के समान्तर माध्य एव प्रमाप विचलन ज्ञात करने पड़ते हैं जिसके कारण गणन-क्रिया बढ़ जाती है। अत. इस सूत्र का प्रयोग नहीं किया जाता। व्यवहार मे, उपर्युक्त सूत्र के सरल रूपो का ही प्रयोग किया जाता है जिनमे समान्तर माध्य या प्रमाप विचलन निकालने की आवश्यकता नही होती। ये सरल रूप निम्नलिखित हैं—

द्वितीय सूत्र—

$$r=\frac{\Sigma dxdy-N\times\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)\left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)}{N\times\sqrt{\left[\frac{\Sigma d^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2\right]}\times\sqrt{\left[\frac{\Sigma d^2y}{N}-\left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)^2\right]}}$$

क्योंकि $(\bar{X}-A)=\frac{\Sigma dx}{N}$ तथा $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2}$

इस सूत्र को निम्न प्रकार से और भी अधिक सरल बनाया जा सकता है—

तृतीय सूत्र—

$$r=\frac{\Sigma dxdy-\frac{\Sigma dx.\Sigma dy}{N}}{\sqrt{\left[\Sigma d^2x-\frac{(\Sigma dx)^2}{N}\right]\left[\Sigma d^2y-\frac{(\Sigma dy)^2}{N}\right]}}$$

चतुर्थ सूत्र—

$$r=\frac{N\times\Sigma dxdy-(\Sigma dx\times\Sigma dy)}{\sqrt{[N\times\Sigma d^2x-(\Sigma dx)^2][N\times\Sigma d^2y-(\Sigma dy)^2]}}$$

तृतीय अथवा चतुर्थ सूत्र का प्रयोग अधिक सरल एवं सुविधाजनक होता है। इसलिए व्यवहार में इनका ही प्रयोग करना चाहिए। निम्न उदाहरण में चारों सूत्रों द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक निकाल कर दिखाया गया है। यह स्पष्ट हो जायेगा कि तृतीय सूत्र का प्रयोग अधिक सुविधाजनक है।

उदाहरण (Illustration) 4 :

निम्न आंकड़ों से कार्ल-पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए।

श्रेणी A :	112	114	108	124	145	150	119	125	147	150
श्रेणी B :	200	190	214	187	170	170	210	190	180	180

हल (Solution) :

कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध-गुणांक का आगणन (लघु रीति)

श्रेणी A (X)			श्रेणी B (Y)			विचलन-गुणों की गुणा
पद-मूल्य	125 से विचलन	विचलन वर्ग	पद-मूल्य	190 से विचलन	विचलन वर्ग	
X	dx	d^2x	Y	dy	d^2y	$dxdy$
112	−13	169	200	+10	100	−130
114	−11	121	190	0	0	0
108	−17	289	214	+24	576	−408
124	− 1	1	187	− 3	9	+3
145	+20	400	170	−20	400	−400
150	+25	625	170	−20	400	−500
119	− 6	36	210	+20	400	−120
125	0	0	190	0	0	0
147	+22	484	180	−10	100	−220
150	+25	625	180	−10	100	−250
1294 ΣX	+92−48 =44	2750	1891 ΣY	+54−63 =−9	2085	+3−2028 =−2025
$\bar{X}=129{\cdot}4$	Σdx	Σd²x	$\bar{Y}=189{\cdot}1$	Σdy	Σd²y	Σdxdy

प्रथम सूत्र के अनुसार—

श्रेणी A	श्रेणी B
$\overline{X}=A_x+\frac{\Sigma dx}{N}$	$\overline{Y}=A_y+\frac{\Sigma dy}{N}$
$=125+\frac{44}{10}=129{\cdot}4$	$=190+\frac{-9}{10}$ या $189{\cdot}1$
$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2}$	$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma d^2y}{N}-\left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)^2}$
$=\sqrt{\frac{2750}{10}-\left(\frac{44}{10}\right)^2}$	$=\sqrt{\frac{2085}{10}-\left(\frac{-9}{10}\right)^2}$
$=\sqrt{175-19{\cdot}36}=15{\cdot}99$	$=\sqrt{208{\cdot}50-{\cdot}81}=14{\cdot}41$

$$r=\frac{\Sigma dxdy-N(\overline{X}-A_x)(\overline{Y}-A_y)}{N\sigma_x.\sigma_y}$$

$$r=\frac{-2025-10\times(129{\cdot}4-125)(189{\cdot}1-190)}{10\times15{\cdot}99\times14{\cdot}41}=\frac{-2025-(10\times4{\cdot}4\times-{\cdot}9)}{2304{\cdot}16}$$

$$=\frac{-2025+39{\cdot}6}{2304{\cdot}16}=\frac{-1985{\cdot}4}{2304{\cdot}2}=-{\cdot}86$$

दोनों श्रेणियों में अधिक मात्रा का ऋणात्मक सम्बन्ध है।

द्वितीय सूत्र के अनुसार—

$$r=\frac{\Sigma dxdy-N\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)\left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)}{N\sqrt{\left[\frac{\Sigma d^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2\right]}\sqrt{\left[\frac{\Sigma d^2y}{N}-\left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)^2\right]}}$$

$$=\frac{-2025-10\times\frac{44}{10}\times\frac{-9}{10}}{10\times\sqrt{\frac{2750}{10}-\left(\frac{44}{10}\right)^2}\sqrt{\frac{2085}{10}-\left(\frac{-9}{10}\right)^2}}$$

$$=\frac{-2025+39{\cdot}6}{10\times\sqrt{275-19{\cdot}36}\sqrt{208{\cdot}5-81}}$$

$$=\frac{-1985{\cdot}4}{10\times15{\cdot}99\times14{\cdot}41}=\frac{-1985{\cdot}4}{2304{\cdot}2}=-{\cdot}86$$

तृतीय सूत्र के अनुसार—

$$r=\frac{\Sigma dxdy-\left(\frac{\Sigma dx.\Sigma dy}{N}\right)}{\sqrt{\left[\Sigma d^2x-\frac{(\Sigma dx)^2}{N}\right]\left[\Sigma d^2y-\frac{(\Sigma dy)^2}{N}\right]}}$$

$$r=\frac{-2025-\frac{44\times-9}{10}}{\sqrt{\left[2750-\frac{(44)^2}{10}\right]\left[2085-\frac{(-9)^2}{10}\right]}}$$

$$=\frac{-2025+39{\cdot}6}{\sqrt{2556{\cdot}4\times2076{\cdot}7}}=\frac{-1985{\cdot}4}{2304{\cdot}2}=-{\cdot}86$$

चतुर्थ सूत्र के अनुसार—

$$r=\frac{N\times\Sigma dxdy-(\Sigma dx\times\Sigma dy)}{\sqrt{[N\times\Sigma d^2x-(\Sigma dx)^2][N\times\Sigma d^2y-(\Sigma dy)^2]}}$$

$$=\frac{10\times-2025-(44\times-9)}{\sqrt{[10\times2750-(44)^2][10\times2085-(-9)^2]}}$$

$$=\frac{-20250+306}{\sqrt{(27506-1936)(20850-81)}}=\frac{-19854}{\sqrt{25564\times20769}}$$

$$=\frac{-19867}{23042}=-\cdot86$$

तृतीय व चतुर्थ सूत्र में लघुगणकों (logarithms) के प्रयोग द्वारा गणन-क्रिया निम्न प्रकार सरल की जा सकती है—

$$r=-[\text{Antilog}\ \{\log 1985\cdot4-\tfrac{1}{2}(\log 2556\cdot4+\log 2076\cdot9)\}]$$

$$=-[\text{Antilog}\ \{3\cdot2978-\tfrac{1}{2}(3\cdot4075+3\cdot3173)\}]$$

$$=-[\text{Antilog}\ \{3\cdot2978-3\cdot3624\}]=-[\text{Antilog}\ \bar{1}\cdot9354]$$

$$=-\cdot8618=-\cdot86$$

उदाहरण (Illustration) 5 :

निम्न सारणी में विद्यार्थियों और उनमे नियमित खिलाड़ियों का वितरण प्रस्तुत किया गया है। क्या आयु और खेलने की आदत मे कोई सह-सम्बन्ध है ?

आयु-वर्ग (वर्ष) :	15–16	16–17	17–18	18–19	19–20	20–21
विद्यार्थियों की संख्या :	200	270	340	360	400	300
नियमित खिलाड़ियों की संख्या :	150	162	170	180	180	120

हल (Solution) :

आयु-वर्गों के मध्य-बिन्दुओं को X-श्रेणी और नियमित खिलाड़ियों की प्रतिशत संख्या को Y-श्रेणी मानकर दोनों श्रेणियों में सह-सम्बन्ध गुणांक निकाला जायेगा। प्रत्येक आयु-वर्ग के विद्यार्थियों की संख्या को 100 मानकर खिलाड़ियों की प्रतिशत संख्या निम्न प्रकार ज्ञात की जायेगी—

विद्यार्थियों की संख्या	नियमित खिलाड़ियों की संख्या	नियमित खिलाड़ियों का प्रतिशत
200	150	$\frac{150}{200}\times100=75$
270	162	$\frac{162}{270}\times100=60$
340	170	$\frac{170}{340}\times100=50$
360	180	$\frac{180}{360}\times100=50$
400	180	$\frac{180}{400}\times100=45$
300	120	$\frac{120}{300}\times100=40$

सह-सम्बन्ध गुणांक का परिगणन (लघु रीति)

आयु (X)			खेलने की आदत (Y)			X व Y के विचलनों की गुणा
आयु (मध्यमान)	विचलन	विचलन वर्ग	प्रतिशत खिलाड़ी	विचलन	विचलन वर्ग	
X	dx	d^2x	Y	dy	d^2y	dxdy
15·5 16·5 17·5 18·5 19·5 20·5	−2 −1 0 +1 +2 +3	4 1 0 1 4 9	75 60 50 50 45 40	+25 +10 0 0 −5 −10	625 100 0 0 25 100	−50 −10 0 0 −10 −30
योग	−3+6 =+3	19		−15+35 =+20	850	−100
N=6	Σdx	Σd^2x		Σdy	Σd^2y	Σdxdy

$$r=\frac{\Sigma dxdy-\frac{\Sigma dx.\Sigma dy}{N}}{\sqrt{\left[\Sigma d^2x-\frac{(\Sigma dx)^2}{N}\right]\left[\Sigma d^2y-\frac{(\Sigma dy)^2}{N}\right]}}$$

$$=\frac{-100-\frac{3\times 20}{6}}{\sqrt{\left[19-\frac{(3)^2}{6}\right]\left[850-\frac{(20)^2}{6}\right]}}=\frac{-100-10}{\sqrt{(19-1·5)(850-66·7)}}$$

$$=\frac{-110}{\sqrt{17·5\times 783·3}}=\frac{-110}{117·7}=-·94$$

अतः आयु और खेलने की आदत में अत्यधिक मात्रा का ऋणात्मक सह-सम्बन्ध (very high degree of negative correlation) है जिससे यह पता चलता है कि आयु बढ़ने के साथ-साथ खेलने की आदत कम होती जाती है।

वर्गीकृत श्रेणी में सह-सम्बन्ध (Correlation in Grouped Series)—वर्गीकृत श्रेणी में भी कार्ल-पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक उसी प्रकार निकाला जायेगा जिस प्रकार वह व्यक्तिगत मालाओं में ज्ञात किया जाता है। परन्तु वर्गीकृत श्रेणी में सह-सम्बन्ध सारणी (correlation table) की आवश्यकता होगी। सह-सम्बन्ध सारणी वर्गीकृत मालाओं की एक द्वि-चर आवृत्ति सारणी (bivariate frequency table) है। इसमें दो परस्पर सम्बन्धित अविच्छिन्न अथवा विच्छिन्न श्रेणियों की कोष्ठ आवृत्तियाँ (cell-frequencies) तथा कुल आवृत्तियाँ इस प्रकार प्रस्तुत की जाती है कि दोनों का अन्तर्सम्बन्ध स्पष्ट हो जाये। इस सारणी में अनेक कोष्ठ (cells) होते है जिनमें X और Y श्रेणी की उभयनिष्ठ (common) आवृत्तियाँ लिखी जाती है। अगले पृष्ठ पर 50 परीक्षार्थियों के अर्थशास्त्र और सांख्यिकी में प्राप्तांक सह-सम्बन्ध सारणी के रूप में किये गये है—

सह-सम्बन्ध सारणी

अर्थशास्त्र में प्राप्तांक	साख्यिकी में प्राप्तांक					योग
	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	
0–10	6	8				14
10–20		5	10	1		16
20–30			6	4		10
30–40				3	3	6
40–50				3	1	4
योग	6	13	16	11	4	50

उपर्युक्त सारणी मे 50 विद्यार्थियों के अर्थशास्त्र और साख्यिकी में प्राप्तांकों की विस्तृत एवं विश्लेषणात्मक सूचना दी गई है। साख्यिकी मे (0–10) प्राप्तांक-वर्ग में कुल 6 विद्यार्थी है जिन्होंने अर्थशास्त्र मे भी (0–10) वर्ग मे ही अंक प्राप्त किये है। (10–20) वर्ग में कुल 13 छात्र है जिनमे से 8 के अर्थशास्त्र में (0–10) अंक हैं और 5 के (10–20) वर्ग में अंक हैं। इसी प्रकार अर्थशास्त्र में (0–10) प्राप्तांक वर्ग में कुल 14 विद्यार्थी है जिनमें से साख्यिकी में (0–10) वर्ग के अंक प्राप्त करने वाले 6 है और शेष 8 के (10–20) वर्ग में प्राप्तांक हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि अधिकतर जिन विद्यार्थियों के साख्यिकी में अधिक अंक हैं उनके अर्थशास्त्र में भी अधिक प्राप्तांक है। अतः दोनों मे धनात्मक सह-सम्बन्ध है। सह-सम्बन्ध-सारणी की सहायता से भी वर्गीकृत श्रेणी में सह-सम्बन्ध का अनुमान लगाया जा सकता है।

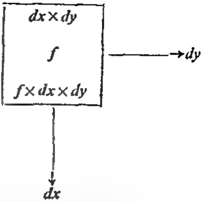
वर्गीकृत श्रेणी मे कार्ल-पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की निम्नलिखित प्रक्रिया है—

(i) दी हुई सारणी मे चार खाने (Columns) दाहिनी ओर तथा तीन पंक्तियाँ (Rows) नीचे की ओर बनाई जायेंगी। दाहिनी ओर के चार नये खानों में से पहला Y के कल्पित माध्य से निकाले गये विचलनों (dy) के लिए, दूसरा और तीसरा fdy और fd^2y के लिए तथा चौथा $fdxdy$ के लिए होगा। इसी प्रकार तीन नई पंक्तियाँ क्रमशः dx, fdx और fd^2x के लिए बनाई जायेंगी।

(ii) X और Y के अलग-अलग सुविधाजनक मध्य-बिन्दुओं या मूल्यों को कल्पित माध्य मानकर मध्य-बिन्दुओं या मूल्यों के विचलन (dx व dy) निकाले जायेंगे। यदि वर्गान्तर समान हो या मूल्यों के अन्तर बराबर हों तो उभयनिष्ठ गुणक (common factor) निकालकर पदविचलन ज्ञात करना अधिक सरल होता है। इससे गणन-क्रिया मे काफी बचत होती है। पद-विचलन निकालने के लिए X श्रेणी के वर्ग-विस्तार आपस में समान होने चाहिएँ। इसी प्रकार Y श्रेणी के वर्ग-विस्तार या मूल्यों के अन्तर भी बराबर होने चाहिएँ। X श्रेणी मे यदि 5-5 का वर्ग-विस्तार हो और Y श्रेणी मे 6-6 का या 10-10 का विस्तार हो, तो पद-विचलन रीति का प्रयोग किया जा सकता है।

(iii) दोनों श्रेणियों के विचलनों व आवृत्तियों को गुणा करके गुणनफल सम्बन्धित खाने और पंक्ति मे लिखे जायेंगे। इन गुणनफलों के जोड़ क्रमशः Σfdx और Σfdy होंगे।

(iv) fdx को dx से तथा fdy को dy से गुणा करके उन गुणाओं के जोड़ Σfd^2x और Σfd^2y प्राप्त कर लिए जायेंगे।



(v) $fdxdy$ की गणना करने के लिए प्रत्येक कोष्ठ-आवृत्ति (cell-frequency) तथा तत्सम्बन्धी dx और dy की आपस मे गुणा की जाएगी। इसकी विधि यह है—प्रत्येक वर्ग या कोष्ठ के नीचे की ओर वाले तथा सामने की ओर वाले विचलनों (dx और dy) की आपस में गुणा करके, गुणनफल ($dxdy$) उस कोष्ठ में बाएँ कोने मे ऊपर की ओर लिखा जाएगा। फिर इस गुणनफल $dxdy$ की कोष्ठ-आवृत्ति (f) से गुणा करके गुणनफल ($fdxdy$) उसी वर्ग मे दाहिने कोने मे नीचे की ओर लिख दिया जाएगा। इन गुणनफलों का क्षैतिज जोड़ (बायीं से दाहिनी ओर) अन्तिम खाने ($fdxdy$) मे लिख दिया जाएगा। इस प्रकार सभी कोष्ठ-आवृत्तियो के $fdxdy$ का जोड अन्तिम खाने मे लिखकर इन जोड़ो का कुल योग निकाल लिया जायेगा। यही $\Sigma fdxdy$ होगा। कोष्ठ की $fdxdy$ का उदग्र जोड़ (ऊपर से नीचे की ओर) भी निकाला जा सकता है। दोनों स्थितियों में कुल जोड़ एक ही होगा।

(vi) अन्त मे निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगा—

प्रथम सूत्र— $$r=\frac{\Sigma fdxdy-N(\bar{X}-A_x)(\bar{Y}-A_y)}{N.\sigma_x.\sigma_y}$$

$\Sigma fdxdy$ कोष्ठ-आवृत्तियों तथा तत्सम्बन्धी विचलनों की गुणाओ का जोड़ है।

व्यवहार मे इस सूत्र का प्रयोग नही किया जाता क्योंकि इसमे समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन निकालने पडते है जिससे अधिक समय लग जाता है।

द्वितीय सूत्र— $$r=\frac{\Sigma fdxdy-N\left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)\left(\frac{\Sigma fdy}{N}\right)}{N\times\sqrt{\left[\frac{\Sigma fd^2x}{N}-\left(\frac{\Sigma fdy}{N}\right)^2\right]\left[\frac{\Sigma fd^2y}{N}-\left(\frac{\Sigma fdy}{N}\right)^2\right]}}$$

तृतीय सूत्र— $$r=\frac{\Sigma fdxdy-\frac{\Sigma fdx.\Sigma fdy}{N}}{\sqrt{\left[\Sigma fd^2x-\frac{(\Sigma fdx)^2}{N}\right]\left[\Sigma fd^2y-\frac{(\Sigma fdy)^2}{N}\right]}}$$

चतुर्थ सूत्र— $$r=\frac{N\times\Sigma fdxdy-\Sigma fdx\times\Sigma fdy}{\sqrt{[N\times\Sigma fd^2x-(\Sigma fdx)^2]\,[N\times\Sigma fd^2y-(\Sigma fdy)^2]}}$$

यद्यपि उपर्युक्त रीति में कल्पित माध्य से पद-विचलन लिए गये है, तो भी समान गुणक (common factor) से dx और dy को गुणा नही किया जाएगा क्योंकि सूत्र मे अंश और हर दोनो मे वर्ग-विस्तार के बराबर उभयनिष्ठ गुणक ($i_x \times i_y$) से गुणा करने पर अंश व हर का अनुपात पूर्ववत् रहेगा।

उदाहरण (Illustration) 6 :

निम्न सारणी मे कार्ल-पियंसन का सह-सम्बन्ध गुणाक निकालिए—

Y \ X	18	19	20	21	22	योग
0–5				3	1	4
5–10				3	2	5
10–15			7	10		17
15–20		5	4			9
20–25	3	2				5
योग	3	7	11	16	3	40

[B. Com., Agra, 1963]

हल (*Solution*) :

X श्रेणी के मूल्यों का अन्तर बराबर है। Y-श्रेणी के वर्गान्तरों का विस्तार भी समान है अतः पद-विचलन लिए जायेंगे। निम्न सारणी द्वारा $\Sigma fdxdy$, Σfdx, Σfdy, Σfd^2x तथा Σfd^2y की गणना की जाएगी।

वर्गित श्रेणी में r की गणना

Y	मध्य-बिन्दु	X: 18	19	20	21	22	योग fy	dy	fdy	fd²y	fdxdy
0–5	2.5				(−2) 3 [−6]	(−4) 1 [−4]	4	−2	−8	16	−10
5–10	7.5				(−1) 3 [−3]	(−2) 2 [−4]	5	−1	−5	5	−7
10–15	12.5			(0) 7 [0]	(0) 10 [0]		17	0	0	0	0
15–20	17.5		(−1) 5 [−5]	(0) 4 [0]			9	+1	+9	9	−5
20–25	22.5	(−4) 3 [−12]	(−2) 2 [−4]				5	+2	+10	+20	−6
योग	fx	3	7	11	16	3	40 N		+6	50	−38
									Σfdy	Σfd²y	Σfdxdy
	dx	−2	−1	0	+1	+2					
	fdx	−6	−7	0	+16	+6	+9	Σfdx			
	fd²x	12	7	0	16	12	47	Σfd²x			

$$r=\frac{\Sigma fdxdy-\dfrac{\Sigma fdx\times\Sigma fdy}{N}}{\sqrt{\left[\Sigma fd^2x-\dfrac{(\Sigma fdx)^2}{N}\right]\left[\Sigma fd^2y-\dfrac{(\Sigma fdy)^2}{N}\right]}}$$

$$=\frac{-38-\dfrac{9\times 6}{40}}{\sqrt{\left[47-\dfrac{(9)^2}{40}\right]\left[50-\dfrac{(6)^2}{40}\right]}}=\frac{-38-1{\cdot}35}{\sqrt{(47-2{\cdot}025)(50-{\cdot}9)}}$$

$$=\frac{-39{\cdot}35}{\sqrt{44{\cdot}975\times 49{\cdot}1}}=\frac{-39{\cdot}35}{46{\cdot}99}=-{\cdot}84$$

अतः X और Y में अधिक मात्रा का ऋणात्मक सह-सम्बन्ध है। चतुर्थ सूत्र द्वारा तथा लघुगणक की सहायता से सह-सम्बन्ध गुणांक निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है—

$$=\frac{N\times\Sigma fdxdy-(\Sigma fdx\times\Sigma fdy)}{\sqrt{[N\times\Sigma fd^2x-(\Sigma fdx)^2][N\times\Sigma fd^2y-(\Sigma fdy)^2]}}$$

$$=\frac{40\times -38-(9\times 6)}{\sqrt{[40\times 47-(9)^2][40\times 50-(6)^2]}}$$

$$= \frac{-1520-54}{\sqrt{(1880-81)(2000-36)}} = \frac{-1574}{\sqrt{1799 \times 1964}}$$
$$= -[\text{Antilog } \{\log 1574 - \tfrac{1}{2}(\log 1799 - \log 1964)\}]$$
$$= -[\text{Antilog } \{3{\cdot}1974 - \tfrac{1}{2}(3{\cdot}2551 + 3{\cdot}2931)\}]$$
$$= -[\text{Antilog } 3{\cdot}1974 - 3{\cdot}2741] \text{ या } -(\text{Antilog } \bar{1}{\cdot}9233)$$
$$= -{\cdot}8381 \text{ या } -{\cdot}84$$

कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक की मान्यताएँ (Assumptions of Karl Pearson's Coefficient of Correlation)—कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक तीन मान्यताओं पर आधारित है जो निम्न प्रकार हैं—

(i) **प्रसामान्यता (Normality)**—सह-सम्बन्धित समंकश्रेणियों पर अनेक कारणो का प्रभाव पड़ता है जिससे उनमें सामान्यता आ जाती है।

(ii) **कार्य-कारण सम्बन्ध (Causal Relationship)**—श्रेणियो को प्रभावित करने वाले स्वतन्त्र कारणों में परस्पर कारण और परिणाम का सम्बन्ध होता है। कार्य-कारण सम्बन्ध के अभाव में सह-सम्बन्ध निरर्थक (nonsense correlation) होता है।

(iii) **रेखीय प्रकृति (Linear Nature)**—यह भी परिकल्पना की जाती है कि दोनो समंकमालाओं में रेखीय सम्बन्ध है अर्थात् यदि दोनों पद-युग्मों को बिन्दु-रेखीय पत्र पर प्रांकित किया जाय तो बिन्दुचित्र में एक सरल रेखा (straight line) खींची जा सकती है।

कार्ल-पियर्सन के सह-सम्बन्ध-गुणांक की सीमा—सह-सम्बन्ध गुणांक का मान −1 और +1 के बीच होना चाहिए। किसी भी स्थिति में यह एक से अधिक नही हो सकता—

$$r \not> 1 \text{ या } r \leqslant 1$$

प्रमाण—जैसा कि हम पहले देख चुके हैं, कार्ल-पियर्सन के सह-सम्बन्ध-गुणांक का मूल सूत्र निम्न है—

$$r = \frac{\Sigma xy}{N\sigma_1\sigma_2} \quad \text{या} \quad r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}} \quad \text{या} \quad r^2 = \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2 . \Sigma y^2}$$

जहाँ x व y क्रमशः X-श्रेणी व Y-श्रेणी के समान्तर माध्यों से विभिन्न मूल्यों के विचलन हैं।

$$[x = X - \bar{X} ; \; y = Y - \bar{Y}]$$

r (या r^2) के 1 के बराबर या 1 से कम होने की दशा में उक्त सूत्र का हर (Denominator) वाला भाग, उसके अंश (Numerator) के बिल्कुल बराबर होगा या उससे अधिक होगा। संकेतों के रूप में—

$$D - N = 0 \quad \text{या} \quad D - N > 0 \quad \text{अर्थात्} \quad D - N \geqslant 0$$

मान लिया कि X-श्रेणी के माध्य से विचलन क्रमानुसार $x_1, x_2, \ldots x_n$ हैं और इसी प्रकार Y-श्रेणी के विचलन $y_1, y_2, \ldots y_n$ हैं।

x-विचलनों के y-विचलनों पर अनुपात (ratios) क्रमशः $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots \frac{x_n}{x_n}$ हैं जिनके लिए हम $a_1, a_2 \ldots a_n$ संकेताक्षरों का प्रयोग करेंगे।

(i) सभी विचलन-अनुपात $a_1, a_2 \ldots a_n$ यदि बराबर हों तो सह-सम्बन्ध-गुणांक पूर्ण होगा अर्थात्—

$$\text{यदि} \quad a_1 = a_2 = \ldots a_n, \quad r = 1$$

(ii) इसके विपरीत यदि $a_1 \neq a_2 \neq \ldots a_n$ तो $r < 1$ होगा।

प्रथम स्थिति—सूत्र के हर मे से अंश घटाने पर—

$$N\sigma_1\sigma_2 - \Sigma xy \text{ या } N^2\sigma_1^2\sigma_2^2 - (\Sigma xy)^2 = \Sigma x^2 \Sigma y^2 - (\Sigma xy)^2$$
$$\Sigma x^2 . \Sigma y^2 - (\Sigma xy)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots y_n^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n)^2$$

विचलन-अनुपातों $a_1, a_2 \ldots a_n$ का समावेश करने के लिए निम्नांकित समायोजन किया जाएगा—

$$=\left\{\left(\frac{x_1}{y_1}.y_1\right)^2+\left(\frac{x_2}{y_2}.y_2\right)^2+\ldots\left(\frac{x_n}{y_n}y_n\right)^2\right\}\left\{y_1^2+y_2^2+\ldots y_n^2\right\}-\left\{\frac{x_1}{y_1}y_1^2+\frac{x_2}{y_2}y_2^2+\ldots\frac{x_n}{y_n}y_n^2\right\}^2$$

$$=(a_1^2y_1^2+a_2^2y_2^2+\ldots a_n^2y_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots y_n^2)-(a_1y_1^2+a_2y_2^2\ldots a_ny_n^2)^2$$

गणन-सुविधा के लिए n-subscript वाले चिन्हों को छोड़कर और शेष भाग का मान निकालने पर—

$$(a_1^2y_1^2+a_2^2y_2^2)(y_1^2+y_2^2)-(a_1y_1^2+a_2y_2^2)^2$$
$$=(a_1^2y_1^4+a_2^2y_2^4+a_1^2y_1^2y_2^2+a_2^2y_1^2y_2^2)-(a_1^2y_1^4+a_2^2y_2^4+2a_1a_2y_1^2y_2^2)$$
$$=a_1^2y_1^4+a_2^2y_2^4+a_1^2y_1^2y_2^2+a_2^2y_1^2y_2^2-a_1^2y_1^4-a_2^2y_2^4-2a_1a_2y_1^2y_2^2$$
$$=a_1^2y_1^2y_2^2+a_2^2y_1^2y_2^2-2a_1a_2y_1^2y_2^2$$
$$=y_1^2y_2^2(a_1^2+a_2^2-2a_1a_2)$$
$$=y_1^2y_2^2(a_1-a_2)^2$$
$$=0 \text{ यदि } a_1=a_2=\ldots a_n.$$

अतः यह सिद्ध हुआ कि जब विचलन-अनुपात बराबर होते हैं $(a_1=a_2=\ldots a_n)$ तो सह-सम्बन्ध पूर्ण (r या $r^2=1$) होता है और हर व अंश का अन्तर शून्य $(D-N=0)$ होता है।

यदि $a_1=a_2=\ldots a_n$ तो $\Sigma x^2.\Sigma y^2-(\Sigma xy)^2=0$

अतः $\Sigma x^2.\Sigma y^2=(\Sigma xy)^2$

$$\therefore\quad r^2=\frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2.\Sigma y^2}=1 \qquad \therefore\quad r=1$$

द्वितीय स्थिति—जब $a_1\neq a_2\neq\ldots a_n$ तो—

$$\Sigma x^2.\Sigma y^2-(\Sigma xy)^2>0 \text{ या } D-N>0$$
$$\Sigma x^2.xy^2>(\Sigma xy)^2 \text{ या } \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2.\Sigma y^2}<1 \text{ या } r^2<1$$
$$\therefore\quad r<1$$

अतः यह सिद्ध हो जाता है कि $r\leqslant 1$

अंश के धनात्मक या ऋणात्मक होने पर $r+$ या $-$ होगा। स्पष्ट है कि r सदैव -1 और $+1$ के बीच ही रहेगा। $(-1\leqslant r\leqslant+1)$

सम्भाव्य विभ्रम
(Probable Error)

अर्थ—कार्ल-पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक की विश्वसनीयता की जांच करने के लिए सम्भाव्य विभ्रम का प्रयोग किया जाता है। सम्भाव्य विभ्रम, विभ्रम की वह मात्रा है जिसे यदि किसी विशिष्ट सांख्यिकीय माप (जैसे माध्य, सह-सम्बन्ध गुणांक आदि) में जोड़ दिया जाये और घटा भी दिया जाये तो वे दो सीमाएँ ज्ञात हो जाती हैं जिनके अन्तर्गत अन्य दैव प्रतिदर्शों (random samples) के कथित सांख्यिकीय माप के पाये जाने की 50% सम्भावना होती है। सह-सम्बन्ध-गुणांक के सम्भाव्य विभ्रम से भी इस प्रकार की दो सम्भावना-सीमाएँ ज्ञात हो जाती हैं।

होरेस सिक्राइस्ट के अनुसार, 'कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक का सम्भाव्य विभ्रम वह राशि है जिसे यदि सह-सम्बन्ध गुणांक में जोड़ दिया जाये और घटा दिया जाये तो ऐसी सीमाएँ ज्ञात हो जाती हैं जिनके अन्तर्गत दैव प्रतिचयन के आधार पर छांटे गये मूल्यों के सह-

सम्बन्ध गुणांक के पाये जाने की समान सम्भावनाएँ होती है।'[1] उदाहरण के लिए मान लीजिए कि किसी कालिज के 1000 विद्यार्थियों की ऊँचाई और भार का सह-सम्बन्ध ज्ञात करना है। उनमें से दैव प्रतिचयन प्रणाली के अनुसार 100 को चुन लिया जाता है तथा इन 100 की ऊँचाई व भार का सह-सम्बन्ध गुणांक (r) ·8 और उसका सम्भाव्य विभ्रम ($p.e.$) ·024 आता है। अब यदि 1000 विद्यार्थियों के उस समग्र में से 100 विद्यार्थियों का एक और दैव प्रतिदर्श छांटकर उनकी ऊँचाई और भार का सह-सम्बन्ध गुणांक निकाला जाये तो इस बात की 50% सम्भावना है कि वह गुणांक (r) ·8 + 024 = ·824 और ·8 — ·024 = ·776 के बीच ही होगा अर्थात् वह ·776 से कम नहीं होगा और ·824 से अधिक नहीं होगा। यही नहीं, वरन् पूरे समग्र के आधार पर निकाले गये ऊँचाई व भार के सह-सम्बन्ध गुणाक की मात्रा भी इन दोनों सीमाओं के अन्तर्गत पाये जाने की सम्भावना होगी।

गणना—सह-सम्बन्ध गुणाक का सम्भाव्य विभ्रम ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$P.E. \text{ of } r = \cdot 6745 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

r कार्ल-पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक है, और
N पद-युग्मों की संख्या है।

उदाहरण 2 में $r = \cdot 82$ और $N = 10$, अतः उसका सम्भाव्य विभ्रम निम्नांकित होगा—

$$P.E. \text{ of } r = \cdot 6745 \times \frac{1-(\cdot 82)^2}{\sqrt{10}} \text{ या } \cdot 6745 \times \frac{\cdot 3276}{3 \cdot 162} = \cdot 07$$

गणन-क्रिया को सरल बनाने के लिए ·6745 के स्थान पर $\frac{2}{3}$ का प्रयोग किया जा सकता है। परिणाम में कोई विशिष्ट अन्तर नहीं होगा। उक्त उदाहरण में r के सम्भाव्य विभ्रम के आधार पर यह कहा जा सकता है कि यदि उसी समग्र से अन्य दैव प्रतिदर्श निकालकर पति-पत्नियों की आयु का सह-सम्बन्ध गुणांक निकाला जाय तो वह निम्न दो सीमाओं के बीच में ही पाया जाएगा—

अधिकतम सीमा : $r + p.e. = \cdot 82 + \cdot 07 = \cdot 89$
न्यूनतम सीमा : $r - p.e. = \cdot 82 - \cdot 07 = \cdot 75$

कार्य—सम्भाव्य विभ्रम के निम्न दो कार्य है—

(i) सीमा-निर्धारण (Determination of Limits)—सह-सम्बन्ध-गुणाक का सम्भाव्य विभ्रम वे दो सीमाएँ ($r \pm p.e.$) निर्धारित करता है जिनमे अन्य दैव प्रतिदर्शों के आधार पर निकाले गए या पूरे समग्र पर आधारित सह-सम्बन्ध-गुणांक के पाये जाने की 50% सम्भावना होती है।

(ii) सह-सम्बन्ध-गुणांक का निर्वचन (Interpretation of r)—सम्भाव्य विभ्रम का दूसरा कार्य यह है कि उसके रूप मे कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध-गुणाक का निम्न नियमो के अनुसार निर्वचन किया जाता है—

(क) यदि सह-सम्बन्ध-गुणाक सम्भाव्य विभ्रम के छः गुने से अधिक है ($r > 6 p.e.$) तो दोनों श्रेणियों मे सह-सम्बन्ध अर्थपूर्ण अथवा सार्थक (significant) होता है। दूसरे शब्दों मे r के 6 $p.e.$ से अधिक होने पर यह कहा जा सकता है कि दोनो सम्बद्ध मालाओं में सह-सम्बन्ध निश्चित रूप से विद्यमान है। सह-सम्बन्ध गुणाक सम्भाव्य विभ्रम के छः गुने से जितना अधिक

[1] 'The probable error of r is an amount which if added to and subtracted from the average correlation coefficient produces amounts within which the chances are even the coefficient of correlation from a series selected at random will fall.'—Horace *Introduction to Statistical Methods*, p. 429.

होगा सह-सम्बन्ध उतना ही अधिक अर्थपूर्ण माना जायेगा। यदि गुणांक विभ्रम के छः गुने से अधिक नहीं है ($r \not> 6\ p.e.$) तो सह-सम्बन्ध अर्थपूर्ण नहीं (not significant) होता है।

(ख) यदि सह-सम्बन्ध गुणांक सम्भाव्य विभ्रम से कम है ($r < p.e.$) तो यह सिद्ध हो जाता है कि दोनों श्रेणियों में सह-सम्बन्ध की उपस्थिति का कोई प्रमाण नहीं है।

(ग) यदि सह-सम्बन्ध गुणांक ·3 से कम है और उसका सम्भाव्य विभ्रम अपेक्षाकृत कम है तो सह-सम्बन्ध की मात्रा नगण्य (not marked) समझनी चाहिए।

(घ) यदि सह-सम्बन्ध गुणांक ·5 से अधिक है और सम्भाव्य विभ्रम बहुत कम है तो सह-सम्बन्ध का अस्तित्व लगभग निश्चित है।

उपर्युक्त नियमो के अनुसार ही सह-सम्बन्ध गुणांक और सम्भाव्य विभ्रम की तुलना करके यह निष्कर्ष निकालना चाहिए कि सह-सम्बन्ध अर्थपूर्ण है अथवा नहीं। सह-सम्बन्ध की मात्रा और दिशा के बारे मे प्रयुक्त सामान्य नियमों का पहले ही उल्लेख किया जा चुका है।

परिसीमाएँ—केवल निम्न परिस्थितियों में ही सम्भाव्य विभ्रम का प्रयोग उचित होता है—

(i) जब पद-युग्मों की संख्या अधिक हो,

(ii) सह-सम्बन्ध गुणांक दैव प्रतिचयन प्रणाली के आधार पर चुने हुए मूल्यों से ज्ञात किया गया हो, तथा

(iii) श्रेणी सममित अर्थात् प्रसामान्य हो।

आर्थिक व व्यावसायिक क्षेत्र मे उपर्युक्त परिस्थितियाँ अधिकतर पूरी नहीं उतरतीं, अतः इन क्षेत्रों में सम्भाव्य विभ्रम का प्रयोग उचित नहीं है। इसके अतिरिक्त सम्भाव्य विभ्रम द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक की 50% सम्भावना की सीमाएँ ही निश्चित होती हैं। वस्तुतः यह 'न तो विभ्रम है और न पूर्ण रूप से सम्भाव्य ही है।'[1]

प्रमाप विभ्रम—आधुनिक सांख्यिकी में सम्भाव्य विभ्रम के स्थान पर प्रमाप विभ्रम का प्रयोग अधिक श्रेयस्कर समझा जाता है। प्रमाप विभ्रम, सम्भाव्य विभ्रम का लगभग $\frac{3}{2}$ होता है। सूत्रानुसार—

$$\text{S. E. of } r = \frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \text{ या P. E. of } r = \cdot 6745 \times \text{S. E.}$$

प्रतिदर्श के सह-सम्बन्ध-गुणांक की प्रमाप विभ्रम की सहायता से पूरे समग्र के r की सीमाएँ निम्न सूत्रानुसार निर्धारित होती हैं—

$$r \pm 3 \text{ S. E. of } r$$

यदि प्रतिदर्श छोटा (small sample) हो तो सम्भाव्य विभ्रम तथा प्रमाप विभ्रम से अर्थपूर्णता की सही जाँच नहीं की जा सकती। इसके लिए फिशर की जेड-परिणति (Fisher's Z-transformation) या स्टूडेन्ट की टी-जाँच (Student's t-test) का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 7 :

(i) यदि $r = \cdot 6$ और $N = 16$ तो सह-सम्बन्ध-गुणांक की अर्थपूर्णता की जाँच कीजिए।

(ii) यह सिद्ध कीजिए कि r अर्थपूर्ण है यदि $N = 16$, P.E. $= \cdot 085$; $\cdot 6745 = \frac{2}{3}$.

(iii) परिकलन द्वारा यह सिद्ध कीजिए कि निम्न में से किस स्थिति में सह-सम्बन्ध अधिक अर्थपूर्ण है।

I	II
$r = \cdot 8$; P.E. $= \cdot 04$;	$r = \cdot 5$; P.E. $= \cdot 02$

[1] 'It is neither an error nor probable.'—Moroney, *Facts from Figures*, p. 114.

हल (Solution) :

(i) $r = \cdot 6;\ N = 16,\ P.E. = \cdot 6745 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{N}} = \cdot 6745 \times \frac{1-(\cdot 6)^2}{\sqrt{16}}$

$$P.E. = \cdot 6745 \times \frac{\cdot 64}{4} = \cdot 6745 \times \cdot 16 = \cdot 108$$

यहाँ पर r ·6 है जो कि 6 × ·108 अर्थात् ·648 से कम है। अतः सह-सम्बन्ध अर्थपूर्ण नहीं है।

(ii) पहले P.E. और N की सहायता से r ज्ञात किया जायेगा—

$$P.E. = \cdot 6745 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \quad \text{या} \quad \cdot 085 = \frac{2}{3} \times \frac{1-r^2}{\sqrt{16}}$$

$$\cdot 085 = \frac{2-2r^2}{12} \qquad \text{या } 1\cdot 020 = 2 - 2r^2$$

$$2r^2 = 2 - 1\cdot 02 = \cdot 98,\ r^2 = \cdot 49, \quad \therefore r = \sqrt{\cdot 49} = \cdot 7$$

$$6 \times P.E. = 6 \times \cdot 085 = \cdot 510$$

r ·7 है जो कि 6 P. E. अर्थात् ·51 से अधिक है। अतः इससे यह सिद्ध होता है कि सह-सम्बन्ध गुणांक अर्थपूर्ण (significant) है।

(iii) जिस स्थिति में r, P.E. का अधिक गुना होगा उसी स्थिति में वह अधिक अर्थपूर्ण माना जाएगा। r और P.E. की तुलना निम्न प्रकार की जाएगी—

I	II
$r = \cdot 8,\ P.E. = \cdot 04$	$r = \cdot 5,\ P.E. = \cdot 02$
$\frac{r}{P.E.} = \frac{\cdot 8}{\cdot 04} = 20$	$\frac{r}{P.E.} = \frac{\cdot 5}{\cdot 02} = 25$
r, P. E. का 20 गुना है।	r, P. E. का 25 गुना है।

अतः दूसरी स्थिति में r अधिक अर्थपूर्ण है।

उदाहरण (Illustration) 8 :

एक प्रतिदर्श अध्ययन के आधार पर 100 पिताओं और उनके पुत्रों की लम्बाई के बीच सह-सम्बन्ध +·85 ज्ञात हुआ। लम्बाई का वंटन प्रसामान्य मानकर समग्र के सह-सम्बन्ध गुणांक की सम्भाव्य सीमाएँ निर्धारित कीजिए।

हल (Solution) :

प्रसामान्य वंटन की स्थिति में समग्र के सह-सम्बन्ध-गुणांक की सीमाएँ निम्नांकित होंगी—

$$r + 3\ S.E._r \quad \text{तथा} \quad r - 3\ S.E._r$$

$$S.E. \text{ of } r = \frac{1-r^2}{\sqrt{N}} = \frac{1-(\cdot 85)^2}{\sqrt{100}} = \cdot 02775$$

सीमाएँ—

$$\cdot 85 + 3 \times \cdot 02775 = \cdot 85 + \cdot 08325 = \cdot 93325$$

$$\cdot 85 - 3 \times \cdot 02775 = \cdot 85 - \cdot 08325 = \cdot 76675$$

अतः समग्र से सम्बद्ध सह-सम्बन्ध गुणांक ·76675 और ·93325 के बीच होगा।

काल-श्रेणियों में सह-सम्बन्ध
(Correlation in Time Series)

काल-श्रेणियों में सह-सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए भी कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक का प्रयोग किया जाता है। काल-श्रेणियों पर दो प्रकार के परिवर्तनों का प्रभाव पड़ता है—दीर्घकालीन परिवर्तन (Long-time changes) तथा अल्पकालीन परिवर्तन (Short-time Oscillations)। यह सम्भव है कि काल श्रेणी के दीर्घकालीन परिवर्तनों में तो अधिक मात्रा का धनात्मक सह-सम्बन्ध हो परन्तु अल्पकालीन उच्चावचनों में सह-सम्बन्ध या तो बिल्कुल न हो या ऋणात्मक हो। अतः सह-सम्बन्ध निकालने से पहले काल-श्रेणी का विधिवत् विश्लेषण करना आवश्यक है। विश्लेषण की विधियों का विस्तृत वर्णन 'काल-श्रेणी का विश्लेषण' (Analysis of Time Series) वाले अध्याय में किया जाएगा। यहाँ यह ध्यान रखना चाहिए कि दीर्घकालीन परिवर्तनों या उपनति (trend) ज्ञात करने के लिए अधिकतर चल माध्यों (moving averages) का प्रयोग किया जाता है। गतिमान माध्य या चल माध्य निकालने की रीति 'सांख्यिकीय माध्य' वाले अध्याय में स्पष्ट की गई है।

दीर्घकालीन परिवर्तनों में सह सम्बन्ध (Correlation for Long-time Changes)—काल-श्रेणी की दीर्घकालीन प्रवृत्ति में सह-सम्बन्ध निकालने के लिए निम्नलिखित क्रिया अपनायी जाती है—

(i) दोनों श्रेणियों के दिए हुए मूल्यों के तीन-वर्षीय या पंचवर्षीय चल माध्य (moving averages) निकाले जाते है। ये चल-माध्य ही दीर्घकालीन उपनति को व्यक्त करने वाले प्रवृत्ति-मूल्य (trend-values) होते हैं।

(ii) प्रथम श्रेणी के चल माध्यों को X और दूसरी श्रेणी के चल माध्यों को Y मानकर प्रत्यक्ष या लघु रीति द्वारा कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कर लिया जाता है। यही दीर्घकालीन प्रवृत्ति का सह-सम्बन्ध गुणांक है।

इस प्रकार दीर्घकालीन परिवर्तनों मे सह-सम्बन्ध निकालने के लिए मौलिक पद-मूल्यों के स्थान पर उनके चल-माध्यों का प्रयोग किया जाता है। शेष क्रिया कार्ल पियर्सन की व्यक्तिगत श्रेणी वाली रीति के अनुसार ही होती है।

अल्पकालीन उच्चावचनों में सह-सम्बन्ध (Correlation for Short-time Fluctuation)—अल्पकालीन परिवर्तनों में सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की निम्न रीति है—

(i) X और Y-श्रेणियों में दिए हुए मूल्यों के चल-माध्य निकाले जाते हैं।

(ii) प्रत्येक मूल्य में से तत्सम्बन्धी चल-माध्य घटाकर दोनों श्रेणियों के अलग-अलग अल्पकालीन विचलन (Short-time deviations) ज्ञात किए जाते है।

विचलन = मूल-समंक — चल-माध्य

(iii) प्रथम श्रेणी के अल्पकालीन विचलनों (dx) को द्वितीय श्रेणी के अल्पकालीन विचलनों (dy) से गुणा करके उन गुणनफलों का जोड़ प्राप्त कर लिया जाता है ($\Sigma dxdy$)।

(iv) अल्पकालीन विचलनों के वर्ग (square) करके उन वर्गों के अलग-अलग जोड़ निकाले जाते हैं (Σd^2x तथा Σd^2y)।

(v) अन्त में निम्न सूत्र द्वारा अल्पकालीन परिवर्तनों का सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कर लिया जाता है—

$$r = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma d^2x \times \Sigma d^2y}}$$

$\Sigma dxdy$ संकेत X व Y के अल्पकालीन विचलनों की गुणाओं के योग के लिए प्रयुक्त हुआ है।

Σd^2x व Σd^2y क्रमशः X व Y के अल्पकालीन विचलन-वर्गों के जोड़ हैं।

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि अल्पकालीन परिवर्तनों में सह-सम्बन्ध गुणाक की प्रत्यक्ष रीति का सूत्र (तृतीय सूत्र) ही प्रयुक्त होता है किन्तु विचलन समान्तर माध्य से न लेकर, सम्बन्धित चल-माध्यों से लिए जाते हैं।

उदाहरण (Illustration) 9 :

निम्न आँकड़ों से अल्पकालिक उच्चावचनों (short-time oscillations) का सह-सम्बन्ध गुणाक निकालिए—

वर्ष :	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
पूर्ति-सूचकांक :	90	95	94	96	101	100	99	107	103	108
मूल्य-सूचकांक :	115	110	111	100	98	102	106	98	102	97

त्रिवर्षीय चक्र मानिए और दशमलव बिन्दु छोड़ दीजिए।

हल (Solution) :

अल्पकालिक उच्चावचनों में सह-सम्बन्ध-गुणांक का परिकलन

वर्ष	पूर्ति (X)				मूल्य (Y)				अल्पकालिक विचलनों की गुणा
	सूचकांक	चल माध्य	अल्पकालिक विचलन	विचलन वर्ग	सूचकांक	चल माध्य	अल्पकालिक विचलन	विचलन वर्ग	
	X		dx	d^2x	Y		dy	d^2y	$dxdy$
1964	90				115				
1965	95	93	+2	4	110	112	−2	4	−4
1966	94	95	−1	1	111	107	+4	16	−4
1967	96	97	−1	1	100	103	−3	9	+3
1968	101	99	+2	4	98	100	−2	4	−4
1969	100	100	0	0	102	102	0	0	0
1970	99	102	−3	9	106	102	+4	16	−12
1971	107	103	+4	16	98	102	−4	16	−16
1972	103	106	−3	9	102	99	+3	9	−9
1973	108				97				
योग				44				74	+3−49 =−46
				Σd^2x				Σd^2y	$\Sigma dxdy$

$$r=\frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma d^2x\times\Sigma d^2y}}=\frac{-46}{\sqrt{44\times 74}}=\frac{-46}{57};\ r=-\cdot 807$$

अतः पूर्ति और मूल्य के अल्पकालीन उच्चावचनों में अधिक मात्रा का ऋणात्मक सह-सम्बन्ध है।

यदि पूर्ति और मूल्य के दीर्घकालीन परिवर्तनों में भी सह-सम्बन्ध ज्ञात करना हो तो दोनों श्रेणियों के गतिमान-माध्यों को क्रमशः X और Y मानकर लघु रीति द्वारा कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक निकाल लिया जाएगा। यहाँ पर दीर्घकालीन प्रवृत्ति में $r=-\cdot 844$ जो अल्पकालीन परिवर्तनों के गुणाक से भिन्न है।

चक्रीय उच्चावचनों में सह-सम्बन्ध (Correlation for Cyclical Fluctuations)— अल्पकालीन परिवर्तनों को तीन श्रेणियों में बाँटा जा सकता है—*ऋतुकालीन या मौसमी परिवर्तन,* चक्रीय उच्चावचन तथा अनियमित उच्चावचन। चक्रीय उच्चावचन ऐसे परिवर्तन होते हैं जिनके फलस्वरूप काल-श्रेणी के समंक पहले उच्च शिखर पर पहुँचते हैं, फिर नियमित रूप से घटते हुए

निम्न स्तर पर पहुँच जाते है। इस प्रकार निश्चित अवधि (जैसे सात, नौ या ग्यारह वर्ष) मे इन परिवर्तनों का चक्र पूरा हो जाता है तथा फिर लगभग उसी क्रम की पुनरावृत्ति होती रहती है। यदि दो काल-श्रेणियों के चक्रीय उच्चावचनों में सह-सम्बन्ध का अध्ययन करना हो तो निम्न प्रक्रिया प्रयोग की जाती है—

(1) सर्वप्रथम, दोनों श्रेणियों के 'प्रतिशत चक्र' (Cycle Percents) निकाले जाते हैं। प्रतिशत चक्र ज्ञात करने की विधि इस प्रकार है—

(i) श्रेणी के चल-माध्य निकाले जायेंगे,

(ii) मौलिक पद-मूल्य को तत्सम्बन्धी चल-माध्य से भाग देकर 100 से गुणा किया जाएगा जिससे प्रवृत्ति की प्रतिशत ज्ञात हो जाये—

$$\left[\frac{\text{मौलिक पद-मूल्य}}{\text{चल-माध्य}} \times 100\right]$$

(iii) प्रतिशत रूप मे मौसमी परिवर्तन निकाले जायेंगे।

(iv) 'प्रवृत्ति की प्रतिशतों' मे से 'मौसमी परिवर्तनों की प्रतिशतें' घटाकर अन्तर को 100 से गुणा किया जायेगा जिससे चक्रीय उच्चावचन प्राप्त हो जायें।

$$[\text{प्रवृत्ति की प्रतिशत} - \text{मौसमी परिवर्तनों की प्रतिशत}] \times 100$$

(v) अन्त में, चक्रीय उच्चावचनों को, श्रेणी के प्रमाप विचलन से भाग देकर 'प्रतिशत-चक्र' निकाल लिए जाते हैं। इन्हे प्रमाप विचलन चक्र (standard deviation cycle) भी कहते हैं।

$$\text{प्रतिशत-चक्र} = \frac{\text{चक्रीय उच्चावचन}}{\text{प्रमाप विचलन}}$$

(2) दोनो श्रेणियों के प्रतिशत-चक्रों की आपस मे गुणा करके गुणनफलों का जोड़ (Σxy) निकाला जाता है।

(3) अन्त में, निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$r = \frac{\Sigma xy}{N}$$

r संकेताक्षर चक्रीय परिवर्तनों के सह-सम्बन्ध गुणाक के लिए प्रयुक्त हुआ है।

Σxy दोनों श्रेणियों के प्रतिशत चक्रों की गुणाओं का जोड़ है।

स्मरण रहे कि इस सूत्र मे Σxy दोनों श्रेणियों के चक्रीय उच्चावचनों को उनके प्रमाप विचलनों से भाग देकर ही ज्ञात किया गया है।

उदाहरण (Illustration) 10 :

A और B श्रेणी के प्रमाप विचलन चक्र अग्रांकित हैं। चक्रीय उच्चावचनों के लिए सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

चक्रीय उच्चावचनों में सह-सम्बन्ध गुणांक का परिगणन

वर्ष	प्रमाप विचलन चक्र (*A*) *x*	प्रमाप विचलन चक्र (*B*) *y*	प्रमाप विचलन चक्रों की गुणा *xy*
1964	+1·4	+2·1	+2·94
1965	+2·0	−1·8	−3·60
1966	−0·5	−0·1	+0·05
1967	−1·2	+0·8	−0·96
1968	−2·1	−0·9	+1·89
1969	+1·2	+1·5	+1·80
1970	−0·6	−0·5	+0·30
1971	+0·8	+1·6	+1·28
1972	−0·4	−2·4	+0·96
1973	+0·9	−1·1	−0·99
N=10			+9·22−5·55
			Σ*xy*=3·67

$$r=\frac{\Sigma xy}{N}=\frac{3{\cdot}67}{10}={\cdot}367$$

स्पियरमैन की कोटि-अन्तर रीति
(Spearman's Rank Differences Method)

चार्ल्स स्पियरमैन ने व्यक्तिगत समंकमालाओं में सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की एक सरल रीति का प्रतिपादन किया है। इस रीति को स्पियरमैन की कोटि-अन्तर या क्रमान्तर रीति (Spearman's Rank Differences Method) अथवा अनुस्थिति रीति (Ranking Method) कहते हैं।

यह रीति ऐसी परिस्थितियों के लिए उपयुक्त है जहाँ तथ्यों का प्रत्यक्ष संख्यात्मक माप सम्भव न हो तथा उन्हें केवल एक निश्चित कोटि-क्रम (rank) के अनुसार रखा जा सके। उदाहरणार्थ, बुद्धिमत्ता, सुन्दरता, स्वास्थ्य आदि गुणात्मक तथ्यों को प्रत्यक्ष रूप में अंकों में नहीं मापा जा सकता परन्तु विभिन्न इकाइयों को गुण की अधिकता के आधार पर पहला, दूसरा, तीसरा इत्यादि क्रम प्रदान किया जा सकता है। इन क्रमों के आधार पर ही क्रमान्तर या कोटि-अन्तर विधि द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक निकाला जाता है। यदि समंकमाला के पद-मूल्य ज्ञात न हों, केवल उनका क्रम मालूम हो तो भी क्रमान्तर सह-सम्बन्ध गुणांक निकाला जा सकता है।

विधि—स्पियरमैन का कोटि-अन्तर सह-सम्बन्ध गुणांक निकालने की निम्नलिखित विधि है—

(i) *X* तथा *Y* के पद-मूल्यों का अलग-अलग कोटि-क्रम (rank) प्रदान किए जाते हैं। सबसे अधिक आकार वाले मूल्य को 1, उससे कम आकार वाले को 2 और इसी प्रकार क्रम निश्चित किए जाते हैं।

समान मूल्य – यदि किसी श्रेणी में दो या अधिक पद-मूल्य बराबर आकार के हों तो उनके अलग-अलग क्रमों की औसत (Average Rank or Mid-Rank) ही उन मूल्यों के क्रम के स्थान पर लिख दी जाती है। उदाहरणार्थ *X*-श्रेणी में सबसे अधिक मूल्य यदि 60 हो तो उसका क्रम 1 होगा, इसके बाद यदि 55 उस श्रेणी में तीन बार आया हो तो तीनों स्थानों

$\frac{2+3+4}{3}$ अर्थात् 3 क्रम लिख दिया जाएगा तथा इसके बाद वाले मूल्य का क्रम 5 होगा।

(ii) X के क्रमों में से Y के तत्सम्बन्धी क्रम घटाकर कोटि-अन्तर (Rank Differences) निकाले जायेंगे—

$$(D = \text{कोटि-क्रम } X - \text{कोटि-क्रम } Y)$$

क्रमान्तरों का बीजगणितीय जोड़ सदैव शून्य होगा ($\Sigma D=0$)।

(iii) क्रमान्तरों के वर्ग करके उन वर्गों का जोड़ निकाला जाएगा (ΣD^2)।

(iv) अन्त में, निम्न सूत्र द्वारा कोटि-सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जाएगा—

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

ρ ग्रीक संकेताक्षर *rho* कोटि-सह-सम्बन्ध गुणांक के लिए प्रयुक्त हुआ है।

ΣD^2 संकेत क्रमान्तरों के वर्गों का जोड़ है।

N पद-युग्मों की संख्या है।

उदाहरण (Illustration) 11 :

निम्न समकों से क्रमान्तर रीति (Rank Differences Method) द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक निकालिए—

X-श्रेणी :	85	91	56	72	95	76	89	51	59	90
Y-श्रेणी :	18·3	20·8	16·9	15·7	19·2	18·1	17·5	14·9	18·9	15·4

हल (Solution) :

कोटि-सह-सम्बन्ध गुणांक का परिकलन

X-श्रेणी		Y-श्रेणी		कोटि अन्तर D	कोटि अन्तरों के वर्ग D^2
X	कोटि X	Y	कोटि Y		
85	5	18·3	4	+1	1
91	2	20·8	1	+1	1
56	9	16·9	7	+2	4
72	7	15·7	8	−1	1
95	1	19·2	2	−1	1
76	6	18·1	5	+1	1
89	4	17·5	6	−2	4
51	10	14·9	10	0	0
59	8	18·9	3	+5	25
90	3	15·4	9	−6	36
$N=10$				$\Sigma D=0$	$\Sigma D^2=74$

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 74}{10(10^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{444}{990} = \frac{990-444}{990} = \frac{546}{990} = +\cdot55$$

अतः X और Y में मध्यम मात्रा का धनात्मक कोटि-सह-सम्बन्ध (moderate degree of positive rank correlation) है।

समान क्रम के लिए संशोधन (Correction for Tied Ranks)—जब दो या दो से अधिक मूल्य बराबर आकार के होते हैं तो उन्हें बराबर क्रम प्रदान किए जाते है। ऐसी स्थिति में कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक निकालने के लिए सूत्र में संशोधन करना पड़ेगा। संशोधित सूत्र निम्न प्रकार होगा—

$$\rho = 1 - \frac{6\,[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m)]}{N(N^2 - 1)}$$

m उन पद-मूल्यों की संख्या है जिनके कोटि-क्रम समान है।

उदाहरण (Illustration) 12 :

निम्न समंकों से कोटि-सह-सम्वन्ध गुणांक निकालिए।

श्रेणी A :	115	109	112	87	98	98	120	100	98	118
श्रेणी B :	75	73	85	70	76	65	82	73	68	80

हल (Solution) :

कोटि-सह-सम्बन्ध-गुणांक का परिगणन

श्रेणी-A		श्रेणी-B		कोटि अन्तर	कोटि अन्तरों के वर्ग
X	कोटि X	Y	कोटि Y	D	D^2
115	3	75	5	−2	4
109	5	73	6·5	−1·5	2·25
112	4	85	1	+3	9
87	10	70	8	+2	4
98	8	76	4	+4	16
98	8	65	10	−2	4
120	1	82	2	−1	1
100	6	73	6·5	−0·5	0 25
98	8	68	9	−1	1
118	2	80	3	−1	1
$N=10$				$\Sigma D=0$	$\Sigma D^2=42\ 50$

Series A मे 98 तीन बार आया है तथा तीन समान क्रमों के लिए सूत्र में $\frac{1}{12}(3^3-3)$ ΣD^2 में जोड़ना होगा। इसी प्रकार Series B मे 73 दो बार आया है अत. दोनो समान क्रमो के लिए $\frac{1}{12}(2^3-2)$ के बराबर सख्या ΣD^2 मे जोडनी पड़ेगी। सूत्रानुसार—

$$\rho = 1 - \frac{6\,[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}(m^3-m)]}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6\,[42{\cdot}5 + \frac{1}{12}(3^3-3) + \frac{1}{12}(2^3-2)]}{10\,(10^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6\,[42{\cdot}5 + 2 + {\cdot}5]}{990} = 1 - \frac{6\times45}{990} = 1 - \frac{270}{990} = \frac{990-270}{990} = \frac{720}{990} = +{\cdot}73$$

X और Y में सामान्य रूप से अधिक मात्रा का धनात्मक कोटि-सह-सम्बन्ध (moderately high degree of positive rank correlation) है।

उदाहरण (Illustration) 13 :

एक सौन्दर्य-प्रतियोगिता (beauty contest) मे 10 प्रतियोगियो (competitors) को तीन निर्णायकों (judges) ने इस प्रकार कोटि-स्थान (rank) दिए—

प्रथम निर्णायक :	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
द्वितीय निर्णायक :	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
तृतीय निर्णायक :	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

क्रमान्तर सह-सम्बन्ध गुणांक (rank correlation coefficient) का प्रयोग करके बताइए कि किस निर्णायक-युग्म (pair of judges) की सुन्दरता के प्रति सामान्य रुचि (common taste) है।

[B. Com., T. D. C. II, Raj, 1973, 69, Punjab, 1970, M. A., Alld., 1967, 62, Lucknow, 1964, Delhi, 1957]

हल (Solution) :

तीन निर्णायकों के आधार पर तीन निर्णायक-युग्म बनते हैं—(i) I और II, (ii) II और III, (iii) I और III. इन युग्मों में अलग-अलग स्पियरमैन का कोटि-अन्तर सह-सम्बन्ध गुणांक निम्न प्रकार ज्ञात किया जाएगा—

कोटि-अन्तर सह-सम्बन्ध गुणांक का परिकलन

प्रदत्त क्रम-स्थान			कोटि-अन्तरों के वर्ग (D^2)		
प्रथम निर्णायक R_1	द्वितीय निर्णायक R_2	तृतीय निर्णायक R_3	I और II $(R_1-R_2)^2$	II और III $(R_2-R_3)^2$	I और III $(R_1-R_3)^2$
1	3	6	4	9	25
6	5	4	1	1	4
5	8	9	9	1	16
10	4	8	36	16	4
3	7	1	16	36	4
2	10	2	64	64	0
4	2	3	4	1	1
9	1	10	64	81	1
7	6	5	1	1	4
8	9	7	1	4	1
$N=10$			200 ΣD^2	214 ΣD^2	60 ΣD^2

$$\rho=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

(i) प्रथम एवं द्वितीय (I और II)—

$$\rho=1-\frac{6\times 200}{10\,(100-1)}=1-\frac{1200}{990}=-\frac{210}{990}=-0{\cdot}212$$

(ii) द्वितीय एवं तृतीय (II और III)—

$$\rho=1-\frac{6\times 214}{990}=1-\frac{1284}{990}=-\frac{294}{990}=-0{\cdot}297.$$

(iii) प्रथम एवं तृतीय (I और III)—

$$\rho=1-\frac{6\times 60}{990}=1-\frac{360}{990}=\frac{630}{990}=+0{\cdot}636$$

अतः प्रथम एवं तृतीय निर्णायकों के निर्णय में सौन्दर्य के प्रति सर्वाधिक सामान्य रुचि है क्योंकि इनके द्वारा प्रदत्त क्रम-स्थानों में धनात्मक सह-सम्बन्ध है।

विशेषताएँ—स्पियरमैन की क्रमान्तर रीति व्यक्तिगत समंकमालाओं में सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की सरल रीति है तथा केवल मूल्यों का कोटि-क्रम ज्ञात होने पर ही इस रीति द्वारा सह-

सम्बन्ध निकाला जा सकता है। गुणात्मक तथ्यों और अनियमित श्रेणियों में भी इस रीति का प्रयोग उपयुक्त होता है। इस रीति द्वारा निकाला गया गुणाक कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक के लगभग बराबर होता है क्योंकि स्पियरमैन के सूत्र का आधार कार्ल पियर्सन का मूल-सूत्र ही है। इतना होते हुए भी क्रमान्तर रीति दोषपूर्ण है। इसमें पद-मूल्यों के निरपेक्ष मान का उतना महत्त्व नहीं है जितना उनके सापेक्ष या तुलनात्मक मानों का है। उदाहरण 11 (*Illustration 11*) में यदि *X*-Series में 95 के स्थान पर 295 हो या 51 के स्थान पर 1 हो, तो क्रमान्तर सह-सम्बन्ध गुणांक पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा क्योंकि इन मूल्यों के कोटि-क्रम पूर्ववत् रहेंगे। कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना में प्रत्येक श्रेणी के व्यक्तिगत मूल्यों के निरपेक्ष मान का भी पूरा-पूरा प्रभाव पड़ता है। इसके अतिरिक्त समान क्रम (tied ranks) होने पर गणन-क्रिया कुछ कठिन हो जाती है। अतः इस रीति का प्रयोग सीमित क्षेत्र में ही किया जाता है।

संगामी विचलन रीति
(Concurrent Deviations Method)

कभी-कभी हमें केवल यह ज्ञात करना होता है कि दो समंकमालाओं में सह-सम्बन्ध किस दिशा में है—धनात्मक है या ऋणात्मक। यह सूचना प्राप्त करने के लिए संगामी विचलन रीति (concurrent deviations method) का प्रयोग किया जाता है। यह रीति बिन्दुरेखीय विधि पर आधारित है। बिन्दुरेखीय रीति के अनुसार जब दो सम्बद्ध मालाओं के वक्र एक ही दिशा में साथ-साथ गमन करते है या संगामी हैं तो उनमें धनात्मक सह-सम्बन्ध होता है। यदि वे विपरीत दिशा मे गमन करते है या प्रतिगामी है तो उनमें ऋणात्मक सह-सम्बन्ध पाया जाता है। इसी प्रकार संगामी विचलन रीति के अनुसार भी यदि *X* और *Y* के विचलन अधिकतर संगामी (concurrent) होते हैं तो उनमे धनात्मक सह-सम्बन्ध होता है और यदि वे प्रतिगामी (divergent) होते है तो ऋणात्मक सम्बन्ध होता है।

संगामी विचलन रीति सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की सबसे सरल रीति है। इस रीति में प्रत्येक मूल्य की उससे पिछले मूल्य से तुलना की जाती है अतः इसमें अल्पकालीन उच्चावचनों (short-time oscillations) में सह-सम्बन्ध ज्ञात हो जाता है। परन्तु विचलनों की दिशा (+ या —) को ही ध्यान में रखा जाता है; उनकी आकृति (size) की गणना नहीं की जाती। इसीलिए इस रीति द्वारा केवल यह पता चल जाता है कि सह-सम्बन्ध किस दिशा का है, उसकी मात्रा का ठीक-ठीक आभास नहीं होता।

विधि—इस रीति द्वारा सह-सम्बन्ध निकालने की निम्न प्रक्रिया है—

(i) *X* और *Y* श्रेणी में अलग-अलग प्रत्येक मूल्य की तुलना उसमे पिछले मूल्य से की जाएगी। यदि मूल्य पिछले मूल्य से अधिक है तो उसका विचलन (+) होगा, यदि कम है तो (—) और यदि समान है तो (=); यह ध्यान रखना चाहिए कि विचलन का केवल चिह्न ही लिखा जाएगा उसकी मात्रा नहीं। विचलन-युग्मों की संख्या कुल पद-युग्मो की संख्या से एक कम होगी।

(ii) *X* और *Y* के सतम्बन्धी विचलन-चिह्नों की गुणा करके धनात्मक गुणनफलों को गिन लिया जाएगा। यह संगामी विचलनो की संख्या (Number of Concurrent Deviations or *c*) है।

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगा—

$$r_c = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

r_c संगामी विचलन गुणांक के लिए प्रयुक्त हुआ है।
c संगामी विचलनों की संख्या है।
n विचलन-युग्मों की संख्या है जो पद-युग्मो की संख्या से 1 कम है।

सूत्र में $\pm$ का प्रयोग—सूत्र में वर्गमूल चिह्न से पहले और उसके अन्दर दोनों स्थानों पर या तो + का चिह्न प्रयोग किया जाएगा या दोनों स्थानों पर — का चिह्न लिखा जाएगा। यदि $(2c-n)$ धनात्मक है तो दोनों स्थानों पर + का चिह्न प्रयुक्त होगा। $2c-n$ के ऋणात्मक होने पर दोनों स्थानों में (—) चिह्न का प्रयोग ही अनिवार्य हो जाता है। यदि ऐसा न किया जाये तो वर्गमूल चिह्न के अन्दर की राशि ऋणात्मक ही रहे और उसका वर्गमूल निकालना असम्भव हो।

उदाहरण (Illustration) 14 :

निम्न समकों से संगामी विचलन रीति द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए।

माह :	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जौलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
X-श्रेणी :	89	85	98	102	100	105	96	68	85	98	76	75
Y-श्रेणी :	32	33	35	37	39	41	40	38	42	40	36	35

हल (Solution) :

संगामी विचलन गुणांक की गणना

माह	*X*-श्रेणी		*Y*-श्रेणी		विचलनों का गुणनफल	
	X	विचलन चिह्न	*Y*	विचलन चिह्न	+	−
जनवरी	89		32			
फरवरी	85	−	33	+		−
मार्च	98	+	35	+	+	
अप्रैल	102	+	37	+	+	
मई	100	−	39	+		−
जून	105	+	41	+	+	
जौलाई	96	−	40	−	+	
अगस्त	68	−	38	−	+	
सितम्बर	85	+	42	+	+	
अक्टूबर	98	+	40	−		−
नवम्बर	76	−	36	−	+	
दिसम्बर	75	−	35	−	+	
		$n=11$			$c=8$	

$$r_c = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

$$r_c = +\sqrt{\left(\frac{2\times 8-11}{11}\right)} = \sqrt{\frac{5}{11}} = \sqrt{\cdot 4545} = +\cdot 67$$

अतः *X* और *Y* में मध्यम मात्रा का धनात्मक सह-सम्बन्ध (moderate degree of positive correlation) है।

उदाहरण (Illustration) 15 :

पूर्ति और मूल्य में संगामी विचलन विधि द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

वर्ष :	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
पूर्ति-सूचकांक :	112	125	126	118	118	121	125	125	131	135
मूल्य-सूचकांक :	106	102	102	104	98	96	97	97	95	90

हल (Solution) :

संगामी विचलन गुणांक की गणना

वर्ष	पूर्ति		मूल्य		विचलनों की गुणा	
	सूचकांक X	विचलन चिन्ह	सूचकांक Y	विचलन चिन्ह	+	−
1964	112		106			
1965	125	+	102	−		−
1966	126	+	102	=		
1967	118	−	104	+		−
1968	118	=	98	−		
1969	121	+	96	−		−
1970	125	+	97	+	+	
1971	125	=	97	=	+	
1972	131	+	95	−		−
1973	135	+	90	−		−
		$n=9$			$c=2$	

यहाँ $(2c-n)$ ऋणात्मक है इसलिए सूत्र में (—) चिह्नों का प्रयोग होगा ।

$$r_c=-\sqrt{-\left(\frac{2c-n}{n}\right)}=-\sqrt{-\left(\frac{2\times2-9}{9}\right)}$$

$$=-\sqrt{-\left(\frac{-5}{9}\right)}=-\sqrt{+\cdot5556}=-\cdot75$$

अतः पूर्ति एवं मूल्य में अधिक मात्रा का ऋणात्मक सह-सम्बन्ध (high degree of negative correlation) है ।

गुण-दोष—संगामी विचलन रीति सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की सरलतम रीति है और अल्पकालीन उच्चावचनों के सम्बन्ध का अध्ययन करने के लिए उपयुक्त है । इससे सह-सम्बन्ध की दिशा का ही पता चलता है, उसकी मात्रा का अध्ययन नही होता । दीर्घकालीन प्रवृत्ति मे सम्बन्ध निकालने के लिए यह रीति सर्वथा अनुपयुक्त है । इन दोषो के कारण इस रीति का अधिक प्रयोग नही किया जाता ।

अन्य रीतियाँ (Other Methods)—सह सम्बन्ध निकालने की बीजगणितीय रीतियों मे कार्ल पियर्सन की रीति सर्वोत्तम तथा अत्यन्त लोकप्रिय है । परन्तु सह-सम्बन्ध का विश्लेषण अन्य रीतियों द्वारा भी किया जा सकता है जिनमे न्यूनतम-वर्ग रीति विशेष रूप से उल्लेखनीय है । इसके परिणाम कार्ल पियर्सन की रीति के समान ही होते हैं ।

न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सह-सम्बन्ध
(Correlation by the Method of Least Squares)

यह रीति न्यूनतम वर्ग-विधि के अनुसार खींची गई सर्वोत्तम रेखा (Line of the Best Fit) पर आधारित है । इस रेखा से निकाले गए विभिन्न मूल्यो के वर्गों का जोड़ न्यूनतम होता है । इस रीति द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक निकालने की निम्नलिखित क्रिया है—

(i) सर्वप्रथम प्रसामान्य समीकरणो (Normal Equations) द्वारा Y के सर्वोपयुक्त सगणित मूल्य (computed values of Y or Y_c) निकाले जाते हैं । इन मूल्यों का मान अग्र प्रकार होगा—

(क) निम्न दो प्रसामान्य समीकरणों* द्वारा 'a' और 'b' दो अचर मूल्यों (constants) का मान निकाला जाएगा—

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

(ख) 'a' और 'b' के मूल्यों को सरल रेखा के समीकरण ($Y = a + bX$) में आदिष्ट (substitute) करके Y के सर्वोपयुक्त मूल्य संगणित कर लिए जायेंगे।

(ii) Y के वास्तविक मूल्यों में से तत्सम्बन्धी संगणित मूल्य घटाकर विचलन प्राप्त किये जायेंगे।

$$d = (Y - Y_c)$$

(iii) विचलनो के वर्गों का जोड़ $\Sigma\,(Y - Y_c)^2$ ज्ञात किया जाएगा।

(iv) निम्न सूत्र द्वारा उक्त विचलन-वर्गों का माध्य निकाल लिया जाएगा—

$$S_y^2 = \frac{\Sigma\,(Y - Y_c)^2}{N}$$

S_y^2 सर्वोपयुक्त रेखा का प्रसरण है जिसे 'अस्पष्टीकृत प्रसरण' (unexplained variance) कहते हैं। यह माप हमें बताता है कि किस अंश में Y में होने वाले परिवर्तन X के परिवर्तनों से प्रभावित नही होते। इस माप का वर्गमूल (S_y) अनुमान का प्रमाप विभ्रम (standard error of the estimate) कहलाता है।

(v) Y-श्रेणी का प्रसरण निकाला जाएगा। यह प्रमाप विचलन का वर्ग (σ_y^2) होता है। इसे कुल प्रसरण (total variance) भी कहते हैं।

सूत्रानुसार—　　$\sigma_y^2 = \dfrac{\Sigma\,(Y - \bar{Y})^2}{N}$ या $\dfrac{\Sigma d^2 y}{N}$

(vi) अन्त मे, निम्न सूत्र द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक निकाल लिया जाता है—

$$r = \sqrt{1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}} \text{ या } \sqrt{1 - \frac{\text{अस्पष्टीकृत प्रसरण}}{\text{कुल प्रसरण}}}$$

(vii) इस रीति द्वारा ज्ञात गुणांक का बीजगणितीय चिह्न (+ या —) अचर-मूल्य b के चिह्न के अनुरूप ही होता है। यदि b — में है तो r ऋणात्मक होगा।

उदाहरण (Illustration) 16 :

निम्न सामग्री से न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—

X	1	2	3	4	5
Y	82	91	70	[illegible]	163

* न्यूनतम वर्ग-कसौटी के अनुसार $(y - a - bx)^2 = $ Minimum. इस समीकरण को क्रमानुसार a व b के सन्दर्भ मे अवकलित करने पर निम्न दो समीकरण उपलब्ध होते हैं—

$$-2\Sigma\,(y - a - bx) = 0$$
या　$\Sigma\,(y - a - bx) = 0$　या　$\Sigma y = na + b\Sigma x$　...(i)
$$-2\Sigma x\,(y - a - bx) = 0$$
या　$\Sigma x\,(y - a - bx) = 0$　या　$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$　...(ii)

ये दोनों प्रसामान्य समीकरण कहलाते हैं जिनकी सहायता से अचर-मूल्य a व b का मान ज्ञात किया जाता है।

हल (Solution) :

न्यूनतम-वर्ग द्वारा Y-संगणित मूल्यों की गणना

मूल्य	मूल्य	X व Y की गुणा	X के वर्ग	संगणित मूल्य	
X	Y	XY	X^2	$a+bX$ =	Y_c
1	82	82	1	$49+17\times1=$	66
2	91	182	4	$49+17\times2=$	83
3	70	210	9	$49+17\times3=$	100
4	89	356	16	$49+17\times4=$	117
5	168	840	25	$49+17\times5=$	134
$\Sigma X=15$	$\Sigma Y=500$	$\Sigma XY=1670$	$\Sigma X^2=55$		500

प्रसामान्य समीकरण—

$\Sigma Y=Na+b\Sigma X$ या $500=5a+15b$ ...(i)

$\Sigma XY=a\Sigma X+b\Sigma X^2$ या $1670=15a+55b$ ...(ii)

समीकरण (i) को 3 से भाग देने तथा उसे समीकरण (ii) में से घटाने पर निम्न परिणाम निकलता है—

$1670=15a+55b$
$1500=15a+45b$
$170=10b$
$\therefore\ b=17$

$500=5a+15\times17$
$500-255=5a$
$5a=245$
$\therefore\ a=49$

S_y^2 एवं σ_y^2 का परिकलन

X	मूल-समंक Y	संगणित मूल्य Y_c	Y व Y_c का अन्तर $(Y-Y_c)$	अन्तर-वर्ग $(Y-Y_c)^2$	$\bar{Y}=100$ से Y का विचलन d $(Y-\bar{Y})$	विचलन-वर्ग d^2 $(Y-\bar{Y})^2$
1	82	66	+16	256	−18	324
2	91	83	+8	64	−9	81
3	70	100	−30	900	−30	900
4	89	117	−28	784	−11	121
5	168	134	+34	1156	+68	4624
योग	500	500		3160		6050
				$\Sigma(Y-Y_c)^2$		Σd^2

$$S_y^2=\frac{\Sigma(Y-Y_c)^2}{N} \quad \text{या} \quad \frac{3160}{5}=632$$

$$\sigma_y^2=\frac{\Sigma d^2}{N} \quad \text{या} \quad \frac{6050}{5}=1210$$

$$r=\sqrt{1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}} \quad \text{या} \quad \sqrt{1-\frac{632}{1210}} \quad \text{या} \quad \sqrt{\frac{578}{1210}}$$

$$\therefore\ r=\sqrt{\cdot 477} \quad \text{या} \quad +\cdot 69$$

अतः X और Y में मध्यम मात्रा का धनात्मक सह-सम्बन्ध है। यहाँ पर कार्ल पियर्सन सह-सम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's r) भी $+ \cdot 69$ है।

लघु रीति (Short-Cut Method)—प्रसामान्य समीकरणों की सहायता से a व b के मूल्य ज्ञात करने के बाद न्यूनतम वर्ग पद्धति के निम्न सूत्र द्वारा भी r निकाला जा सकता है—

$$r=\sqrt{\frac{a\Sigma Y+b\Sigma XY-NcY^2}{\Sigma Y^2-NcY^2}}$$

cY Y के समान्तर माध्य एवं कल्पित मूल-बिन्दु का अन्तर है।

ΣY^2 Y-मूल्यों के वर्गों का जोड़ है।

पिछले उदाहरण में $cY=100$ क्योंकि कोई कल्पित माध्य नहीं लिया गया है—

$$cY=\bar{Y}-0=100$$

$$a=49,\ b=17,\ \Sigma Y=500,\ \Sigma XY=1670,\ \Sigma Y^2=56050$$

$$\therefore\quad r=\sqrt{\frac{(49\times 500)+(17\times 1670)-(5\times 100\times 100)}{56050-(5\times 100\times 100)}}$$

$$=\sqrt{\frac{24500+28390-50000}{56050-50000}}=\sqrt{\frac{289}{605}}=+\cdot 69$$

लघु रीति द्वारा r निकालने से Y_e अर्थात् y के संगणित मूल्य, S_y^2 और σ_y^2 ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं होती।

निश्चयन-गुणांक
(Coefficient of Determination)

आश्रित चरमूल्य या Y में होने वाले विचरण को हम दो भागों में बाँट सकते हैं—(i) ऐसे परिवर्तन जो X में होने वाले परिवर्तनों के फलस्वरूप होते हैं। इन्हें स्पष्टीकृत या व्याख्येय प्रसरण (Explained or Accountable Variance) कहते हैं, तथा (ii) ऐसे विचरण जो X के परिवर्तन के कारण नहीं होते वरन् अन्य कारणों से होते हैं, इनको 'अस्पष्टीकृत या अव्याख्येय प्रसरण' (Unexplained or Unaccountable Variance) कहते हैं। सूत्रानुसार—

$$\Sigma(Y-\bar{Y})^2=\Sigma(Y_e-\bar{Y})^2+\Sigma(Y-Y_e)^2$$

कुल प्रसरण = स्पष्टीकृत प्रसरण + अस्पष्टीकृत प्रसरण

'स्पष्टीकृत प्रसरण' का अंकात्मक माप निश्चयन-गुणांक (Coefficient of Determination) द्वारा किया जाता है। यह वास्तव में सह-सम्बन्ध गुणांक का वर्ग होता है, सूत्र के रूप में—

$$\text{C. of D.}=r^2=1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}\ \text{या}\ 1-\frac{\text{Unexplained Variance}}{\text{Total Variance}}=\frac{\Sigma(Y_e-\bar{Y})^2}{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}$$

निश्चयन-गुणांक से हमें उस प्रतिशत का पता चलता है जिस प्रतिशत से Y के परिवर्तन X के परिवर्तनों के कारण होते हैं। उदाहरणार्थ, यदि मुद्रा की मात्रा (X) और मूल्य-स्तर (Y) में $+\cdot 8$ का सह-सम्बन्ध गुणांक (r) है तो निश्चयन-गुणांक (r^2) $\cdot 64$ होगा जिससे यह निष्कर्ष निकलता है कि मूल्य-स्तर में होने वाले 64% उच्चावचन मुद्रा की मात्रा के परिवर्तनों के कारण होते हैं अर्थात् यदि Y का कुल प्रसरण 1 है तो उसमें से स्पष्ट या व्याख्येय प्रसरण का अंश $\cdot 64$ है। बाकी $(1-\cdot 64)$ या 36% विचरण अन्य कारणों से है। अन्य कारणों से होने वाले विचरण के अंश (Proportion of Unexplained Variance or Variation in Y not accounted for by variations in X) को अनिश्चयन-गुणांक (Coefficient of Non-Determination or k^2) कहते हैं। सूत्रानुसार—

$$k^2=1-r^2\ \text{या}\ \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}\ \text{या}\ \frac{\text{Unexplained Variance}}{\text{Total Variance}}=\frac{\Sigma(Y-Y_e)^2}{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}$$

अनिश्चयन-गुणांक के वर्गमूल (k) को असह-सम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Alienation) भी कहते हैं—

$$\left[k=\sqrt{1-r^2}=\frac{S_y}{\sigma_y}\right]$$

निश्चयन-गुणांक से सह-सम्बन्ध की तुलना स्पष्ट और सरल हो जाती है। उदाहरण के लिए एक r ·8 और दूसरा ·4 हो तो हम यह अनुमान लगायेंगे कि प्रथम r दूसरे r का दोगुना है परन्तु वस्तुतः प्रथम स्थिति में सह-सम्बन्ध दूसरे का चार गुना है, जैसा कि निश्चयन-गुणांक से स्पष्ट है। अर्थात्, प्रथम स्थिति में Y का 64% विचरण X के परिवर्तनों के कारण है तथा दूसरे में केवल 16% विचरण X के परिवर्तनों का परिणाम है। अतः सह-सम्बन्ध की तुलना करने के लिए निश्चयन गुणांक का प्रयोग उचित होता है।

अन्तर रीति द्वारा सह-सम्बन्ध
(Correlation by Difference Method)

दोनों श्रेणियों, तथा उनके पद-मूल्यों के अन्तरों के प्रसरण (variance) के आधार पर भी सह-सम्बन्ध गुणाक निकाला जा सकता है। परिणाम पूर्णतः कार्ल पियर्सन गुणाक से मिलते हैं।

विधि—(i) X-श्रेणी व Y-श्रेणी के प्रसरण (variance) ज्ञात किए जाते हैं। (σx^2 व σy^2)

(ii) X-मूल्यों में से तत्सम्वादी Y-मूल्यों को घटाकर अन्तर का प्रसरण निकाला जाता है। (σ^2_{x-y})

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$r=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma^2_{x-y}}{2\sigma_x.\sigma_y}$$

Illustration 2 में $\sigma_x^2=13·8$, $\sigma_y^2=16·4$, $\sigma_x=3·71$, $\sigma_y=4·05$

σ^2_{x-y} ज्ञात करने के लिए X के प्रत्येक मूल्य में से तत्सम्वादी Y का मूल्य घटाकर अन्तर $X-Y$) निकाला जाएगा। फिर इन अन्तरों का प्रसरण निम्न प्रकार निश्चित किया जाएगा—

$(X-Y)$	5	7	6	1	8	1	4	4	7	7	$\bar{X}=5$
d_{x-y}	0	+2	+1	−4	+3	−4	−1	−1	+2	+2	
d^2_{x-y}	0	4	1	16	9	16	1	1	4	4	56 Σd^2_{x-y}

$$\sigma^2_{x-y}=\frac{\Sigma d^2_{x-y}}{N}=\frac{56}{10}=5·6$$

$$r=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma^2_{x-y}}{2\sigma_x\,\sigma_y}=\frac{13·8+16·4-5·6}{2\times3·71\times4·05}$$

$$r=\frac{30·2-5·6}{2\times15·03}=\frac{24·60}{30·06}=+·82$$

कार्ल पियर्सन के मूल सूत्र $\left(r=\frac{\Sigma dxdy}{N\sigma_x.\sigma_y}\right)$ से भी यही परिणाम आता है क्योंकि वस्तुतः दोनो सूत्र एक समान हैं। यह निम्न प्रकार सिद्ध किया जा सकता है—

प्रमाण (Proof)— $r=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma^2_{x-y}}{2\sigma_x.\sigma_y}=\frac{\Sigma dxdy}{N\sigma_x.\sigma_y}$

$$\sigma_x^2=\frac{\Sigma d_x^2}{N};\ \sigma_y^2=\frac{\Sigma d_y^2}{N}$$

$$\sigma^2_{x-y}=\frac{\Sigma[d(x-y)]^2}{N}=\frac{\Sigma d_x^2+\Sigma d_y^2-2\Sigma dxdy}{N}$$

$$\sigma^2_{x-y}=\frac{\Sigma d_x^2}{N}+\frac{\Sigma d_y^2}{N}-\frac{2\Sigma dxdy}{N}$$

$$\sigma^2_{x-y}=\sigma_x^2+\sigma_y^2-2[r\,\sigma_x\sigma_y] \quad \therefore \quad r=\frac{\Sigma dxdy}{N}\div\sigma_x\sigma_y$$

$$\therefore \quad \frac{\Sigma dxdy}{N}=r\,\sigma_x\sigma_y$$

$$2r\,\sigma_x\sigma_y=\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma^2_{x-y}$$

$$\therefore \quad r=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma^2_{x-y}}{2\sigma_x.\sigma_y}=\frac{\Sigma dxdy}{N\sigma_x\sigma_y}$$

विलम्बना तथा अग्रगमन
(Lag and Lead)

प्रायः यह देखने में आता है कि निराश्रित श्रेणी (Subject Series) में होने वाले परिवर्तनों का सम्बद्ध माला (Relative Series) पर तुरन्त प्रभाव नहीं पड़ता वरन् कुछ समय बाद असर पडता है। उदाहरणार्थ, मुद्रा की मात्रा में वृद्धि होने से सामान्य मूल्य-स्तर में तुरन्त या उसी समय वृद्धि नहीं होती या किसी वस्तु की पूर्ति में परिवर्तन होने से उसका मूल्य तुरन्त ही प्रभावित नहीं होता। दोनों घटनाओं के परिवर्तनों में कुछ समय का अन्तर रह जाता है जैसे जनवरी मे मुद्रा की मात्रा बढ़ने से फरवरी में मूल्य बढ़ें या 1972 मे किसी वस्तु की पूर्ति बढ़ने से 1973 में उसका मूल्य कम हो। कारण और प्रभाव के बीच के इस कालान्तर या समय के अन्तर को ही काल-विलम्बना (Time-Lag) या अग्रगमन (Lead) कहते हैं। विलम्बना (Lag) का अर्थ है 'पीछे रह जाना'। अतः काल-विलम्बना का अर्थ प्रभाव का कारण से पिछड़ जाना है। इस स्थिति को 'अग्रगमन' भी कहा जाता है क्योंकि कारण प्रभाव से पहले आता है।

जहाँ दो सम्बन्धित मालाओं में कुछ विलम्बना का तत्त्व होता है वहाँ विलम्बना की अवधि से सम्बद्ध माला या परिणाम-श्रेणी को संशोधित करना पड़ेगा। वास्तविक सह-सम्बन्ध निकालने के लिए प्रत्येक निराश्रित चर-मूल्य के सामने उसके आश्रित मूल्य को लिखना आवश्यक होता है। यदि वस्तु की पूर्ति और उसके मूल्य मे एक वर्ष की विलम्बना हो तो उसे पहले निम्न प्रकार संशोधित किया जाएगा—

वर्ष	पूर्ति-सूचकांक	मूल्य सूचकांक	मूल्य सूचकांक एक वर्ष की विलम्बना के लिए संशोधित
1965	117	98	101
1966	125	101	97
1967	122	97	102
1968	128	102	96
1969	135	96	94
1970	134	94	95
1971	137	95	92
1972	132	92	96
1973	140	96	...

उक्त उदाहरण मे काल-विलम्बना के लिए संशोधन किये बिना ही पूर्ति और मूल्य में निकाला गया सह-सम्बन्ध धनात्मक होगा जबकि एक वर्ष के लिए मूल्य सूचकांकों को विलम्बित करने पर जो सह-सम्बन्ध ज्ञात किया जाएगा वह ऋणात्मक होगा। अतः वास्तविक सह-सम्बन्ध विलम्बना के संशोधन के बाद ही निकालना चाहिए।

सह-सम्बन्ध और कार्य-कारण सम्बन्ध (Correlation and Causation)—किंग के अनुसार 'सह-सम्बन्ध का यह अर्थ है कि दो समंक-श्रेणियों मे कारण और परिणाम का सम्बन्ध

पाया जाता है ।'[1] यह ठीक है कि सह-सम्बन्ध दो समंक-श्रेणियो के पारस्परिक सम्बन्ध की दिशा व मात्रा का विश्लेषण करता है परन्तु सह-सम्बन्ध की उपस्थिति से यह नही समझ लेना चाहिए कि कि दोनो सम्बद्ध मालाओं मे आवश्यक रूप से प्रत्यक्ष कार्य-कारण सम्बन्ध (direct causal relationship) है अर्थात् एक समंकमाला दूसरी समंकमाला का प्रत्यक्ष कारण है ।

सह-सम्बन्ध के विस्तृत विश्लेषण के परिणामस्वरूप निम्न प्रकार की परिस्थितियाँ उत्पन्न हो सकती हैं—

(1) प्रत्यक्ष सम्बन्ध—दोनों श्रेणियो मे कार्य-कारण सम्बन्ध हो सकता है । उदाहरणार्थ, वस्तु को पूर्ति व कीमत मे ऋणात्मक सम्बन्ध होने से यह माना जा सकता है कि कीमत के अधिकांश परिवर्तन पूर्ति के परिवर्तनो के कारण ही होते है ।

(2) तीसरा समापवर्तक कारण—यह हो सकता है कि दोनों श्रेणियाँ किसी तीसरे सामान्य कारण (third common cause) से एक ही दिशा में या विपरीत दिशाओं मे प्रभावित हो रही हों । उदाहरणार्थ, यदि चावल और पटसन की प्रति एकड़ उपज में अधिक मात्रा का धनात्मक सम्बन्ध है तो यह नहीं समझ लेना चाहिए कि चावल की उपज बढ़ने से पटसन की उपज भी आवश्यक रूप से बढ़ जाती है । दोनों की उपज-वृद्धि यथोचित वर्षा के कारण हो सकती है । अर्थशास्त्र और सांख्यिकी के प्राप्तांकों मे धनात्मक सम्बन्ध छात्रों की बुद्धिमत्ता के कारण हो सकता है । यदि मोटर कारों और टेलीफोन की संख्या मे धनात्मक सम्बन्ध पाया जाता है तो इसका यह अर्थ नहो है कि कार रखने वालों के लिए फोन लगवाना भी अनिवार्य है । वस्तुतः दोनो का व्यक्तिगत आय से धनात्मक सम्बन्ध है अर्थात् अधिक आय वाले ही अधिकतर कार व फोन रखते हैं ।

(3) परस्पर प्रतिक्रिया—दोनो श्रेणियाँ परस्पर एक दूसरे पर प्रभाव डाल सकती हैं। दोनों ही कारण व दोनो ही परिणाम हो सकती हैं । 'प्रति व्यक्ति आय' और 'शिक्षा पर व्यय' मे इस प्रकार का सम्बन्ध होता है । जैसे-जैसे आय बढ़ती है शिक्षा पर व्यय भी बढ़ता है और शिक्षा का प्रसार होने से आय बढ़ती है । यह नहीं कहा जा सकता कि इनमें से कौनसा कारण है और कौनसा परिणाम ।

(4) निरर्थक सम्बन्ध—कभी-कभी समग्र में दो श्रेणियों में सह-सम्बन्ध न होते हुए भी उनमे से चुने गए प्रतिदर्शों मे केवल दैव के कारण (by chance) सह-सम्बन्ध पाया जा सकता है जो निरर्थक (spurious or nonsense) है । यदि गत दस वर्षों में निर्यात के वार्षिक मूल्यों और उसी अवधि मे उत्पन्न बच्चों की संख्या में धनात्मक सम्बन्ध पाया जाता है तो वह निरर्थक कहलाएगा ।

इस प्रकार, सह-सम्बन्ध की उपस्थिति मात्र से ही यह अनुमान लगा लेना उचित नही है कि सम्बद्ध मालाओ में आवश्यक रूप से प्रत्यक्ष कार्य-कारण सम्बन्ध होता है । दोनों श्रेणियों पर किसी तीसरे सामान्य कारण का प्रभाव पड़ सकता है, सह-सम्बन्ध दोनों मालाओ की पारस्परिक क्रिया-प्रतिक्रिया के कारण उपस्थित हो सकता है या केवल दैव के कारण पाया जा सकता है । बॉडिंगटन ने ठीक ही कहा है, 'यदि सारे प्रमाण यह संकेत करते हैं कि (दो श्रेणियों मे) कुछ सम्बन्ध पाया जा सकता है और पाया जाता है, तो भी इन प्रमाणों की बड़ी सावधानी से जाँच करनी चाहिए ।'[2] पूरी विश्लेषणात्मक जाँच के बाद ही कोई निष्कर्ष निकालना चाहिए ।

[1] 'Correlation means that between two series or groups of data there exists some causal connection.'—W. I. King, *Elements of Statistical Method*, p. 197.

[2] 'Even if all the evidence suggests that some relationship can and does ... evidence must be investigated with care.'—A. L. Boddington, *Statistics as an Aid Commerce*.

महत्त्वपूर्ण सूत्रों की सूची

रीति	सूत्र
1. कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध-गुणांक	
(i) व्यक्तिगत श्रेणी— प्रत्यक्ष रीति :	$r=\frac{\Sigma dxdy}{N\sigma_x\sigma_y}$ या $r=\frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma d^2x\times\Sigma d^2y}}$
लघु रीति :	$r=\frac{\Sigma dxdy-\frac{\Sigma dx\times\Sigma dy}{N}}{\sqrt{\left\{\Sigma d^2x-\frac{(\Sigma dx)^2}{N}\right\}\left\{\Sigma d^2y-\frac{(\Sigma dy)^2}{N}\right\}}}$
(ii) वर्गित श्रेणी— लघु रीति :	$r=\frac{\Sigma fdxdy-\frac{\Sigma fdx.\Sigma fdy}{N}}{\sqrt{\left\{\Sigma fd^2x-\frac{(\Sigma fdx)^2}{N}\right\}\left\{\Sigma fd^2y-\frac{(\Sigma fdy)^2}{N}\right\}}}$
r का सम्भाव्य विभ्रम :	$p.e.=\cdot6745\times\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$ यदि $r>6$ $p.e.$ तो वह अर्थपूर्ण है।
2. कोटि-अन्तर सह-सम्बन्ध गुणांक	$\rho=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$
3. संगामी विचलन रीति	$r_c=\pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$
4. न्यूनतम वर्ग रीति	$r=\sqrt{1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}=\sqrt{\frac{\Sigma(Y_c-\bar{Y})^2}{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}}$
5. अन्तर-रीति	$r=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma^2_{x-y}}{2\sigma_x\sigma_y}$
निश्चयन-गुणांक :	C. of D. $=r^2$
अनिश्चयन-गुणांक :	$k=\sqrt{1-r^2}$

प्रश्न

1. सह-सम्बन्ध की अवधारणा के अर्थ तथा महत्त्व की व्याख्या कीजिए। इस गुणाक के निर्वचन के लिए सामान्य नियमों का उल्लेख कीजिए।
Explain the meaning and significance of the concept of correlation. Give the general rules for interpreting its coefficient. [B. Com., Meerut, 1971]

2. 'सह-सम्बन्ध' की परिभाषा दीजिए और सांख्यिकीय विश्लेषण में उसकी महत्ता का विवेचन कीजिए। क्या वह सदा दो चर-मूल्यों के मध्य कारण-परिणाम को व्यक्त करता है ?
यदि गत दस वर्षों में निर्यात के वार्षिक मूल्य और उसी अवधि में उत्पन्न बच्चों की वार्षिक संख्या में सह-सम्बन्ध गुणाक की मात्रा + 8 हो, तो उससे आप क्या निष्कर्ष निकालेंगे ?
Define 'Correlation' and discuss its significance in statistical analysis. Does it always signify cause and effect relationship between two variables ?
If the coefficient of correlation between the annual value of exports during the last ten years and the annual number of children born during the same period, is + 8, what inference, if any, would you draw ? [M. Com., Agra, 1967]

3. सह-सम्बन्ध का क्या अर्थ है ? धनात्मक और ऋणात्मक सह-सम्बन्ध में भेद स्पष्ट कीजिए। केवल विक्षेप चित्रों की सहायता से आंशिक ऋणात्मक एवं पूर्ण धनात्मक सह-सम्बन्ध प्रदर्शित कीजिए।
What is Correlation ? Distinguish between positive and negative correlation. Illustrate by means of scatter diagrams only the presence of partial negative and perfect positive correlation. [B. Com., Agra, 1963]

4. दो चर-मूल्यों X और Y में सह-सम्बन्ध गुणाक की परिभाषा दीजिए। उसका निर्वचन करने में जो सावधानियाँ आवश्यक हैं उनका वर्णन कीजिए। धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य सह-सम्बन्ध गुणाक का महत्त्व स्पष्ट कीजिए।
Define the Coefficient of Correlation between two variables X and Y. State what precautions are necessary in interpreting it. Explain the significance of positive, negative or zero coefficient of correlation. [B. Com., Bombay 1957 and 1955]

5. सह-सम्बन्ध गुणाक से आप क्या समझते हैं ? सिद्ध कीजिए कि सह-सम्बन्ध गुणांक -1 एवं $+1$ के बीच होता है।
What do you understand by the term 'coefficient of correlation' ? Prove that the coefficient of correlation lies between -1 and $+1$. [M. A., Meerut, 1968]

6. सह-सम्बन्ध के विभिन्न मापों का नाम बताइये तथा संक्षेप में उनकी विवेचना कीजिए।
Name the different measures of correlation and briefly discuss their use.

7. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए—
Write short notes on the following—
(i) साधारण व बहुगुणी सह-सम्बन्ध (Simple and Multiple Correlation),
(ii) रेखीय व वक्ररेखीय सह-सम्बन्ध (Linear and Curvilinear Correlation),
(iii) विक्षेप चित्र (Scatter Diagram),
(iv) कोटिक्रम सह-सम्बन्ध (Rank Correlation),
(v) सगामी विचलन रीति (Concurrent Deviations Method),
(vi) सम्भाव्य विभ्रम (Probable Error),
(vii) विलम्बना व अग्रगमन (Lag and Lead),
(viii) निर्धारण गुणाक (Coefficient of Determination)।

8. (a) विक्षेप चित्र से आप क्या समझते हैं ? दो चर-मूल्यों से सह-सम्बन्ध की प्रकृति व मात्रा का ज्ञान कराने में यह किस प्रकार उपयोगी है ?
What do you understand by scatter diagram ? How far is it useful in the determination of nature and extent of correlation between two variables ?
(b) r के पाँच निम्नलिखित विभिन्न मानों से सम्बद्ध पाँच विभिन्न काल्पनिक विक्षेप चित्र खींचिए—
Draw five hypothetical scatter diagrams relating to the following five different values of r—
(i) $r=-1$; (ii) $-1<r<0$, (iii) $r=0$; (iv) $0<r<1$; (v) $r=1$. [M. Com., Meerut, 1969]

9. X और Y चरों के निम्नलिखित पद-युग्म दिए गए हैं—
Given the following pairs of values of the variables X and Y—

X:	2	3	5	6	8	9
Y:	6	5	7	8	12	11

(i) एक विक्षेप चित्र बनाइए।
Make a scatter diagram.

(ii) क्या आपकी राय में X और Y में कोई सह-सम्बन्ध है ? यदि है तो वह धनात्मक है या ऋणात्मक, उच्च है या निम्न ?
Do you think that there is any correlation between the variables X and Y? Is it positive or negative ? Is it high or low ? *[B. Com., Delhi, 1967]*

10. बी० कॉम० कक्षा के 10 विद्यार्थियों की ऊँचाई व भार के समंक निम्नांकित हैं—
Following are the heights and weights of 10 students of a B. Com. class—

Height (Inches) :	62	72	68	58	65	70	66	63	60	72
Weight (Kgms.) :	50	65	63	50	54	60	61	55	54	55

एक विक्षेप चित्र बनाइए और बताइए कि सह-सम्बन्ध धनात्मक है या ऋणात्मक।
Draw a scatter diagram and indicate whether the correlation is positive or negative.

11. निम्न आँकड़ों के आधार पर एक सह-सम्बन्ध रेखाचित्र की रचना कीजिए और पूर्ति तथा मूल्य के सम्बन्ध की समीक्षा कीजिए—
From the following data construct a correlation graph and comment upon the relationship between supply and price—

Year :	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
Supply Indices :	122	135	136	128	128	131	135	135	141	145
Price Indices :	116	112	112	114	108	106	07	107	105	100

12. (i) निम्न सूचना से कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—
From the following information, find Karl Pearson's coefficient of correlation—

X और Y के पद-युग्मों की संख्या = 1000
No. of pairs of values of X and Y = 1000
X श्रेणी का प्रमाप विचलन = 4·5; Y श्रेणी का प्रमाप विचलन = 3·6
S. D. of X-series = 4·5; S. D. of Y-series = 3·6
X और Y श्रेणी के विचलनों की गुणाओं का योग = 4800
Sum of the products of deviations of X and Y series = 4800

(ii) निम्नलिखित सामग्री से सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए तथा उसका निर्वचन कीजिए—
From the following data, find correlation coefficient and interpret it—

पद-युग्मों की संख्या = 8, 'X' का माध्य = 68, 'Y' का माध्य = 69
No. of pairs of item = 8, Mean of X = 68; Mean of Y = 69
'X' के माध्य से विचलन वर्गों का योग = 36
Sum of squares of deviations of X from mean = 36
'Y' के माध्य से विचलन वर्गों का योग = 44
Sum of squares of deviations of Y from mean = 44
'X' और 'Y' के विचलनों के गुणनफलों का योग = 4
Sum of products of deviations of X and Y = 4

[(i) $r = +0·3$; (ii) $r = +0·101$] *[M. Com., Agra, 1969]*

13. निम्न सामग्री से X और Y श्रेणी में सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—
From the following table, determine the coefficient of correlation between X and Y series—

	X-Series	*Y-Series*
No. of items :	15	15
Arithmetic Mean :	25	18
Sum of Squares of deviations from Mean :	136	138

X और Y श्रेणी के माध्यों से विचलनों की गुणाओं का योग = 122
Sum of products of deviations of X and Y-series from mean = 122

[r = 89] *[B. Com., Lucknow, 1968; Udaipur, 1966; Delhi, 1971]*

14. यदि n पद-युग्मों के लिए x, y और $x-y$ के प्रसरण क्रमशः σ_x^2, σ_y^2 व σ^2_{x-y} हों तो यह सिद्ध कीजिए कि x और y में सह-सम्बन्ध गुणांक r निम्न सूत्रानुसार ज्ञात होगा—
If for n pairs of items, variances of x, y and $x-y$ are respectively σ_x^2, σ_y^2 and σ^2_{x-y} prove that r between x and y will be determined by the following formula—

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma^2_y - \sigma^2_{x-y}}{2\sigma_x\sigma_y}$$ *[B. Com., Poona, 1971 ; U.P.C.S., 1964]*

15. किसी फर्म के उत्पादन मे से 5 वस्तुओं का एक प्रतिदर्श लिया गया। पाँचो वस्तुओ की लम्बाई तथा भार निम्नांकित है—
A sample of 5 items was taken from the output of a firm. Lengths and weights of all items are as under—

Length (Inches) :	3	4	6	7	10
Weight (Oz.) :	9	11	14	15	16

उपर्युक्त प्रतिदर्श मे लम्बाई तथा भार के बीच सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।
Find correlation coefficient between length and weight in the above sample.
[$r=+0.94$] *[B. Com., Meerut, 1969 ; Aligarh, 1970]*

16. निम्न समंको से पूँजी तथा लाभ में कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—
From the following data, find Karl Pearson's coefficient of correlation between capital and profit—

Capital Invested (000 Rs.) :	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
Profit Earned (000 Rs.) :	30	22	20	14	15	10	5	8	4	2

[$r=+0{\cdot}96$] *[B Com, Vikram, 1975 ; Kanpur, 1971]*

17. निम्नलिखित आँकड़ो से कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—
Calculate Karl Pearson's coefficient of correlation from the following data—

Age of Husbad (years) :	24	27	28	28	29	30	32	33	35	[illegible]	40
Age of Wife (years) :	18	20	22	25	22	28	28	30	27	30	22

[$r=+0.505$, Excluding last pair $r=+.881$] *[B Com., Agra, 1968 ; Gorakhpur, 1970]*

18. पतियो और पत्नियो की निम्नांकित आयु के बीच सह-सम्बन्ध गुणांक r ज्ञात कीजिए और उसका निर्वचन भी कीजिए—
Find r, between the following ages of husbands and wives and also interpret it—

24	32	24	26	34	28	30	30	35	37
20	27	24	24	27	24	32	25	31	36

[$r=+.83$, p. e $=.065$] *[M. A., Meerut, 1976]*

19. निम्न समकों मे X और Y मे कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक निकालिए—
From the following data, find Karl Pearson's coefficient of correlation—

X :	368	384	384	361	347	384	395	403	400	385
Y :	22	21	24	20	22	26	26	29	28	27

[$r=+.79$, $r_c=+.33$] *[M. A., Agra, 1972 ; B Com., Punjab, 1971]*

20. पिता व पुत्र की लम्बाई के निम्नलिखित समंको से सह-सम्बन्ध गुणांक निकालिए—
Find coefficient of correlation from the following figures of heights of fathers and sons—

Height of Fathers (inches) :	65	66	67	67	68	69	71	73
Height of Sons (inches) :	67	68	64	68	72	70	69	70

[$r=+{\cdot}471$]

21. निम्नांकित श्रेणियाँ एक वस्तु के मूल्य तथा पूर्ति से सम्बन्धित हैं। उनमे कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक मालूम कीजिए—
The following series relate to the price and supply of an article, find Karl Pearson's coefficient of correlation between them—

Price :	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Supply :	30	29	29	25	24	24	24	21	18	15

[$r=-{\cdot}962$] *[B. Com., Meerut, 1971]*

22. दस विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा इतिहास व भूगोल मे प्राप्त अंक निम्नलिखित सारणी मे दिए हैं। अंको के औसत ज्ञात कीजिए व सह-सम्बन्ध गुणांक (कार्ल पियर्सन) की गणना कीजिए—
The following table shows the marks obtained by a batch of 10 students in History and Geography. Find the means of the marks and calculate the coefficient of correlation given by Karl Pearson—

History :	77	54	27	52	14	35	90	25	56	60
Geography :	35	58	60	40	50	40	35	56	[illegible]	42

[$\bar{X}=49$; $\bar{Y}=55$; $r=-{\cdot}6659$] *[B. Com., Meerut, ...*

23. कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए। विचलन वास्तविक माध्य क्रमश: 52 एवं 44 से लीजिए—
Find Karl Pearson's coefficient of correlation. Take deviations from the actual means 52 and 44 respectively—

A :	44	46	46	48	52	54	54	56	60	60
B :	36	40	42	40	?	44	46	48	50	52

[Missing value in Series-*B*=42, *r*=+ 95] [*B. Com., Agra, 1976*]

24. 10 फर्मों के निम्नांकित विक्रय और व्यय के बीच सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए—
Calculate coefficient of correlation between the following figures of sales and expenditure of 10 firms—

Firms :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sales :	50	50	55	60	65	65	65	60	60	50
Expenditure :	11	13	14	16	16	15	15	14	13	13

[*r*=+·797] [*B A. II, Raj., 1973 ; B. Com , Meerut, 1971, 68 ; Alld , 1967*]

25. निम्न सारणी में 10 विद्यार्थियों के लेखाकर्म तथा सांख्यिकी विषयों पर प्राप्तांकों को दर्शाया गया है। सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए (दोनों श्रेणियों के लिए क्रमश: 60 और 65 को कल्पित माध्य मानिए। सम्भाव्य विभ्रम भी ज्ञात कीजिए)—
The following table shows the marks obtained by 10 students in Accountancy and Statistics. Find the coefficient of correlation. (Assume 60 and 65 as arbitrary origins in both series. Also determine the probable error)—

Student :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Accountancy :	45	70	65	30	90	40	50	75	85	60
Statistics :	35.	90	70	40	95	40	60	80	80	50

[*r*=+·903, *p. e* = 04] [*B. Com , Meerut, 1970 ; Alld., 1966 ; Raj , 1967*]

26. निम्नलिखित ऊँचाइयों और भारों के बीच क्या अर्थपूर्ण सह-सम्बन्ध है ? यह ज्ञात कीजिए—
Is there significant correlation between the following heights and weights ?—

Height (inches) :	57	59	62	63	64	65	55	58	57
Weight (lbs) :	113	117	126	126	130	129	111	116	112

[*r*=+·98, *p. e.*= 009] [*B. Com., Meerut, 1969 ; M. A., Agra, 1966*]

27. नीचे दिए हुए *X* और *Y* के मूल्यों में सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए। श्रेणी *X* के लिए कल्पित माध्य 69 और *Y* के लिए 112 मानिए—
Find the coefficient of correlation between *X* and *Y*. Assume 69 and 112 as working origins for *X* and *Y* respectively—

X :	78	89	96	69	59	79	68	61
Y :	125	137	156	112	107	136	123	108

[*r*=+·96] [*B. Com., Alld , 1973 ; Vikram, 1974, 73 ; M. A., Agra, 1969*]

28. निम्न सारणी में दो श्रेणियों के तत्सम्बन्धी मूल्य दिए गए है उक्त श्रेणियों में सह-सम्बन्ध गुणांक निकालिए।
[illegible] Find coefficient [illegible]

X :	42	44	58	55	[illegible]	98	66
Y :	56	49	53	58	65	76	58

[*r*=+ 904, *p. e.*= 047] [*M A., Jabalpur, Lucknow, 1968 ; B Com., Delhi, 1971*]

29. [illegible] ..ताक निम्न प्रकार है। उक्त समंको से कार्ल पियर्सन [illegible] भ्रम भी ज्ञात कीजिए—
[illegible] Statistics are given below. From these marks obtain Karl Pearson's coefficient of correlation and find its standard error—

Paper I :	80	45	55	56	58	60	65	68	70	75	85
Paper II :	82	56	50	48	60	62	64	65	70	74	90

[*r*=+ 92, *s e.*= 045] [*M. A , Agra, 1960*]

30. निम्न श्रेणी से सह-सम्बन्ध गुणांक और सम्भाव्य विभ्रम निकालिए—
From the following series, calculate the correlation coefficient and probable error—

Series *X* :	10	28	49	50	70	75	98	100	110	120
Series *Y* :	112	110	75	60	55	50	40	30	20	10

[*r*=−·9752, *p. e* = 012] [*B. Com., Kanpur, 1972*]

31. 12 छात्रो द्वारा दो परीक्षाओ मे प्राप्त अंको के बीच सह-सम्बन्ध गुणाक ज्ञात कीजिए—
Find the coefficient of correlation between marks obtained by 12 students in two tests—

Student :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Test I	50	54	56	59	60	62	61	65	67	71	71	74
Test II :	22	25	34	28	26	30	32	30	28	34	36	40

(कल्पित माध्य 60 और 30 लीजिए)
(Assume 60 and 30 as arbitrary means) *[B. Com., Raj., 1970]*
[$r = +\cdot78$]

32. निम्न सूचना के आधार पर जनसख्या के घनत्व और मृत्यु-दर मे सह-सम्बन्ध, यदि कोई हो तो, बताइए—
On the basis of following information find correlation, if any, between density of population and death rate—

Region	*Area (sq. kms.)*	*Population*	*No. of Deaths*
1	200	40,000	480
2	150	75,000	1,200
3	120	72,000	1,080
4	80	20,000	280

[$r = +\cdot82$] *[B. Com., Raj., 1972]*

33. दो पद-मालाओ (X और Y) के माध्यो से निकाले गए विचलन क्रमश निम्न प्रकार हैं। आप कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणाक निकालिए और अपने परिणाम का विवेचन कीजिए—
The deviations taken from the means of two series X and Y are as follows. Calculate Karl Pearson's coefficient of correlation and comment upon the result—

X:	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
Y:	3	−3	−4	0	4	1	2	−2	−1

[$r = 0$] *[M. Com., Vikram, 1969]*

34. दो श्रेणियो —X और Y— के पद-मूल्यो के कल्पित माध्यो से विचलन निम्नांकित है। कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणाक ज्ञात कीजिए और बताइए कि वह अर्थपूर्ण है या नही—
Deviations of item-values of two series—X and Y from assumed means are as follows. Find Karl Pearson's coefficient of correlation and say whether it is significant or not—

X:	+5	−4	−2	+20	−10	0	+3	0	−15	−5
Y:	+5	−12	−7	+25	−10	−3	0	+2	−9	−15

[$r = +\cdot896$, $p.\ e. = \cdot04$, significant]

35. परीक्षार्थियो की आयु और परीक्षाफल सम्बन्धी निम्न सूचना से सह-सम्बन्ध गुणाक और सम्भाव्य विभ्रम ज्ञात कीजिए—
From the following information relating to age of candidates and their examination-result, calculate coefficient of correlation and probable error—

Age of Candidates :	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	[illegible]
Percentage of Failures :	39·2	40·6	43·4	34·2	[illegible]	39·2	43·9	47·1	[illegible]

[$r = \cdot68$, $p.\ e. = \cdot12$] *[M. Com., Agra, [illegible]]*

36. निम्न सारणी से आयु और अन्धापन में सह-सम्बन्ध गुणाक ज्ञात कीजिए—
From the following table, find correlation coefficient between age and blindness—

Age :	0-10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
No. of Persons (000 s) :	100	60	[illegible]	[illegible]	24	11	[illegible]
No. of Blind :	55	[illegible]	[illegible]	[illegible]	35	[illegible]	[illegible]

[$r = +\cdot898$] *[B. Com., [illegible]; M. A., [illegible]]*

37. विद्यार्थियो की आयु और [illegible]
From the following data, [illegible] coefficient of [illegible] students and their playing [illegible]

Age :	[illegible]	[illegible]	17	[illegible]	[illegible]
No. of Students :	[illegible]	[illegible]	150	[illegible]	[illegible]
Regular Players :	[illegible]	[illegible]	30	[illegible]	[illegible]

[$r = -\cdot99$]

38. निम्नलिखित प्रदत्त सारणी से पतियों और पत्नियों की आयु के बीच सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—
Calculate the coefficient of correlation between age of husbands and age of wives from the following table—

Age of Husbands (ys.)	Age of Wives (ys.)					Total
	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	
15—25	6	3	—	—	—	9
25—35	3	16	10	—	—	29
35—45		10	15	7	—	32
45—55			7	10	4	21
55—65				4	5	9
Total	9	29	32	21	9	100

[r = +·802] [*M. Com., Meerut, 1977, 72; M. A., Alld., 1973; B. Com., Punjab, 1974*]

39. नीचे दिये हुए आँकड़ों से कार्ल पियर्सन विधि द्वारा पतियों और पत्नियों की आयु का पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—
From the following data, calculate Karl Pearson's coefficient of correlation between age of husbands and wives—

Age of Wives (ys.)	Age of Husbands (ys.)					Total
	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	
55—65	—	—	—	4	2	6
45—55	—	—	4	16	5	25
35—45	—	1	12	2	—	15
25—35	—	10	25	2	—	37
15—25	5	9	3	—	—	17
Total	5	20	44	24	7	100

[r = +·79] [*B. Com., Delhi, 1972; U.P.C.S., 1960*]

40. निम्न सारणी में विद्यार्थियों की ऊँचाई और भार के समंक दिए गए हैं। ऊँचाई एवं भार में सह-सम्बन्ध गुणांक निकालिए—
The following table gives to figures of height and weight of students. Obtain *coefficient of correlation between height and weight*—

Height (inches)-X	Weight (lbs.)-Y					Total
	80—90	90—100	100—110	110—120	120—130	
50—55	1	3	7	5	2	18
55—60	2	4	10	7	4	27
60—65	1	5	12	10	7	35
65—70	—	3	8	6	3	20
Total	4	15	37	[illegible]	16	100

[r = +·0944] [*B. Com., Agra, 1966; Lucknow, 1963; Raj., 1960*]

41. निम्न सारणी से कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—
Calculate Karl Pearson's coefficient of correlation from the following table—

X/Y→ ↓	25	35	45	55	65	75
15	20	15	20	15	10	5
25	—	10	30	12	6	4
35	—	—	20	10	4	2
45	—	—	10	5	2	1
55	—	—	—	—	15	4

[$r = +\cdot48$] [*B. Com., Lucknow, 1969*]

42. निम्न सारणी में आयु और बीमे की धनराशि के बीच सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए। 15–44 आयु वर्ग के लिए भी सह-सम्बन्ध गुणांक निकालिए और परिणामों की विवेचना कीजिए—
From the following table, calculate correlation coefficient between age and sum assured. Also calculate '*r*' for age-group 15–44 and comment on results—

Age-group	Sum Assured (Rs.)				
	50	100	200	500	1000
15—24	18	20	6	2	—
25—34	21	26	6	5	1
35—44	10	9	3	6	1
45—54	7	8	5	4	—
55—64	8	3	1	—	—

[$r = 068$. 15–44 Age-group $r = \cdot21$]

43. 'सांख्यिकी' और 'विधि' विषयों की कक्षा परीक्षा में 24 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं। चार-चार अंकों का विस्तार लेकर और 0–4 प्रथम वर्गान्तर मानकर एक सह-सम्बन्ध (द्विचर) सारणी की रचना कीजिए और उसकी सहायता से सांख्यिकी और विधि में प्राप्तांकों का पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—
The following are the marks of 24 students in a class-test in 'Statistics' and 'Law'. Taking a magnitude of 4 marks and with 0–4 as the first class-interval, construct a correlation (bivariate) table and from it calculate the coefficient of correlation between marks in Statistics and Law—

Roll No.	*Statistics*	*Law*	*Roll No.*	*Statistics*	*Law*	*Roll No.*	*Statistics*	*Law*
1	15	13	9	4	17	17	10	10
2	0	1	10	17	16	18	13	11
3	1	2	11	6	6	19	11	14
4	3	7	12	19	18	20	12	18
5	16	8	13	14	11	21	18	15
6	2	9	14	9	3	22	9	15
7	18	12	15	8	5	23	7	3
8	5	9	16	13	4	24	11	7

[$r = +\cdot58$] [*B. Com., Bombay, 1969*]

44. (i) यदि निम्न माप ज्ञात हों तो पद-युग्मों की संख्या (N) ज्ञात कीजिए।
If the following measures are given, find the number of pairs of values (N)—

$$r = \cdot5, \quad \Sigma dxdy = 120, \quad \Sigma d^2x = 90, \quad \sigma_y = 8$$

(ii) 10 पद-युग्मों वाले एक द्विचर बंटन में निम्न मूल्य ज्ञात हैं। विचलन कल्पित माध्य से लिए गए हैं। r, उसका सम्भाव्य विभ्रम और प्रमाप विभ्रम परिकलित कीजिए—
In a bivariate distribution of 10 pairs of items, the following measures are known. Deviations are taken from assumed mean. Calculate r, its probable error and standard error—

$$\Sigma dx = -4\,;\ \Sigma dy = -5\,;\ \Sigma d^2x = 128912\,;\ \Sigma d^2y = 3091\,;\ \Sigma dxdy = +15582$$

55. निम्न समको से कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए। समान कोटियों के लिए समायोजन भी कीजिए—
From the following data calculate the rank correlation coefficient. Also make adjustment for tied ranks—

X :	48	33	40	9	16	16	85	24	16	57
Y :	13	13	24	6	15	4	20	9	6	19

[ρ = + ·733] [M. A., Agra, 196

56. (i) कुछ विद्यार्थियों द्वारा 'सांख्यिकी' और 'लेखाकर्म' विषयों में प्राप्त अंकों के मध्य कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक 0·8 है। यदि कोटि-अन्तरों के वर्गों का योग 33 हो तो विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
The rank correlation coefficient between marks obtained by some students in 'Statistics' and 'Accountancy' is 0·8. If the total of squares of rank differences is 33, find the number of students. [B. Com., Bombay, 196

(ii) 30 विद्यार्थियों के अंग्रेजी और अर्थशास्त्र में प्राप्तांको के बीच कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक 0·5 है। बाद में यह पता चला कि एक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त दोनों विषयों के प्राप्तांकों की कोटियों का अन्तर 7 के स्थान पर भूल से 3 लिख दिया गया। कोटि सम्बन्ध गुणांक का सही माप ज्ञात कीजिए।
The rank correlation coefficient between marks obtained by 30 students in 'English' and 'Economics' is 0·5. Later, it was discovered that the difference between ranks in the two subjects assigned to a student was wrongly written as 3 in place of 7. Find the correct coefficient of rank correlation.

[(i) $N=10$; (ii) ρ = ·258] [B. Com., Bombay, 1967

57. निम्न आँकड़े एक फैक्ट्री के 11 मजदूरों की आय व खर्च के सम्बन्ध में दिए गए हैं। सगामी विचलन विधि के द्वारा मालूम कीजिए कि आय और खर्च में क्या कोई सह-सम्बन्ध है?
The following data relate to the income and expenditure of 11 workers of a factory. Find, by concurrent deviations method, whether there is any correlation between income and expenditure—

Serial No. :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Income (Rs.) :	65	40	35	75	63	80	35	20	80	60	50
Expenditure (Rs.) :	60	55	50	56	30	70	40	35	80	75	80

[r_c = + ·89] [B. Com., Agra, 1973]

58. निम्न आँकड़ों से सगामी विचलन रीति द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक निकालिए—
Calculate the coefficient of concurrent deviations from the data given below—

Year :	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
Supply :	160	164	172	182	166	170	178	192	186
Price :	292	280	260	234	266	254	230	190	200

[$r_c = -1$] [M. Com., Meerut, 1977 ; B. Com., Punjab, 1972—*figures halved*]

59. निम्न समको से सगामी विचलन रीति द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक निकालिए—
From the data given below, compute the correlation coefficient by the method of concurrent deviations—

Year :	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
Supply :	150	154	160	172	160	165	180
Price :	200	180	170	160	190	180	172

[$r_c = -1$] [B. Com., Meerut, 1970 ; Nagpur, 1968 ; Agra, 1967]

60. X और Y के मध्य सगामी विचलन रीति द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—
Find the coefficient of correlation between X and Y by the method of concurrent deviations—

X :	25	33	22	34	33	32	33	32	33	34	36	38
Y :	27	36	39	39	32	32	40	[illegible]	59	36	44	36

[r_c = −·3]

61. निम्न आँकड़ों से न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक, निश्चयन गुणांक तथा असह-सम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए—

From the following data, compute r, the coefficient of determination and coefficient of alienation by the method of least squares—

X:	1	2	3	4	5	6	7
Y:	160	180	184	166	188	198	184

[$r=+\cdot66$; $r^2=\cdot44$; $k=\cdot75$]

62. (i) 'यदि सह-सम्बन्ध गुणाक का माप 0·5 है तो इसका यह अर्थ नहीं है कि एक चर में होने वाले 50% परिवर्तन दूसरे चर के परिवर्तनों के कारण हैं।' इस कथन की समीक्षा कीजिए।

'A correlation coefficient of 0·5 does not mean that 50% of the data are explained.' Comment. [B. A. Hons., Delhi, 1970]

(ii) एक विद्यार्थी ने 5 पद-युग्मो वाले द्विचर वटन में r का मूल्य $+\cdot7$ ज्ञात किया और यह निष्कर्ष निकाला कि सह-सम्बन्ध अत्यधिक अर्थपूर्ण है। क्या उसका निष्कर्ष सही है?

A student computed the value of r in a bivariate distribution with 5 pairs of items as $+\cdot7$ and concluded that correlation was *highly significant*. Is he correct?

[(ii) नहीं] [B. Com., Saugar, 1963]

63. निम्न आँकड़ो से X और Y मे न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा सह-सम्बन्ध गुणाक ज्ञात कीजिए—

From the following data, calculate the coefficient of correlation by the method of least squares—

X:	2	4	5	6	8	11
Y:	18	12	10	8	7	5

[$r=-\cdot9203$]

64. (i) सिद्ध कीजिए कि सह-सम्बन्ध गुणाक पर मूल बिन्दु और माप स्तर के परिवर्तन का कोई प्रभाव नही पड़ता।

Prove that the coefficint of correlation is not affected by change of origin end scale of measurements [U.P.C.S., 1971]

(ii) पिछले प्रश्न (नं० 63) मे X के प्रत्येक माप को 2 से गुणा करके 6 जोड़िए और प्रत्येक Y मूल्य को 3 से गुणा करके 15 घटाइए। इस प्रकार प्राप्त नये पद-युग्मो के बीच सह-सम्बन्ध गुणाक ज्ञात कीजिए। क्या गुणाक का नया मूल्य भी वही है जो मूल-समको के r का है या उससे भिन्न है? कारण सहित स्पष्ट कीजिए।

In the previous question (No 63), multiply each value of X by 2 and add 6 and subtract 15 from each value of Y after multiplying it by 3. Calculate coefficient of correlation between new pairs of items thus obtained. Is the new coefficient of correlation the same as 'r' of original values or is it different? Explain with reasons.

65. एक विद्यार्थी ने X व Y के 25 पद-युग्मों के बीच सह-सम्बन्ध गुणाक ज्ञात करते समय निम्न मूल्य प्राप्त किये—

A student, while computing the correlation coefficient between two variates X and Y from 25 pairs of observations obtained the following constants—

$$N=25,\ \Sigma X=125,\ \Sigma Y=100,\ \Sigma X^2=650,\ \Sigma Y^2=460,\ \Sigma XY=508$$

बाद मे जाँच के समय यह पता चला कि उसने 2 पद-युग्मों के मूल्य गलती से

X	Y
6	14
8	6

लिख लिए थे जबकि सही मूल्य

X	Y
8	12
6	8

थे। सह-सम्बन्ध गुणाक का सही मूल्य निकालिए।

It was, however, discovered later at the time of checking that he had copied down two pairs of observations as:

X	Y
6	14
8	6

while the correct values were

X	Y
8	12
6	8

Obtain the correct value of the correlation coefficient between X and Y.

[$r=+\cdot67$] [M. A., Allahabad, 1972]

12

चित्रमय प्रदर्शन
(DIAGRAMMATIC REPRESENTATION)

जटिल समंकों को सरल और बुद्धिगम्य बनाने के लिए वर्गीकरण, सारणीयन, माध्य, मचकांक इत्यादि अनेक सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग किया जाता है। परन्तु इन सभी रीतियों द्वारा सांख्यिकीय तथ्य अंकों के रूप में प्रस्तुत किये जाते हैं। सामान्य व्यक्ति शुष्क और नीरस अंकों में कोई विशेष रुचि नहीं रखते। विभिन्न अंकों का तुलनात्मक विश्लेषण करके उनसे उचित निष्कर्ष निकालना जनसाधारण के लिए अत्यन्त कठिन कार्य है। अतः यह आवश्यक है कि सांख्यिकीय तथ्यों को दृष्टि-सम्बन्धी विधियों (visual methods) द्वारा इस प्रकार प्रदर्शित किया जाये कि मस्तिष्क पर अनावश्यक रूप से भार भी न पड़े और एक ही दृष्टि में वस्तु-स्थिति सरल और स्पष्ट हो जाये। सांख्यिकी में समंकों के आकर्षक प्रदर्शन की दो विधियाँ हैं—(अ) चित्रमय प्रदर्शन, तथा (ब) बिन्दुरेखीय प्रदर्शन। इस अध्याय में हम चित्रमय प्रदर्शन का विवेचन करेंगे।

उपयोगिता एवं लाभ
(Utility and Advantages)

सांख्यिकीय तथ्यों को रोचक एवं आकर्षक ज्यामितीय आकृतियों (geometrical figures), जैसे—दण्ड-चित्र, वृत्त, आयत आदि अथवा चित्रों (pictures) या मानचित्रों (maps) के रूप में प्रदर्शित करने की क्रिया चित्रमय प्रदर्शन (diagrammatic representation) कहलाती है।

समंकों के आकर्षक प्रदर्शन में चित्र बहुत उपयोगी होते हैं। किसी ने ठीक ही कहा है 'एक चित्र हजार शब्दों के बराबर होता है' (A picture is worth a thousand words) सांख्यिकीय चित्रों के निम्नलिखित लाभ है—

(1) **आकर्षक और प्रभावशाली साधन** (Attractive and effective means of presentation)—चित्र अत्यन्त आकर्षक और रोचक होते है तथा मानव मस्तिष्क पर स्थायी प्रभाव डालते है। एक सामान्य व्यक्ति संख्याओं में रुचि नहीं रखता, क्योंकि उन्हें समझने, याद रखने तथा उनसे परिणाम निकालने में उसे कठिनाई होती है, परन्तु विभिन्न रंगों में बने चित्र अनायास ही उसका ध्यान आकर्षित करते है। उनसे मस्तिष्क पर भार नहीं पड़ता। अंकों की तुलना में उनका प्रभाव अधिक स्थायी होता है। वे अधिक समय तक याद रहते है। आकर्षक व प्रभावोत्पादक होने के कारण ही आधुनिक विज्ञापनों में अधिकतर चित्रों का प्रयोग होता है।

(2) **सरल व बुद्धिगम्य बनाना** (To make data simple and intelligible)—चित्रों द्वारा जटिल तथ्य अधिक सरल और बुद्धिगम्य बन जाते है तथा उनकी सभी विशेषताएँ स्पष्ट हो जाती है। उदाहरणार्थ, पंचवर्षीय योजनाओं की प्रगति, जनसंख्या-वृद्धि अथवा मूल्य-वृद्धि के समंक आसानी से समझ में नहीं आते। परन्तु इन्हीं समंकों को यदि उपयुक्त सांख्यिकीय चित्रों के रूप में प्रस्तुत किया जाए तो सारी स्थिति एक ही दृष्टि में स्पष्ट हो जाती है। मोरोने के अनुसार अधिकांश व्यक्तियों के लिए निरे समंक नीरस होते हैं। चित्र किसी जटिल स्थिति के स्वरूप को

दिखाने में हमारी सहायता करते हैं। जिस प्रकार एक मानचित्र हमें एक विशाल देश का विहंगम दृश्य प्रदान करता है ठीक उसी प्रकार चित्र एक ही दृष्टि में सख्यात्मक जटिल तथ्यो का सम्पूर्ण अर्थ समझने मे हमारे सहायक होते है।'[1]

(3) **तुलना में सहायक होना** (To facilitate comparison)—चित्रों द्वारा विभिन्न समंकों की पारस्परिक तुलना मे सहायता मिलती है। उदाहरणार्थ, चौथी तथा पांचवी पंचवर्षीय योजनाओं में विभिन्न क्षेत्रो मे किये जाने वाले विनियोग की तुलना उपयुक्त सांख्यिकीय चित्रों द्वारा सरलता से की जा सकती है।

(4) **समय व श्रम की बचत** (Saving of time and labour)—चित्रो को देखने, समझने तथा उनसे निष्कर्ष निकालने मे विशेष अध्ययन व परिश्रम की आवश्यकता नही होती। एक ही दृष्टि मे समस्त स्थिति स्पष्ट हो जाती है। उन्हें समझने के लिए किसी विशेष ज्ञान की आवश्यकता नही होती। अतः चित्रो से समय और श्रम की बचत होती है।

(5) **सार्वभौमिक उपयोगिता** (Universal utility)—विभिन्न लाभों के कारण अनेक क्षेत्रों में सांख्यिकीय चित्रो का व्यापक प्रयोग होता है। पचवर्षीय योजनाओं से सम्बन्धित आंकडों का प्रदर्शन करने के लिए चित्रो का विशेष रूप से प्रयोग किया जाता है। व्यापार, वाणिज्य तथा विज्ञापन के क्षेत्र मे चित्र बहुत उपयोगी और महत्त्वपूर्ण होते है। इस प्रकार, सांख्यिकीय चित्रो की उपयोगिता सार्वभौमिक है। वे सभी क्षेत्रो में समको को नवजीवन प्रदान करते हैं।

चित्रों की परिसीमायें (Limitations)—सांख्यिकीय चित्रो की कुछ परिसीमायें भी है जिनके कारण उनका प्रयोग अत्यन्त सावधानी से करना चाहिए। प्रथम, चित्रों द्वारा यथार्थ संख्यात्मक प्रदर्शन सम्भव नही है। वे सन्निकट मूल्यों (approximate values) पर आधारित होते हैं। दूसरे, चित्रो की सहायता से विभिन्न मूल्यो का सूक्ष्म अन्तर प्रदर्शित करना असम्भव है। उदाहरणार्थ, 921 और 935 का अन्तर चित्रों द्वारा स्पष्ट नही किया जा सकता चाहे मापदण्ड कुछ भी रखा जाए। तीसरे, चित्रो द्वारा सही तुलनात्मक अध्ययन के लिए यह आवश्यक है कि समंक दो या दो से अधिक हो परन्तु वे स्वभाव में सजातीय हों अन्यथा भ्रमात्मक निष्कर्ष निकलेंगे। विभिन्न गुणो के आधार पर बने चित्र अतुलनीय होते है। चौथे, चित्रो के रूप में बहुगुणी सूचनाएँ प्रदर्शित नही की जा सकती। इस प्रकार की बहुमुखी सूचनाएँ बहुगुणी सारणियों के रूप मे व्यक्त की जा सकती हैं। पांचवें, चित्रों का सरलता से दुरुपयोग हो सकता है। गलत माप-दण्ड पर बने चित्र भ्रमात्मक होते हैं। विज्ञापन आदि मे इनका अत्यधिक दुरुपयोग किया जा सकता है। छठे, चित्र निष्कर्ष निकालने का एक साधन है जिसका प्रयोग सारणियो के साथ-साथ करना चाहिए। केवल चित्रो से ही यथार्थ परिणाम नही निकाले जा सकते। वास्तव मे, चित्र सारणियों के अनुपूरक हैं, स्थानापन्न नही।

चित्र-रचना के सामान्य नियम (General Rules for Constructing Diagrams)—सांख्यिकीय चित्रो को आकर्षक एव प्रभावशाली बनाने के लिए निम्नलिखित सामान्य नियमो का पालन करना अत्यन्त आवश्यक है—

(i) **आकर्षक एवं शुद्ध**—चित्र इतने आकर्षक एव रोचक होने चाहियें कि वे अनायास ही पाठकों का ध्यान आकर्षित करें। परन्तु आकर्षण के लिए उनकी शुद्धता का परित्याग नही करना चाहिए। अशुद्ध चित्रो से भ्रमात्मक निष्कर्ष निकलते हैं। बिन्दुरेखा-पत्र (Graph Paper) पर बने चित्र अधिक शुद्ध होते है।

(ii) **उपयुक्त आकार**—चित्र न तो बहुत बड़ा होना चाहिए और न बहुत छोटा ही कागज के मध्य में बने चित्र के चारो ओर मोटी रेखायें खीच देने से उसका आकर्षण-मूल्य बढ़ जाता है।

[1] 'Cold figures are uninspiring to most people. Diagrams help us to see the *pattern and shape* of any complex situation. Just as a map gives us a bird's-eye view of a wide stretch of country, so diagrams help us to visualize the *whole meaning* of a numerical complex at *a single glance*.'—Moroney *Facts From Figures.*

(iii) शीर्षक—प्रत्येक चित्र के ऊपर स्पष्ट, पूर्ण एवं संक्षिप्त शीर्षक होना चाहिए जिससे यह ज्ञात हो जाय कि चित्र में क्या प्रदर्शित किया गया है।

(iv) उपयुक्त मापदण्ड—चित्र-रचना से पहले उचित मापदण्ड या पैमाने का निर्धारण करना आवश्यक होता है क्योंकि इसी के आधार पर चित्र बनाया जाता है। मापदण्ड के सम्बन्ध में कोई विशिष्ट नियम निश्चित नहीं किया जा सकता, परन्तु कागज के आकार और समंकों की प्रकृति को ध्यान मे रखकर ही इस प्रकार उचित पैमाना निर्धारित करना चाहिए कि चित्र न तो बहुत बड़े बनें और न बहुत छोटे ही रहें तथा समंकों की सभी महत्त्वपूर्ण विशेषतायें एक ही दृष्टि मे स्पष्ट हो जाएँ। यदि दो या अधिक चित्रो की परस्पर तुलना करनी है तो उनका मापदण्ड एक समान होना चाहिए। सामान्यतया, उदग्र पैमाना (vertical scale) चित्र के बायीं ओर और क्षैतिज पैमाना (horizontal scale) नीचे की ओर अंकित करके प्रदर्शित करना चाहिए। चित्र के शीर्षक के निकट पैमाना लिख देना आवश्यक है।

(v) चित्र खींचना—चित्र सदैव पेंसिल, पैमाना तथा अन्य ज्यामितीय उपकरणों की सहायता से बनाना चाहिए। चित्र के विभिन्न विभागों या उपविभागों के अन्तर को बिन्दुओं, उदग्र या क्षैतिज रेखाओं, चारखानों आदि द्वारा स्पष्ट कर देना चाहिए। जहाँ तक सम्भव हो, चित्रो या उनके विभागो के अन्दर शब्द या अंक नहीं लिखने चाहियें, इससे चित्र भद्दे प्रतीत होने लगते हैं। कभी-कभी विभिन्न विभागों में प्रतिशत के अंक लिखे जा सकते हैं।

(vi) संकेत—चित्र मे प्रयुक्त चिह्नों, जैसे—बिन्दुओं, रेखाओं, चारखानों आदि के अर्थ को स्पष्ट करने के लिए चित्र के ऊपर एक कोने में संकेत देना चाहिए जिससे विभिन्न विभागो समझने व तुलना करने मे आसानी हो।

(vii) 'उपयुक्त' चित्र का चुनाव—वास्तव में चित्र बनाना इतना कठिन नही है जि उपयुक्त प्रकार के चित्र का चुनाव करना। चित्र अनेक प्रकार के होते हैं और ये अलग-अलग प्र के समंकों के लिए उपयुक्त होते हैं। उचित चित्र का चुनाव समकों की प्रकृति, प्रदर्शन का उद्दे न्यूनतम व अधिकतम मूल्यों का अनुपात तथा सांख्यिक के विवेक, अभ्यास व अनुभव पर नि होता है। अतः इन सब बातों को ध्यान में रखकर ही चित्र के प्रकार का चुनाव करना चाहिए

चित्रों के प्रकार

(Kinds af Diagrams)

(1) एक विस्तार वाले या एक-विमा चित्र (One-Dimensional Diagrams)—दण्ड चित्र (bar diagrams) के रूप में होते हैं।

(2) दो विस्तार वाले या द्वि-विमा चित्र (Two-Dimensional Diagrams)—जै आयत, वर्ग या वृत्त-चित्र आदि।

(3) तीन विस्तार वाले या त्रि-विमा चित्र (Three-Dimensional Diagrams)—जिनमे घन या बेलनाकार चित्र सम्मिलित हैं। इन्हें परिमा-चित्र (volume diagrams) भी कहते हैं।

(4) चित्र-लेख (Pictograms or Pictures)।

(5) मान-चित्र (Cartograms or Map Diagrams)।

(6) व्यावसायिक चित्र (Business Charts)।

एक विस्तार वाले या एक-विमा चित्र

(One Dimensional Diagrams)

एक विमा चित्र उन चित्रो को कहते हैं जिन्हें बनाने मे केवल एक ही विस्तार का प्रयोग किया जाता है। ये चित्र रेखाओं (lines) या दण्ड-चित्रो (bar diagrams) के रू

होते हैं। विभिन्न इकाइयों के माप के आधार पर रेखाओं या दण्ड-चित्रों की ऊँचाई रखी जाती है। दण्ड-चित्रों में चौड़ाई भी प्रदर्शित की जाती है, परन्तु सभी चित्रों की समान चौड़ाई होने के कारण उसका कोई प्रभाव नही पड़ता। दण्ड-चित्रों का प्रयोग उन स्थितियों में किया जाता है जहां न्यूनतम व अधिकतम मूल्यों में अधिक अन्तर न हो, अर्थात्, उनका अनुपात कम हो। ये उदग्र (vertical) या क्षैतिज (horizontal) हो सकते हैं परन्तु अधिकतर उदग्र या खड़े दण्ड-चित्रों को अच्छा माना जाता है।

एक विस्तार वाले चित्र निम्न प्रकार के होते हैं—

(i) रेखा-चित्र (Line Diagrams),
(ii) सरल दण्ड-चित्र (Simple Bar Diagrams),
(iii) बहु-गुणी चित्र (Multiple Bar Diagrams),
(iv) अन्तर्विभक्त या उपविभाजित दण्ड-चित्र (Sub-Divided Bar Diagrams),
(v) प्रतिशत अन्तर्विभक्त चित्र (Percentage Sub-Divided Bars),
(vi) अन्य दण्ड-चित्र (Other Bar Diagrams)।

(i) **रेखा-चित्र (Line Diagrams)**—यदि एक तथ्य से सम्बन्धित पद-मूल्यों की संख्या अधिक हो तथा न्यूनतम व अधिकतम मूल्यों का अनुपात कम हो तो एक उचित मापदण्ड के अनुसार प्रत्येक मूल्य के बराबर लम्बाई की खड़ी या उदग्र (vertical) रेखा खींची जाती है। रेखाओं के बीच में समान अन्तर रखा जाता है। रेखा-चित्र से अधिक संख्या में दिए गये मूल्यों का तुलनात्मक अध्ययन हो जाता है, परन्तु चौड़ाई न होने के कारण इनमें विशेष आकर्षण नहीं होता।

उदाहरण (Illustration) 1 :

एक कक्षा के 20 छात्रों के भार (किलोग्राम मे) के निम्नलिखित आँकड़ों को उपयुक्त चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए—

क्रमांक	भार	क्रमांक	भार	क्रमांक	भार	क्रमांक	भार
1	40	6	49	11	55	16	61
2	43	7	49	12	55	17	63
3	43	8	50	13	58	18	63
4	44	9	52	14	60	19	65
5	47	10	53	15	60	20	67

चित्र 1—रेखा-चित्र (Line Diagram)

(ii) **सरल दण्ड-चित्र (Simple Bar Diagram)**—पद-मूल्यों के अनुपात में ऊँचाई (या लम्बाई) तथा समान चौड़ाई वाले चित्र सरल दण्ड-चित्र कहलाते हैं। इन चित्रों में बराबर अन्तर रखा जाता है। व्यक्तिगत मूल्यो, कालश्रेणी तथा स्थानानुसार समकश्रेणी के प्रदर्शन के लिए दण्ड-चित्र विशेष रूप से उपयुक्त होते हैं। सरल-दण्ड-चित्र बनाने के लिए सबसे अधिक मूल्य के आधार

पर उचित मापदण्ड निश्चित कर लिया जाता है। फिर सभी दण्ड इस पैमाने के अनुसार बनाये जाते है। अधिक आकर्षक बनाने के लिए इनमें रंगों का प्रयोग किया जा सकता है। ये उदग्र (खड़े) तथा क्षैतिज (पड़े)—दोनों प्रकार से बनाये जा सकते हैं, परन्तु उदग्र दण्ड-चित्रों का अधिक प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 2 :

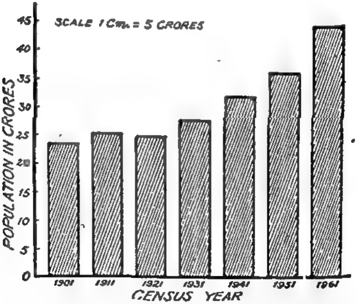
भारतीय जनसंख्या के निम्नांकित आँकड़ो को उपयुक्त चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए—

वर्ष	जनसंख्या (करोड़ो में)
1901	23·6
1911	25 2
1921	25·1
1931	27·9
1941	31·9
1951	36 1
1961	43·9

[*B. Com., Vikram, 1970*]

अधिकतम संख्या 43·9 करोड़ है, अतः 1 cm.=5 करोड़ का मापदण्ड उपयुक्त रहेगा। प्रत्येक वर्ष की संख्या को 5 से भाग दिया जायेगा और इस प्रकार प्राप्त मूल्य के बराबर सेन्टीमीटर की ऊँचाई का दण्ड-चित्र खींचा जायेगा।

भारत की जनसंख्या



चित्र 2—सरल दण्ड चित्र (Simple Bar Diagram)

उपर्युक्त दण्ड-चित्र को क्षैतिज दण्डों (horizontal bars) के रूप में भी बनाया जा सकता है। ऐसा करने में जनसंख्या का माप क्षैतिज आधार पर तथा वर्ष उदग्र माप के आधार पर लिखे जाते है।

(iii) **बहुगुणी दण्ड-चित्र (Multiple Bar Diagrams)** – दो या दो से अधिक सम्बन्धित अकसमूहों की समय या स्थान के आधार पर तुलना करने के लिए बहुगुणी (या विविध गुणों वाले) दण्ड-चित्रों का प्रयोग किया जाता है। एक स्थान या समय से सम्बन्धित विभिन्न समूहों के दण्ड-चित्र एक दूसरे से मिलाकर बनाये जाते है। फिर थोड़ा रिक्त स्थान छोड़कर दूसरे स्थान

अथवा समय के दण्ड-चित्र बनाये जाते हैं। विभिन्न तथ्यों को प्रदर्शित करने वाले दण्डों को अलग-अलग चिह्नों द्वारा अंकित किया जाता है। दो समूहों तथा तीन समूहों को प्रदर्शित करने वाले बहुगुणी दण्ड-चित्र क्रमशः युगल दण्ड-चित्र (double bars) और त्रिदण्ड-चित्र (treble bars) कहलाते हैं।

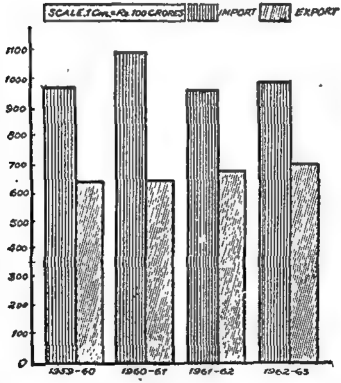
उदाहरण (Illustration) 3 :

भारत के विदेशी व्यापार के निम्नांकित आँकड़े चित्र द्वारा दर्शाइए—

वर्ष	आयात	निर्यात
1959–60	961	640
1960–61	1087	643
1961–62	958	677
1962–63	981	709

[B. Com., Vikram, 1967]

भारत के आयात एवं निर्यात



चित्र 3—युगल दण्ड-चित्र (Double Bar Diagrams)

उदाहरण (Illustration) 4 :

एक कालिज के चार सकायों की छात्र-संख्या में तीन वर्षों में होने वाले परिवर्तनों को बहुगुणी दण्ड-चित्रों द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

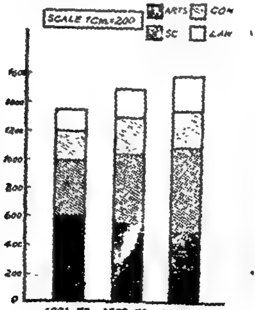
	छात्रों की संख्या		
सकाय	1971–72	1972–73	1973–74
कला (Art)	600	550	500
विज्ञान (Science)	400	500	600
वाणिज्य (Commerce)	200	250	250
विधि (Law)	150	200	250

विभिन्न संकायों में छात्र-संख्या

चित्र 4—बहुदण्ड चित्र (Multiple Bars)

(iv) अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्र (Sub-divided Bar Diagrams)—जब समकों के जोड़ तथा उनके विभिन्न विभागों (sub-divisions) का प्रदर्शन करना हो तो अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्रों का प्रयोग किया जाता है। इन्हें संघटक दण्ड-चित्र (component bar diagrams) भी कहते हैं। इन चित्रों द्वारा एक समूह से सम्बन्धित विभिन्न उप-विभागों के समंकों तथा उनके जोड़ में होने वाले निरपेक्ष परिवर्तनों का यथोचित दिग्दर्शन हो जाता है। यदि पिछले उदाहरण में विभिन्न संकायों में विद्यार्थियों की संख्या के साथ-साथ उनकी कुल संख्या में होने वाले निरपेक्ष परिवर्तनों को भी प्रदर्शित करना हो तो अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्र बनाए जायेंगे। पहले, उचित मापदण्ड पर कुल संख्या के बराबर दण्ड-चित्र बनाए जायेंगे। फिर प्रत्येक चित्र को संकाय के अनुसार विभागों में इस प्रकार बांट दिया जायेगा कि पहले विभाग के बाद ही दूसरा विभाग आरम्भ हो। सभी विभागों

विभिन्न संकायों में छात्र-संख्या



चित्र 4 (क)—अन्तर्विभक्त (संघटक) दण्ड-चित्र
(Sub-divided or Component Bar Diagrams)

का क्रम एक समान रहना चाहिये तथा उनको विभिन्न चिह्नों से अंकित कर देना चाहिए। 1971–72 मे कुल संख्या 1350 तथा 1972–73 व 1973–74 में क्रमश: 1500 और 1600 रहीं, अत: 1 से० मी० =200 का माप-दण्ड उचित रहेगा। (देखिए चित्र 4-क)

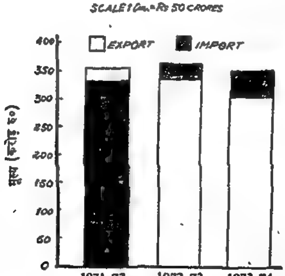
अन्तर प्रदर्शित करने वाले अन्तर्विभक्त चित्र (Sub-divided Bars Showing Difference)—अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्रों में दो प्रकार के समंकों तथा उनके पारस्परिक अन्तर को भी प्रदर्शित किया जा सकता है, जैसे आयात, निर्यात व व्यापार का अन्तर, जीवन-दर, मृत्यु-दर एवं अतिजीवन-दर आदि। ऐसे दण्ड-चित्र बनाने के लिए पहले, दोनो तथ्यों में से बड़े तथ्य को लेकर सरल दण्ड-चित्र बनाया जाता है। फिर उसमें से छोटे तथ्य के बराबर विभाग काट लिया जाता है। इस प्रकार, अन्तर ऊपर वाले खण्ड में प्रदर्शित हो जाता है। दोनों तथ्यों के अलग-अलग चिह्न निश्चित कर लिए जाते हैं। अन्तर वाले विभाग को उस तथ्य के चिह्न से अंकित किया जाता है जो बड़ा हो।

उदाहरण (Illustration) 5 :

निम्न समकों को अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्रों द्वारा निरूपित कीजिए—

विदेशी व्यापार (करोड़ रु०)

वर्ष	आयात	निर्यात	व्यापार अवशेष
1971–72	330	351	+21
1972–73	362	331	–31
1973–74	350	301	–49



चित्र 5—अन्तर वाले विभाजित दण्ड-चित्र
(Sub-divided Bars showing Difference)

(v) **प्रतिशत अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्र (Percentage Sub-divided Bars)**—एक तथ्य के विभिन्न विभागों से सम्बन्धित समंको में होने वाले सापेक्ष (relative) परिवर्तनों की आपस मे तुलना करने के लिए प्रतिशत आधार पर अन्तर्विभक्त-चित्र बनाये जाते हैं। इन्हें बनाने के लिए पहले, जोड़ को 100 मानकर सभी विभागो को प्रतिशत के रूप मे बदल लिया जाता है, फिर सचयी प्रतिशत (cumulative percentage) निकाल ली जाती है। इसके बाद उचित मापदण्ड (जैसे : 1 से० मी० =10%) के अनुसार 100% के बराबर ऊँचाई के सरल दण्ड-चित्र बनाकर उनमें आधार रेखा से संचयी प्रतिशतों के बराबर विभाग काट लिए जाते हैं। विभिन्न विभागों को अलग-अलग चिह्नों द्वारा अंकित कर दिया जाता है।

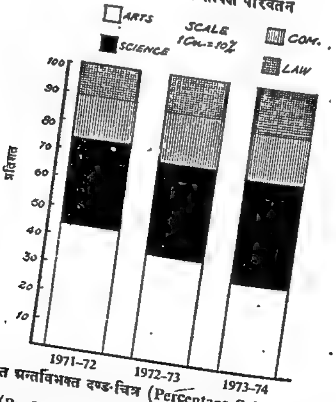
उदाहरण (Illustration) 6 :

उदाहरण 4 में दिये गये समंकों के आधार पर कालिज की छात्र-संख्या में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों (relative changes) को प्रदर्शित करने वाले उपयुक्त चित्र की रचना कीजिए—

प्रतिशत सारणी

संकाय	1971–72			1972–73			1973–74		
	छात्र संख्या	प्रतिशत	संचयी प्रतिशत	छात्र संख्या	प्रतिशत	संचयी प्रतिशत	छात्र संख्या	प्रतिशत	संचयी प्रतिशत
कला	600	44	44	550	37	37	500	31	31
विज्ञान	400	30	74	500	33	70	600	37	68
वाणिज्य	200	15	89	250	17	87	250	16	84
विधि	150	11	100	200	13	100	250	16	100
योग	1350	100		1500	100		1600	100	

छात्र-संख्या में सापेक्ष परिवर्तन



चित्र 6—प्रतिशत अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्र (Percentage Sub-divided Bars)

लाभ-हानि चित्र (Profit or Loss Diagram)—प्रतिशत अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्रों का प्रयोग किसी वस्तु की लागत के तत्त्वों व लाभ-हानि में होने वाले सापेक्ष परिवर्तन के प्रदर्शन के लिए भी किया जाता है। इस प्रकार के दण्ड-चित्रों को लाभ-हानि चित्र (profit or loss diagram) कहते हैं। ये प्रतिशत अन्तर्विभक्त चित्रों की भाँति ही बनाये जाते हैं, परन्तु विभिन्न खण्डों को ऊपर से नीचे की ओर काटा जाता है। हानि को क्षैतिज आधार रेखा से नीचे की ओर दिखाया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 7 :

निम्न समकों को प्रतिशत आधार पर खींचे जाने वाले अन्तर्विभक्त चित्रों द्वारा प्रस्तुत कीजिए—

विवरण	1970	1972	1974
लागत प्रति मेज—	रु०	रु०	रु०
(क) मजदूरी	10	15	21
(ख) अन्य लागत	5	5	7·5
(ग) पालिश-व्यय	1	5	7·5
कुल लागत	16	25	36
विक्रय मूल्य प्रति मेज	20	25	30
लाभ (+)/हानि (−)	+4	...	−6

पहले, विक्रय मूल्य प्रति मेज को 100 मानते हुए सभी तत्वों को प्रतिशत में बदला जाएगा, फिर प्रतिशत अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्र बनाया जाएगा— (चित्र 7)

विवरण	1970			1972			1974		
	रु०	प्रतिशत	संचयी प्रतिशत	रु०	प्रतिशत	संचयी प्रतिशत	रु०	प्रतिशत	संचयी प्रतिशत
मजदूरी अन्य लागत पॉलिश-व्यय	10 5 1	50 25 5	50 75 80	15 5 5	60 20 20	60 80 100	21 7·5 7·5	70 25 25	70 [illegible] 120
कुल लागत	16	80		25	100		36	120	
लाभ / हानि + −	+4	+20		...	0		−6	−20	
विक्रय मूल्य	20	100		25	100		30	100	

(vi) अन्य दण्ड-चित्र (Other Bar Diagrams)—कुछ विशेष परिस्थितियों में अन्य दण्ड-चित्रों का भी प्रयोग किया जाता है जिनमें से द्वि-दिशा दण्ड-चित्र, विचलन दण्ड-चित्र तथा जनसंख्या-स्तूप उल्लेखनीय हैं।

द्वि-दिशा दण्ड-चित्र (Duo-Directional Bar Diagrams)—समंकों के दो परस्पर विरोधी स्वरूपों का प्रदर्शन करने के लिए द्वि-दिशा चित्रों का प्रयोग किया जाता है। ये आधार-रेखा के दोनों ओर—ऊपर और नीचे—बनाये जाते हैं। एक ओर तथ्यों का एक स्वरूप प्रस्तुत किया जाता है तथा दूसरी ओर उनका दूसरा स्वरूप चित्रित किया जाता है। आधार-रेखा मध्य में रखी जाती है।

उदाहरण (Illustration) 8 :

निम्न आँकड़ों को द्वि-दिशा दण्ड-चित्रों द्वारा प्रदर्शित कीजिये— (चित्र 8)

एक सूती वस्त्र कारखाने के लाभ (लाख रु०)

वर्ष	शुद्ध लाभ	व्यय	सकल लाभ
1970	5	3	8
1971	5	5	10
1972	4	5	9
1973	5	2	7
1974	3	4	7

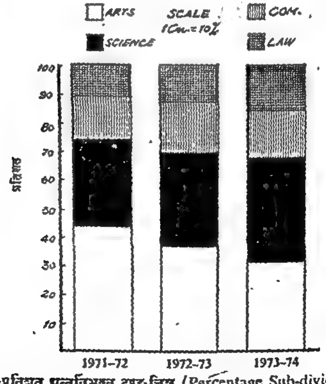
उदाहरण (Illustration) 6 :

उदाहरण 4 में दिये गये समंकों के आधार पर कालिज की छात्र-संख्या में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों (relative changes) को प्रदर्शित करने वाले उपयुक्त चित्र की रचना कीजिए—

प्रतिशत सारणी

संकाय	1971-72			1972-73			1973-74		
	छात्र संख्या	प्रतिशत	संचयी प्रतिशत	छात्र संख्या	प्रतिशत	संचयी प्रतिशत	छात्र संख्या	प्रतिशत	संचयी प्रतिशत
कला	600	44	44	550	37	37	500	31	31
विज्ञान	400	30	74	500	33	70	600	37	68
वाणिज्य	200	15	89	250	17	87	250	16	84
विधि	150	11	100	200	13	100	250	16	100
योग	1350	100		1500	100		1600	100	

छात्र-संख्या में सापेक्ष परिवर्तन



चित्र 6—प्रतिशत अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्र (Percentage Sub-divided Bars)

लाभ-हानि चित्र (Profit or Loss Diagram)—प्रतिशत अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्रों का प्रयोग किसी वस्तु की लागत के तत्वों व लाभ-हानि में होने वाले सापेक्ष परिवर्तन के प्रदर्शन के लिए भी किया जाता है। इस प्रकार के दण्ड-चित्रों को लाभ-हानि चित्र (profit or loss diagram) कहते हैं। ये प्रतिशत अन्तर्विभक्त चित्रों की भाँति ही बनाये जाते हैं, परन्तु विभिन्न खण्डों को ऊपर से नीचे की ओर काटा जाता है। हानि को क्षैतिज आधार रेखा से नीचे की ओर दिखाया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 7 :

निम्न समंको को प्रतिशत आधार पर खींचे जाने वाले अन्तर्विभक्त चित्रो द्वारा प्रस्तुत कीजिए—

विवरण	1970	1972	1974
लागत प्रति मेज—	रु०	रु०	रु०
(क) मजदूरी	10	15	21
(ख) अन्य लागत	5	5	7·5
(ग) पालिश-व्यय	1	5	7·5
कुल लागत	16	25	36
विक्रय मूल्य प्रति मेज	20	25	30
लाभ (+)/हानि (−)	+4	...	−6

पहले, विक्रय मूल्य प्रति मेज को 100 मानते हुए सभी तत्वों को प्रतिशत में बदला जाएगा, फिर प्रतिशत अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्र बनाया जाएगा— (चित्र 7)

विवरण	1970			1972			1974		
	रु०	प्रतिशत	सचयी प्रतिशत	रु०	प्रतिशत	सचयी प्रतिशत	रु०	प्रतिशत	सचयी प्रतिशत
मजदूरी	10	50	50	15	60	60	21	70	70
अन्य लागत	5	25	75	5	20	80	7·5	25	95
पॉलिश-व्यय	1	5	80	5	20	100	7·5	25	120
कुल लागत	16	80		25	100		36	120	
लाभ / हानि + −	+4	+20		...	0		−6	−20	
विक्रय मूल्य	20	100		25	100		30	100	

(vi) अन्य दण्ड-चित्र (Other Bar Diagrams)—कुछ विशेष परिस्थितियों में अन्य दण्ड-चित्रों का भी प्रयोग किया जाता है जिनमें से द्वि-दिशा दण्ड-चित्र, विचलन दण्ड-चित्र तथा जनसंख्या-स्तूप उल्लेखनीय हैं।

द्वि-दिशा दण्ड-चित्र (Duo-Directional Bar Diagrams)—समंकों के दो परस्पर विरोधी स्वरूपों का प्रदर्शन करने के लिए द्वि-दिशा चित्रों का प्रयोग किया जाता है। ये आधार-रेखा के दोनों ओर—ऊपर और नीचे—बनाये जाते हैं। एक ओर तथ्यो का एक स्वरूप प्रस्तुत किया जाता है तथा दूसरी ओर उनका दूसरा स्वरूप चित्रित किया जाता है। आधार-रेखा मध्य में रखी जाती है।

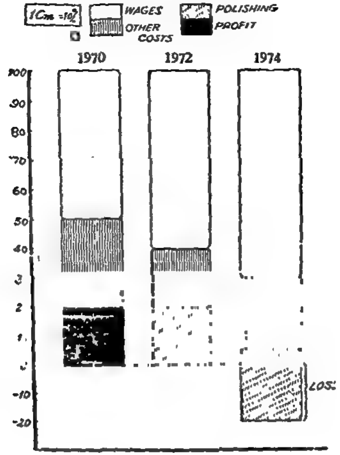
उदाहरण (Illustration) 8 :

निम्न आँकड़ों को द्वि-दिशा दण्ड-चित्रों द्वारा प्रदर्शित कीजिये— (चित्र 8)

एक सूती वस्त्र कारखाने के लाभ (लाख रु०)

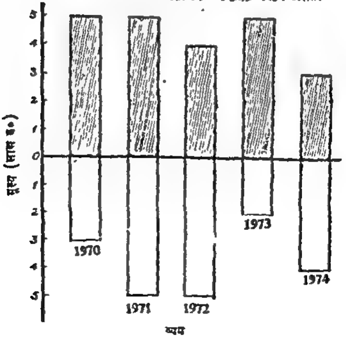
वर्ष	शुद्ध लाभ	व्यय	सकल लाभ
1970	5	3	8
1971	5	5	10
1972	4	5	9
1973	5	2	7
1974	3	4	7

प्रतिशत लागत, विक्रय-मूल्य, लाभ-हानि (प्रति मेज)



चित्र 7—प्रतिशत दण्ड-चित्र (Percentage Bars)

एक कारखाने का शुद्ध लाभ व व्यय



चित्र 8—द्वि-दिशा दण्ड-चित्र (Duo-Directional Bars)

कभी-कभी द्वि-दिशा चित्र प्रतिशत मूल्यों के आधार पर बनाये जाते हैं। ऐसी स्थिति में प्रत्येक दण्ड-चित्र की कुल लम्बाई बराबर होती है तथा आधार-रेखा के एक ओर एक भाग की प्रतिशत तथा दूसरी ओर दूसरे भाग की शेष प्रतिशत होती है। इन चित्रों को सरकन दण्ड-चित्र (sliding bars) भी कहते हैं। इनका प्रयोग साक्षरता-निरक्षरता प्रतिशत, उत्तीर्ण व अनुत्तीर्ण विद्यार्थियों की प्रतिशत आदि का चित्रण करने के लिए किया जाता है।

विचलन दण्ड-चित्र (Deviation Bars)—विभिन्न राशियों के शुद्ध विचलनों (net deviations) को प्रदर्शित करने के लिए विचलन दण्ड-चित्रों का प्रयोग किया जाता है। धनात्मक व ऋणात्मक विचलनों को क्रमशः आधार-रेखा के ऊपर और नीचे या दाहिनी ओर बायीं ओर चित्रित किया जाता है। आयात-निर्यात के शुद्ध अन्तर, बचत व घाटा, लाभ-हानि आदि का प्रदर्शन इस प्रकार के चित्रों द्वारा किया जाता है। ये अधिकतर क्षैतिज रूप में बनाये जाते हैं। द्वि-दिशा दण्ड-चित्रों की भाँति इनकी आधार-रेखा भी मध्य में होती है।

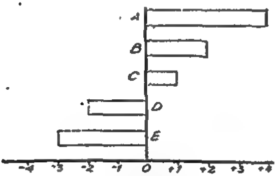
उदाहरण (Illustration) 9 :

निम्न शुद्ध विचलनों (net deviations) को उपयुक्त चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए—

(लाख रु०)

नगरपालिका	आय	व्यय	बचत/घाटा
A	22	18	+4
B	24	22	+2
C	19	18	+1
D	10	12	−2
E	15	18	−3

नगरपालिकाओं की शुद्ध बचत व घाटा



रुपये (लाखों में)

चित्र 9—विचलन दण्ड-चित्र (Deviation Bars)

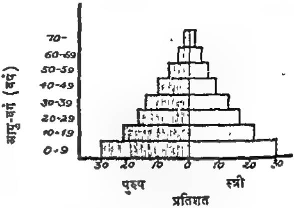
जनसंख्या-स्तूप (Population Pyramid)—जनसंख्या का आयु, वर्गों, लिंग, साक्षरता आदि के आधार पर वितरण एक स्तूपाकार दण्ड-चित्र के रूप में प्रदर्शित किया जाता है जिसे जनसंख्या स्तूप कहते हैं। यह वस्तुतः क्षैतिज द्वि-दिशा दण्ड-चित्रों की भाँति बनाया जाता है। आधार-रेखा मध्य में होती है तथा विभिन्न आयु-वर्गों के दण्ड-चित्र एक दूसरे से सटाकर नीचे से ऊपर की ओर बनाए जाते हैं।

उदाहरण (Illustration) 10 :

आयु व लिंग के अनुसार वर्गित भारत की जनसंख्या को उपयुक्त चित्र के रूप में प्रस्तुत कीजिए—

आयु-वर्ग	पुरुष (%)	स्त्री (%)
70 से अधिक	1·76	2·04
60-69	3·27	3·37
50-59	6·28	6·00
40-49	9·68	9·00
30-39	13·25	12·31
20-29	16·53	16·76
10-19	21·15	21·13
0- 9	28·08	28·89

आयु व लिंगानुसार भारतीय जनसंख्या का वितरण



चित्र 10—जनसंख्या-स्तूप (Population Pyramid)

दो विस्तार वाले या द्वि-विमा चित्र
(Two Dimensional Diagrams)

दण्ड-चित्रों में केवल एक ही विस्तार का ध्यान रखा जाता है, परन्तु द्वि-विमा चित्रों में दो विस्तारों—ऊँचाई तथा चौड़ाई के द्वारा समंकों का चित्रण किया जाता है। इन चित्रों के क्षेत्रफल पद-मूल्यों के अनुपात में होते हैं अतः इन्हें क्षेत्रफल चित्र (area diagram) अथवा धरातल चित्र (surface diagram) भी कहते हैं।

द्वि-विमा चित्र निम्न प्रकार के होते हैं—

(i) आयत चित्र (Rectangular Diagrams), (ii) वर्ग-चित्र (Square Diagrams),
(iii) वृत्तीय चित्र (Circular or Pie Diagrams)।

(i) आयत चित्र (Rectangular Diagrams)—आयत चित्र उस स्थिति में उपयुक्त होते हैं जब विभिन्न उप-विभागों वाली दो या दो से अधिक राशियों की पारस्परिक तुलना करनी होती है। ये निम्न दो प्रकार के होते हैं—

(क) प्रतिशत अन्तर्विभक्त आयत चित्र (Percentage Sub-divided Rectangle)—विभिन्न परिवारों के पारिवारिक बजट की तुलना करने के लिए अधिकतर इस प्रकार के आयत चित्र का प्रयोग किया जाता है। परिवार की कुल आय को 100 मानकर विभिन्न मदों पर होने वाले व्यय की राशियों को प्रतिशत में बदल दिया जाता है। तत्पश्चात् 100 के बराबर मापदण्ड पर सभी परिवारों के लिए बराबर ऊँचाई वाले आयत बना लिए जाते हैं तथा इनकी चौड़ाई परिवारों की कुल आय के अनुपात में रखी जाती है। व्यय की प्रतिशत राशियों के अनुसार नीचे से ऊपर की ओर विभिन्न खण्ड काट लिए जाते हैं। इस प्रकार इन आयतों के क्षेत्रफल द्वारा कुल आय की तथा विभिन्न उप-विभागों द्वारा व्यय की मदों की सापेक्ष तुलना की जा सकती है।

उदाहरण (Illustration) 11 :

दो विस्तार चित्रों द्वारा निम्नांकित दो परिवारों के मासिक व्यय की सूचना दर्शाइए—

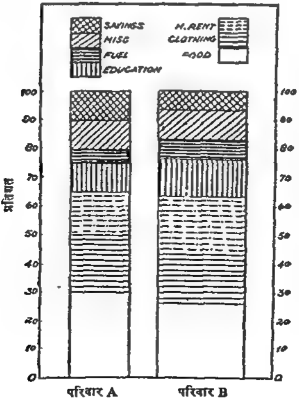
व्यय की मद (Item of Expenditure)	परिवार *A* आय 400 रु० मासिक	परिवार *B* आय 600 रु० मासिक
भोजन (Food)	120	160
वस्त्र (Clothing)	80	100
मकान किराया (House Rent)	60	120
शिक्षा (Education)	40	80
ईंधन (Fuel)	20	40
विविध (Miscellaneous)	40	60

[B. Com., Vikram, 1968, Lucknow, 1968, Agra, 1967]

परिवार 'A' तथा 'B' में व्यय की विभिन्न राशियों के जोड़ क्रमशः रु० 360 और रु० 560 है, अतः शेष रु० 40 दोनों में बचत (savings) की राशि मानी गई है। आय को 100 मानते हुए विभिन्न मदों को निम्न प्रकार प्रतिशतों में बदला जाएगा तथा बाद में प्रतिशत अन्तर्विभक्त आयत-चित्र की रचना की जाएगी। आयतों की चौड़ाई 400 : 600 अर्थात् 2 : 3 के अनुपात में रखी जाएगी।

व्यय-मद	परिवार *A* (रु० 400)			परिवार *B* (रु० 600)		
	रु०	प्रतिशत	सचयी प्रतिशत	रु०	प्रतिशत	सचयी प्रतिशत
भोजन	120	30	30	160	26·7	26·7
वस्त्र	80	20	50	100	16·7	43·4
मकान किराया	60	15	65	120	20	63·4
शिक्षा	40	10	75	80	13·3	76·7
ईंधन	20	5	80	40	6·7	83·4
विविध	40	10	90	60	10	93·4
बचत	40	10	100	40	6·6	100·0
योग	400	100		600	100	

दो परिवारों का मासिक व्यय



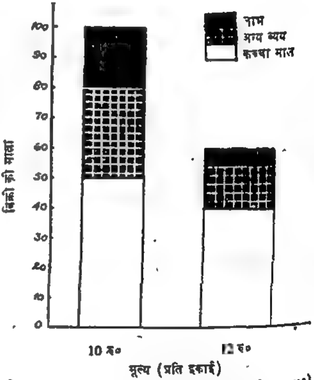
चित्र 11—प्रतिशत अन्तर्विभक्त आयत (Percentage Sub-divided Rectangles)

(ख) विभाजित आयत-चित्र (Sub-divided Rectangles)—इन चित्रों का प्रयोग तीन विभिन्न किन्तु परस्पर सम्बन्धित तथ्यों के चित्रण के लिए किया जाता है। उदाहरणार्थ—किसी वस्तु का प्रति इकाई मूल्य, उसकी बिक्री की मात्रा तथा विक्रय राशि के विभिन्न तत्वों को साथ-साथ विभाजित आयत के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है। ऐसे चित्र में प्रति इकाई मूल्यों के अनुपात में चौड़ाई तथा विक्रय की मात्राओं के अनुपात में ऊँचाई रखी जाती है। इस प्रकार कुल विक्रय-मूल्य आयत के क्षेत्रफल (ऊँचाई×चौड़ाई) के अनुपात से व्यक्त हो जाता है। इस क्षेत्रफल में से विक्रय-मूल्य के अलग-अलग तत्त्वों के अनुसार क्षेत्रफल के खण्ड कर लिए जाते हैं। प्रत्येक उप-विभाग की कुल राशि (अर्थात् उस विभाग के क्षेत्रफल) को प्रति इकाई मूल्य (चौड़ाई) से भाग देकर उस खण्ड की ऊँचाई निकाल ली जाती है।

उदाहरण (Illustration) 12 :

निम्न समंकों को आयत चित्रों द्वारा प्रदर्शित कीजिए—

	I	II
एक वस्तु का मूल्य (प्रति इकाई)	रु० 10	रु० 12
बिक्री की मात्रा (इकाई)	100	60
कच्चे माल की कीमत	रु० 500	रु० 480
अन्य व्यय	300	168
लाभ	200	72
विक्रय मूल्य (रु०)	1000	720



चित्र 12—आयत चित्र (Rectangular Diagrams)

यदि बिक्री की मात्रा के साथ-साथ प्रति इकाई लाभ, प्रति इकाई लागत-तत्त्व आदि भी प्रदर्शित करने हों तो आयत-चित्र में बिक्री (या उत्पादन) की मात्रा क्षैतिज माप-दण्ड (horizontal scale) पर और प्रति इकाई बिक्री मूल्य उदग्र मापदण्ड (vertical scale) पर प्रस्तुत किया जाता है। लागत के विभिन्न तत्त्वों पर खर्च की गई राशि को इकाइयों की संख्या से भाग देकर प्रति इकाई लागत तत्त्व भी ज्ञात कर लिए जाते हैं जिन्हें खड़े मापदण्ड पर ही प्रदर्शित किया जाता है। निम्न उदाहरण से यह स्पष्ट हो जाता है।

उदाहरण (Illustration) 13 :

कारखाना	मजदूरी (रु०)	सामग्री (रु०)	अन्य लागत (रु०)	लाभ (रु०)	उत्पादित इकाइयों की संख्या
A	3000	5000	1000	1000	1000
B	2000	3000	800	500	700

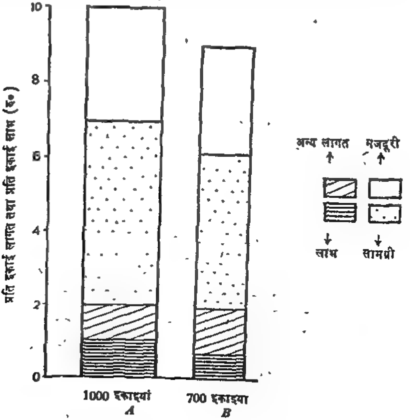
उपर्युक्त सूचना के अतिरिक्त प्रति इकाई लागत तथा प्रति इकाई लाभ को भी चित्र द्वारा प्रकट कीजिए। *[B. Com., Meerut, 1968]*

हल (Solution) :

यहाँ पर, दी हुई सूचना के अतिरिक्त प्रति इकाई लागत तथा प्रति इकाई लाभ सम्बन्धी विवरण भी आयताकार चित्र द्वारा प्रदर्शित किया जाना है। सर्वप्रथम, प्रति इकाई राशियाँ निम्न सारणी से ज्ञात कर ली जायेंगी—

विवरण	A 1000 इकाइयां		B 700 इकाइयां	
	कुल रुपये	प्रति इकाई (रु०)	कुल रुपये	प्रति इकाई (रु०)
मजदूरी	3000	3·00	2000	2·86
सामग्री	5000	5·00	3000	4 29
अन्य लागत	1000	1·00	800	1·14
कुल लागत	9000	9·00	5,800	8·29
लाभ	1000	1·00	500	0 71
कुल विक्रय मूल्य	10,000	10·00	6300	9·00

आयतों की चौड़ाई *A* और *B* द्वारा उत्पादित इकाइयों के अनुपात मे (1000 : 700 अर्थात् 10 : 7) रखी जाएगी और आयतों की ऊँचाई प्रति इकाई मूल्यों के अनुपात (10 : 9) में प्रस्तुत की जाएगी। प्रति इकाई लागत तत्त्व और प्रति इकाई लाभ उदग्र माप-दण्ड पर ऊँचाई से काटा जाएगा। प्रत्येक खण्ड का क्षेत्रफल उस पर होने वाले कुल लागत-व्यय को प्रकट करेगा।



चित्र 13—आयत-चित्र

(ii) वर्ग-चित्र (Square Diagrams)—जब तथ्यों के न्यूनतम और अधिकतम मूल्यों में काफी अन्तर होता है तो दण्ड-चित्र नहीं बनाये जा सकते। उदाहरणार्थ—यदि न्यूनतम और अधिकतम मूल्य क्रमशः 100 और 3600 हों तो सबसे बड़ा दण्ड सबसे छोटे का 36 गुना होगा। अतः इस अनुपात को एक-विमा चित्रों द्वारा प्रदर्शित करना लगभग असम्भव है। ऐसी स्थिति में वर्ग-चित्रों का प्रयोग किया जाता है। वर्ग बनाने से पहले समंकों का वर्गमूल लिया जाता है फिर वर्गमूलों के अनुपात में वर्गों की रचना की जाती है। 100 और 3600 के वर्गमूल 10 और 60 हैं। यदि एक वर्ग 1 cm. के आधार पर बनाया जाय और दूसरा 6 cms. के आधार पर, तो इन दोनों वर्गों के क्षेत्रफल द्वारा 100 और 3600 का यथोचित चित्रण हो जायेगा। यह आवश्यक है कि सभी वर्ग एक ही क्षैतिज सरल रेखा के आधार पर बनाये जायें जिससे उनकी सरलता से तुलना की जा सके।

उदाहरण (Illustration) 14 :

पाँच परिवारों की औसत मासिक आय निम्नलिखित है—

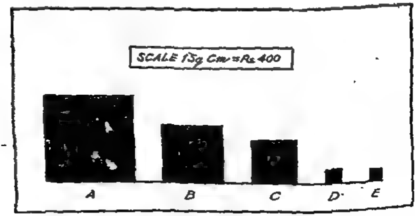
परिवार :	A	B	C	D	E
आय (रु०) :	3600	1600	900	100	75

उपर्युक्त समंकों को एक उपयुक्त चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

न्यूनतम मूल्य (75 रु०) और अधिकतम मूल्य (3600 रु०) में अधिक अनुपात होने के कारण वर्ग-चित्रों का प्रयोग किया जायेगा। मूल्यों के वर्गमूल निकालकर उन वर्गमूलों के अनुपात में वर्ग-चित्रों की रचना की जाएगी।

परिवार	आय (रु०)	वर्गमूल	वर्ग की भुजा (से० मी०)
A	3,600	60	3
B	1,600	40	2
C	900	30	1·5
D	100	10	0·5
E	75	8·66	0·43

कुछ परिवारों की मासिक आय



चित्र 14—वर्ग-चित्र (Square Diagram)

वर्गों की भुजाओं की लम्बाई ज्ञात करने के लिए उपलब्ध स्थान को ध्यान में रखा जाता है। मान लीजिये वर्ग-रचना के लिए हम कुल 12 से० मी० का स्थान प्रयोग करना चाहते हैं जिसमें से वर्गों के बीच में रिक्त स्थान कुल लगभग 4 से० मी० छूट जायेगा। इस प्रकार वर्ग-भुजाओं का जोड़ लगभग 8 से० मी० होना चाहिए। अब वर्गमूलों का जोड़ निकालकर तथा उस जोड़ को 8 से

भाग देकर वह संख्या निकाल ली जायेगी जिससे प्रत्येक वर्गमूल को भाग देने पर वर्ग-भुजाओं की इच्छित लम्बाई ज्ञात हो जायेगी। प्रस्तुत उदाहरण में वर्ग-मूलों के जोड़ 148·66 को 8 से भाग देने पर लगभग 19 आता है जिसके सन्निकट सरल मूल्य 20 से सभी वर्गमूलों को भाग करके भुजाओं की लम्बाई ज्ञात की गई है।

वर्गों का पैमाना (scale) निकालने के लिए किसी एक वर्ग की भुजा की लम्बाई का वर्ग करके क्षेत्रफल ज्ञात कर लिया जाता है। फिर यह देखा जाता है कि वह क्षेत्रफल किस मूल्य को प्रदर्शित कर रहा है। उसी आधार पर 1 वर्ग से० मी० का मूल्य निकाल लिया जाता है। उदाहरणार्थ—2 से० मी० की भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल $2 \times 2 = 4$ वर्ग से० मी० है जो 1600 रु० को चित्रित करता है। अतः 1 वर्ग से० मी० $= 1600 \div 4 = 400$ रु०

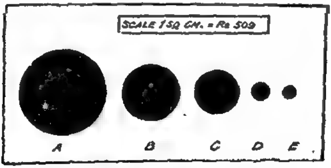
यदि कुल जोड़ और उसके उप-विभागों को प्रदर्शित करना हो तो अन्तर्विभक्त वर्ग की रचना की जा सकती है।

(iii) वृत्त-चित्र (Circular or Pie Diagrams)—जिन परिस्थितियों में वर्ग-चित्रों का प्रयोग उपयुक्त होता है उन्हीं क्षेत्रों में वृत्त-चित्रों का प्रयोग किया जा सकता है। वृत्त का क्षेत्रफल उसकी त्रिज्या या अर्द्धव्यास (radius) के अनुपात में बदलता है। वृत्त-चित्र बनाने में सरल होते है और देखने में अधिक चित्ताकर्षक लगते हैं। वर्ग-रचना की भाँति वृत्त-चित्रों की रचना भी मूल्यों के वर्गमूल निकाल कर की जाती है। वर्गमूलों के अनुपात में वृत्तों की त्रिज्यायें ज्ञात कर ली जाती हैं जिसके आधार पर उनकी रचना कर ली जाती है। यह ध्यान रखना आवश्यक है कि सभी वृत्तों के केन्द्र एक सरल क्षैतिज रेखा पर होने चाहियें तथा उन वृत्तों में आपस में बराबर अन्तर छोड़ देना चाहिए।

उदाहरण (Illustration) 15 :

उदाहरण 14 में प्रदत्त समकों को वृत्त-चित्र (circular diagrams) द्वारा प्रस्तुत कीजिए—

पिछले उदाहरण में प्रयुक्त वर्ग-भुजाओं के आधे के बराबर त्रिज्याओं के आधार पर वृत्त बनाये जायेंगे। इस प्रकार पाँच वृत्तों की त्रिज्यायें क्रमशः 1·5 से० मी०, 1 से० मी०, ·75 से० मी०, ·25 से० मी० और ·22 से० मी० होंगी।



चित्र 15—वृत्त-चित्र (Circular Diagrams)

वृत्त-चित्रों का पैमाना (scale) निकालने के लिए पहले किसी वृत्त की त्रिज्या के आधार पर उसका क्षेत्रफल ज्ञात कर लिया जाता है और यह देखा जाता है कि वह क्षेत्रफल किस मूल्य का प्रदर्शन करता है। फिर उसी आधार पर 1 वर्ग से० मी० द्वारा प्रदर्शित मूल्य निकाल लिया जाता है। वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 के बराबर होता है जहाँ π (pie)$=3·1416$ या $22 \div 7$ और $r=$radius या त्रिज्या। उपर्युक्त चित्र में 1 से० मी० की त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल $\frac{22}{7} \times 1^2$ वर्ग से० मी० है जो 1600 रु० को प्रदर्शित करता है। अतः 1 वर्ग से० मी० $=509$ रु०

कोणीय चित्र या वृत्त-खण्ड चित्र (Angular or Sector Diagram)—समंकों के कुल योग और उनके उप-विभागों का तुलनात्मक प्रदर्शन करने के लिए कोणीय या वृत्त-खण्ड चित्रों का प्रयोग किया जाता है। वृत्त के केन्द्र में 360° का कोण होता है। अतः कुल जोड़ को 360° मानकर उसके आधार पर विभिन्न विभागों के कोणों (angles) का माप निकाल लिया जाता है। केन्द्र से इन विभागों के कोण बनाकर वृत्त को अलग-अलग खण्डों में अन्तर्विभक्त कर दिया जाता है। ऐसे वृत्त को अन्तर्विभक्त वृत्त (subdivided circle) भी कहते हैं। यदि दो कोणीय वृत्त बनाने हों तो तुलनात्मक प्रदर्शन के लिए उनकी त्रिज्यायें कुल जोड़ के वर्गमूल के अनुपात में रखी जाती हैं।

उदाहरण (Illustration) 16 :

निम्न आँकड़ों का कोणीय चित्र (angular diagram) द्वारा निरूपण कीजिए—

सार्वजनिक क्षेत्र में योजना-व्यय का वितरण

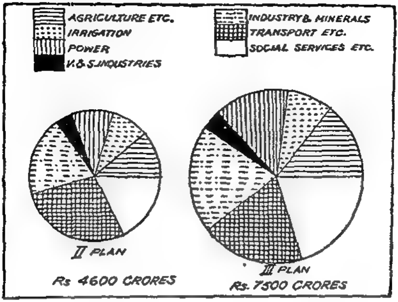
(करोड़ रु० में)

मद	दूसरी योजना	तीसरी योजना
कृषि	529	1068
सिंचाई	420	650
शक्ति	445	1012
ग्राम एवं लघु-उद्योग	176	264
उद्योग और खानें	900	1520
यातायात एवं संचार व्यवस्था	1300	1486
सामाजिक सेवाएँ आदि	830	1500
	4600	7500

$\sqrt{4600} : \sqrt{7500}$ अर्थात् 67·8 : 86·6 के अनुपात में त्रिज्या लेकर उनके आधार पर दो वृत्त बनाये जायेंगे। फिर जोड़ों को 360 मानते हुए विभिन्न मदों के कोणीय माप निकालकर केन्द्र से क्रमानुसार—विभिन्न कोणों के खण्ड काटे जायेंगे।

मद	दूसरी योजना		तीसरी योजना	
	करोड़ रुपये	अंश	करोड़ रुपये	अंश
कृषि	529	41	1068	51
सिंचाई	420	33	650	32
शक्ति	445	35	1012	48
ग्राम एवं लघु-उद्योग	176	14	264	13
उद्योग और खानें	900	70	1520	73
यातायात एवं संचार व्यवस्था	1300	102	1486	71
सामाजिक सेवाएँ आदि	830	65	1500	72
योग	4600	360°	7500	360°
वृत्तों की त्रिज्यायें	67 8	2·26 सें०मी०	86 6	2 90 सें०मी०

सार्वजनिक क्षेत्र में योजना-व्यय



चित्र 16—कोणीय चित्र (Angular or Pie Diagram)

तीन विस्तार वाले या त्रिविमा चित्र
(Three Dimensional Diagrams)

जब मूल्यों में बहुत अधिक विषमता होती है तो वर्ग या वृत्त-चित्र बनाना भी कठिन हो जाता है क्योंकि उनके वर्गमूलों मे भी काफी अन्तर रहता है। ऐसी स्थिति मे तीन विस्तार वाले या त्रिविमा चित्रों का प्रयोग उचित होता है। त्रिविमा चित्रो में तीनों विस्तारों—ऊँचाई, चौड़ाई तथा मोटाई या गहराई—का प्रयोग किया जाता है। इन्हे परिमा चित्र (volume diagrams) भी कहते हैं क्योंकि इन चित्रों के आयतन द्वारा समकों का प्रदर्शन किया जाता है। त्रिविमा चित्रों मे घन (cubes), इष्टका (blocks), गोल (spheres) तथा बेलनाकार चित्र शामिल है। परन्तु घन के अतिरिक्त अन्य परिमा चित्रों की रचना अत्यन्त कठिन है।

घन (cubes) की रचना करने के लिए मूल्यों के घनमूल (cube roots) निकाले जाते हैं। घनमूल निकालने के लिए मूल्य का लघुगणक (log) ज्ञात करके उसे 3 से भाग दे दिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त राशि का प्रतिलघुगणक (antilog) ही घनमूल होता है। घनमूलों के अनुपात में ही घनो को भुजायें रखी जाती हैं। घन की भुजा के आधार पर पहले एक वर्ग बनाया जाता है, फिर उसी क्षेत्रफल का दूसरा वर्ग इस प्रकार बनाया जाता है कि उसका बायां निचला कोना पहले वर्ग के बिल्कुल केन्द्र-बिन्दु पर हो और भुजायें समानान्तर हों। दोनो वर्गों के कोने मिला देने से घन पूरा बन जाता है। घन का पैमाना वर्ग के पैमाने की भाँति ही ज्ञात किया जाता है। अन्तर केवल यह है कि घन की भुजा का घन (cube) निकाल कर उस घन-चित्र का आयतन निकाल लिया जाता है और इसी आधार पर 1 घन से० मी० द्वारा प्रदर्शित मूल्य ज्ञात कर लिया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 17 :

एक मिल मालिक और एक श्रमिक की मासिक आय के निम्नलिखित समंकों को उपयुक्त चित्र द्वारा प्रकट कीजिए।

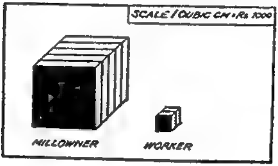
मिल मालिक 8000 रु०, श्रमिक 125 रु०।

दोनों मूल्यों में अत्यधिक अन्तर होने के कारण दण्ड-चित्रों या वर्ग-चित्रो से इनका

चित्रण नहीं हो सकता । अतः इन्हें घनों द्वारा प्रदर्शित किया जायेगा ।

	आय (रु०)	घनमूल	घन की भुजा (से० मी०)
मिल मालिक :	8,000	20	2
श्रमिक :	125	5	0·5

मिल मालिक व मजदूर की मासिक आय



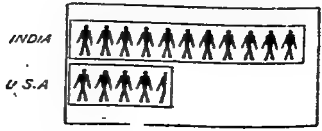
चित्र 17—घनचित्र (Cube Diagram)

चित्र-लेख
(Pictograms)

इस रीति के अन्तर्गत समकों को सम्बन्धित वस्तुओं के आकर्षक चित्रों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है । उदाहरणार्थ—जनसख्या को मनुष्य के चित्रों द्वारा, पचवर्षीय योजनाओं में सरकार के कुल व्यय को रुपयों की थैली के चित्रों द्वारा तथा इस्पात का उत्पादन इस्पात पिण्ड के चित्र बनाकर प्रदर्शित किया जा सकता है । चित्र समंकों के अनुपात में बनाये जाते हैं । विज्ञापन व प्रचार कार्य में इनका बहुत अधिक प्रयोग होता है । ये आकर्षक व प्रभावशाली होते हैं । निरक्षर व्यक्ति भी इन्हें आसानी से समझ लेता है । परन्तु इनकी रचना सरल नही है । चित्र-लेख द्वारा समंकों का आकर्षक प्रदर्शन करने की रीति का प्रयोग सर्वप्रथम वियना निवासी डा० आँटो न्यूरॅथ (Dr. Otto Neurath) ने किया था । इसी कारण चित्र-लेख रीति को वियना-रीति (Vienna method) भी कहा जाता है । निम्न उदाहरण मे 1971 में भारत व अमरीका की जनसख्या को चित्र-लेख द्वारा प्रस्तुत किया गया है ।

भारत व अमरीका की जनसख्या (1971)

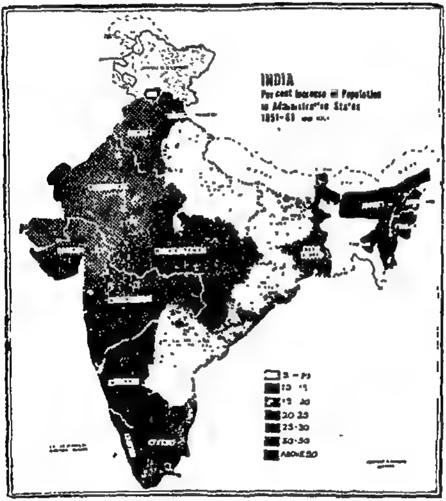
(1 मानव आकृति = 5 करोड़ व्यक्ति)



चित्र 17-A—चित्र-लेख (Pictogram)

मानचित्र
(Cartograms)

प्रादेशिक या भौगोलिक समकों के प्रदर्शन के लिए मानचित्र अधिक उपयुक्त होते हैं। किसी देश मे जनसंख्या का घनत्व, जलवायु या वनस्पति वितरण, कृषि-उपज, औद्योगिक उत्पादन, खनिज पदार्थों का उत्पादन, जल-विद्युत -योजनाओं आदि का प्रदर्शन उस देश के मानचित्र पर आकर्षक ढंग से किया जा सकता है। विभिन्न तथ्यो को दिखाने के लिए विभिन्न सकेतों व चिह्नों का प्रयोग किया जाता है।



चित्र 17-B—मानचित्र (Cartogram)

विशेष प्रकार के व्यावसायिक चित्र
(Special Types of Business Charts)

आजकल व्यवसाय-प्रबन्धकों द्वारा अनेक व्यावसायिक क्रियाओं के सम्बन्ध में सूक्ष्म रूप में सूचना प्राप्त करने तथा उन पर निर्णय लेने के लिए कुछ विशेष प्रकार के चित्रों का प्रयोग किया जाता है जिनमें से प्रमुख निम्नलिखित हैं—

(1) गैन्ट-चित्र (Gantt Chart),
(2) सम-विच्छेद चित्र (Break Even Chart),
(3) शुद्ध-अवशेष चित्र (Net Balance Chart),
(4) छाया-चित्र (Silhouette Chart),

(5) कटिबन्ध-चित्र या अधिकतम-विचरण चित्र (Zone Chart or Maximum Variation Chart),
(6) संघटक भाग चित्र (Component Part Chart),
(7) ज़ी-चित्र (Zee Chart),
(8) अन्य विशिष्ट चित्र (Other Specialised Charts)।

गैन्ट चित्र
(Gantt Chart)

किसी कारखाने के विभिन्न विभागों में दिन प्रतिदिन, उत्पादन के पूर्व निर्धारित लक्ष्यों और उनको प्राप्त करने में की गई प्रगति की तुलना करने के उद्देश्य से गैन्ट चित्र (Gantt Chart) या प्रगति चित्र (progress chart) का निर्माण किया जाता है। इसका प्रयोग सर्वप्रथम प्रसिद्ध प्रबन्ध-अभियन्ता हेनरी गैन्ट (Henry L. Gantt) ने 1917 में किया था। तब से प्रबन्धकों द्वारा उत्पादन-योजना तथा उपलब्धि की तुलना करने में गैन्ट प्रगति-चित्रों का व्यापक प्रयोग किया जाने लगा है। इनके द्वारा प्रत्येक विभाग में प्रतिदिन लक्ष्य-प्राप्ति की दिशा में होने वाली प्रगति की सूचना सरलता व शीघ्रता से मिलती रहती है।

रचना विधि—गैन्ट चार्ट बनाने के लिए वर्गित पत्र पर बराबर चौड़ाई के सात खाने खींचे जाते हैं। पहले खाने में मशीन या विभाग का नाम लिखा जाता है तथा शेष छः खानों में सप्ताह के कार्य-दिवसों के नाम लिखे जाते हैं। प्रत्येक दिन के खाने को 8 या 10 घण्टों के अनुसार छोटे-छोटे खानों में बाँटा जा सकता है। प्रतिदिन के निर्धारित कार्य को 100 के बराबर माना जाता है और वास्तव में किये गए कार्य को उसके प्रतिशत के रूप में एक पड़ी हल्की रेखा या हल्के दण्ड-चित्र (horizontal bar) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। यदि किसी दिन निर्धारित कार्य से अधिक कार्य होता है तो सम्बन्धित खाने में पूरे दण्ड-चित्र के अतिरिक्त दूसरा खाली दण्ड-चित्र उस कार्याधिक्य को व्यक्त करने के लिए खींचा जाता है। यदि किसी दिन कार्य नहीं होता है तो उस दिन के खाने में उसके कारण को सकेताक्षर के रूप में लिख दिया जाता है जैसे यन्त्र की टूट-फूट हो जाने पर 'B' (Breakdown), समय पर सामग्री न मिलने के लिए 'M'—(Waiting for Materials), बिजली बन्द हो जाने पर 'P'—(Power Shut-down), मरम्मत के लिए 'R'—(Repairs) इत्यादि। सप्ताह भर के कुल किये गए कार्य अर्थात् संचयी योग (cumulative total) को सम्बन्धित विभाग के सामने गहरी पड़ी रेखा या मोटे दण्ड चित्र द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

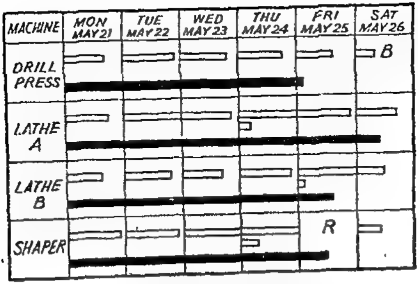
उदाहरण (Illustration) 18 :

निम्न सारणी में किसी कारखाने के चार मशीन विभागों में एक सप्ताह के प्रतिदिन किये गए कार्य का प्रतिशत दिया हुआ है।

मशीन	सोमवार 21 मई	मंगलवार 22 मई	बुधवार 23 मई	बृहस्पतिवार 24 मई	शुक्रवार 25 मई	शनिवार 26 मई	साप्ताहिक योग
Drill Press	70	90	10	75	60	35 Breakdown	410
Lathe A	75	100	85	120	90	70	540
Lathe B	60	80	70	93	110	50	460
Shaper	90	90	100	130	Repairs	40	450

प्रत्येक दिन के कार्य का आयोजित अभ्यंश (quota) 100% मानते हुए एक गैन्ट चार्ट की रचना कीजिए।

हल (Solution) :



चित्र 18—गैन्ट चित्र (Gantt Chart)

गैन्ट चित्र मुख्यत: चार प्रकार के होते है—(क) प्रगति चित्र (Progress Charts) जिनका उद्देश्य लक्ष्य और उपलब्धि की तुलना करके कमी के कारणों को स्पष्ट करना है, (ख) मानव-मशीन लेखा-चित्र (Man and Machine Record Charts) जिनकी सहायता से उपयुक्त कारणों सहित यह प्रदर्शित किया जाता है कि श्रमिक अपने समय का सदुपयोग कर रहा है अथवा नहीं और मशीन प्रयोग में आ रही है या नहीं, (ग) अभिन्यास चित्र (Layout Charts) जिनका उद्देश्य महत्त्व व प्राथमिकता के क्रमानुसार कार्य सम्पन्न कराना और कार्य का इस प्रकार आयोजन कराना है कि श्रमिक व संयन्त्र बेकार न रहें ; और (घ) भार-चित्र (load charts) जो संयन्त्र की क्षमता व उसके किसी भाग द्वारा किये जाने वाले भावी कार्य का भार प्रदर्शित करते हैं। गैन्ट चित्र किसी प्रकार का हो रचना-विधि लगभग एक सी है। औद्योगिक क्षेत्र में विभिन्न प्रकार के गैन्ट चार्ट बहुत उपयोगी होते हैं क्योंकि उनसे मशीन, उत्पादन-विभाग व श्रमिक की कार्यकुशलता का मूल्यांकन हो जाता है। उत्पादन में कमी होने के कारणों का एक ही दृष्टि में पता चल जाता है। लक्ष्य व उपलब्धि की तुलना द्वारा निर्माण-क्रिया पर नियन्त्रण रखा जा सकता है। इन कारणों से इस प्रकार के चित्रों का आधुनिक व्यावसायिक संस्थानों में अधिकाधिक प्रयोग किया जाने लगा है।

सम-विच्छेद चित्र
(Break-Even Chart)

किसी वस्तु की कुल लागत और कुल विक्रय-मूल्य के उत्पादन-मात्रा से अल्प-कालिक सम्बन्ध का प्रदर्शन सम-विच्छेद चित्र (Break-Even Chart) द्वारा किया जाता है। सम-विच्छेद चित्र का आधार सम-विच्छेद बिन्दु (Break-Even Point) है जिस पर वस्तु का कुल लागत-व्यय और कुल विक्रय-मूल्य बिल्कुल समान होते हैं। इस बिन्दु पर न तो संस्था को लाभ होता है न हानि ही। यदि वास्तविक उत्पादन इस बिन्दु पर होने वाले उत्पादन से अधिक होता है तो संस्था को लाभ होता है। वास्तविक उत्पादन सम-विच्छेद बिन्दु वाले उत्पादन से कम होने पर संस्था को हानि होती है क्योंकि विक्रय-मूल्य का सीमान्त लागत पर आधिक्य इतना नहीं हो पाता कि उससे स्थिर लागत की भी पूर्ति हो सके।

उपयोगिता व सीमाएँ—प्रबन्धकों के लिए सम-विच्छेद बिन्दु का ज्ञान बहुत उपयोगी होता है क्योंकि इससे विभिन्न क्रिया-स्तरों (levels of activity) पर होने वाले सम्भाव्य लाभ अथवा

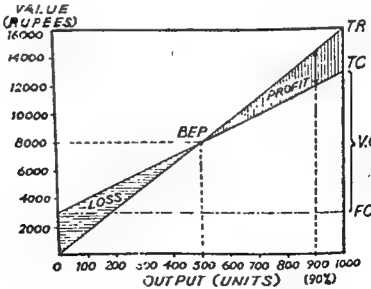
हानि का अनुमान लगाया जा सकता है, लाभ की मात्रा पर व्यवसाय की नीति के होने वाले प्रभाव का अध्ययन किया जा सकता है तथा विक्रय-मूल्य को घटाने-बढ़ाने के निर्णय तर्कपूर्ण आधार पर किये जा सकते है। परन्तु सम-विच्छेद विश्लेषण एक स्थैतिक (static) और अल्पकालिक (short-run) विश्लेषण है जो कुछ मान्यताओं के अन्तर्गत ही लागू होता है। लागत की बहुत सी मदों को स्थिर व परिवर्तनशील लागत-व्यय मे कोटिबद्ध करना भी कठिन है। लागत फलन व विक्रय फलन रेखीय (linear functions) प्रकृति के माने जाते है। इन सीमाओं के होते हुए भी आजकल सम-विच्छेद विश्लेषण लाभ-पूर्वानुमान, लागत-नियन्त्रण, क्रिया-स्तर निर्धारण व मूल्य-निर्धारण में एक उपयोगी प्रबन्धकीय उपकरण है।

रचना विधि—एक सरल सम-विच्छेद चित्र मे क्षैतिज मापदण्ड (*X*-axis) पर उत्पादन-इकाइयाँ तथा उदग्र-माप (*Y*-axis) पर उत्पादन या विक्रय-मूल्य अंकित किया जाता है। स्थिर लागत (Fixed Cost or F. C.), कुल लागत (Total Cost or T. C. *i.e.* Fixed Cost *plus* Variable Cost) तथा कुल विक्रय-मूल्य (Sales Value or Total Revenue) की रेखाएँ खींची जाती है। जिस बिन्दु पर लागत-रेखा व विक्रय-रेखा एक दूसरे को काटती है वही सम-विच्छेद बिन्दु (B E P.) है जिसके आगे लाभ का क्षेत्र आरम्भ होता है। यदि परिवर्तनशील लागत-व्यय (V C.) और विक्रय मूल्य (S. P. or T. R.) उत्पादन के अ-रेखीय फलन (non-linear function) है तो दोनो के वक्र बनेंगे जिनका सर्वनिष्ठ-बिन्दु (point of intersection) ही सम-विच्छेद बिन्दु होगा।

उदाहरण (Illustration) 19.

एक फर्म एक कारखाने को खरीदने का विचार कर रही है जिसका अधिकतम उत्पादन 1000 इकाइयाँ है जिन्हें 16 रु० प्रति इकाई की दर से बेचा जा सकता है। स्थिर लागत (F. C) 3000 रु० प्रति वर्ष है और परिवर्तनशील लागत (V. C.) 10 रु० प्रति इकाई अनुमानित है। एक सम-विच्छेद चित्र बनाइए और (*i*) सम-विच्छेद बिन्दु तथा (*ii*) उत्पादन क्षमता का 90% उत्पादन होने पर जो प्रत्याशित लाभ होगा वह भी प्रदर्शित कीजिए।

हल (Solution) :



चित्र 19—सम-विच्छेद चित्र (Break-Even Chart)

उपर्युक्त चित्र से स्पष्ट है कि सम-विच्छेद बिन्दु 500 इकाइयाँ अर्थात् 8000 रु० पर है और 90% उत्पादन होने पर लाभ 2400 रु० है। अग्रलिखित गणितीय सूत्रों की सहायता से भी

'म-विच्छेद विन्दु का निर्धारण किया जा सकता है—

उत्पादन इकाइयों के रूप में	मूल्य के रूप में
$BEP = \frac{FC}{\text{Contribution per unit}}$	$BEP = \frac{FC}{1 - \frac{VC}{SP}}$
Contribution per unit $= (SP - VC)$ per unit	$= \frac{3000}{1 - \frac{10}{16}}$
$\therefore\ BEP = \frac{FC}{(SP - VC) \text{ per unit}} = \frac{3000}{(16-10)} = 500$ units.	$= \frac{3000 \times 16}{6} = \text{Rs. } 8000$

शुद्ध-अवशेष चित्र
(Net Balance Charts)

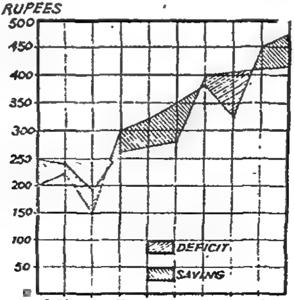
लाभ-हानि, बचत-घाटा, आय-व्यय के अन्तर, निर्यात-आयात के अवशेष आदि को चित्रांकित करने के लिए शुद्ध-अवशेष चित्रों (Net Balance Charts) का प्रयोग किया जाता है। आय तथा व्यय अथवा निर्यात एवं आयात दोनों को एक ही मापदण्ड पर प्रांकित करके वक्र बनाए जाते हैं तथा उनके अन्तरों (बचत-घाटा या अनुकूल-प्रतिकूल अवशेष) को विभिन्न चित्रों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 20 :

निम्न सामग्री को एक शुद्ध अवशेष चित्र के रूप में प्रस्तुत कीजिए—

वर्ष	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
आय (रु०) :	200	220	150	300	320	350	380	325	450	475
व्यय (रु०) :	250	240	190	260	270	280	400	405	410	415
शुद्ध अवशेष :	−50	−20	−40	+40	+50	−70	−20	−80	+40	60

हल (Solution) :



वर्ष

चित्र 20—शुद्ध-अवशेष चित्र (Net Balance Chart)

छाया-चित्र
(Silhouette Charts)

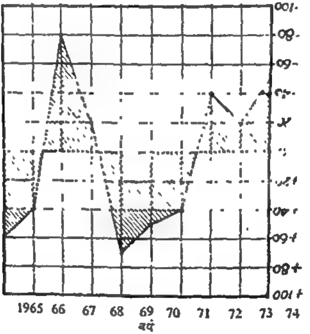
छाया-चित्रों द्वारा केवल लाभ-हानि, बचत-घाटा, अनुकूल-प्रतिकूल अवशेष आदि को ही प्रदर्शित किया जाता है। धनात्मक अन्तर शून्य रेखा के ऊपर और ऋणात्मक अन्तर नीचे की ओर दिखाये जाते है और अन्तर-क्षेत्र को छायांकित (shading) कर दिया जाता है इसीलिए इन चित्रों का नाम छाया-चित्र है।

पिछले उदाहरण के बचत व घाटे को निम्न छाया-चित्र द्वारा भी प्रदर्शित किया जा सकता है—

उदाहरण (Illustration) 21 :

उदाहरण 20 में प्रदत्त सामग्री के आधार पर एक छाया-चित्र की रचना कीजिए—

हल (Solution) :



चित्र 21—छाया-चित्र (Silhouette Chart)

कटिबन्ध चित्र या अधिकतम विचरण चित्र
(Zone Chart or Maximum Variation Chart)

जब किसी काल-श्रेणी के अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों का प्रदर्शन करना हो तो कटिबन्ध चित्र या अधिकतम विचरण चित्र का प्रयोग किया जाता है। इसे विस्तार वक्र (Range Curve) भी कहते है। पहले प्रत्येक समय-बिन्दु से सम्बन्धित समंक के अधिकतम तथा न्यूनतम मूल्यों को प्रांकित कर लिया जाता है। फिर उन दोनों के बीच दण्ड खींचकर कटिबन्ध चित्र बना लिया जाता है। यदि सभी अवधियों के अधिकतम मूल्यों को आपस में मिलाकर तथा उनके न्यूनतम मूल्यों को मिलाकर दो वक्र बना दिये जाये और उनके बीच के स्थान को बिन्दुओं से अंकित कर दिया जाय तो वह कटिबन्ध-वक्र या विस्तार वक्र कहलायेगा।

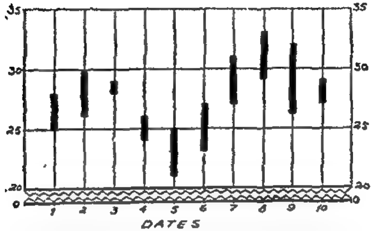
उदाहरण (Illustration) 22 :

किसी नगर के 10 दिनों के न्यूनतम व अधिकतम तापक्रम के आँकड़ों को उपयु-

चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए।

तिथि :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
अधिकतम तापक्रम (°C) :	28	30	29	26	25	27	31	33	32	29
न्यूनतम तापक्रम (°C) :	25	26	28	24	21	23	27	29	26	27

अधिकतम व न्यूनतम तापक्रम



चित्र 22—कटिबन्ध चित्र (Zone Chart)

संघटक भाग चित्र या पट्टी वक्र
(Component Part Chart or Band Curve)

जब काल-श्रेणी पर आधारित समकों के अनेक उप-विभागों या अंगों को तथा उनके जोड़ को प्रदर्शित करना होता है तो संघटक भाग चित्र या पट्टी वक्र का प्रयोग किया जाता है। बिन्दुरेखीय प्रदर्शन में पट्टी वक्र का वही स्थान है जो चित्रमय प्रदर्शन में अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्रों का प्राप्त है। विभिन्न उप-विभाग एक दूसरे के ऊपर दिखाये जाते है। इस तरह प्रत्येक अंग के लिए एक अलग पट्टी (band) बन जाती है। इन पट्टियों को अलग-अलग चिह्नों से अंकित कर दिया जाता है। अन्तिम वक्र योग को प्रदर्शित करता है। इसकी रचना को सरल करने के लिए विभिन्न अंगों या उप-विभागों के संचयी योग निकाल लिए जाते है और उन्हें बिन्दुरेखीय पत्र पर अंकित किया जाता है।

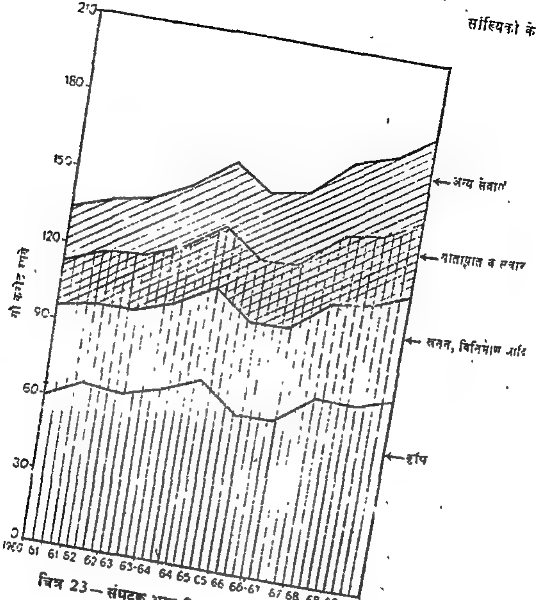
उदाहरण (Illustration) 23.

निम्न सारणी में साधन लागत के अनुसार (at factor cost) विभिन्न उद्योगों से उत्पन्न शुद्ध घरेलू उत्पाद (Net Domestic Product) के समक 1960–61 के भावों के आधार पर प्रस्तुत किये गए हैं—

(सौ करोड़ रुपये में)

वर्ष : उद्योग—	1960-61	61-62	62-63	63-64	64-65	65-66	66-67	67-68	68-69	69-70
कृषि :	68·2	68·8	67·0	68·9	75·2	64·6	64·4	75·5	75·4	79·3
यातायात एवं संचार	26·9	28·9	31·0	33·9	35·9	36·1	36·1	38·3	39·4	41·6
खनन, विनिर्माण आदि	18·7	20·0	21·2	22·8	24·2	24·6	25·3	26·3	27·4	28·8
अन्य सेवायें :	19·9	20·9	22·4	23·9	25·4	26·3	27·4	28·4	30·1	31·7
योग	133·7	138·6	141·6	149·5	160·7	151·6	153·9	168·5	172·3	181·4

उपर्युक्त समंकों को संघटक भाग चित्र (component part chart) द्वारा प्रस्तुत कीजिए।



चित्र 23—संघटक भाग चित्र (Component Part Chart)

'ज़ी' चित्र
(Zee Chart)

इस रेखाचित्र का आकार अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षर 'Z' से मिलता है इसलिये इसे Z-वक्र या Z-चित्र कहते हैं। इस चित्र की यह विशेषता है कि इसमें तीन वक्र बनते हैं जिनमें अलग-अलग सूचना प्राप्त होती है। ये तीन वक्र इस प्रकार हैं—

(i) मौलिक समंकों का वक्र (Curve of Original Data),

(ii) सचयी समंकों का वक्र (Curve of Cumulative Data)

(iii) चल योग का वक्र (Curve of Moving Totals)।

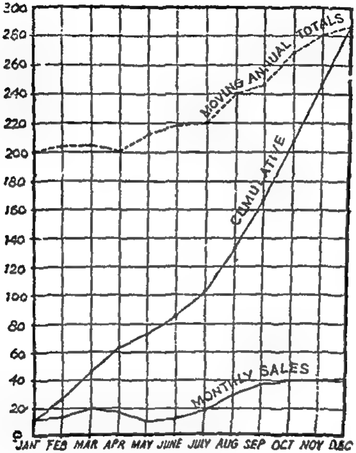
इन वक्रों के लिए आवश्यकतानुसार अलग-अलग मापदण्ड लिये जाते है।

उदाहरण (Illustration) 24

किसी कम्पनी के विक्रय (हजार रु० में) सम्बन्धी अधोलिखित समंकों से ज़ी-चित्र की रचना कीजिए—

मास :	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जौलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
मूल समंक :	12	14	20	16	10	12	18	30	36	40	40	42
संचयी समंक :	12	26	46	62	72	84	102	132	168	208	248	290
वार्षिक चल योग :	200	204	204	200	212	218	220	240	246	268	280	290

हल (Solution) :



चित्र 24—जी-चित्र (Zee Chart)

प्रश्न

1. 'चित्र समंकों के समझने में कोई योगदान नहीं करते, परन्तु उनके विवेकपूर्ण निर्माण और अध्ययन से वर्गों और मालाओं की प्रमुख विशेषताएं स्वयं स्पष्ट हो जाती है।' इस कथन की विवेचना कीजिए और विभिन्न प्रकार के चित्रों का संक्षिप्त वर्णन कीजिए।
   'Diagrams do not add anything to the meaning of statistics but when drawn and studied intelligently they bring to view the salient characteristics of groups and series.' Discuss this statement describing briefly the various types of diagrams.
   [M. A., Meerut, 1973, B. Com., Lucknow, 196.]
2. सांख्यिकी के अन्तर्गत वर्गों एवं मालाओं की विशेषताओं को स्पष्ट करने के लिए किन-किन विभिन्न प्रकार के चित्रों का प्रयोग होता है ? उदाहरण सहित अपना उत्तर स्पष्ट कीजिए।
   What are the different types of diagrams which are used in statistics to show the salient characteristics of groups and series ? Illustrate your answer.
   [B. Com., Raj., 1970, Agra, ...]

3. 'जटिल संख्यात्मक तथ्यों का एक ही दृष्टि से सम्पूर्ण अर्थ समझने में चित्र हमारे सहायक होते हैं'—इस कथन की व्याख्या कीजिए। एक सारणी का चित्रमय प्रस्तुतीकरण करने में किन-किन बातों का ध्यान रखना चाहिए ?
'Diagrams help us to visualise the whole meaning of a numerical complex at a single glance.'—Comment. What points should be taken into consideration while presenting a table diagrammatically ? *[B. Com., Punjab, 1970]*

4. चित्रों द्वारा अंकों के प्रदर्शन की उपयोगिता का वर्णन कीजिए और वर्तुल चित्र बनाने की विधि की व्याख्या कीजिए।
Discuss the usefulness of diagrammatic representation of facts and explain how you would construct circular diagrams *[B. Com., Agra, 1965]*

5. रिहन्द बाँध के स्थान पर बाँध की प्रगति और सापेक्ष क्षमता के प्रदर्शन हेतु कई चार्ट बनाने हैं। विवेचना कीजिए कि आप किस प्रकार के चार्ट बनायेंगे और क्यों ?
A series of charts at Rihand Dam site are to show the progress and relative efficiency of the Dam. Discuss what type of charts you would draw and why. *[M. A., Meerut, 1972]*

6. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ (short notes) लिखिए—
   (i) कोणीय चित्र (Angular Diagrams),
   (ii) जनसंख्या स्तूप चित्र (Population Pyramid),
   (iii) गैन्ट चित्र (Gantt Chart),
   (iv) सम-विच्छेद चित्र (Break Even Chart),
   (v) संघटक भाग चित्र (Component Part Chart),
   (vi) जी-चित्र (Zee Chart)।

7. सांख्यिकीय सामग्री के चित्रों द्वारा प्रदर्शन के क्या गुण और सीमाएँ हैं ? संख्यात्मक सामग्री के निम्नलिखित प्रकारों को आप चित्रों द्वारा किस प्रकार स्पष्ट करेंगे ? अपने चुनाव के कारणों को संक्षेप में बतलाइए—
   (i) पिछले 15 वर्षों के लिए भारत में चावल की प्रति एकड़ औसत पैदावार (Average yield per acre of rice in India for each of the last 15 years).
   (ii) किसी शहर में पिछले दो वर्षों में प्रत्येक माह के लिए सड़क दुर्घटना में मृतकों की संख्या (The number of deaths in road accidents in a city for each month of the last two years).
   (iii) पढ़ाए जाने वाले प्रत्येक विषय पर किसी स्कूल में लगाए गए समय का अनुभाग (The proportion of time spent in a school on each of the subjects taught). *[M. A., Meerut, 1973]*

8. सकारण (giving reasons) संक्षेप में सबसे अधिक उपयुक्त समझे जाने वाले आरेखों (diagrams) को निम्न प्रकार की प्रत्येक सूचना के सम्बन्ध में बनाइए—
   (अ) चार श्रेणी में विभाजित अण्डा-उत्पादन के मासिक आँकड़े (Monthly output of eggs divided into four grades).
   (ब) मेरठ शहर के प्रत्येक परिवार में प्रति परिवार बच्चों की संख्या (Number of children per family for each family in Meerut city).
   (स) 1964 से 1968 तक के पिग आइरन का मासिक उत्पादन (Monthly production of pig iron from 1964 to 1968).
   (द) पाँच वर्षों के मासिक वर्षा के आँकड़े (Monthly rainfall for five years). *[M. A., Meerut, 1973]*

9. निम्न आँकड़ों के निरूपण के लिए आप जिन-जिन चित्रों को सर्वाधिक उपयुक्त समझते हैं उनका सब कारण सहित लिखिए—
   (i) गत 15 वर्षों की अवधि में एक कम्पनी की वार्षिक बिक्री के समंक (Annual turnover of a company over a period of 15 years).
   (ii) तीन विभिन्न परिवारों द्वारा किया गया खाद्य, वस्त्र, किराया, ईंधन और विविध मदों में उपविभाजित मासिक व्यय (Data on monthly expenditure of three different families sub-divided according to expenditure on : Food, Clothing, House Rent, Fuel and Miscellaneous).

(iii) पिछली आठ जनगणनाओं में भारत की जनसंख्या के समंक (Data on population of India during the last eight censuses).

(iv) सम्पत्तियो के शुद्ध पूंजीगत मूल्यों और उनके स्वामियों से सम्बद्ध प्रतिशत समक (Percentage data respectively on net capital values of estates and persons holding them).

10. एक कक्षा के 25 विद्यार्थियों की ऊंचाई (सेण्टीमीटर मे) के आंकड़े निम्नांकित हैं। उक्त समको का रेखा-चित्र द्वारा निरूपण कीजिए—
Heights (in cms.) of 25 students of a class are given below. Represent these figures by a line diagram—

150, 151, 153, 155, 155, 156, 157, 157, 158, 159, 160, 162, 162
162, 163, 165, 168, 170, 170, 171, 174, 175, 179, 180, 180.

11. भारतीय रेलों की पथ-लम्बाई (किलोमीटर में) के निम्नांकित समकों को उपयुक्त चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए—
Represent the following route-kilometrage of Indian Railways by a suitable diagram—

Railway Zone	*Route Kilometrage*
Southern	7,452
Central	6,016
Western	10,150
Northern	10,68[illegible]
North-Eastern	4,977
North-East Frontier	3,620
Eastern	4,235
South-Eastern	6,926
South Central	6,175

[Source : India 1976]

2. निम्न समकों को प्रस्तुत करने के लिए दण्ड-चित्र बनाइए—
Construct bar-diagrams to represent the following data—

Year :	1963	1964	1965	1966
Export (Crore Rs.) :	73	80	85	80
Import (Crore Rs.) :	70	72	74	85

[B. Com., T.D.C. (Final) ; Raj., 1968]

3. निम्न आंकड़ो को आप चित्रो द्वारा किस प्रकार प्रदर्शित करेंगे ?
How will you represent the following data by diagram ?—

Value of India's Foreign Trade (Crores of Rs)

Year	*Import*	*Export*	*Balance*
1950-51	623·96	624·63	+ 0 67
1954-55	656 44	593 97	− 62·47
1955-56	678·99	597·43	− 81·56
1956-57	842·53	601·36	−241·17

[B. Com., Gorakhpur, 1961]

4. भारतीय रेलों से सम्बन्धित निम्नांकित आंकड़ो को उपयुक्त दण्ड-चित्र द्वारा दर्शाइये—
Present the following data pertaining to Indian Railways by suitable bar-diagram—

	1958-59	1959-60	1960-61
Gross Income :	390	422	468
Gross Expenditure :	331	353	389
Net Income :	59	69	79

[B. Com., Meerut, 1974]

5. निम्न सारणी मे बी० कॉम० के विद्यार्थियो का तीन वर्षों का परिणाम दिया हुआ है। इसे दण्ड-चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए—
The following table gives the result of B. Com. students for three years. Present the data by bar-diagrams—

	Number of Students			
Year	*Division I*	*Division II*	*Division III*	*Failed*
1974	50	150	250	150
1975	60	200	300	140
1976	50	250	350	150

16. कॉलिज *A* और *B* में विभिन्न संकायों मे विद्यार्थी-संख्या में होने वाले निरपेक्ष और सापेक्ष परिवर्तनों को उपयुक्त चित्रों द्वारा निरूपित कीजिए—

Represent by suitable diagrams, the absolute and relative changes in the number of students in different faculties of colleges *A* and *B*—

	College A		*College B*	
	1973	1976	1973	1976
Arts	300	350	100	200
Science	120	500	150	250
Commerce	200	650	130	150
Law	100	300	100	120

17. निम्न सूचना को अन्तर्विभक्त प्रतिशत चित्रों द्वारा प्रस्तुत कीजिए—

Present the following information by sub-divided percentage diagrams—

Cost, Selling Price, Profit or Loss per Chair :

Particulars	1966	1971	1976
Cost per Chair—	(Rs.)	(Rs.)	(Rs.)
(*a*) Wages	9	15	21
(*b*) Other Costs	6	10·20	14
(*c*) Polishing	3	4·80	7
Total Cost	18·0	30·0	42·0
Selling Price per Chair	20·0	30·0	40·0
Profit (+)/Loss (–)	+2·0	...	–2·0

18. निम्न आंकड़ो को चित्र द्वारा दर्शाइये—

Represent diagrammatically the following data—

	1964	1965
Cost per Tonne—	(Rs.)	(Rs.)
Wages	12·74	7·95
Material	5·46	4·51
Other Expenses	0·56	0·50
Total	18·76	12·96
Selling Price per Tonne	19·91	12·16
Profit (+)/Loss (–)	+1·15	–0·80

[*B. Com., Meerut*, 1970]

19. 8 वस्तुओं पर होने वाले लाभ/हानि (रु०) के निम्नलिखित समको को विचलन दण्ड-चित्र के रूप मे प्रस्तुत कीजिए—

Present the following data regarding profit or loss (Rs.) on 8 articles through devia bars—

Item	*Total Cost*	*Selling Price*	*Profit(+)/Loss (–)*
A	400	500	+100
B	410	480	+ 70
C	380	440	+ 60
D	390	415	+ 25
E	420	440	+ 20
F	440	420	– [illegible]
[illegible]	450	400	– 50
H	510	430	– 80

20. निम्न आंकड़ों का द्वि-दिशा दण्ड-चित्रों द्वारा निरूपण कीजिए—

Represent the following data by duo-directional bar diagrams—

Month :	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sept.
Units Produced :	400	430	450	420	470	500	550	650	600
Completed Units :	300	350	320	360	370	380	400	450	420
Incomplete Units :	100	[illegible]	130	60	100	120	150	200	180

21. निम्न समंकों को द्वि-विमा चित्र द्वारा प्रकट कीजिए—
Present the following figures through two-dimensional diagrams—

Items of Expenditure :	Food	Clothing	Rent	Fuel etc.	Misc.	Total
Family *A* (Income Rs. 500) :	200	100	80	40	80	500
Family *B* (Income Rs. 800) :	250	200	100	50	200	800

22. निम्न सारणी में तीन परिवारों के मासिक व्यय (रु०) के आँकड़े वर्णित हैं—
The following table gives the monthly expenditure (Rs.) of three families—

		Family	
Items of Expenditure :	*X*	*Y*	*Z*
Food	24	60	180
Clothing	4	14	70
House Rent	4	16	80
Education	3	6	24
Litigation	2	10	80
Social Necessities	1	6	120
Miscellaneous	2	3	46

उपर्युक्त समंकों को एक उपयुक्त चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए।
Represent the above data by a suitable diagram.

23. निम्न सूचना को प्रदर्शित करने के लिए उपयुक्त चित्र बनाइए। उक्त सूचना के अतिरिक्त प्रति इकाई लागत व लाभ भी प्रदर्शित कीजिए—
Construct a suitable diagram to present the following information. Also show the cost and profit per unit—

Factory	*Wages (Rs.)*	*Materials (Rs.)*	*Other Cost (Rs.)*	*Profit (Rs.)*	*No. of Units Produced*
A	3,000	5,000	1,000	1,000	1,000
B	2,000	3,000	800	500	700

24. निम्न आँकड़ो को एक आयात-चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए—
Represent the following data by a rectangular diagram—

Particulars		*Articles*	
		A	*B*
Number of Units Produced		200	240
Cost of Raw Material	(Rs.)	1000	1200
Other Expenses	(Rs.)	600	960
Profit	(Rs)	400	720

उपर्युक्त सूचना के अतिरिक्त प्रति इकाई लाभ व प्रति इकाई लागत भी प्रदर्शित कीजिए।
Also show the cost per unit and profit per unit.

25. निम्न सारणी में कुछ देशों के गेहूँ उत्पादन के समंक दिए गए हैं। इन्हें वर्गों द्वारा प्रदर्शित कीजिए—
The following table gives the statistics of wheat production in some countries. Represent these data by square diagrams—

Country	*A*	*B*	*C*	*D*
Output (000' Tonnes) :	3,600	2,000	1,200	800

26. निम्नलिखित को एक उपयुक्त आरेख चित्र द्वारा निरूपित कीजिए—
Represent the following by a suitable diagram—

Main Items of Revenue	*1971-72 (lakh Rs.)*	*1972-73 (lakh Rs.)*
Customs :	4,095	4,840
Excise :	940	990
Others :	225	216

27. निम्न सारणी में संसार के विभिन्न महाद्वीपों के क्षेत्रफल (10 लाख वर्ग मील में) दिए गए हैं। इन समंकों को (i) दण्ड-चित्रों और (ii) पाई-चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए—

The following table gives the area (in mln. sq. miles) of various continents of the world. Represent these figures by (i) bar diagrams, and (ii) pie-chart—

Continent	*Area (mln. sq. miles)*
Africa	11·96
Asia	10·04
Europe	1·9
North America	9·4
Oceania	3·4
South America	6·9
Russia	7·9
Total	51·50

28. विभिन्न राज्यों में चीनी उत्पादन के मूल्य के आंकड़ों को—(i) वृत्त-चित्र और (ii) वर्ग-चित्र के द्वारा निरूपित कीजिए—

Represent the following figures of value of sugar production in various states by (i) circles, and (ii) squares—

State	*Value of output (Rs.)*
Uttar Pradesh	47,55,73,000
Bihar	18,18,18,000
Tamil Nadu	7,53,76,000
Maharashtra	4,05,01,000
Other States	1,97,17,000
Total	79,29,85,000

29. राज्यों के सकल ऋण के निम्नलिखित वर्गीकरण को कोणीय चित्रों द्वारा प्रकट कीजिए—

Present the following classification of gross debt of states through angular diagrams—

	1961-62	1965-66	1971-72
Permanant Debt	570	827	1322
Floating Debt	50	189	109
Loans from Central Govt.	2314	4110	6510
Other Debt	64	162	257
Unfunded Debt	150	231	584
Total	3148	5519	8782

30. निम्न सारणी में सार्वजनिक क्षेत्र में योजना-व्यय का विभिन्न मदों के अनुसार विवरण दिया हुआ है। निम्न समकों को एक उपयुक्त चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए—

The following table gives plan expenditure in the public sector on various heads. Represent the data by a suitable diagram—

In Crores of Rs.

Head of Expenditure	*I Plan*	*II Plan*	*III Plan*
Agriculture	291	530	1068
Irrigation	310	420	650
Power	260	445	1012
Village and Small Industries	43	175	264
Industry and Mining	74	900	1520
Transport and Communications	523	1300	1486
Social Service and Others	459	830	1300
Inventories	—	—	200
Grand Total	1960	4600	7500

31. निम्न समंकों को घन-चित्रों द्वारा प्रदर्शित कीजिए—
Present the following data through cube-diagrams—

Factory :	A	B	C	D	E
Monthly Production (tonnes) :	8,000	1,000	729	216	125

व्यावसायिक चित्र (Business Charts)—

32. एक बड़े कारखाने के निर्माणी विभागों में किये जाने वाले कार्य की प्रतिशतें निम्न सारणी में वर्णित हैं। प्रत्येक दिन का आयोजित अभ्यंश 100% है। इन समंकों में एक गैण्ट चार्ट बनाइए—
Percentages of work done in manufacturing departments of a big factory are presented in the following table. The quota of work planned for each day is 100%. Construct a Gantt Chart—

Machine	*Monday*	*Tuesday*	*Wednesday*	*Thursday*	*Friday*	*Saturday*	*Weekly Total*
I	90	60	80	75	65	80	450
II	70	100	90	130	80	Repairs	470
III	80	90	100	80	120	60	530
IV	75	95	Break-down	50 Waiting	100	140	460
V	60	90	110	for Materials	80	60	400

33. एक निर्माणी कम्पनी द्वारा एक वस्तु का उत्पादन किया जाता है। वस्तु का विक्रय मूल्य 8 रु० प्रति इकाई और अस्थिर लागत 5 रु० प्रति इकाई है। वार्षिक स्थिर लागत 1,50,000 रु० है। कम्पनी की प्रस्थापित क्षमता 1 लाख इकाइयाँ हैं। एक सम-विच्छेद चित्र बनाइए और सम-विच्छेद बिन्दु तथा अधिकतम क्षमता के 85% स्तर पर प्रत्याशित लाभ भी प्रदर्शित कीजिए।
A manufacturing company produces an article whose selling price and variable costs are Rs. 8 and Rs 5 per unit respectively. The annual fixed cost is Rs. 1,50,000. Installed capacity of the company is 1 lakh units. Construct a break-even chart and also show the break—even point and profit expected at 85% of installed capacity.

34. निम्न समंक एक फर्म द्वारा निर्मित दो वस्तुओं—*A* व *B*—से सम्बन्धित हैं। प्रत्येक वस्तु के लिए एक सम-विच्छेद चित्र बनाइए।
The following data relate to two products—*A* and *B*—manufactured by a firm. Construct a break-even chart for each product—

	A (Lakh Rs.)	*B* (Lakh Rs.)
Annual Sales	25	25
Annual Profit	3·5	3·5
Fixed Cost	9	2·5
Variable Cost	12·5	19

[*B. Com., III Sem., Meerut, 1968*]

35. नीचे दी हुई सामग्री को रेखाचित्र पर प्रदर्शित कीजिए तथा (*a*) 2500 रु० लाभ प्राप्त करने के लिए बिक्री की मात्रा, और (*b*) 13000 रु० की बिक्री पर लाभ की मात्रा भी बताइए—
Represent the following data on a graph paper and also show (*a*) the volume of sales to earn a profit of Rs. 2500, and (*b*) profit at a turnover of Rs. 13000—

Sales (in Rs.) :	5000	7500	15000	20000	25000
Profit (+)/Loss (—) in (Rs.) :	—2000	—1000	2000	4000	6000

[*B. Com., Raj., 1972*]

36. यथांकित समंकों के आधार पर शुद्ध अवशेष चित्र तथा एक छाया-चित्र की रचना कीजिए—
On the basis of following data construct a Net Balance Chart and a Silhouette Chart—

Month	Jan.	Feb.	Mar.	April	May	June	July	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.
Income (000' Rs.)	80	100	120	90	150	170	180	200	210	220	240
Expenditure (000' Rs.)	90	80	130	120	130	140	200	240	220	200	180
Balance	−10	+20	−10	−30	+20	+30	−20	−40	−10	+20	+60

37. अग्रलिखित सारणी में भारतीय औद्योगिक वित्त निगम द्वारा उद्योगों को स्वीकृत वित्तीय सहायता के आँकड़े (करोड़ रुपये में) दिए हुए हैं। इन्हें संघटक भाग चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए—
The following table gives the figures (in crores of Rs) of financial assistance sanctioned to industries by the I. F. C. of India. Present these data in the form of a Component Part Chart—

Year	Loans	Underwritings	Guarantees	Total
1962	17·84	0·73	0·48	19·05
1963	19·82	4·63	10·62	35·07
1964	23·61	4·30	13·16	41·07
1965	19·39	3·55	3·92	26·86
1966	21·49	3·96	1·35	26·80
1967	12·34	1·87	4·00	18·21
1968	15·70	1·49	0·85	18·04
1969	22·75	2·42	0·29	25·46
1970	11·86	1·19	0·14	13·19
1971	28·03	2·30	0·42	30·75
1972	34·48	4·68	—	39·16

[*Source : IFC—24th. Annual Report*].

38. एक देश में स्वर्ण के निम्नलिखित अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों (डालर प्रति औंस) को कटिबन्ध चित्र, या अधिकतम विचरण चित्र द्वारा निरूपित कीजिए—
Represent the following maximum and minimum prices of gold (in dollars per oz.) in a country by a Zone Chart or Maximum Variation Chart—

Month :	1	2	3	4	5	6	7	8
Maximum :	103·3	108·0	124·4	126·0	129·9	116·0	72·8	85·0
Minimum :	89·3	99·9	107·1	115·9	86·0	97·0	63·3	70·5

13

बिन्दुरेखीय प्रदर्शन
(GRAPHIC PRESENTATION)

पिछले अध्याय में विभिन्न प्रकार के चित्रों का सोदाहरण वर्णन किया गया। सांख्यिकीय चित्रों का प्रयोग विशेष रूप से स्थान सम्बन्धी श्रेणियों (Spatial series) के निरूपण के लिए किया जाता है। इसके विपरीत काल श्रेणियो (Time series) तथा आवृत्ति वंटनों (Frequency distributions) के प्रभावशाली एवं आकर्षक ढंग से प्रदर्शित करने के लिए बिन्दुरेखीय विधि (Graphical Method) सर्वाधिक उपयुक्त होती है। इस अध्याय में विभिन्न प्रकार के रेखाचित्रों का अध्ययन किया जाएगा।

उपयोगिता व लाभ (Utility and Advantages)—बिन्दुरेखीय प्रदर्शन रेखा-पत्र पर पूर्व-निश्चित मापदण्ड के अनुसार प्रांकित विभिन्न बिन्दुओं को आपस में मिलाने से बनी रेखाओ व वक्रों के रूप में किया जाता है। इन रेखाओं और वक्रो के घुमाव या उतार-चढ़ाव का मानव मस्तिष्क पर बहुत गहरा व स्थायी प्रभाव पड़ता है। बाडिंगटन के अनुसार, 'रेखा का घुमाव मस्तिष्क को प्रभावित करने में सारणीकृत विवरण की अपेक्षा कहीं अधिक शक्तिशाली होता है। वह उतनी शीघ्रता से यह प्रदर्शित करने में समर्थ है कि क्या हो रहा है और क्या होने वाला है, जितनी शीघ्रता से यह कार्य हमारी आँख करने मे समर्थ है।'[1]

इस प्रकार तथ्यों को रेखाचित्र पर प्रदर्शित करने के अनेक लाभ हैं। बिन्दुरेखीय प्रदर्शन समंकों को प्रस्तुत करने का आकर्षक एवं प्रभावशाली साधन है। इससे एक ही दृष्टि में समंकों का अर्थ समझने और उनकी तुलना करने में सहायता मिलती है। इससे समय और श्रम की भी बचत होती है। इन सामान्य लाभों के अतिरिक्त बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के निम्न विशेष लाभ है—

(1) **काल-श्रेणी व आवृत्ति वटन का प्रदर्शन** (Display of Time series and Frequency Distribution)—काल श्रेणी व आवृत्ति श्रेणी का प्रदर्शन करने के लिए बिन्दुरेखीय चित्र अत्यन्त प्रभावशाली व उपयोगी साधन है। बिन्दुरेखीय प्रदर्शन द्वारा काल श्रेणी का विश्लेषण (Analysis of Time Series) किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, गत 15 वर्षों के सामान्य मूल्य-स्तर तथा जीवन-निर्वाह व्यय के सूचकांकों के वक्र बनाकर उनकी दीर्घकालीन प्रवृत्ति तथा उनके अल्पकालीन उच्चावचनों का सरलता से अध्ययन किया जा सकता है।

रेखाचित्र द्वारा आवृत्ति वंटन की प्रकृति एक ही दृष्टि में स्पष्ट हो जाती है। इससे यह पता चलता है कि आवृत्ति वक्र सममित है या असममित, *J*-आकार वाला है या *U*-आकार वाला।

(2) **स्थिति-माध्यों का निर्धारण** (Location of Positional Averages)—विशेष प्रकार के आवृत्ति रेखाचित्रों की सहायता से आवृत्ति श्रेणी में बहुलक, माध्यिका तथा विभाजन-मूल्यों का निर्धारण किया जा सकता है।

(3) **आन्तरगणन तथा पूर्वानुमान की सुविधा** (Ease in Interpolation and Fore-

[1] 'The wandering of a line is more powerful in its effect on the mind than a tabulated statement; it shows what is happening and what is likely to take place just as quickly as the eye is capable of working.' —Boddington.

asting)—बिन्दुरेखीय विधि द्वारा समंकों का आन्तरगणन, बाह्यगणन तथा पूर्वानुमान सरलता वं शीघ्रता से किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, 1901 से 1971 तक की जनगणनाओं के मकों की सहायता से जनसख्या वक्र बनाकर 1966 या 1980 की जनसंख्या का अनुमान लगाया जा सकता है। यदि वक्र की ठीक प्रकार स रचना की गई है और कोई आकस्मिक परिवर्तन नहीं हुआ है तो ये अनुमान पर्याप्त सीमा तक ठीक उतरेंगे।

(4) सहसम्बन्ध का अध्ययन (Study of Correlation)—रेखाचित्रों की सहायता से समंकों के सहसम्बन्ध और प्रतीपगमन का विधिवत् अध्ययन किया जा सकता है।

(5) विविध माप वाले समंकों की तुलना (Comparison between multiple figures)—वक्रों द्वारा विविध माप वाले बहुगुणी समकों की आपस में सरलता से तुलना की जा सकती है।

उपर्युक्त अनेक लाभों के कारण प्रत्येक क्षेत्र में बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की उपयोगिता निरन्तर बढ़ती जा रही है। अमरीका के राष्ट्रीय मानक ब्यूरो (National Bureau of Standards) के विशेषज्ञ मि० हुबार्ड ने ठीक ही कहा है—'रेखाचित्र प्रबन्धक, राजनीतिज्ञ व इन्जीनियर के लिए चेतावनी के सकेत का काम करते हैं, वे मूल्यांकिक, सांख्यिक व प्राणिशास्त्र-विशेषज्ञ को उपयोगी विवरण प्रदान करते हैं, और विज्ञान, तान्त्रिक ज्ञान व उद्योग में अनुसन्धान के शक्तिशाली साधन हैं।······जहाँ कहीं भी आंकिक तथ्यों को लेखबद्ध करना हो, निष्कर्ष निकालने हों या तथ्यों का वर्णन करना हो, वहाँ रेखाचित्र एक ऐसा अद्वितीय साधन प्रदान करते हैं जिसकी शक्ति का अनुभव और प्रयोग करना हम अभी आरम्भ ही कर रहे हैं।'[1]

सीमायें (Limitations)—बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की अनेक सीमायें भी हैं—प्रथम, रेखाचित्रों से समंको की शुद्धता का आभास नहीं हो पाता। वक्रों से समंकों के उतार-चढ़ाव का प्रदर्शन-मात्र होता है। अतः वक्रों को वास्तविक मूल्यों के स्थान पर प्रयोग नहीं करना चाहिए। दूसरे, बिन्दु रेखाचित्रों को किसी निष्कर्ष की पुष्टि करने के लिए उद्धरण के रूप में प्रस्तुत नहीं किया जा सकता। तीसरे, रेखाचित्रों के मापदण्ड में थोड़ा-बहुत परिवर्तन करके जान-बूझकर वक्रों के उच्चावचनों में अन्तर किया जा सकता है। इस प्रकार बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के दुरुपयोग की बहुत सम्भावना रहती है। चौथे, कुछ विशेष प्रकार के वक्रों, जैसे अनुपात माप-श्रेणी के वक्र, दो मापदण्डों के रेखाचित्र आदि का समझना सामान्य व्यक्ति से लिए कठिन होता है। कभी-कभी इस प्रकार के वक्रों से भ्रामक निष्कर्ष निकलते हैं।

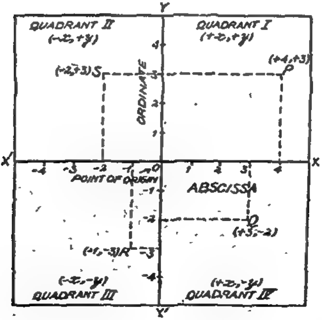
बिन्दु-रेखाचित्र की रचना
(Construction of Graphs)

सामान्यतः बिन्दुरेखीय पत्र (Graph Paper) पर प्रांकित किये जाने वाले बिन्दुओं को आपस में मिला देने से ही रेखाचित्र की रचना की जाती है। रेखाचित्र बनाने के लिए पहले एक उपयुक्त कटान-बिन्दु (Intersecting Point) को मूल-बिन्दु (Point of Origin or *O*) मान लिया जाता है। इस बिन्दु पर समकोण बनाती हुई दो रेखायें खींच ली जाती हैं। बायें से दायें खींची जाने वाली क्षैतिज रेखा (Horizontal Line) को भुजाक्ष (Abscissa) या *X*-अक्ष (*X*-axis or *XX'*) कहते हैं तथा ऊपर से नीचे जाने वाली उदग्र रेखा (Vertical Line) कोटि-अक्ष (Ordinate) या *Y*-अक्ष (*Y*-axis or *YY'*) कहलाती है। इस प्रकार सम्पूर्ण बिन्दु-रेखीय पत्र चार भागों में बंट जाता है जिन्हें चरण (Quadrants) कहते हैं।

[1] 'Graphs serve as storm signals for the manager, statesman, engineer; as potent narratives for the actuary, statist, naturalist; and as forceful engines of research for science, technology and industry.... Wherever there are data to record, inferences to draw, or facts to tell, graphs furnish the unrivalled means whose power we are just beginning to realise and to apply.' —Hubbard (National Bureau of Standards, U.S.A.) quoted by W.C. Brinton in *Graphic Presentation*.

बिन्दु रेखीय पत्र पर किसी एक बिन्दु को प्रांकित करने के लिए दो मूल्यों की आवश्यकता होती है—स्वतन्त्र चर-मूल्य (independent variable or *X*-variable) जैसे समय, मध्य-बिन्दु या वर्ग-सीमाओं को भुजाक्ष (*X*-axis) के आधार पर और आश्रित चर-मूल्य (dependent variable or *Y*-variable) जैसे समय से सम्बन्धित मूल्यों या आवृत्तियों आदि को कोटि-अक्ष (*Y*-axis) के आधार पर दिखलाया जाता है। प्रांकित किये जाने वाले मूल्य धनात्मक या ॠणात्मक हो सकते हैं। *X*-श्रेणी के धनात्मक मूल्यों को उदग्र रेखा के दाहिनी ओर वाले चरणों में तथा ॠणात्मक मूल्यों को इस रेखा के बायीं ओर वाले चरणों में अंकित किया जाता है। इसी प्रकार *Y*-श्रेणी के धनात्मक मूल्य क्षैतिज रेखा के ऊपर वाले चरणों में तथा ॠणात्मक मूल्य इससे नीचे वाले भागों में दिखलाये जाते हैं। अगले चित्र से यह स्पष्ट हो जायेगा कि *X* और *Y* के धनात्मक मूल्यों ($+X$, $+Y$) को मूल-बिन्दु के ऊपर और दाहिनी ओर वाले चरण (Quadrant I) में अंकित किया जाता है। *X* के धनात्मक और *Y* के ॠणात्मक मूल्य ($+X$, $-Y$) को मूल-बिन्दु से नीचे और दाहिनी ओर वाले चरण (Quadrant IV) में, *X* और *Y* के ॠणात्मक मूल्यों ($-X$, $-Y$) को शून्य-बिन्दु के नीचे बायीं ओर वाले चरण (Quadrant III) में तथा *X* के ॠणात्मक और *Y* के धनात्मक मूल्यों ($-X$, $+Y$) को मूल-बिन्दु के ऊपर और बायी ओर वाले चरण (Quadrant II) में प्रांकित किया जाता है। अगले चित्र में चार बिन्दुओं को प्रांकित करके दिखाया गया है जिनके मूल्य इस प्रकार हैं—

बिन्दु	*X*	*Y*
P	+4	+3
Q	+3	−2
R	−1	−3
S	−2	+3



चित्र 1—बिन्दुओं का प्रांकन (Plotting of Points)

व्यवहार में, प्रथम तथा चतुर्थ, दो चरणों का ही प्रयोग किया जाता है, क्योंकि अधिकतर *X* और *Y* के धनात्मक मूल्य होते हैं या *X* के धनात्मक और *Y* के ॠणात्मक मूल्य होते हैं। अतः मूल-बिन्दु रेखापत्र में बायीं और निचली ओर कोने में ही रखा जाता है।

रेखाचित्र बनाने के नियम
(Rules for Constructing a Graph)

निम्नलिखित नियमों को ध्यान मे रखकर ही रेखाचित्र की रचना करनी चाहिए—

(1) **शीर्षक**—रेखाचित्र का एक उपयुक्त एव पूर्ण शीर्षक होना चाहिए जिसे देखते ही उसकी विषय-वस्तु का आभास हो जाये ।

(2) **प्रदर्शन् की व्यवस्था**—सामान्यतः आर्थिक व व्यावसायिक क्षेत्र के समंक धनात्मक होते है, अतः रेखाचित्रो मे प्रथम चरण (first quadrant) का ही प्रयोग किया जाता है । मूल-बिन्दु रेखापत्र के नीचे तथा बायी ओर रखा जाता है । बिन्दुरेखीय चित्रो की गति अधिकतर भुजाक्ष पर बायी से दायी ओर और कोटि-अक्ष पर नीचे से ऊपर की ओर होती है । स्वतन्त्र चर-मूल्यो, जैसे—समय, आकार, मध्य-बिन्दु, वर्ग-सीमायें आदि को क्षैतिज पैमाने पर तथा आश्रित चर-मूल्यो, जैसे—समय से सम्बन्धित समको, आवृत्तियो आदि को उदग्र पैमाने पर प्रदर्शित करना चाहिए, परन्तु दोनो के लिए एक ही पैमाना लेना आवश्यक नही है ।

(3) **अक्षों का अनुपात**—इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि यथासम्भव भुजाक्ष की लम्बाई कोटि-अक्ष की लम्बाई से लगभग डेढ़ गुनी हो ।

(4) **मापदण्ड का चुनाव**—रेखाचित्र के लिए उपयुक्त मापदण्ड के चुनाव का बहुत महत्त्व है । डा० बाउले के मतानुसार 'जिस माप के द्वारा समंक प्रांकित किये जाते हैं उसके उचित चुनाव के लिये नियम निर्धारित करना कठिन है । क्षैतिज और उदग्र मापों के बीच के अनुपात-मात्र पर ही विचार करना आवश्यक होता है ।'[1] सामान्यतः बिन्दुरेखीय पत्र के आकार तथा समकों की प्रकृति को ध्यान मे रखकर ही मापदण्ड का चुनाव करना चाहिए । रेखाचित्र बिन्दु-रेखीय पत्र के लगभग मध्य मे होना चाहिए जिससे वह आकर्षक व सुन्दर लगे ।

मापदण्ड प्रदर्शित करने वाले अको को स्पष्ट रूप से भुजाक्ष के नीचे तथा कोटि-अक्ष के बायी ओर लिख देना चाहिए । रेखाचित्र के ऊपर की ओर किसी विशिष्ट स्थान पर मापदण्ड का विवरण भी दिया जाना आवश्यक है जिससे उसे समझने मे कोई कठिनाई न हो ।

(5) **कृत्रिम आधार रेखा का प्रयोग**—उदग्र पैमाना शून्य से आरम्भ होना चाहिए परन्तु यदि आश्रित चर-मूल्य अधिक आकार के है तो मूलबिन्दु से कुछ ऊपर किसी अन्य सख्या से पैमाना आरम्भ किया जा सकता है। ऐसी स्थिति मे कृत्रिम आधार-रेखा (False Base Line) का प्रयोग किया जाता है ।

(6) **अनुपात माप-श्रेणी का प्रयोग**—आनुपातिक परिवर्तनों को प्रदर्शित करने के लिए अनुपात या लघुगणक माप-श्रेणी (Ratio or Logarithmic Scale) का प्रयोग करना चाहिए ।

(7) **समंक-सारणियों का प्रदर्शन**—रेखाचित्र के साथ-साथ यदि समको की सारणी भी दे दी जाती है तो विस्तृत अध्ययन सम्भव हो जाता है तथा वक्रों की शुद्धता की भी जाँच हो जाती है ।

(8) **रेखा खींचना**—बिन्दुरेखीय पत्र पर विभिन्न बिन्दुओं को प्रांकित करने के बाद उन्हें पैमाने से मिला देना चाहिए । इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि बिन्दुओ को मिलाने वाली रेखा उनके मध्य से होकर जाये तथा आरम्भ से अन्त तक एक-सी हो, कही मोटी कही पतली न हो ।

(9) **विभिन्न प्रकार की रेखायें**—यदि एक ही रेखाचित्र मे एक से अधिक वक्रो का प्रदर्शन करना हो तो विभिन्न प्रकार की रेखायें खीचनी चाहियें, जैसे—गहरी काली रेखा (—), हल्की रेखा (—), बिन्दुमय रेखा (....), खण्डित रेखा (- - - -) या मिश्रित रेखा (-·-·-·) आदि ।

[1] 'It is difficult to lay down rules for the proper choice of the scales by which the figures should be plotted out. It is only the ratio between the horizontal and vertical scales that need be considered.'—Dr. Bowley, *Elements of Statistics*.

(10) संकेत—विभिन्न रेखाओं का अन्तर स्पष्ट करने के लिए रेखाचित्र में ऊपर की ओर उनसे सम्बन्धित संकेत दे देने चाहिये।

बिन्दुरेखीय विधि का प्रयोग निम्न दो प्रकार की समंक-श्रेणियों के प्रदर्शन के लिए किया जा सकता है—

(क) काल श्रेणी (Time Series) के प्रदर्शनार्थ, तथा

(ख) आवृत्ति वटन (Frequency Distribution) के प्रदर्शन के लिए।

कालश्रेणी के रेखाचित्र या कालिक-चित्र
(Graphs of Time Series or Historigrams)

जब समय के आधार पर क्रमबद्ध (या ऐतिहासिक) समंकों को सतत् वक्रों के रूप में प्रदर्शित किया जाता है तो ऐसे रेखाचित्रों को कालिक-चित्र (historigrams) कहते हैं। कालिक चित्रों की रचना में समय (वर्ष, माह आदि) को सदा भुजाक्ष (*X*-axis) पर तथा मूल्यों को कोटि-अक्ष (*Y*-axis) पर अंकित किया जाता है। कालिक-चित्र दो प्रकार की माप-श्रेणियों के आधार पर बनाये जा सकते हैं—(1) प्राकृतिक माप-श्रेणी द्वारा, या (2) अनुपात माप-श्रेणी के आधार पर।

प्राकृतिक माप श्रेणी के कालिक चित्र (Historigrams on Natural Scale)—यदि काल-श्रेणी से सम्बन्धित निरपेक्ष मूल्यों (absolute values) को साधारण बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रदर्शित करना हो तो प्राकृतिक माप श्रेणी का प्रयोग किया जाना चाहिए। यह माप-श्रेणी गणितीय वृद्धि (arithmetic progression) का प्रदर्शन करने के लिए उपयुक्त समझी जाती है। इसके आधार पर यदि कोटि-अक्ष पर 1 से॰ मी॰=10 इकाइयाँ तो 2 से॰ मी॰=20 इकाइयाँ, आदि। प्राकृतिक माप-श्रेणी के कालिक चित्र भी दो प्रकार के हो सकते हैं—

(i) निरपेक्ष कालिक चित्र (Absolute Historigram)—जब कालिक चित्र के लिए समंक श्रेणी के ही मौलिक समंकों या मूल राशियों को प्रांकित किया जाता है, तो उसे निरपेक्ष कालिक चित्र कहते हैं। इसमें निरपेक्ष मूल्यों, जैसे टन, किलोग्राम, किलोमीटर, रुपये आदि का प्रयोग किया जाता है।

(ii) निर्देशांक कालिक चित्र (Index Historigram)—जब वास्तविक मूल्यों के स्थान पर उन मूल्यों के निर्देशांकों अर्थात् सापेक्ष मूल्यों को बिन्दुरेखीय पत्र पर अंकित किया जाता है तो वह रेखाचित्र निर्देशांक कालिक चित्र कहलाता है।

निरपेक्ष कालिक चित्र (Absolute Historigram)—यह एक कालश्रेणी का हो सकता है या एक से अधिक श्रेणियों का। अगले उदाहरणों से इनकी रचना-क्रिया स्पष्ट हो जाती है।

उदाहरण (Illustration) 1 :

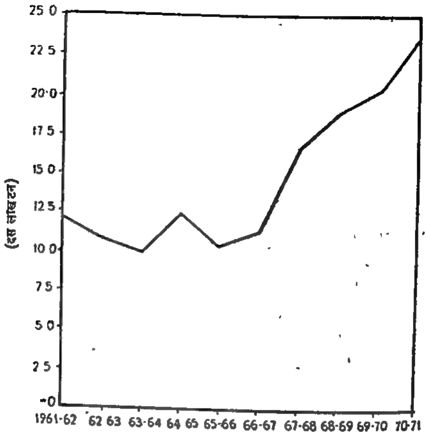
भारत में गत दस वर्षों के गेहूँ उत्पादन (दस लाख टन में) के आँकड़ों को उपयुक्त रेखाचित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए—

वर्ष :	1961-62	62-63	63-64	64-65	65-66	66-67	67-68	68-69	69-70	70-71
गेहूँ उत्पादन : (दस लाख टन)	12·1	10·9	9·9	12·3	10·4	11·4	16·5	18·7	20·1	23·3

हल (Solution) :

भुजाक्ष पर 1 से॰ मी॰=1 वर्ष और कोटि-अक्ष पर 1 से॰ मी॰=2·5 (दस लाख टन) का मापदण्ड लेकर इस प्रकार रेखाचित्र बनेगा—

भारत में गेहूँ-उत्पादन



चित्र 2—निरपेक्ष कालिक चित्र (Absolute Historigram)

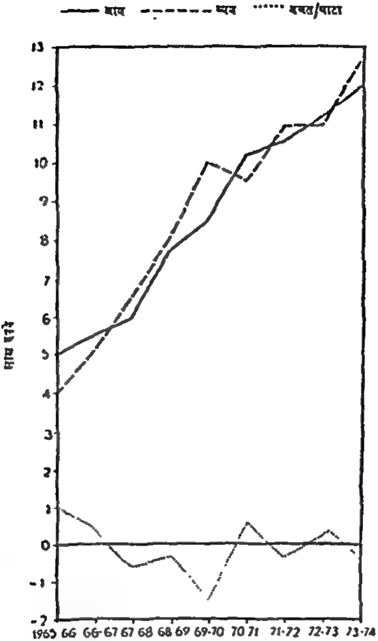
एक से अधिक काल श्रेणियों के कालिक चित्र बनाने के लिए पहले कोटि-अक्ष पर एक सामान्य मापदण्ड ले लिया जाता है। फिर विभिन्न श्रेणियों के लिए भिन्न-भिन्न ढंग की वक्र रेखायें खींच ली जाती हैं। इस प्रकार का कालिक चित्र बनाने के लिए यह आवश्यक है कि विभिन्न श्रेणियाँ एक ही इकाई में दी गई हों।

उदाहरण (Illustration) 2 :

एक नगरपालिका के आय, व्यय और बचत/घाटे के निम्नलिखित समंकों को बिन्दुरेखीय चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए—

वर्ष :	1965-66	66-67	67-68	68-69	69-70	70-71	71-72	72-73	73-74
आय (दस लाख रु०) :	5 0	5·5	6 0	7·7	8·5	10·2	10·6	11·2	12·0
व्यय (दस लाख रु०) :	4 0	5·0	6·5	8 0	10 0	9·6	10 9	11·0	12·6
बचत (+)/घाटा (−) :	+1·0	+0·5	−0 5	−0·3	−1 5	+0 6	−0·3	+0·2	−0 6

आयात-निर्यात के अन्तर या आय-व्यय के अन्तर को केवल तत्सम्बन्धी दो वक्रों की सहायता से भी प्रदर्शित किया जा सकता है। जहाँ आयात वक्र निर्यात वक्र से ऊँचा है वहाँ प्रतिकूल अवशेष होगा तथा जहाँ निर्यात वक्र ऊँचा है वहाँ अनुकूल अवशेष होगा। इन दोनों प्रकार के अवशेष के खण्डों को विभिन्न चिह्नों द्वारा अंकित करके अन्तर स्पष्ट किया जा सकता है, फिर अन्तर के लिए तीसरे वक्र की आवश्यकता नहीं होती। इस प्रकार के वक्रों का प्रयोग आय व व्यय तथा बचत या घाटा प्रदर्शित करने के लिए भी किया जाता है (देखिये अध्याय 12, चित्र 20)।



चित्र 3—निरपेक्ष कालिक चित्र (Absolute Historigram)

निर्देशांक कालिक चित्र (Index Historigram)—निर्देशांक कालिक चित्र सूचकांकों को प्रांकित करके बनाये जाते हैं, इनसे सापेक्षिक परिवर्तनों का आभास होता है। ये भी एक या अधिक चर मूल्यों को प्रदर्शित करने के लिए बनाये जा सकते है। इन्हें बनाने की विधि निरपेक्ष कालिक चित्रों की ही भाँति है।

उदाहरण (Illustration) 3—

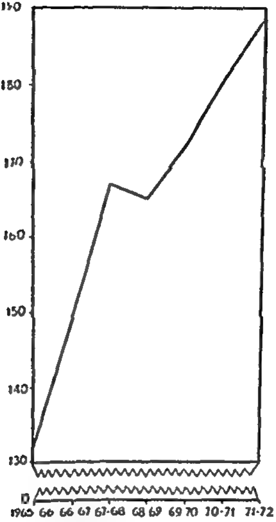
निम्नलिखित थोक मूल्य सूचकांकों को एक बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित कीजिए—

वर्ष :	1965–66	1966–67	1967–68	1968–69	1969–70	1970–71	1971–72
थोक मूल्य सूचकांक : (आधार 1961–62=100)	132	150	167	165	172	181	188

हल (Solution) :

थोक मूल्य सूचकांक

(आधार 1961-62=100)



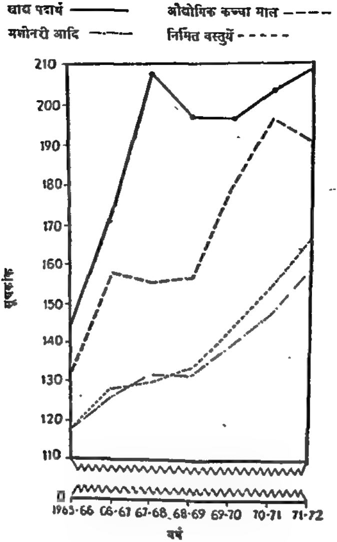
चित्र 5—निर्देशांक कालिक चित्र (कृत्रिम आधार रेखा)
(Index Historigram—False Base Line)

उदाहरण (Illustration) 5 :

निम्न सारणी में भारत में चार वर्गों के थोक मूल्य सूचकांक दिये गए हैं :

आधार वर्ष (1961-62=100)

वर्ष :	1965–66	1966–67	1967–68	1968–69	1969–70	1970–71	1971–72
खाद्य-पदार्थ :	145	171	208	197	197	204	210
औद्योगिक कच्चा माल :	133	158	156	157	180	197	191
मशीन व यातायात सम्बन्ध :	118	126	132	133	136	148	159
निर्मित वस्तुएं :	118	128	131	134	144	155	167



चित्र 6—निर्देशांक कालिक चित्र (कृत्रिम आधार रेखा)
(Index Historigram—False Base Line)

दो मापदण्डों के रेखाचित्र
(Graphs of Two Different Scales)

यदि किसी काल-श्रेणी पर आधारित दो चर-मूल्य विभिन्न इकाइयों में हों या उनकी इकाइयाँ सजातीय हों किन्तु उनके विस्तारों में अत्यधिक अन्तर हो तो उदग्र माप भुजाक्ष के दोनों ओर के कोटि-अक्षों पर लेना पड़ता है। बायें कोटि-अक्ष पर एक चर-मूल्य तथा दाहिने कोटि-अक्ष पर दूसरा चर-मूल्य लिया जाता है। इस प्रकार दोनों के लिए विभिन्न पैमानों का प्रयोग किया जाता है परन्तु पैमाने इस प्रकार समायोजित करने चाहियें कि दोनों वक्र एक-दूसरे के अधिक-से-अधिक समीप हों तथा दोनों चर-मूल्य परस्पर अनुपाती (proportionate) हो जायें। ऐसा करने के लिए दोनों चर-मूल्यों के समान्तर माध्यों को एक सीध में रेखापत्र के बीच में रखकर मापदण्ड निर्धारित किये जाते हैं। निम्न उदाहरण से यह मापदण्ड-रूपान्तर (scale conversion) स्पष्ट हो जायेगा।

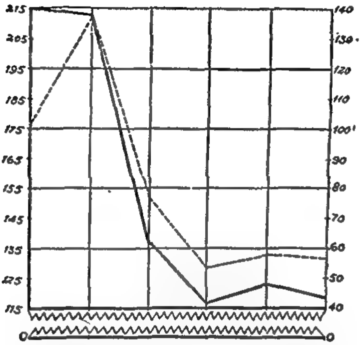
उदाहरण (Illustration) 6 :

अग्रलिखित आँकड़े किसी देश में कपास की आयातित मात्रा और मूल्य से सम्बन्धित हैं—

वर्ष :	1968-69	1969-70	1970-71	1971-72	1972-73	1973-74
मात्रा (000 टन) :	215	213	138	116	123	118
मूल्य (करोड़ रु०) :	101	137	77	53	58	57

कपास आयात की मात्रा व मूल्य

(मात्रा ——— मूल्य - - - -)

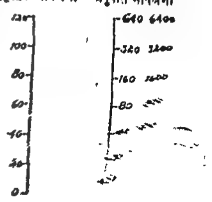


चित्र 7—दोहरे मापदण्ड का रेखाचित्र (Graph of Double Scale)

अनुपात माप-श्रेणी
(Ratio Scale)

कालश्रेणी में होने वाले सापेक्ष (Relative) या आनुपातिक परिवर्तनों को प्रांकित करने के लिए अनुपात मापश्रेणी (Ratio Scale) या अर्द्ध-लघुगणकीय मापदण्ड (Semi-Logarithmic Scale) का प्रयोग किया जाता है। अनुपात मापश्रेणी द्वारा ज्यामितीय वृद्धि (Geometric Progression) अर्थात् 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 आदि का प्रदर्शन होता है।

प्राकृतिक मापश्रेणी व अनुपात मापश्रेणी का अन्तर—प्राकृतिक तथा अनुपात मापश्रेणियों में निम्नलिखित अन्तर है—



(i) **वृद्धि**—प्राकृतिक मापश्रेणी अंकगणितीय वृद्धि (arithmetic progression) पर आधारित है जबकि अनुपात माप-श्रेणी ज्यामितीय वृद्धि (geometric progression) के आधार पर होती है। साथ के चित्र से यह अन्तर स्पष्ट है।

(ii) **परिवर्तन**—प्राकृतिक मापश्रेणी निरपेक्ष परिवर्तनों के प्रदर्शन के लिए उपयुक्त है जबकि आनुपातिक या सापेक्ष परिवर्तनों का दिग्दर्शन अनुपात मापश्रेणी द्वारा ही उचित रूप से होता है। अगले उदाहरण से यह अन्तर स्पष्ट हो जायेगा—

वर्ष	नगर की जनसंख्या	निरपेक्ष वृद्धि	आनुपातिक वृद्धि
1931	1,00,000	—	—
1941	2,00,000	1,00,000	100%
1951	3,00,000	1,00,000	50%
1961	4,00,000	1,00,000	33⅓%
1971	5,00,000	1,00,000	25%

जनसंख्या की निरपेक्ष वृद्धि बराबर है परन्तु आनुपातिक वृद्धि घटती हुई दर पर है। अतः यदि इन समंकों को प्राकृतिक मापश्रेणी पर अंकित किया जाता है तो उससे आनुपातिक वृद्धि का यथार्थ ज्ञान प्राप्त नहीं हो सकता और परिणाम भ्रमात्मक निकलेंगे।

(iii) **मापदण्ड**—प्राकृतिक मापश्रेणी के अन्तर्गत कोटि-अक्ष पर निरपेक्ष मूल्य अंकित किये जाते हैं जबकि अनुपात मापश्रेणी में कोटि-अक्ष पर मूल्यों के लघुगणक प्रांकित किये जाते हैं या मूल्यों को विशेष प्रकार के लघुगणकीय अथवा आनुपातिक रेखापत्र (Semi-logarithmic or Ratio-ruled Graph Paper) पर अंकित किया जाता है।

(iv) **शून्य-बिन्दु व असत्य आधार रेखा**—अनुपात मापश्रेणी में उदग्र मापदण्ड (Vertical Scale) शून्य से आरम्भ नहीं होता। अतः इसमें असत्य आधार रेखा की आवश्यकता नहीं होती। इससे ऋणात्मक मूल्यो को प्रदर्शित नही किया जा सकता। इसके विपरीत प्राकृतिक मापश्रेणी में उदग्र मापदण्ड शून्य से आरम्भ होता है तथा अधिक विस्तार वाले मूल्यों को प्रांकित करने के लिए असत्य आधार रेखा का प्रयोग किया जाता है।

अनुपात मापश्रेणी पर रेखाचित्र की रचना निम्न दो रीतियों द्वारा की जा सकती है—

(i) मूल्यों के लघुगणकों (Logs) को साधारण बिन्दुरेखीय-पत्र के उदग्र मापदण्ड पर प्रांकित करके, तथा

(ii) मूल्यों को ही लघुगणकीय बिन्दुरेखा-पत्र (Semi-Logarithmic Graph Paper) पर प्रांकित करके।

द्वितीय रीति सरल है किन्तु लघुगणकीय रेखापत्र आसानी से उपलब्ध न होने के कारण अधिकतर प्रथम रीति का ही प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 7 :

10 रु० और 100 रु० की राशियों में 10% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से होने वाली वृद्धि को प्राकृतिक तथा आनुपातिक—दोनों मापदण्डों के आधार पर दर्शाइए—

वर्ष :	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
A	10	11	12·1	13·31	14·64	16 10	17·71	19·48
B	100	110	121	133·1	146·4	161·0	177·1	194·8

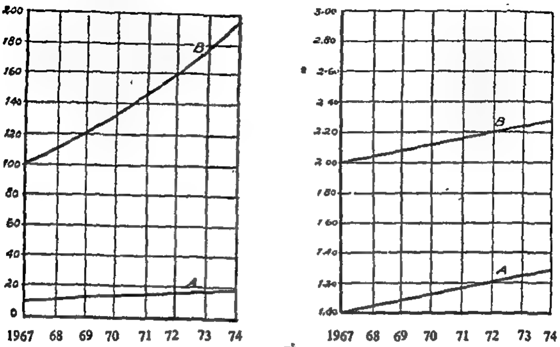
आनुपातिक वृद्धि प्रदर्शित करने के लिए इन मूल्यों के लघुगणक निकालकर उन्हें दो दशमलव बिन्दुओ तक उपसादित (approximate) कर लिया जायेगा तथा इन लघुगणकों को कोटि-अक्ष पर रखा जायेगा।

A व B राशियों को 10% चक्रवृद्धि ब्याज से वृद्धि

वर्ष	A	B	लघुगणक A	लघुगणक B
1967	10	100	1 00	2·00
1968	11	110	1·04	2·04
1969	12·1	121	1·08	2·08
1970	13 31	133·1	1·12	2·12
1971	14 64	146·4	1·16	2·16
1972	16·10	161 0	1·20	2·20
1973	17·71	177·1	1·24	2 24
1974	19·48	194·3	1·28	2·28

10 रु० व 100 रु० की चक्रवृद्धि ब्याज से वृद्धि

प्राकृतिक मापदण्ड पर आनुपातिक मापदण्ड पर



वर्ष

चित्र 8—प्राकृतिक व आनुपातिक मापदण्ड (Natural and Ratio Scales)

उपर्युक्त चित्र मे निरपेक्ष तथा आनुपातिक वृद्धि प्रदर्शित की गई है। प्राकृतिक मापश्रेणी वाले रेखाचित्र से यह भ्रमात्मक निष्कर्ष निकलता है कि प्रथम राशि (A) में बहुत कम वृद्धि हुई है और दूसरी राशि (B) में बहुत अधिक। परन्तु अनुपात मापश्रेणी वाले रेखाचित्र से यह निष्कर्ष निकलता है कि दोनों राशियों में प्रतिशत वृद्धि एक समान गति से हुई है। यही कारण है कि लघुगणक मापदण्ड वाले दोनों वक्र समानान्तर हैं।

अनुपात मापश्रेणी के रेखाचित्रों का निर्वचन करते समय निम्न बातों को ध्यान में रखना आवश्यक है—

(i) यदि अनुपात मापश्रेणी का वक्र ऊपर की ओर उठ रहा है तो यह निष्कर्ष निकलता है कि समंकों मे वृद्धि की दर बढ़ रही है। नीचे की ओर जाने वाला वक्र घटती हुई दर का सूचक है।

(ii) यदि एक वक्र सीधी रेखा के रूप में है तो वृद्धि की दर समान है (देखिये चित्र 8)।

(iii) यदि वक्र एक स्थान पर दूसरे स्थान की अपेक्षा अधिक ढालदार (steeper) है तो उस स्थान पर परिवर्तन की दर अधिक है।

(iv) यदि दो वक्र एक दूसरे के समानान्तर (parallel) हैं तो दोनों में परिवर्तन की दर समान है (देखिए चित्र 8)। यदि एक वक्र दूसरे वक्र की तुलना में अधिक ढालदार है तो वह परिवर्तन की अधिक तीव्र दर प्रदर्शित करता है।

अनुपात मापश्रेणी के वक्रों की उपयोगिता—निम्न परिस्थितियों मे अनुपात मापश्रेणी का प्रयोग विशेष रूप से उपयोगी होता है—

(i) जब समकों के आनुपातिक परिवर्तनों को प्रदर्शित करना हो,

(ii) जब दो या दो से अधिक श्रेणियो का एक साथ चित्रण करना हो और उनके मूल्यों मे काफी अन्तर हो,

(iii) जब विभिन्न इकाइयों वाली श्रेणियों को एक ही कोटि-अक्ष पर प्रदर्शित करना हो,

(iv) सूचकांकों के बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के लिए भी यह उपयुक्त है।

(v) अन्तरगणन व बाह्यगणन (Interpolation and Extrapolation) मे भी

माप विशेष उपयोगी होता है।

(vi) अनुपात मापश्रेणी के रेखाचित्र में कोटि-अक्ष शून्य से आरम्भ नहीं होता। 'बत असत्य आधार-रेखा की आवश्यकता नहीं होती। इसके अतिरिक्त तुलना को सरल बनाने के लिए मापदण्ड के विभिन्न वक्रों को पास-पास रखा जा सकता है।

(vii) व्यापारिक क्षेत्रों में, क्रय-विक्रय, लागत, उत्पादन की मात्रा, लाभ आदि का प्रदर्श करने के लिए ऐसे रेखाचित्र अधिक उपयोगी होते हैं।

दोष—अनुपात मापश्रेणी के तीन प्रमुख दोष हैं—प्रथम, यह निरपेक्ष मूल्यों के चित्रण के लिए अनुपयुक्त है। दूसरे, इस मापदण्ड के वक्रों द्वारा शून्य या ऋणात्मक मूल्य प्रदर्शित नहीं किये जा सकते। तीसरे, सामान्य व्यक्ति के लिये इन वक्रों का बनाना और समझना अत्यन्त कठिन है क्योंकि ये लघुगणकों (logarithms) पर आधारित हैं।

आवृत्ति वंटनों के रेखाचित्र
(Graphs of Frequency Distributions)

आवृत्ति श्रेणी के रेखाचित्र बनाने के लिए आकार, वर्ग-सीमायें या मध्य-बिन्दु को भुजाक्ष (*X*-axis) पर तथा आवृत्तियों को कोटि-अक्ष (*Y*-axis) पर रखा जाता है। ये रेखाचित्र निम्न प्रकार के होते हैं—

(1) रेखा-आवृत्ति-चित्र (Line Frequency Diagram),
(2) आवृत्ति-आयत-चित्र (Histogram),
(3) आवृत्ति-बहुभुज (Frequency Polygon),
(4) आवृत्ति-वक्र (Frequency Curve),
(5) संचयी आवृत्ति-वक्र (Cumulative Frequency Curve or Ogive)।

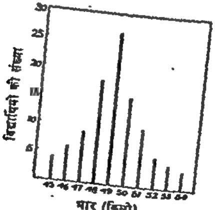
(1) रेखा-आवृत्ति-चित्र (Line Frequency Diagram)—इस चित्र द्वारा खण्डित समंकमालाओं का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन किया जाता है। मूल्यों को भुजाक्ष पर तथा आवृत्तियों को कोटि-अक्ष पर रखकर प्रत्येक मूल्य के बिन्दु पर उसकी आवृत्ति के माप की ऊँचाई के बराबर लम्ब-रेखा खींच दी जाती है।

उदाहरण (Illustration) 8 :

निम्न समंकों का बिन्दुरेखीय चित्रण कीजिए—

भार (किलो) :	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
विद्यार्थियों की संख्या :	4	6	9	18	26	15	10	5	4	3

विद्यार्थियों का भार



चित्र 9—रेखा-आवृत्ति-चित्र (Line Frequency Diagram)

(2) आवृत्ति-आयत-चित्र (Histogram)—अविच्छिन्न समंकश्रेणी का प्रदर्शन करने के लिए आवृत्ति-आयत-चित्र की रचना की जाती है। आवृत्ति-चित्र आयताकार चित्रों का वह समूह होता है जिसमें आयतों की ऊँचाई आवृत्तियों के अनुपात में रखी जाती है। आवृत्ति-चित्र को सोपान चित्र (Staircase Diagram) या इष्टका-चित्र (Block Diagram) भी कहते हैं। इसे बनाने के लिए वर्गान्तरों की सीमाओं (*Class-limits*) को भुजाक्ष पर तथा आवृत्तियों को कोटि-अक्ष पर प्रदर्शित किया जाता है। फिर प्रत्येक वर्गान्तर की सीमाओं के माप-बिन्दुओं पर आवृत्ति की ऊँचाई के माप के बराबर लम्ब रेखायें खीचकर आयत बना लिया जाता है। इस प्रकार सभी वर्गान्तरों के आयत एक दूसरे से सटे हुए रहते हैं। यदि वर्गान्तर समावेशी हैं तो पहले उन्हें अपवर्जी बना लेना चाहिए।

बहुलक निर्धारण की बिन्दुरेखीय विधि (Graphic Method of Locating Mode)—अविच्छिन्न श्रेणी में बिन्दुरेखीय विधि द्वारा बहुलक का निर्धारण आवृत्ति-चित्र द्वारा किया जाता है। इसकी विधि निम्न प्रकार है—

(i) सबसे अधिक ऊँचाई वाले आयत को बहुलक-वर्ग (Modal Group) का आयत माना जाता है।

(ii) सबसे ऊँचे आयत के दाहिनी ओर के ऊपरी कोने को उससे पहले वाले आयत के दाहिनी ऊपरी कोने से मिला दिया जाता है। इसी प्रकार सर्वोच्च आयत के बायें ऊपरी कोने को उससे अगले आयत के बायें ऊपरी कोने से मिला देते हैं।

(iii) इन दोनों रेखाओं के कटान-बिन्दु से भुजाक्ष पर एक लम्बवत् रेखा खीच दी जाती है। यह रेखा जिस बिन्दु पर भुजाक्ष से मिलती है, वही बहुलक-मूल्य है।

अविच्छिन्न श्रेणी में आवृत्ति-बहुभुज या आवृत्ति-वक्र की सहायता से भी बहुलक का मूल्य निर्धारित किया जा सकता है, परन्तु उपर्युक्त रीति अधिक सरल और अधिक शुद्ध है।

उदाहरण (Illustration) 9 :

निम्न समंकों को आवृत्ति-आयत-चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए और बहुलक का मूल्य निकालिए। परिकलन से इस मूल्य की जाँच कीजिए।

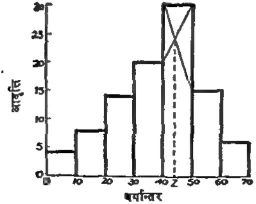
वर्गान्तर :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
आवृत्ति :	4	8	14	20	30	15	6

परिगणन द्वारा बहुलक की माप—

$$Z=l+\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times i=40+\frac{30-20}{60-20-15}\times 10=40+\frac{100}{25}=44.$$

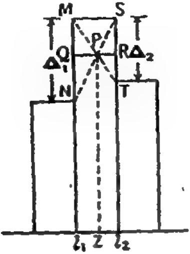
$\therefore$ बहुलक $=44$

आवृत्ति चित्र द्वारा बहुलक निरूपण



चित्र 10—आवृत्ति आयत चित्र (Histogram)

बहुलक के सूत्र का आधार—बहुलक के गणितीय सूत्र का आधार आवृत्ति-आयत चित्र है। निम्न चित्र से यह आधार स्पष्ट हो जाता है—



चित्र 11—बहुलक का प्रतिरूप चित्र (Schematic Diagram showing Mode)

उक्त चित्र में कटान बिन्दु P से खींचा गया लम्ब आधार रेखा को जिस बिन्दु (Z) पर स्पर्श करता है वही बहुलक मूल्य है। इसी आधार पर निम्न प्रकार बहुलक के बीजगणितीय सूत्र की रचना हुई है—

चित्र से $QP=Z-l_1$, $PR=l_2-Z$, $MN=\Delta_1$ तथा $ST=\Delta_2$

$$\frac{QP}{MN}=\frac{PR}{ST} \text{ या } \frac{Z-l_1}{\Delta_1}=\frac{l_2-Z}{\Delta_2} \text{ या } \Delta_2(Z-l_1)=\Delta_1(l_2-Z)$$

$$\Delta_2 Z-\Delta_2 l_1=\Delta_1 l_2-\Delta_1 Z \text{ या } \Delta_1 Z+\Delta_2 Z=\Delta_1 l_2+\Delta_2 l_1$$

$$Z(\Delta_1+\Delta_2)=\Delta_1(l_1+i)+\Delta_2 l_1 \qquad [\because l_2=l_1+i]$$

$$Z(\Delta_1+\Delta_2)=\Delta_1 l_1+\Delta_1 i+\Delta_2 l_1$$

$$\text{या } Z=\frac{l_1(\Delta_1+\Delta_2)+\Delta_1 i}{\Delta_1+\Delta_2} \text{ या } \frac{l_1(\Delta_1+\Delta_2)}{\Delta_1+\Delta_2}+\frac{\Delta_1 i}{\Delta_1+\Delta_2}$$

$$\therefore Z=l_1+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\times i \qquad [\text{लेकिन } \Delta_1=f_1-f_0 \text{ और } \Delta_2=f_1-f_2]$$

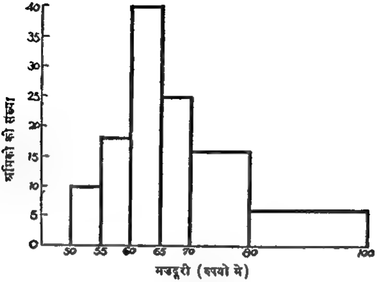
$$\therefore Z=l_1+\frac{f_1-f_0}{(f_1-f_0)+(f_1-f_2)}\times i=l_1+\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times i$$

असमान वर्गान्तरों का आवृत्ति-चित्र—यदि आवृत्ति-श्रेणी में वर्गान्तर असमान होते हैं तो बड़े वर्गान्तर जिस अनुपात में अधिक होते हैं उसी अनुपात में आयत की चौड़ाई बढ़ा दी जाती है और आवृत्ति कम कर दी जाती है जिससे आयत का क्षेत्रफल आवृत्ति के अनुकूल रहे। निम्न उदाहरण से यह क्रिया स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण (Illustration) 10 :

निम्न सामग्री का आवृत्ति आयत चित्र द्वारा चित्रण कीजिए—

मजदूरी (रु०) :	50–55	55–60	60–65	65–70	70–80	80–100
श्रमिकों की संख्या :	10	18	40	25	32	24



चित्र 12—आवृत्ति आयत चित्र (असमान वर्गान्तर) (Histogram—Unequal Intervals)

(3) **आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon)**—मूल्यों या मध्य-बिन्दुओं और उनकी आवृत्तियों के आधार पर बनाया गया अनेक भुजाओं वाला ज्यामितीय चित्र, आवृत्ति बहुभुज कहलाता है। विच्छिन्न या खण्डित श्रेणी में मूल्यों को भुजाक्ष पर तथा आवृत्तियों को कोटि-अक्ष पर रखकर बिन्दु प्रांकित कर दिये जाते हैं। फिर उन बिन्दुओं को आपस मे मिलाकर तथा पहले और अन्तिम बिन्दुओ को आधार-रेखा से मिलाकर आवृत्ति बहुभुज बना लिया जाता है। चित्र 9 मे यदि विभिन्न रेखाओं के ऊपरी बिन्दुओं को आपस में मिला दिया जाय तो आवृत्ति बहुभुज की रचना हो जायेगी।

विच्छिन्न श्रेणी मे आवृत्ति बहुभुज का प्रयोग बहुलक-निर्धारण के लिए किया जाता है। बहुभुज के शिखर-बिन्दु (apex) से भुजाक्ष पर लम्ब खींचा जाता है तथा जिस बिन्दु पर वह लम्ब भुजाक्ष को स्पर्श करता है वही बहुलक-मूल्य माना जाता है।

अविच्छिन्न श्रेणी में आवृत्ति-बहुभुज की रचना करने के लिए मध्य-बिन्दुओं को भुजाक्ष पर तथा आवृत्तियो को कोटि-अक्ष पर रखकर बिन्दु प्रांकित कर लिए जाते है। फिर उन बिन्दुओं को आपस मे मिलाया जाता है। प्रथम और अन्तिम बिन्दुओं को भुजाक्ष से मिला दिया जाता है। इस प्रकार की श्रेणी में पहले आवृत्ति-चित्र बनाकर फिर आवृत्ति-बहुभुज बनाना अधिक सरल होता है। ऐसा करने के लिए विभिन्न आयतों के शिखर पर मध्य-बिन्दु लेकर उन्हे आपस में मिला लिया जाता है तथा प्रथम और अन्तिम बिन्दुओ को भुजाक्ष से इस प्रकार मिलाया जाता है कि आवृत्ति-चित्र और आवृत्ति-बहुभुज के क्षेत्रफल बिल्कुल बराबर रहें। चित्र 13 देखने से आवृत्ति-बहुभुज की रचना-विधि स्पष्ट हो जायेगी।

(4) **आवृत्ति-वक्र (Frequency Curve)**—आवृत्ति-वक्र आवृत्ति-बहुभुज का सरलित (smoothed) रूप है। आवृत्ति-वक्र, आवृत्ति-चित्र और आवृत्ति-बहुभुज की सहायता से इस प्रकार मुक्तहस्त (free-hand) रीति से खींचा जाता है कि बहुभुज की कोणीयता (angularity) समाप्त हो जाये और वक्र का क्षेत्रफल भी लगभग उतना ही रहे जितना आवृत्ति-चित्र या बहुभुज का होता है। वक्र के दोनों सिरे भुजाक्ष से मिला दिए जाते हैं।

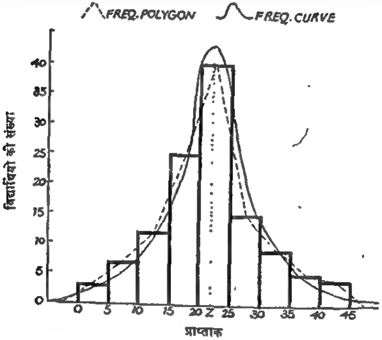
आवृत्ति-वक्र की सहायता से भी अविच्छिन्न श्रेणी मे बहुलक का निर्धारण किया जा सकता है। इसके लिए वक्र के शिखर-बिन्दु (apex) से भुजाक्ष पर लम्ब खींचा जाता है। जिस बिन्दु पर यह लम्ब भुजाक्ष को स्पर्श करता है वही बहुलक मूल्य होता है। परन्तु इस रीति द्वारा निर्धारित बहुलक उतना शुद्ध नही होता जितना आवृत्ति-चित्र द्वारा ज्ञात बहुलक होता है।

उदाहरण (Illustration) 11 :

120 विद्यार्थियों के सांख्यिकी में प्राप्तांक निम्नांकित हैं—

अंक :	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
विद्यार्थियों की संख्या ;	3	7	12	25	40	15	9	5	4

उपर्युक्त समकों से एक आवृत्ति आयत-चित्र, आवृत्ति बहुभुज और आवृत्ति-वक्र की रचना कीजिए और आवृत्ति-वक्र की सहायता से बहुलक मूल्य का निर्धारण कीजिए।



चित्र 13—आवृत्ति-चित्र, बहुभुज व वक्र (Histogram, Frequency Polygon & Curve)

उपर्युक्त चित्र में बहुलक-मूल्य 22 है।

आवृत्ति-वक्र के भेद (Types of Frequency Curve)—सामान्यतः आवृत्ति-वक्र निम्न चार प्रकार के होते है—

(i) **प्रसामान्य वक्र** (Normal Curve)—सममित वंटन (Symmetrical Distribution) में आवृत्तियाँ शून्य से धीरे-धीरे बढ़ती हुई अधिकतम आवृत्ति तक पहुँच जाती हैं और फिर वहाँ से उसी क्रम और गति से धीरे-धीरे घटती हुई शून्य हो जाती है। ऐसे वितरण का वक्र 'घण्टाकार' (Bell-shaped) होता है (देखिये चित्र A, पृष्ठ संख्या 269)। इस वक्र को प्रसामान्य वक्र (Normal Curve) कहा जाता है। सांख्यिकी मे इस प्रकार के वक्र का बहुत महत्त्व है।

(ii) **साधारण असममित वक्र** (Moderately Asymmetrical Curve)—ऐसे वितरणों के वक्र साधारण असममित वक्र कहलाते हैं जिनमें आवृत्तियों के बढ़ने व घटने का क्रम भिन्न होता है। इन वक्रों को विषम वक्र (Skewed Curves) भी कहा जाता है। ये वक्र दो प्रकार के होते हैं—(क) धनात्मक विषमता वाले वक्र (Positively Skewed Curves) जिनमें दाहिना सिरा (tail) अधिक लम्बा होता है (देखिये चित्र B, पृष्ठ 269), (ख) ऋणात्मक विषमता वाले वक्र (Negatively Skewed Curves) जिनमे बायीं ओर का सिरा अधिक लम्बा होता है (देखिये चित्र C, पृष्ठ 269)। आर्थिक व सामाजिक क्षेत्र में विभिन्न तथ्यों के अधिकतर साधारण असममित वक्र ही बनते हैं।

(iii) **अत्यधिक असममित वक्र या J-आकार वाले वक्र** (Extremely Asymmetrical Curves or J-shaped Curves)—अत्यधिक विषमता वाले वितरणों के वक्र अंग्रेजी के अक्षर J

आकार के होते हैं, अतः इन्हें J-आकार वाले वक्र भी कहते हैं। यदि अधिकतम आवृत्ति अन्त में होती है तो वक्र J के स्वरूप का होता है। यदि अधिकतम आवृत्ति आरम्भ में होती है तो वक्र का आकार विपरीत J जैसा होता है। अधिकतर धन के वितरण के वक्र इसी प्रकार होते हैं।

(iv) 'यू' तथा 'वी' आकार वाले वक्र (U-shaped and V-shaped Curves)—जिन वितरणों में अधिकतम आवृत्तियाँ आरम्भ और अन्त मे होती हैं तथा न्यूनतम आवृत्तियाँ लगभग मध्य में होती हैं उनके आवृत्ति-वक्र यू-आकार वाले (U-shaped) या वी-आकार वाले (V-shaped) होते हैं। कुछ विशेष प्रकार के मौसम सम्बन्धी समंकों के ऐसे वक्र होते हैं।

(5) संचयी आवृत्ति वक्र (Cumulative Frequency Curve or Ogive)—जब वर्गान्तरों की ऊपरी सीमाओं (upper limits) को भुजाक्ष पर तथा संचयी आवृत्तियों (cumulative frequencies) को कोटि-अक्ष पर अंकित करके वक्र बनाया जाता है तो उसे संचयी आवृत्ति वक्र कहते हैं। इसी वक्र को 'ओजाइव' वक्र (Ogive Curve) भी कहा जाता है।

यह दो प्रकार से बनाया जा सकता है—(अ) ऊपरी सीमाओं और बढ़ती हुई संचयी आवृत्तियों के आधार पर, तथा (ब) निचली सीमाओं और घटती हुई संचयी आवृत्तियों के आधार पर। प्रथम प्रकार के वक्र को 'Less than Ogive' कहते हैं। इसे बनाने के लिए ऊपरी सीमायें भुजाक्ष (X-axis) पर और संचयी आवृत्तियाँ कोटि-अक्ष (Y-axis) पर अंकित की जाती हैं। यह ऊपर की ओर उठा हुआ होता है। दूसरे प्रकार के वक्र को 'More than Ogive' कहते हैं। इसकी रचना करने के लिए निचली सीमाओं को भुजाक्ष पर और घटती हुई संचयी आवृत्तियों को कोटि-अक्ष पर रखा जाता है। यह नीचे की ओर गिरता हुआ होता है।

मध्यका व विभाजन मूल्यों का निर्धारण—संचयी आवृत्ति-वक्र की सहायता से मध्यका (Median) तथा अन्य विभाजन मूल्यों (Partition Values) का निर्धारण किया जा सकता है। मध्यका का मूल्य ज्ञात करने के लिए $N/2$ द्वारा मध्यका की संख्या निकाल ली जाती है, फिर कोटि-अक्ष पर उस संख्या से एक सरल रेखा भुजाक्ष के समानान्तर खींची जाती है। जिस बिन्दु पर यह रेखा संचयी आवृत्ति-वक्र को स्पर्श करती है उस बिन्दु से भुजाक्ष पर लम्ब खींच लिया जाता है। अन्त में भुजाक्ष पर इस लम्ब के स्पर्श-बिन्दु का मूल्य पढ़ लिया जाता है। यही मध्यका-मूल्य है। इसी प्रकार चतुर्थक, दशमक आदि अन्य विभाजन-मूल्य ज्ञात किये जा सकते हैं।

उदाहरण (Illustration) 12 :

किसी विश्वविद्यालय के 100 छात्रों द्वारा सांख्यिकी में प्राप्त अंक नीचे दिए हुए हैं—

प्राप्तांक :	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
छात्रों की संख्या :	4	6	10	10	25	22	18	5

एक संचयी आवृत्ति-वक्र की रचना कीजिए और उससे मध्यका व दोनों चतुर्थकों का मूल्य-निर्धारण कीजिए।

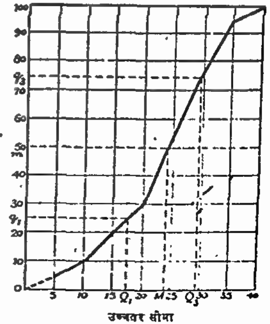
[*B. Com., Agra, 1966*]

पहले आवृत्ति-वितरण को संचयी आवृत्ति-श्रेणी से बदला जायेगा—

इससे कम :	5	10	15	20	25	30	35	40
संचयी आवृत्ति :	4	10	20	30	55	77	95	100

फिर निम्न प्रकार संचयी आवृत्ति-वक्र बनाया जायेगा—

मध्यका व चतुर्थकों का बिन्दुरेखीय चित्रण



चित्र 14—संचयी आवृत्ति-वक्र (Ogive)

$$\text{Median}=\text{size of } \frac{100}{2} \text{ या } 50\text{th item}=24\,;$$

$$Q_1=\text{size of 25th item}=17{\cdot}5\,;\; Q_3=\text{size of 75th item}=29{\cdot}5.$$

शतमक वक्र (Percentile Curve)—संचयी आवृत्तियों को प्रतिशत में बदलकर भी संचयी आवृत्ति-वक्र खींचा जा सकता है। ऐसे वक्र को शतमक वक्र कहते हैं। इसमें संचयी आवृत्तियों के स्थान पर उनके प्रतिशत क्षैतिज मापदण्ड पर दिखाये जाते हैं। शेष क्रिया पूर्ववत् रहती है।

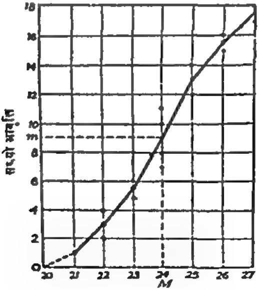
मध्यका निर्धारण की गाल्टन विधि—फ्रांसिस गाल्टन (Francis Galton) ने मध्यका मूल्य ज्ञात करने के लिये एक विशेष प्रकार के रेखाचित्र का प्रयोग किया है। उनकी रीति के अनुसार मूल्यों को भुजाक्ष पर और कुल आवृत्तियों को कोटि-अक्ष पर अंकित किया जाता है। प्रत्येक मूल्य की जितनी आवृत्ति हो उतने ही बिन्दु उस मूल्य के माप के ऊपर कोटि-अक्ष के मापानुसार ऊपर-नीचे बना दिये जाते हैं। अगले मूल्य के आवृत्ति-बिन्दुओं के लिये पिछले मूल्य की आवृत्ति का सर्वोच्च बिन्दु आधार होता है। इस प्रकार बिन्दुओं को प्रांकित करने के बाद एक रेखा इस तरह खींची जाती है कि वह इन बिन्दुओं के मध्य से होकर गुजरे। अन्त में मध्यका संख्या को कोटि-अक्ष पर रखकर भुजाक्ष के समानान्तर रेखा खींची जाती है। इस रेखा के स्पर्श-बिन्दु से भुजाक्ष पर लम्ब खींच लिया जाता है। जिस बिन्दु पर यह लम्ब भुजाक्ष से मिलता है वही मध्यका-मूल्य है। व्यवहार में इस रीति का अधिक प्रयोग नहीं किया जाता। निम्न रेखाचित्र में मध्यका मूल्य 24 है।

उदाहरण (Illustration) 13 :

निम्न अंकों से गाल्टन विधि द्वारा मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए—

माप :	21	22	23	24	25	26	27
बारम्बारता :	1	3	2	5	3	2	2

मध्यका-निरूपण



चित्र 15—गाल्टन विधि (Galton's Method)

आर्थिक वक्र

(Economic Curves)

अर्थशास्त्र के विभिन्न नियमों को प्रदर्शित करने वाले वक्र आर्थिक वक्र (Economic Curves) कहलाते हैं। इन वक्रों द्वारा दो चरों—*X*, स्वतन्त्र चर (independent variable)

और Y, आश्रित चर (dependent variable)—के फलनीय सम्बन्ध (functional relationship) की अभिव्यक्ति होती है। जब दो चरों में पूर्ण आश्रितता का सम्बन्ध पाया जाता है तो उसे फलनीय या कार्यात्मक सम्बन्ध कहते हैं। यदि Y के मूल्य X के प्रदत्त मूल्यों पर आश्रित होते हैं तो यह कहा जाता है कि Y, X का फलन (function) है, अर्थात् $Y=f(X)$. इसके अनुसार *यदि Y का मूल्य सदा X का तीन गुना हो तो $Y=3X$ समीकरण द्वारा इस सम्बन्ध को व्यक्त* किया जा सकता है। स्वतन्त्र चर-मूल्य 'X' को क्षैतिज माप (X-axis) पर और आश्रित मूल्य Y को उदग्र माप (Y-axis) पर प्रांकित करके वक्र खींचा जाता है। फलनीय सम्बन्ध प्रमुख रूप से दो प्रकार के होते हैं—रेखीय (Linear) तथा अ-रेखीय (Non-linear)।

रेखीय सम्बन्ध (Linear Relationship)—रेखीय सम्बन्ध सरल रेखा (straight line) के रूप में होते हैं जिनको निम्न एकघातीय समीकरण (first-degree equation) द्वारा अभिव्यक्त किया जाता है—

$$Y=a+bX$$

'a' और 'b' नियतांक या स्थिरांक (constants) हैं। *'a'* Y-अन्तः खण्ड (Y-Intercept) कहलाता है। यह मूलबिन्दु (point of origin) से खड़ी रेखा (Y-axis) पर स्थित उस बिन्दु के अन्तर को प्रकट करता है जहाँ पर अभीष्ट सरल रेखा Y-अक्ष को स्पर्श करती है। *'b'* उस रेखा के ढलान या कोण का माप है जो यह बताता है कि X की इकाई के बढ़ने से सरल रेखा कितनी ऊपर (या नीचे) की ओर जाती है। प्रदत्त समीकरण की सहायता से सरल रेखा खींचने के लिए X के कुछ सरल मूल्य जैसे 1, 2, 3 या 10, 20, 30.... आदि अनुमानित किए जाते है तथा उन्हें समीकरण मे आदिष्ट करके Y के अनुगणित मूल्य (computed values) ज्ञात कर लिए जाते हैं। अन्त में उन मूल्य-युग्मों को प्रांकित करके सरल रेखा खींच ली जाती है।

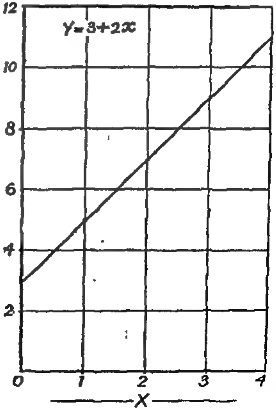
उदाहरण (Illustration) 14 :

एक प्रथमघातीय समीकरण (first-degree equation) जिसमें $a=3$ और $b=2$, के आधार पर सरल रेखा की रचना कीजिए।

हल (Solution) :

समीकरण (Equation) $Y=3+2X$

X:	0	1	2	3	4
Y:	3	5	7	9	11



चित्र 16—रेखीय सम्बन्ध
(Linear Relationship)

रेखीय सम्बन्धों मे यदि स्वतन्त्र चर-मूल्य निश्चित मात्रा में बढ़ता है तो पराश्रित चर-मूल्य में तत्सम्वादी वृद्धि (या कमी) भी स्थिर मात्रा में होती है। ऐसे सम्बन्ध समान्तर-श्रेणी (Arithmetic Progression) पर आधारित होते है। भौतिक विज्ञानो मे अधिकतर ये सम्बन्ध पाए जाते हैं। आर्थिक क्षेत्र मे इस प्रकार के रेखीय सम्बन्ध बहुत कम दृष्टिगोचर होते हैं। साधारण ब्याज-दर पर पूंजी मे वृद्धि इसका एक उदाहरण है।

अ-रेखीय सम्बन्ध (Non-Linear Relationship)—अ-रेखीय सम्बन्ध भी अनेक प्रकार के होते हैं परन्तु आर्थिक क्षेत्र में परवलयिक (parabolic), घातांकीय (exponential) व अतिपरवलयिक (hyperbolic) वक्रो का अधिक प्रयोग होता है।

परवलयिक वक्रों द्वारा वर्द्धमान लागत नियम (Law of Increasing Cost) अर्थात् उत्पत्ति ह्रास नियम (Law of Diminishing Returns) का निरुपण किया जाता है। ये वक्र निम्न समीकरण पर आधारित होते हैं—

$$Y=a+bX+cX^2+aX^3+\ldots$$

इस प्रकार की श्रेणी सम्भाव्य श्रेणी (potential series) भी कहलाती है। इसमें यदि X का घात (power) 2 तक जाता है तो यह द्वितीय श्रेणी का परवलय (parabola of the second degree) कहा जाता है। X के तीसरे घात तक लिखे जाने पर यह तृतीय श्रेणी का परवलय होता है—

$Y=a+bX+cX^2$ (Second Degree or Quadratic)

$Y=a+bX+cX^2+dX^3$ (Third Degree or Cubic)

$Y=a+bX+cX^2+dX^3+\ldots nX^N$ (nth Degree Curve)

उदाहरण (Illustration) 15 :

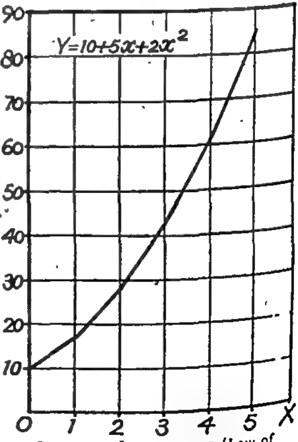
द्वितीय श्रेणी का परवलय (parabola of the second order) प्रयोग करते हुए एक वर्द्धमान लागत वक्र की रचना कीजिए। यदि स्थिरांक (constants) a, b व c के मान क्रमशः 10, 5 व 2 हो। उत्पादित मात्रा (X) 5 इकाइयों तक वक्र दिखाइए।

हल (Solution) :

समीकरण $Y=a+bX+cX^2$

$\therefore\ Y=10+5X+2X^2$

X	Y
0	$10+5\times0+2\times0^2=10$
1	$10+5\times1+2\times1^2=17$
2	$10+5\times2+2\times2^2=28$
3	$10+5\times3+2\times3^2=43$
4	$10+5\times4+2\times4^2=62$
5	$10+5\times5+2\times5^2=85$



चित्र 17—वर्द्धमान लागत वक्र (Law of Increasing Cost)

एंजिल के नियम (Engel's Law) का प्रदर्शन भी द्वितीय श्रेणी के परवलय द्वारा किया जाता है किन्तु इसके समीकरण में b अचर-मूल्य ऋणात्मक होता है जिससे यह स्पष्ट होता है कि आय की इकाई बढ़ने से खाद्य सामग्री पर किए जाने वाले व्यय का प्रतिशत घटता जाता है।

घातांकीय वक्रो द्वारा 'ह्रासमान लागत अथवा 'वर्द्धमान प्रतिफल' नियम (Law of Decreasing Cost or Increasing Returns), माँग नियम तथा उपयोगिता नियम आदि का चित्रण किया जाता है। इस प्रकार के वक्रो के समीकरण का निम्न स्वरूप होता है—

$$Y=ab^X$$

अचर-मूल्य 'b' पर चर-मूल्य X का घात होने के कारण ही इसे घातांकीय वक्र (Exponential Curve) कहते है। आगणन-सुविधा की दृष्टि से उक्त समीकरण को लघुगणकीय रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है—

$$\log Y=\log a+X\log b$$

या $$Y=\text{Antilog}\,[\log a+X\log b]$$

यदि 'b' का मूल्य धनात्मक होता है तो वक्र ऊर्ध्वगामी होता है। अन्यथा वह अधोगामी होता है।।

उदाहरण (Illustration) 16 :

उत्पादन-इकाइयों को X और उत्पादन-लागत को Y मानकर निम्न समीकरण पर आधारित एक लागत वक्र की रचना कीजिए—

$$\log Y=2-0{\cdot}25X$$

इकाइयाँ (X) 0, 1, 2, 3, 4, 5 व 6 मानिए।

हल (Solution) :

$$\log Y=2-0{\cdot}25\,X$$

$$\therefore\ Y=\text{Antilog}\,(2-0{\cdot}25\,X)$$

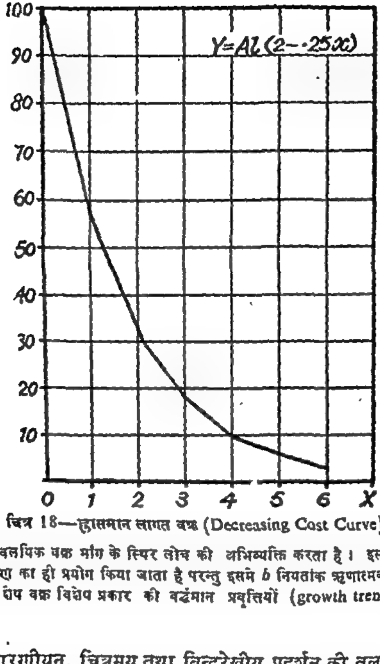
X	Antilog $(2-0{\cdot}25\,X)$		$=Y$
0	Antilog $(2-0{\cdot}25\times0)$	या	$2{\cdot}00=100$
1	Antilog $(2-0{\cdot}25\times1)$	या	$1{\cdot}75=56{\cdot}23$
2	Antilog $(2-0{\cdot}25\times2)$	या	$1{\cdot}50=31{\cdot}62$
3	Antilog $(2-0{\cdot}25\times3)$	या	$1{\cdot}25=17{\cdot}78$
4	Antilog $(2-0{\cdot}25\times4)$	या	$1{\cdot}00=10{\cdot}00$
5	Antilog $(2-0{\cdot}25\times5)$	या	$0{\cdot}75=5{\cdot}62$
6	Antilog $(2-0{\cdot}25\times6)$	या	$0{\cdot}50=3{\cdot}16$

(चित्र अगले पृष्ठ पर देखिए)

अन्य वक्र—आर्थिक क्षेत्र में अन्य प्रकार के विशिष्ट लघुगणकीय वक्रो का भी प्रयोग किया जाता है जिनमे से गुणोत्तर वक्र (Geometric Curve), अतिपरवलयिक वक्र (Hyperbolic Curve), गोम्पर्ट्ज वक्र (Geompertz Curve), वृद्धि-घातांकीय वक्र (Logistic Curve) महत्वपूर्ण आर्थिक प्रवृत्तियों का आकर्षक प्रदर्शन करते हैं। गुणोत्तर वक्र का समीकरण $y=ax^b$ है और पेरेटो के आय-वितरण नियम (Pareto's Law of Distribution of Income) के निरुपण के लिए उपयुक्त होता है। इस समीकरण का लघुगणकीय रूप इस प्रकार है—

$$\log Y=\log a+b\log X$$

या $$Y=\text{Antilog}\,(\log a+b\log X)$$



चित्र 18—ह्रासमान लागत वक्र (Decreasing Cost Curve)

अतिपरवलयिक वक्र मांग के स्थिर लोच की अभिव्यक्ति करता है। इसके लिए गुणोत्तर वक्र के समीकरण का ही प्रयोग किया जाता है परन्तु इसमें b नियतांक ऋणात्मक होता है अर्थात् $Y=aX^{-b}$। शेष वक्र विशेष प्रकार की वर्द्धमान प्रवृत्तियों (growth trends) की व्याख्या करते हैं।

सारणीयन, चित्रमय तथा बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की तुलना
(Tables, Diagrams, and Graphs—A Comparative Study)

सारणी, चित्र व रेखाचित्र—तीनों ही समकों के प्रस्तुतीकरण की विधियाँ हैं, परन्तु इन तीनों में अनेक अन्तर हैं। यहाँ पर हम संक्षेप में इन तीनों की तुलनात्मक समीक्षा करेंगे।

सारणी के गुण-दोष—चित्रों व रेखाचित्रों की तुलना में सारणियों के अनेक गुण हैं—प्रथम, सारणीयन प्रारम्भिक और आवश्यक क्रिया है। सारणी सांख्यिकीय विश्लेषण का आधार है। विभिन्न सांख्यिकीय माप ज्ञात करने के लिए पहले तथ्यों को संक्षिप्त करके सारणी के रूप में रखा जाना आवश्यक है। इसके विपरीत, चित्र एवं बिन्दुरेख समंकों का प्रदर्शन-मात्र करते हैं। वास्तव में, जहाँ सारणी का कार्य समाप्त होता है वहाँ से चित्र व रेखाचित्र का कार्य आरम्भ होता है। दूसरे, सारणी में प्रस्तुत किये जाने से समंकों का यथार्थ गणितीय रूप नष्ट नहीं होता जबकि चित्रों व बिन्दुरेखों में अत्यधिक शुद्धता नहीं होती तथा उनके द्वारा तथ्यों के सूक्ष्म अन्तर प्रदर्शित नहीं किये जा सकते। तीसरे, सारणी द्वारा बहुगुणी समंकों की परस्पर तुलना की जा सकती है, परन्तु चित्रों व रेखाचित्रों द्वारा अनेक गुणों की तुलना सम्भव नहीं है। चौथे,

सारणी बनाना चित्र व रेखाचित्र की रचना की अपेक्षा सरल है। चित्रों व रेखाचित्रों के लिए उचित मापदण्ड निर्धारित करना विशेष योग्यता और अनुभव का काम है। पाँचवें, सारणी में लोच होता है। अतः उसे आवश्यकतानुसार परिवर्तित किया जा सकता है, परन्तु चित्र व रेखाचित्र में परिवर्तन करना सरल नहीं है।

सारणी में कुछ दोष भी होते हैं। प्रथम, सारणी में आकर्षण का अभाव होता है जबकि चित्र व रेखाचित्र आकर्षक होते है और मस्तिष्क पर स्थायी प्रभाव डालते हैं। दूसरे, सारणी को समझने व उससे निष्कर्ष निकालने के लिए गणितीय ज्ञान की आवश्यकता होती है जबकि चित्र व रेखाचित्र को सामान्य व्यक्ति एक ही दृष्टि में समझ लेता है और वह विभिन्न तथ्यों की आपस में सरलतापूर्वक तुलना कर सकता है। तीसरे, बड़ी-बड़ी सारणियों में जटिलता व अस्पष्टता होती है, परन्तु चित्रों व रेखाचित्रों में सरलता व स्पष्टता होती है।

चित्रों के विशेष गुण-दोष—सारणी व बिन्दुरेख की तुलना मे चित्र अधिक सरल, आकर्षक व प्रभावशाली होते हैं। यही कारण है कि विज्ञापन व प्रचार कार्य में उनका विशेष उपयोग होता है। इनसे समय व श्रम की भी बचत होती है, परन्तु ये वास्तविक समंकों के स्थानापन्न नहीं हो सकते, केवल उनके सहायक होते है। मापदण्ड आदि मे परिवर्तन करके इनसे भ्रमात्मक निष्कर्ष निकाले जा सकते है तथा इनका दुरुपयोग सरलता से किया जा सकता है।

बिन्दु-रेखाचित्रों के विशेष गुण-दोष—गणितीय दृष्टिकोण से बिन्दुरेख चित्रों से अधिक महत्त्वपूर्ण होते हैं। उनकी सहायता से अनेक सांख्यिकीय माप जैसे मध्यका, विभाजन-मूल्य, बहुलक आदि निर्धारित किये जा सकते है तथा आर्थिक नियमों का चित्रण किया जा सकता है। आन्तरगणन व बहिर्वेशन में तथा सहसम्बन्ध व प्रतीपगमन का अध्ययन करने मे भी बिन्दुरेख उपयोगी होते हैं। चित्रों की सहायता से यह कार्य सम्भव नहीं है। रेखाचित्र कालश्रेणी व आवृत्ति बटन के प्रदर्शन के लिए विशेष रूप से उपयुक्त होते हैं जबकि चित्रों द्वारा एक ही समय के विभिन्न तथ्यों तथा स्थान-सम्बन्धी श्रेणियों का तुलनात्मक प्रदर्शन होता है। रेखाचित्र स्वयं अनुसन्धान-कर्त्ता अपने लिए तथा अन्य व्यक्तियों के लिए बनाता है जबकि चित्र सामान्यतः अन्य व्यक्तियों के लिए ही बनाये जाते हैं। कुछ विशिष्ट रेखाचित्रों व वक्रो की रचना, चित्रों की रचना की तुलना में कठिन है तथा उसके लिए कुछ गणितीय ज्ञान की आवश्यकता होती है। इस प्रकार, सारणियों, चित्रों व बिन्दुरेखों की विशेष उपयोगिता अलग-अलग क्षेत्रों मे है। इनका प्रयोग इनके विशिष्ट गुण-दोषों को ध्यान में रखकर ही करना चाहिए।

प्रश्न

1. समंकों के प्रस्तुतीकरण की अन्य रीतियों की अपेक्षा चित्र या रेखाचित्र ध्यान आकर्षित करने में अधिक प्रभावशाली होते हैं। क्या आप इस कथन से सहमत हैं ? कारण और उदाहरण दीजिए।
Charts or graphs are more effective in attracting attention than are any of the other methods of presenting data. Do you agree ? Give reasons and illustrations.
[B. Com., Punjab, 1969]

2. समंको के बिन्दुरेखीय प्रदर्शन का महत्त्व समझाइये। उसके विभिन्न लाभ और दोष कौन-कौन से हैं ?
Explain the importance of graphic presentation of statistics. What are its various advantages and defects ?
[B. Com., Saugar, 1963]

3. 'रेखा का घुमाव मस्तिष्क को प्रभावित करने मे सारणीकृत विवरण की अपेक्षा कहीं अधिक शक्तिशाली है, वह उतनी शीघ्रता से यह प्रदर्शित करने मे समर्थ है कि क्या हो रहा है और क्या होने जितनी शीघ्रता से यह कार्य हमारी आँख करने में समर्थ है ?' —वाशिंगटन। उपर्युक्त कथन के बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की उपयोगिता का विवेचन कीजिए।

'The wandering of a line is more powerful in its effect on the mind than a tabulated statement, it shows what is happening and what is likely to take place just as quickly as the eye is capable of working.'—*Boddington.*
In the light of the above statement, discuss the utility of graphic presentation.

4. (क) प्राकृतिक एवं आनुपातिक माप श्रेणी में अन्तर बताइए। आनुपातिक माप का प्रयोग किन स्थितियों में किया जाना चाहिए ?
Distinguish between Natural Scale and Ratio Scale. In which cases the latter scale be used? *[B. Com., Meerut, 1968]*

(ख) सचयी आवृत्ति वक्र से आप क्या समझते हैं ? इसके विशिष्ट लाभ एवं प्रयोगों का विवेचन कीजिए।
What do you understand by cumulative frequency curve (Ogive)? Discuss its specific advantages and uses. *[C. A., 1967]*

5. 'पाई-चित्र, आयत, दण्ड-चित्र और रेखाचित्र—सभी एक ही ध्येय की पूर्ति करते हैं और अदल बदल कर काम में लाए जा सकते हैं।' विवेचन कीजिए।
'Piediagrams, rectangles, bars and graphs—all serve the same purpose and can be interchanged in use." Discuss. *[M. A., Meerut, 1971]*

6. सारणी, चित्र तथा बिन्दुरेख द्वारा समंकों के प्रदर्शन के सापेक्षिक गुणों की तुलना कीजिए। उदाहरण द्वारा अपने उत्तर का स्पष्टीकरण कीजिए।
Compare the relative advantages of presenting statistical data in the form of (a) tables, (b) diagrams, and (c) graphs. Illustrate your answer with suitable examples.

7. मध्यका, चतुर्थांश और बहुलक को ग्राफ द्वारा दर्शाने से आप क्या समझते हैं ? ग्राफ द्वारा उन्हें दिखाने की कौन-सी विधियाँ हैं ?
What do you understand by graphic location of Median, Quartiles and Mode? What are the ways of showing them by graph? *[B. Com., Meerut, 1973]*

8. निम्न आँकड़ों को एक उपयुक्त रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए—

वर्ष	1960-61	61-62	62-63	63-64	64-65	65-66	66-67	67-68	68-69	69-70
राष्ट्रीय आय (100 करोड़ रु०)	133	138	141	149	159	150	152	165	168	178

[B. A., II Econ. Raj., 1971]

9. निम्न आँकड़ों का बिन्दुरेखीय निरूपण कीजिए—

वर्ष :	1960-61	61-62	62-63	63-64	64-65	65-66	66-67	67-68	68-69	69-70	70-71	71-72	72-73
प्रतिरक्षा व्यय : (करोड़ रु०)	281	313	474	816	806	885	909	968	1033	1101	1199	1411	1409

10. निम्न आँकड़ों को एक ग्राफ पेपर पर प्रस्तुत कीजिए—

वर्ष :	1960	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	1971
पर्यटकों का आगमन : (हजारों में)	123	139	134	140	157	148	160	180	189	245	281	301

[B. Com., Agra, 1973]

11. निम्नलिखित सारणी में आयात-निर्यात के आँकड़े दिए हैं। इनको ग्राफ द्वारा निरूपित कीजिए तथा व्यापार सन्तुलन भी दिखलाइए—

वर्ष :	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
आयात (करोड़ रु०) :	427	445	429	436	435	448	462	428	440	442
निर्यात (करोड़ रु०) :	440	442	418	440	430	440	470	440	440	400

[B. Com., Kanpur, 1972 ; Allahabad, 1969]

12. दो ग्राफ खींचिए ताकि देखने वाले एक से समझें कि प्रगति (क) तीव्र है, और दूसरे से यह कि प्रगति, (ख) धीमी है। सांख्यिकी ज्ञाता के नाते आप किसे काम में लायेंगे और क्यों ?

वर्ष :	1964	1965	1965	1967	1968	1969	1970
बिक्री :	401	412	425	429	440	439	450

[M. A., Meerut, 1972]

13. निम्नलिखित सारणी देश (*A*) का आयात और निर्यात 1969–70 और 1970–71 के वर्षों का (करोड़ रुपयों में) दर्शाती है—
The following table shows the imports and exports (Crores of Rs.) of country '*A*' during the years 1969-70 and 1970-71—

Month :		April	May	June	July	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jan.	Feb.	March
1969–70	Imports :	22	24	26	28	31	29	32	30	32	31	35	24
	Exports :	28	28	23	21	20	22	21	20	20	20	18	20
1970–71	Imports :	26	21	19	18	21	20	23	26	23	28	20	20
	Exports :	18	20	17	17	20	20	18	20	22	25	25	30

ग्राफ पर उपर्युक्त आँकड़ो को निरूपित कीजिए और व्यापार-अवशेष भी दर्शाइए।
Represent these figures on a graph paper showing the balance of trade also.

14. निम्न सारणी मे भारत मे आर्थिक सलाहकार के थोक मूल्य सूचकाक दिए गए हैं। एक उपयुक्त बिन्दु-रेखाचित्र द्वारा इन्हे प्रस्तुत कीजिए—
The following table gives the Economic Adviser's wholesale price index numbers. Present them by a suitable graph—

Index Numbers (Base Year 1961-62=100)

Year	*Food Articles*	*Liquor and Tobacco*	*Fuel, Power and Light etc.*	*Industrial Raw Materials*	*Chemicals*	*Machinery and Transport equipment*	*Manufactures*	*All Commodities*
1968–69	197	192	149	157	169	133	134	165
1969–70	197	195	155	180	184	136	144	172
1970–71	204	185	162	197	188	148	155	181
1971–72	210	195	172	191	197	159	167	188
1972–73	240	233	181	204	201	168	177	207
1973–74	296	251	215	299	220	183	206	254
1974–75	364	305	316	327	300	254	255	314

15. नीचे दी हुई सामग्री को एक ही रेखाचित्र पर दर्शाइए—
Present the following data on a graph paper—

Year :	1960-61	61-62	62-63	63-64	64-65	65-66	66-67	67-68	68-69
Total National Income : (Crore Rs.)	13,300	14,000	14,900	17,100	20,100	20,600	23,600	28,400	28 600
Per Capita Income (Rs):	306	316	326	366	420	421	471	551	542

16. भारत के कुल निर्यात और आयात के निम्नलिखित आँकड़ो को प्राकृतिक तथा अनुपात मापश्रेणी पर प्रांकित कीजिए—
Plot the following figures of total exports and imports of India on natural and ratio scales—

Year :	1965-66	66-67	67-68	68-69	69-70	70-71	71-72
Imports (Crore Rs):	1,409	2,078	2,008	1,909	1,583	1,634	1,812
Exports (Crore Rs.):	806	1,157	1,199	1,358	1,413	1,535	1,607

17. भारत की जनसंख्या मे होने वाली आनुपातिक वृद्धि प्रदर्शित करने के लिए एक रेखाचित्र की रचना कीजिए—
Construct a graph to show the proportionate increase in the population of India—

Year :	*1901*	*1911*	*1921*	*1931*	*1941*	*1951*	*1961*	*1971*
Population (mln) :	238	252	251	279	319	361	439	548

18. निम्नलिखित समको को एक उपयुक्त बिन्दु रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए—
Present the following data by a suitable graph—

Year :	1	2	3	4	5	6	7	8
Imported Quantity (000 Tonnes) :	400	450	560	620	580	460	500	540
Value of Imports (Crore Rs.) :	22 0	23 5	38·5	42 0	42 0	38·0	36 0	40 0

19. (i) एक वर्गित आवृत्ति वंटन से बहुलक का निर्धारण प्रदर्शित करने के लिए एक प्रतिरूप-चित्र की रचना कीजिए और बहुलक के बीजगणितीय परिकलन के उपयुक्त सूत्र का प्रतिपादन कीजिए।
Construct a schematic diagram showing location of mode in a grouped frequency distribution and derive therefrom a suitable formula for algebraic calculation of mode.

(ii) निम्न समंको से एक आवृत्ति आयत-चित्र और एक आवृत्ति बहुभुज की रचना कीजिए और बहुलक का मूल्य निर्धारित कीजिए—
From the following data draw a histogram and frequency polygen and locate the value of mode—

Production (In Tonnes) :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
No. of Workers :	16	36	46	74	94	52	32	10

20. निम्न समंको से एक आवृत्ति आयत-चित्र की रचना कीजिए और उसकी सहायता से बहुलक मूल्य का माप कीजिए—
From the following figures construct a frequency histogram and determine the value of mode—

Class :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
Freq. :	5	11	19	21	16	10	8	6	3	1

21. नीचे संसद के 542 सदस्यों का आयु के अनुसार बटन किया गया है। इस सामग्री के आधार पर आवृत्ति चित्र तैयार कीजिए और उसे आवृत्ति बहुभुज में परिवर्तित कीजिए—
The following is the age-distribution of 542 members of Parliament. On the basis of this information construct a histogram and convert it into a frequency polygon—

Age	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
No of Members :	3	61	132	153	140	51	2

[B. Com., Vikram, 1971]

22. आवृत्ति आयत-चित्र से आप क्या समझते हैं? संक्षेप में, इसके बनाने की विधि का वर्णन कीजिए। निम्न आँकड़ो से आवृत्ति आयत-चित्र किस प्रकार बनाया जायगा? यह भी बताइए कि असमान वर्गान्तरों से आवृत्ति आयत-चित्र किस प्रकार बनेगा?
What do you understand by a histogram? Briefly describe the procedure of constructing it. How will a histogram be constructed from the following data? Also state the procedure of constructing histogram from unequal class-intervals.

Mid-point :	115	125	135	145	155	165	175	185	195
Frequency :	6	25	48	72	116	60	28	22	3

[C. A., 1966]

23. 150 विद्यार्थियों के प्राप्तांको के नीचे दिए बटन का आयत-चित्र तथा बारम्बारता-बहुभुज बनाइए—
Draw the histogram and the frequency polygon for the following distribution of marks of 150 students—

Marks :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
No. of Students :	10	21	28	43	31	14	2	1

[M. A., Meerut, 1975]

24. निम्न समंको से (i) आवृत्ति आयत-चित्र, (ii) आवृत्ति बहुभुज और (iii) आवृत्ति वक्र की रचना कीजिए—
From the following data construct (i) frequency histogram, (ii) frequency polygon and (iii) frequency curve—

Wages (Rs.) :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–60	50–60	60–70	70–80	80–90
No. of Workers :	2	4	11	15	25	18	15	4	2

[B. Com., Raj., 1960]

25. 50 विद्यार्थियो द्वारा 100 पूर्णांक में से सांख्यिकी में निम्न अंक प्राप्त किए गए हैं—
50 students have secured the following marks out of 100 in Statistics—

70	25	55	36	51	59	42	63	57	39
45	65	60	45	47	49	63	54	53	64
33	75	65	42	39	41	82	52	55	35
64	30	58	35	61	15	65	48	42	26
50	20	52	40	53	55	45	46	45	18

(i) 10 का वर्गान्तर लेते हुए एक आवृत्ति बटन बनाइए (पहला वर्गान्तर 0–10 लीजिए)।
Form a frequency distribution taking an interval of 10.

(ii) आवृत्ति बटन से एक आवृत्ति आयत-चित्र और एक आवृत्ति बहुभुज की रचना कीजिए।
From the frequency distribution thus formed construct a histogram and frequency polygon.

[B. Com., Delhi, 19…]

निम्न आँकड़ो से एक संचयी आवृत्ति वक्र बनाइए तथा ग्राफ द्वारा मध्यका और निम्न एवं उच्च चतुर्थक ज्ञात कीजिए—
From the following data, construct an ogive and locate graphically the median and quartiles—

Marks :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
No. of Students :	14	12	20	18	10

[*B. Com., Gorakhpur, 1971*]

एक सचयी आवृत्ति वक्र खीचिए और निम्नलिखित ज्ञात कीजिए—(*a*) मध्यका-मजदूरी, (*b*) 55 रु० प्रति सप्ताह से कम मजदूरी प्राप्त करने वाले श्रमिकों की सख्या।
Draw a cumulative frequency curve and determine the following—(*a*) median wage, (*b*) number of workers getting a wage of less than Rs. 55 per week

Weekly Wages (Rs.) :	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
No. of Workers :	40	51	64	38	7

[*B. Com., Kanpur, 1971*]

किसी कक्षा के 60 छात्रो के एक विषय-विशेष मे प्राप्तांक नीचे दिए गए हैं। इस सूचना को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए और रेखाचित्र से मध्यका-अंक ज्ञात कीजिए—
The following are the marks obtained by sixty students of a class in a particular subject. Represent this information graphically and determine median marks—

Marks (less than) :	10	20	30	40	50	60	70	100
No. of Students :	4	8	25	34	41	46	50	60

[*B. Com., Raj., 1973*]

निम्नलिखित समकों को ग्राफ पर निरूपित कीजिए और उनसे माध्यिका दर्शाइये—
Represent the following data on a graph paper and locate the median—

Size :	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
Frequency :	30	50	90	150	75	60	50	30	10

[*B. Com., Meerut, 1973*]

निम्न समकों से एक ओजाइव वक्र खीचिए और उससे मध्यका तथा चतुर्थकों का निर्धारण कीजिए—
Draw an ogive from the following figures and determine median and quartiles from it—

Marks Obtained :	1–5	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45
Frequency :	7	10	16	32	24	18	10	5	1

निम्न सूचना से गाल्टन ग्राफ बनाइए और मध्यका एवं प्रथम चतुर्थक ज्ञात कीजिए—
From the following data construct a Galton Graph and determine the median and first quartile—

Size :	10	11	12	13	14	15	16
Frequency :	2	3	3	4	5	3	2

[*B. Com., Kanpur, 1970*]

'सम्भाव्य श्रेणी' किसे कहते हैं ? निम्न सम्बन्धो के आधार पर एक वक्र खीचिए—
What is 'Potential Series'? Draw a curve on the basis of the following relationships—

$$Y = a + bX + cX^2 + dX^3$$

जबकि *a*, *b*, *c*, *d*, के मूल्य क्रमश: 12, 3, 2 और 1 हैं।
Where the values of *a*, *b*, *c*, *d* are 12, 3, 2 and 1.

... t को *Y* मानते हुए निम्न ...

... and *Y* the quantities demanded at the given prices construct a demand curve satisfying the following equation—

$$\text{Log } Y = 2 - 0{\cdot}32X \quad \text{Or} \quad Y = \text{Antilog } (2 - 0{\cdot}32X)$$

X के मूल्य क्रमश: 1, 2, 3, 4 और 5 रु० मान लीजिए।
For *X* you may assume the values of Rs. 1, 2, 3, 4 and 5 to arrive at the corresponding values of *Y*. [*M. Com., Delhi, 1971*]

निम्न फलनों के वक्र अन्वायोजित कीजिए और उनकी समीक्षा कीजिए—
Fit the curves of the following functions and comment on them—

(i) $Y = aX^b$ when $a = 1, b = 2$
Assume the values of *X* : −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3.

(ii) $Y = aX^{-b}$ when $a = b = 1$, Assume $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 and 4 as values of *X*.

14

सूचकांक
(INDEX NUMBERS)

आर्थिक एवं व्यावसायिक समंकों में अनेक कारणों से निरन्तर परिवर्तन होते रहते हैं। ये परिवर्तन विभिन्न इकाइयों के रूप में प्रस्तुत होते हैं। अतः ऐसे परिवर्तनों का अप्रत्यक्ष और सापेक्ष माप ही किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यदि हम भारत में वित्त-वर्ष 1994-95 के सामान्य मूल्य-स्तर की तुलना 1981–82 में प्रचलित मूल्य-स्तर से करना चाहते हैं तो सर्वप्रथम कुछ प्रतिनिधि वस्तुएँ छांटकर उनके मूल्य-उद्धरण प्राप्त किये जायेंगे, जो कि विभिन्न इकाइयों में व्यक्त होंगे, जैसे—गेहूँ, चावल, कोयला आदि प्रति क्विन्टल में; कपड़ा प्रति मीटर में, दूध प्रति लीटर में इत्यादि। इसके बाद प्रत्येक वस्तु के 1981–82 में प्रचलित मूल्य को 100 मानकर उनके आधार पर 1994–95 के मूल्य-स्तर को प्रतिशत में बदल लिया जायेगा और उन प्रतिशतों का माध्य निकाल लिया जायेगा। प्रतिशतों का यह माध्य ही सांख्यिकी में सूचकांक या निर्देशांक (Index Number) कहलाता है। वास्तव में सूचकांक विशिष्ट प्रकार के माध्य होते हैं।[1] इनका प्रयोग केवल सामान्य मूल्य-स्तर की केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप तक ही सीमित नहीं है, वरन् इनकी सहायता से जीवन-स्तर, उत्पादन, राष्ट्रीय आय, व्यापारिक क्रिया आदि प्रत्येक ऐसी घटना का सापेक्ष माप किया जा सकता है जिसका प्रत्यक्ष माप सम्भव न हो।[2]

परिभाषा और विशेषताएं (Definition and Characteristics)—सूचकांकों की अनेक परिभाषाएँ दी गई है। क्राक्सटेन तथा काउडेन के अनुसार, 'सूचकांक, सम्बन्धित चर-मूल्यों के आकार में होने वाले अन्तरों का माप करने के साधन हैं।'[3] इनसे मूल्यों के सापेक्ष या तुलनात्मक अन्तरों का मापन होता है। यह माप समय (time), स्थान (space) या किसी अन्य सुनिश्चित लक्षण के आधार पर किया जा सकता है। होरेस सिक्राइस्ट के शब्दों में, 'सूचकांक अंकों की एक ऐसी श्रेणी है जिसके द्वारा किसी भी तथ्य के परिमाण में होने वाले परिवर्तनों का समय या स्थान के आधार पर मापन किया जा सकता है।'[4] स्पाइगेल के अनुसार, 'सूचकांक एक ऐसा सांख्यिकीय माप है जो समय, स्थान या अन्य विशेषता के आधार पर चर-मूल्यों के समूह में होने वाले परिवर्तनों को प्रदर्शित करता है।'[5] वैसेल एवं विलेट के अनुसार, 'सूचकांक एक विशेष प्रकार का माध्य है जो समय या स्थान के आधार पर होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों का मापन करता है।'[6] सामान्य रूप से यह कहा जा सकता है कि सूचकांक विशेष प्रकार के माध्य होते हैं, जिनके द्वारा समय, स्थान या अन्य विशेषता के आधार पर किसी चर-मूल्य या सम्बन्धित चर-मूल्यों के समूह में होने वाले

[1] 'Index numbers are a specialised type of average.'—M.M. Blair.

[2] 'Index numbers are used to measure the changes in some quantity which we cannot observe directly.' —Dr. Bowley.

[3] 'Index numbers are devices for measuring differences in the magnitude of a group of related variables.'—Croxton and Cowden.

[4] 'Index numbers are a series of numbers by which changes in the magnitude of a phenomenon are measured from time to time or from place to place.' —Horace Secrist.

[5] 'An index number is a statistical measure designed to show changes in a variable or a group of related variables with respect to time, geographic location or other characteristics.' —Murray S

[6] 'An index number is a special type of average which provides a measurement of relative changes from time to time or from place to place.' —Wessell and Willett.

सापेक्ष परिवर्तनों की सामान्य प्रवृत्ति का माप किया जाता है।[1]

उपर्युक्त परिभाषाओं के आधार पर सूचकांकों की निम्न विशेषताएँ स्पष्ट हो जाती हैं—

(i) परिवर्तनों का सापेक्षिक माप—सूचकांकों द्वारा समूह के तुलनात्मक या सापेक्ष परिवर्तनों (relative changes) का माप किया जाता है। उदाहरणार्थ, मूल्य-सूचकांक विशिष्ट वस्तुओं के मूल्यों में होने वाले वास्तविक अन्तरों को प्रकट नहीं करते बल्कि वे आधार वर्ष की तुलना में प्रचलित वर्ष के मूल्य-स्तर के प्रतिशत परिवर्तनों का सामान्य सापेक्ष माप प्रस्तुत करते हैं। यदि 1982 में थोक मूल्य सूचकांक 100 हो और 1994 में 300 हो जाए तो इसका यह अर्थ हुआ कि 1982 की तुलना में 1994 में मूल्य स्तर 200% बढ़ गया है।

(ii) प्रतिशतों का माध्य—आधार वर्ष में किसी वस्तु के मूल्य को 100 मानकर उसी वस्तु के प्रचलित वर्ष के मूल्य को प्रतिशत में बदला जाता है, जिसे मूल्यानुपात कहते हैं। फिर सामान्य सूचकांक ज्ञात करने के लिए प्रचलित वर्ष में सभी वस्तुओं के मूल्यानुपातों का माध्य निकाल लिया जाता है। इस प्रकार 'सूचकांक वस्तुतः अनुपातों के माध्य हैं।'[2]

(iii) तुलना का आधार—सूचकांकों द्वारा अधिकतर समय अथवा स्थान के आधार पर तुलना की जाती है। घटना के जिस निश्चित वर्ष के स्तर को आधार मान लिया जाता है उसे आधार वर्ष (base year) कहते हैं तथा जिस वर्ष में प्रचलित स्तर की तुलना की जाती है वह प्रचलित वर्ष (current year) कहलाता है।

(iv) व्यापकता—सूचकांक केवल मूल्य-स्तर के माप के लिए ही प्रयुक्त नहीं किये जाते वरन् किसी भी ऐसी घटना के सापेक्ष माप के लिए प्रयोग किये जाते हैं जिसका प्रत्यक्ष या निरपेक्ष अध्ययन न किया जा सके जैसे उत्पादकता, कार्यक्षमता, व्यावसायिक-क्रिया आदि।

सूचकांकों का समारम्भ—सूचकांकों का सर्वप्रथम निर्माण करने का श्रेय इटली के सांख्यिक कार्ली (Carli) को दिया जाता है जिन्होंने 1764 ई० में इटली के अनाज, तेल व शराब के मूल्यों पर अमरीका की खोज का प्रभाव ज्ञात करने के लिए सन् 1500 ई० को आधार वर्ष मानकर 1750 ई० के साधारण मूल्य सूचकांक की रचना की। इसके बाद मुद्रा की क्रय-शक्ति का माप करने के उद्देश्य से ही विभिन्न विद्वानों ने सूचकांकों का निर्माण किया जिनमें जेवन्स (Jevons), मार्शल (Marshall), इरविंग फिशर (Irving Fisher), वाल्श (Walsh), एजवर्थ (Edgeworth), मिचेल (Mitchell) आदि के नाम विशेष रूप से उल्लेखनीय हैं। परन्तु आजकल सूचकांकों का उद्देश्य केवल मुद्रा की क्रय-शक्ति का ही माप करना नहीं है, वरन् जीवन-स्तर, उत्पादन, राष्ट्रीय आय आदि का भी तुलनात्मक अध्ययन करना है। यहाँ तक कि गुणात्मक तथ्यों, जैसे कार्यक्षमता, सौन्दर्य, बुद्धिमत्ता आदि का सापेक्ष विवेचन भी सूचकांकों की सहायता से किया जाता है।

सूचकांकों का महत्त्व एवं उपयोग (Importance and Uses)—वर्तमान काल में आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में होने वाले परिवर्तनों का विश्लेषण करने में सूचकांक अत्यन्त उपयोगी तथा महत्त्वपूर्ण साधन हैं। वस्तुतः सूचकांक आर्थिक दाबमापक यन्त्र (Economic Barometers) कहलाते हैं। जो स्थान ऋतु-विज्ञान में वायुदाबमापक यन्त्र का है वही स्थान आर्थिक क्षेत्र में सूचकांकों को प्राप्त है। वायुदाबमापक यन्त्र से हवा का दबाव पता चल जाता है जिसके आधार पर मौसम के पूर्वानुमान लगाये जा सकते हैं। ठीक इसी प्रकार, उत्पादन, मूल्य, राष्ट्रीय आय आदि के सूचकांकों द्वारा वर्तमान आर्थिक स्थिति का विश्लेषणात्मक अध्ययन किया जा सकता है तथा उसके आधार पर भावी आर्थिक प्रवृत्तियों का पूर्वानुमान लगाया जा सकता है। इनके आधार पर ही यह पता चलता है कि देश में अत्यधिक मुद्रा-प्रसार की स्थिति है या मुद्रा-संकुचन की, जीवन-निर्वाह व्यय में किस गति से वृद्धि हो रही है, कृषि एवं उद्योग में उत्पादन की क्या प्रवृत्ति है, पंचवर्षीय

योजनाओं का सामान्य जीवन-स्तर पर क्या प्रभाव पड़ा है। इन सब मूल तत्वों के तर्कपूर्ण विश्लेपण द्वारा ही सरकार अनेक आर्थिक नीतियों का निर्धारण करती है।

व्यावसायिक क्षेत्र में भी सूचकांक व्यापारी का पग-पग पर पथ-प्रदर्शन करते हैं। वे उसे मूल्य, मजदूरी, उत्पादन, क्रय-विक्रय, आयात-निर्यात, माँग आदि में होने वाले ऋतुकालीन तथा चक्रीय परिवर्तनों के बारे में पूर्व-सूचना प्रदान करते हैं। उनके आधार पर ही उसे व्यापार व व्यवसाय की भावी प्रवृत्तियों का संकेत मिलता है जिससे वह सफलतापूर्वक अपने व्यवसाय का संचालन एवं प्रबन्ध कर सकता है। जिस प्रकार एक पथिक का अपने पथ में आने वाले विभिन्न संकेतों और निर्देश-स्तम्भों द्वारा पथ-प्रदर्शन होता है, उसी प्रकार एक व्यापारी भी सूचकांकों की सहायता से अपने व्यापार के संचालन में आवश्यक निर्देश व प्रेरणा प्राप्त करता है। ब्लेयर ने ठीक ही कहा है 'सूचकांक व्यवसाय के पथ पर संकेतक चिह्न तथा निर्देश-स्तम्भ हैं जो व्यवसायी को अपने कार्यों का संचालन एवं प्रबन्ध करने की विधि बतलाते हैं।'[1]

सूचकांकों के लाभ या महत्वपूर्ण उपयोग निम्न प्रकार हैं—

(i) जटिल तथ्यों को सरल बनाना—सूचकांकों की सहायता से ऐसे जटिल परिवर्तनों का माप सम्भव हो जाता है जिनका प्रत्यक्ष रूप से मापन नहीं किया जा सकता। उदाहरणार्थ, व्यापारिक क्रिया का मापन किसी एक तथ्य के अध्ययन द्वारा सम्भव नहीं है, परन्तु उत्पादन, आयात-निर्यात, लाभ, बैंकिंग और यातायात आदि के विश्लेपण से व्यापार-क्रिया सूचकांक की रचना की जा सकती है जिससे व्यापार की क्रियाओं में होने वाले परिवर्तनों की प्रवृत्ति ज्ञात हो सकती है।

(ii) तुलनात्मक अध्ययन में सहायक—सूचकांकों द्वारा तथ्यों में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों का माप किया जाता है, निरपेक्ष परिवर्तनों का नहीं, जिसके कारण समय व स्थान के आधार पर घटनाओं की तुलना आसानी से की जा सकती है। उदाहरणार्थ, यदि हम यह कहें कि किसी स्थान पर 1982 में गेहूँ का मूल्य 250 रु० प्रति क्विन्टल, कपड़े का मूल्य 10 रु० प्रति मीटर और सरसों के तेल का मूल्य 12 रु० 50 पैसे प्रति किलोग्राम था और 1994 में गेहूँ, कपड़े व सरसों के तेल का मूल्य क्रमशः 500 रु० प्रति क्विन्टल, 25 रु० प्रति मीटर तथा 37 रु० 50 पैसे प्रति किलोग्राम हो गया तो इन निरपेक्ष मूल्यों के आधार पर तुलना सम्भव नहीं है। परन्तु यदि यह कहा जाये कि 1982 के आधार पर इन वस्तुओं का मूल्य सूचकांक 1994 में 250 है तो उससे यह पता चल जायेगा कि 1982 की तुलना में 1994 में इन वस्तुओं के मूल्यों में औसत सापेक्ष वृद्धि 150% हुई है। इस प्रकार सूचकांकों की सहायता से विभिन्न घटनाओं में परिवर्तनों का तुलनात्मक अध्ययन सरल हो जाता है।

(iii) भावी प्रवृत्तियों के संकेतक—भूतकालीन एवं वर्तमान सूचकांकों के आधार पर भविष्य की आर्थिक प्रवृत्तियों के बारे में उपयोगी पूर्वानुमान लगाये जा सकते हैं। इसीलिए सूचकांक आर्थिक दाबमापक यन्त्र (economic barometers) के समान होते हैं।

(iv) नीति निर्धारण में सहायक—सूचकांकों का उपयोग करके सरकार, व्यवसायी, अर्थशास्त्री व सामान्य व्यक्ति द्वारा नीति निर्धारण और योजना-निर्माण में सहायता मिलती है। उदाहरणार्थ, सूचकांकों के आधार पर ही सरकार व उद्योगपति कर्मचारियों को दिये जाने वाले महँगाई भत्ते का निर्धारण करते हैं। अनेक व्यावसायिक व आर्थिक क्रियाओं का मूल्यांकन भी सूचकांकों के आधार पर किया जाता है।

(v) अपस्फीति में उपयोगी—वास्तविक आय व वास्तविक मजदूरी ज्ञात करने में कीमत परिवर्तनों तथा जीवन निर्वाह व्यय परिवर्तनों का समायोजन करके मौद्रिक आय व मौद्रिक मजदूरी का अपस्फीतिकरण सूचकांकों द्वारा ही सम्पन्न किया जाता है।

(vi) थोक मूल्य सूचकांकों के उपयोग—मूल्य सूचकांकों से सामान्य मूल्य-स्तर अथवा मुद्रा की क्रय-शक्ति में होने वाले परिवर्तनों का माप होता है तथा उनके आधार पर ही मूल्यों में स्थिरता

[1] 'Index numbers are the signs and guideposts along the business highway that indicate to the businessman how he should drive or manage his affairs. —M. M. Blair.

लाने के लिए सरकार समय-समय पर अपनी आर्थिक नीतियों में आवश्यक परिवर्तन करती है। इन सूचकांकों से विभिन्न देशों के सामान्य मूल्य-स्तर की तुलना की जा सकती है। व्यापारी तथा उद्योगपति द्वारा क्रय-विक्रय तथा उत्पादन सम्बन्धी नीति निर्धारित करने में भी मूल्य सूचकांक बहुत उपयोगी होते हैं।

(vii) **उपभोक्ता-मूल्य सूचकांकों की उपयोगिता**—उपभोक्ता-मूल्य सूचकांकों (Consumer Price Index Numbers) के अध्ययन से समाज के विभिन्न वर्गों के रहन-सहन व्यय में होने वाले परिवर्तनों का पता चलता है और मजदूरों की न्यूनतम मजदूरी, महँगाई-भत्ता आदि निश्चित करने में सहायता मिलती है।

(viii) **उत्पादन सूचकांकों के उपयोग**—कृषि एवं उद्योग के उत्पादन सूचकांकों (Production Indices) से इन क्षेत्रों के विकास की दिशा एवं गति का आभास होता है और यह पता चलता है कि विकास कार्यक्रम योजना के अनुकूल चल रहे हैं या नहीं।

(ix) **व्यावसायिक-क्रिया सूचकांक**—व्यावसायिक क्रिया सूचकांकों से देश की आर्थिक स्थिति में होने वाले परिवर्तनों के सम्बन्ध में आवश्यक सूचना उपलब्ध होती है। इनके आधार पर देश की वास्तविक राष्ट्रीय-आय के परिवर्तनों का अनुमान लगाया जा सकता है।

संक्षेप में, विभिन्न प्रकार के सूचकांक देश की आर्थिक गति-विधि के द्योतक होते है। उनसे *विभिन्न क्षेत्र के व्यक्तियों को उपयोगी सूचनाएँ प्राप्त होती है, परिवर्तनों का पता चलता है,* नीति-निर्धारण में सहायता मिलती है तथा भावी प्रवृत्तियों के अनुमान लगाये जा सकते हैं।

सूचकांकों की सीमाएँ (Limitations of Index Numbers)—सूचकांक अत्यन्त उपयोगी युक्तियाँ हैं परन्तु उनकी निम्नलिखित सीमाएँ भी हैं जिन्हें ध्यान में रखना परमावश्यक है—

(i) **सापेक्ष परिवर्तनों के अनुमान मात्र**—सूचकांक विभिन्न घटनाओं में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों के केवल अनुमान हैं। उनसे वास्तविक स्थिति का सही ज्ञान नहीं हो पाता, क्योंकि वे लगभग संकेतक (approximate indicators) होते हैं। मूल्यों के संकलन, आधार वर्ष व प्रतिनिधि वस्तुओं के चुनाव तथा भार देने की रीति में त्रुटियाँ हो जाने से परिणाम भ्रमात्मक हो जाते हैं। इसके अतिरिक्त, सूचकांकों के निष्कर्ष सामूहिक व औसत रूप से ही सत्य होते है, वे व्यक्तिगत इकाइयों पर लागू नहीं होते। यदि यह कहा जाय कि भारत में 1981–82 के आधार पर 1994–95 में सूचकांक 300 हो गया है तो इसका यह अर्थ नहीं/ कि गेहूँ या कपड़े के मूल्य मे ठीक इतनी ही वृद्धि हुई है। कुछ वस्तुओं के मूल्यों में वृद्धि बहुत अधिक, कुछ मूल्यों में कम वृद्धि तथा कुछ वस्तुओं के मूल्यों में कमी हो सकती है। मूल्य सूचकांक तो केवल औसत माप ही प्रस्तुत करते हैं।

(ii) **प्रतिदर्श के कारण अत्यधिक शुद्धता की कमी**—यह स्पष्ट है कि सूचकांक बनाते समय प्रत्येक इकाई को सम्मिलित नहीं किया जा सकता। समग्र में से कुछ इकाइयाँ प्रतिचयन द्वारा छाँट ली जाती है जिससे उनमें पूर्ण शुद्धता नहीं होती। यदि प्रतिदर्श अपर्याप्त है और अनुपयुक्त रीति से लिया गया है तो परिणाम अधिक विश्वसनीय नहीं होंगे।

(iii) **उद्देश्य व रीति का अन्तर**—सब सूचकांक सभी उद्देश्यों व परिस्थितियों के लिए उपयुक्त नहीं होते। एक उद्देश्य से बनाये गए सूचकांकों का प्रयोग यदि अन्य उद्देश्यों की पूर्ति के लिए किया जाता है तो परिणाम असत्य एवं भ्रमपूर्ण होते है। उदाहरणार्थ, सामान्य मूल्य सूचकांकों से निर्वाह-व्यय के परिवर्तनों का पता नहीं चलता तथा एक वर्ग के जीवन-निर्वाह-व्यय सूचकांक दूसरे वर्ग के निर्वाह-व्यय के बारे में कोई सूचना प्रदान नहीं करते। इसी प्रकार, विभिन्न रीतियों से बनाये गये सूचकांकों मे भी भिन्नता होती है जिससे परिणाम सन्देहजनक होते हैं।

(iv) **गुणात्मक परिवर्तनों की उपेक्षा**—मूल्य या उत्पादन सूचकांकों की रचना करते वस्तु की किस्म में होने वाले परिवर्तनो का ध्यान नहीं रखा जाता। यह हो सकता है कि किस्म में सुधार होने के कारण मूल्य में वृद्धि हो जाये। परन्तु सूच ंकों से इस परिवर्तन

नही चलेगा। इसी प्रकार जीवन-निर्वाह-व्यय सूचकांकों की सहायता से जीवन-स्तरों की वास्तविक तुलना नहीं की जा सकती क्योंकि विभिन्न स्थानों में मनुष्यों के रीति-रिवाज आदि भिन्न होते हैं तथा एक ही स्थान में एक ही वर्ग के विभिन्न व्यक्तियों के रहन-सहन के ढंग में अन्तर होते हैं।

(v) माध्यों की सीमाएँ—सूचकांक-रचना में किसी एक माध्य का प्रयोग होता है जैसे समान्तर-माध्य, गुणोत्तर माध्य, मध्यका आदि। प्रयुक्त माध्य की सीमाओं का प्रभाव सूचकांक पर भी पड़ता है।

(vi) अन्य सीमाएँ—आधार वर्ष और प्रतिनिधि वस्तुओं के चुनाव में पक्षपात होने के कारण भी कभी-कभी सूचकांकों से भ्रामक निष्कर्ष निकलते है।

सूचकांक-रचना की समस्याएँ
(Problems in the Construction of Index Numbers)

सूचकांक की रचना करने से पहले अनेक समस्याओं पर विचार करना आवश्यक है। विशेषतया, मूल्य-सूचकांकों (Price Index Numbers) की रचना करते समय निम्न समस्याओं का समाधान करना पड़ता है—

(1) सूचकांक का उद्देश्य (Purpose of Index Numbers),
(2) पदों या वस्तुओं का चुनाव (Selection of Items),
(3) मूल्य-उद्धरण (Price Quotations),
(4) आधार का चुनाव तथा सूचकांकों का परिगणन (Choice of the Base and Calculation of Simple Index Numbers),
(5) माध्य का चुनाव (Selection of Average),
(6) भारांकन विधि (System of Weighting)।

सूचकांक का उद्देश्य
(Purpose of Index Numbers)

सूचकांक-रचना से पूर्व उनका उद्देश्य निश्चित करना आवश्यक है क्योंकि वस्तुओं का चुनाव, उनके मूल्य-उद्धरण तथा भारांकन आदि का निर्धारण सूचकांक के उद्देश्य पर ही निर्भर होता है। उदाहरणार्थ, एक सूक्ष्मग्राही या संवेदनशील (sensitive) मूल्य-सूचकांक में केवल उन वस्तुओं का समावेश होगा जिनके मूल्यों में बहुत तेजी से परिवर्तन होते रहते है, इसके विपरीत सामान्य उद्देश्य वाले (general purpose) मूल्य-सूचकांक मे अधिकाधिक वस्तुएँ शामिल की जाती हैं जो देश की अर्थ-व्यवस्था के सभी महत्त्वपूर्ण अंगों का पूर्ण प्रतिनिधित्व कर सके। जीवन-निर्वाह व्यय सूचकांक बनाने से पहले यह तय कर लेना चाहिए कि किस वर्ग के व्यक्तियों का निर्वाह व्यय सूचकांक बनाना है। मजदूरों के निर्वाह व्यय सूचकांक में वे वस्तुएँ ही शामिल की जायेंगी जिनका उपभोग सामान्यतया इन मजदूरों द्वारा किया जाता है।

पदों या वस्तुओं का चुनाव
(Selection of Items)

किसी सूचकांक में सभी पदों या सभी वस्तुओं को शामिल कर लेना न तो सम्भव है और न आवश्यक ही। अतः सूचकांकों की रचना में कुछ प्रतिनिधि वस्तुओं का चुनाव कर लिया जाता है। वस्तुओं का चुनाव करते समय ये प्रश्न उठते है कि— (क) किन-किन वस्तुओं का चुनाव किया जाये; (ख) उनकी संख्या कितनी हो; (ग) वे किस किस्म की हों तथा (घ) उनका किस प्रकार वर्गीकरण किया जाये ?

(क) वस्तुएँ—निम्न विशेषताओं वाली वस्तुओं का ही चुनाव करना चाहिए—

(i) **प्रतिनिधि एवं लोकप्रिय**—वस्तुएँ ऐसी होनी चाहिएँ जो सम्बन्धित वर्ग के व्यक्तियों में लोकप्रिय हों तथा उनकी आदतों, रीति-रिवाजों व आवश्यकताओं का प्रतिनिधित्व करें। यदि कानपुर के सूती वस्त्र-उद्योग के श्रमिकों के निर्वाह-व्यय सूचकांक में मोटर कार, रेफ्रिजरेटर, टेलीविज़न, हीट आदि वस्तुओं को शामिल किया जाए तो वह सूचकांक मजदूरों के रहन-सहन के व्यय का प्रतिनिधित्व नहीं करेगा।

(ii) **सरल पहचान वाली**—वस्तुएँ ऐसी होनी चाहिएँ जो आसानी से पहचानी जा सकें तथा जिनका स्पष्ट रूप से वर्णन किया जा सके। अतः, व्यक्तिगत सेवाएँ जैसी अमूर्त इकाइयों का सूचकांकों में समावेश नहीं होना चाहिए।

(iii) **प्रमापित एवं सजातीय**—चुनी हुई वस्तुएँ प्रमापित एवं श्रेणीबद्ध गुण वाली होनी चाहिएँ। उनकी किस्म में एकरूपता का होना भी जरूरी है।

(ग) **संख्या**—सामान्यतया, सूचकांक जितनी अधिक वस्तुओं पर आधारित होगा, वह उतना ही अधिक शुद्ध और विश्वसनीय माना जायेगा। परन्तु बहुत अधिक वस्तुओं का समावेश अत्यन्त कठिन है। अतः वस्तुओं की संख्या का निर्धारण, उपलब्ध समय व धन, अभीष्ट शुद्धता तथा उद्देश्य व परिस्थितियों को ध्यान में रखते हुए ही करना चाहिए। अधिकतर, सूक्ष्मग्राही सूचकांक कम वस्तुओं के आधार पर बनाया जाता है तथा सामान्य उद्देश्य वाले थोक-मूल्य सूचकांक में अधिक वस्तुओं का समावेश होता है। भारत में सूक्ष्मग्राही साप्ताहिक सूचकांक (Sensitive Weekly Index Number) 23 वस्तुओं के मूल्य पर आधारित था; दिसम्बर 1947 से इसका प्रकाशन बन्द कर दिया गया। अगस्त 1939 में समाप्त होने वाले वर्ष के आधार पर भारत में आर्थिक सलाहकार का सामान्य उद्देश्य (General Purpose) थोक-मूल्य सूचकांक प्रकाशित किया जाता था जिसमें 78 वस्तुओं का समावेश था। 1960 में इस शृंखला का प्रकाशन बन्द कर दिया गया। 1969 तक 1952–53 वित्तीय वर्ष पर आधारित आर्थिक सलाहकार का थोक-मूल्य सूचकांक (Economic Advisor's Wholesale Price Index Number) प्रति सप्ताह प्रकाशित किया जाता था जो 112 वस्तुओं के मूल्यों पर आधारित था। 1969 से भारत सरकार के आर्थिक सलाहकार के कार्यालय द्वारा थोक-मूल्य सूचकांकों की एक संशोधित शृंखला (आधार 1961–62=100) का प्रकाशन आरम्भ किया गया जिसमें 139 वस्तुओं का समावेश था।

आर्थिक सलाहकार का थोक मूल्य सूचकांक
(आधार वर्ष 1952–53 तथा 1961–62)

वर्ग		वस्तुओं की संख्या: पुरानी शृंखला (आधार 1952–53)	वस्तुओं की संख्या: संशोधित शृंखला (आधार 1961–62)
(i) खाद्य-पदार्थ		31	38
(ii) मादक-पदार्थ व तम्बाकू		3	3
(iii) ईंधन, शक्ति व प्रकाश		8	10
(iv) औद्योगिक कच्चा माल		23	25
(v) रासायनिक पदार्थ	नवीन वर्ग	—	11
(vi) मशीनरी व यातायात सयन्त्र	नवीन वर्ग	—	7
(vii) निर्मित वस्तुएँ—			
(अ) मध्यवर्ती वस्तुएँ		14	31
(ब) पूर्ण-निर्मित वस्तुएँ		33	32
योग		112	139

1 जनवरी 1977 से आरम्भ किये जाने वाले 1970–71 आधार वर्ष वाले सूचकांक में 360 वस्तुएँ शामिल की गयी थी। इनको तीन प्रमुख समूहों में निम्न प्रकार बाँटा गया—

(1) प्राथमिक वस्तुएँ (Primary Articles)—3 वर्ग; (2) ईंधन, शक्ति, प्रकाश व स्निग्ध पदार्थ (Fuel, Power, Light & Lubricants); (3) निर्मित उत्पाद (Manufactured Products)—11 वर्ग।

आधार वर्ष 1981–82 पर आधारित थोक मूल्य सूचकांक की नवीन शृंखला (New Series of Wholesale Price Index Numbers : Base 1981–82=100) का निर्गमन जुलाई 1989 से प्रारम्भ किया गया। इस शृंखला में मदों की संख्या बढ़ाकर 447 कर दी गई है। पिछले सूचकांक (आधार 1970–71=100) की तरह नवीन शृंखला में भी समस्त मदों को तीन प्रमुख समूहों में बाँटा गया है—(1) मुख्य वस्तुएँ (Primary Articles)—3 वर्ग; (2) ईंधन, ऊर्जा, रोशनी और स्नेहक पदार्थ (Fuel, Power, Light and Lubricants); (3) निर्मित पदार्थ (Manufactured Products)—13 वर्ग। निम्न सारणी 1970-71 और 1981–82 आधार वर्ष वाली शृंखलाओं में मदों की संख्या, समूह, वर्ग और मूल्य-उद्धरणों के सम्बन्ध में तुलनात्मक विवरण प्रस्तुत करती है—

पिछली (1970–71=100) तथा नवीन (1981–82=100) शृंखलाएँ
Economic Advisor's Wholesale Price Index Numbers
Previous (1970–71=100) and New (1981–82=100) Series*

प्रमुख समूह Major Groups	वर्गों की संख्या No. of Groups		मदों की संख्या No. of Items		मूल्य उद्धरणों की संख्या No. of Price Quotations	
	1970–71 Series	1981–82 Series	1970–71 Series	1981–82 Series	1970–71 Series	1981–82 Series
I. मुख्य वस्तुएँ (Primary Articles)	3	3	80	93	411	519
II. ईंधन, ऊर्जा, रोशनी व स्नेहक (Fuel, Power, Light and Lubricants)	—	—	10	20	30	73
III. निर्मित उत्पाद (Manufactured Products)	11	13	270	334	854	1779
योग (Total)	14	16	360	447	1295	2371

* विस्तृत अध्ययन के लिए देखिये—भारत में राजकीय समंक वाला अध्याय।

(ग) किस्म—वस्तुएँ अनेक किस्म की होती हैं। सूचकांक में ऐसी किस्मों की वस्तुएँ शामिल की जानी चाहिएँ जो सबसे अधिक प्रचलित तथा प्रमापित हों। गुणों में स्थिरता भी होनी चाहिए।

(घ) वर्गीकरण—चुनी हुई वस्तुओं को सजातीयता के आधार पर कुछ निश्चित वर्गों और उपवर्गों में विभाजित कर देना चाहिए जिससे सम्पूर्ण मूल्य-सूचकांक (All Commodities Index) के साथ-साथ समूह-सूचकांक (Group Indices) भी ज्ञात हो जायें। भारत में आर्थिक सलाहकार के नवीन (1981–82=100) थोक-मूल्य सूचकांक में शामिल 447 वस्तुओं को 3 प्रमुख समूहों (Major Groups) में तथा 16 वर्गों में रखा गया है जबकि पिछली शृंखला (आधार 1970–71=100) में वस्तुओं को 3 प्रमुख समूहों तथा 14 वर्गों में बाँटा गया था।

मूल्य-उद्धरण
(Price-Quotations)

वस्तुओं का चुनाव कर लेने के बाद उनके मूल्य-उद्धरण प्राप्त किये जाते हैं। मूल्य-उद्धरण के सम्बन्ध में निम्नलिखित बातों पर विचार करना पड़ता है—

(क) थोक या फुटकर मूल्य—मूल्य थोक अथवा फुटकर हो सकते हैं। अधिकतर मूल्य-सूचकांकों की रचना में वस्तुओं के थोक मूल्य ही लिए जाते हैं क्योंकि वे फुटकर मूल्यों की अपेक्षा कम परिवर्तनशील होते हैं तथा उनमें स्थान-स्थान के आधार पर कम अन्तर होते है और उन्हें ज्ञात करना भी अधिक कठिन नहीं है। आर्थिक सलाहकार के थोक मूल्य सूचकांक की नवीन शृंखला में प्राथमिक चरण में किये गये थोक व्यवहार की कीमतें ली जाती हैं जिनमें उत्पादन कर भी शामिल होता है।

(ख) मूल्य व्यक्त करने का रूप—वस्तुओं के मूल्य सामान्यतया दो प्रकार से प्रकट किये जा सकते हैं—(i) द्रव्य-मूल्य (Money Price) के रूप में, जैसे—100 रु० प्रति कुन्तल, 10 रु० प्रति किलो, 20 रु० प्रति मीटर इत्यादि। इसमें मूल्य, रुपये या पैसे प्रति वस्तु की इकाई (Rs. or paise per unit of commodity) के रूप में व्यक्त किया जाता है। सूचकांकों के लिए मूल्य-उद्धरण इसी रूप में होने चाहिए। (ii) 'वस्तु-परिमाण' मूल्य (Quantity Price) के रूप में, जैसे—1 किलो प्रति रु०, 100 ग्राम प्रति रु०, 5 सेमी० प्रति रु० इत्यादि। इस प्रकार के उद्धरण में वस्तु का मूल्य, वस्तु की निश्चित मात्रा प्रति रुपया (Quantity per Rupee) के रूप में व्यक्त किया जाता है। इसको विलोम-मूल्य (Inverse Price) भी कहते है। सूचकांक-रचना में द्रव्य-मूल्य का प्रयोग करना चाहिए, वस्तु-परिमाण-मूल्य का कदापि नहीं। यदि मूल्य-उद्धरण विलोम-मूल्यों के रूप में दिये जाते हैं तो उन्हें पहले द्रव्य-मूल्यों के रूप में बदल लेना चाहिए, जैसे—'1 किलो प्रति रुपया' को '100 रुपये प्रति क्विंटल' में।

(ग) मूल्य-उद्धरणों की संख्या व आवृत्ति—प्रत्येक वस्तु के महत्व के अनुसार उसके अनेक मूल्य-उद्धरण प्राप्त करने चाहिए, भारत में प्रकाशित आर्थिक सलाहकार के थोक-मूल्य सूचकांक (पुरानी शृंखला 1952-53=100) मे 112 वस्तुओं के 555 मूल्य-उद्धरण प्राप्त किये जाते थे जबकि संशोधित शृंखला (1961–62=100) में 139 वस्तुओं के 774 उद्धरण लिये जाते थे। 1970–71 आधार वर्ष वाले सूचकांक में 360 पदार्थों के 1295 मूल्य-उद्धरण लिये गए थे जबकि नवीन शृंखला (1981–82=100) में 447 वस्तुओं के 2371 मूल्य उद्धरण लिए जाते है।

मूल्य-उद्धरणों की आवृत्ति सूचकांक के उद्देश्य, अवधि, उपलब्ध साधन व शुद्धता के स्तर पर निर्भर होती है। अधिकतर साप्ताहिक मूल्य-सूचकांकों में एक निश्चित दिन के मूल्य लिये जाते हैं।

(घ) मूल्य-उद्धरण प्राप्ति के स्थान व साधन—मूल्य सूचकांकों के लिए वस्तुओं के मूल्य-उद्धरण उन मण्डियों से प्राप्त किये जाने चाहिए जहाँ पर उन वस्तुओं का काफी मात्रा में क्रय-विक्रय होता हो। परन्तु किसी स्थान के निवासियों का जीवन-निर्वाह-व्यय सूचकांक बनाते समय उसी स्थान के मूल्यों को प्राप्त करना चाहिए। यह भी तय कर लेना चाहिए कि मूल्य-उद्धरण किन-किन साधनों से प्राप्त करने है। इसके लिए या तो योग्य, निष्पक्ष व विश्वासपात्र प्रतिनिधियों को नियुक्त किया जा सकता है या उस स्थान के व्यापारियों, व्यापार-परिषदों आदि से मूल्य सूचनाएँ उपलब्ध की जा सकती हैं। विभिन्न पत्र-पत्रिकाओं, रेडियो, दूरदर्शन तथा अन्य सरकारी व अर्द्ध-सरकारी सूत्रों से भी मूल्य-सूचना प्राप्त की जा सकती है। परन्तु इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि मूल्य-उद्धरणों में पक्षपात का तत्व न हो।

आधार-चुनाव व सरल सूचकांकों का निर्माण
(Choice of Base and Construction of Simple Index Numbers)

मूल्य सूचकांक एक प्रमाप वर्ष के आधार पर प्रचलित वर्ष के मूल्य-स्तर को
हैं। यह पिछला प्रमाप वर्ष जो आगामी वर्षों के तुलनात्मक अध्ययन का आधार

आधार वर्ष (base year) कहलाता है। आधार निश्चित करने की दो रीतियाँ हैं—

(क) स्थिर आधार रीति (Fixed Base Method),

(ख) शृंखला आधार रीति (Chain Base Method)।

(क) स्थिर आधार रीति (Fixed Base Method)

एक-वर्षीय आधार (One-year Base)—इस रीति के अनुसार एक सामान्य वर्ष को चुन लिया जाता है और अन्य वर्षों के मूल्य-स्तर की तुलना उस स्थिर वर्ष के आधार पर की जाती है। स्थिर आधार वर्ष का चुनाव करते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि वह यथोचित रूप से सामान्य हो अर्थात् वह ऐसा वर्ष हो जिसमें बाढ़, युद्ध, महामारी आदि असाधारण प्रकोपों के कारण मूल्य-स्तर अस्त-व्यस्त न हो गया हो। आधार वर्ष, एक वास्तविक वर्ष होना चाहिए जिससे सम्बन्धित सभी सूचनाएँ सरलता से उपलब्ध हो सकें। वह बहुत पुराना भी नहीं होना चाहिए।

भारत में निर्मित आर्थिक सलाहकार के पुराने थोक-मूल्य सूचकांक के लिए 31 मार्च 1953 को समाप्त होने वाला वित्तीय वर्ष आधार रखा गया था, क्योंकि यह वर्ष सभी दृष्टियों से सामान्य वर्ष रहा। संशोधित शृंखला में वित्तीय वर्ष 1961–62 को आधार माना गया था। पिछली शृंखला में 1970–71 वित्तीय वर्ष को आधार वर्ष निश्चित किया गया था क्योंकि वह सामान्य व अपेक्षाकृत निकटतम वर्ष रहा है। नवीन शृंखला में वर्ष 1981–82 को आधार वर्ष रखा गया है।

बहुवर्षीय माध्य आधार (Average Period Base)—कभी-कभी कोई एक वर्ष ऐसा नहीं होता जो सामान्य हो और स्थिर आधार माना जा सके। ऐसी स्थिति में अनेक ऐसे वर्ष छाँट लिये जाते हैं जिनमें कम उतार-चढ़ाव हुए हों, फिर उन वर्षों के मूल्य-स्तर का समान्तर माध्य निकालकर उन माध्य मूल्यों (average prices) को आधार माना जाता है।

साधारण या [illegible] struction of Simple or Unweighted Index [illegible] ारण या अ-भारित सूचकांक कहते हैं जिनके निर्माण में सभी वस्तुओं को समान महत्व दिया जाता है, उनको भारांकित नहीं किया जाता। साधारण सूचकांकों के निर्माण की दो विधियाँ हैं—

(i) सरल समूही रीति (Simple Aggregative Method),

(ii) मूल्यानुपात सरल माध्य रीति (Simple Average of Price Relatives Method)।

(i) सरल समूही रीति (Simple Aggregative Method)—अ-भारित सूचकांकों के निर्माण की यह सरलतम रीति है। इसके अनुसार प्रचलित वर्ष के विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों के जोड़ (current year's aggregate) को आधार वर्ष के मूल्यों के जोड़ (base year's aggregate) से भाग देकर 100 से गुणा कर दिया जाता है। इस प्रकार इस रीति में विभिन्न वस्तुओं की प्रचलित वर्ष की कीमतों के जोड़ को उन वस्तुओं की आधार वर्ष कीमतों के जोड़ के प्रतिशत के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। सूत्रानुसार—

$$P_{01}=\frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0}\times 100 \quad \text{या} \quad P_{01}=\frac{\text{current year's aggregate}}{\text{base year's aggregate}}\times 100$$

P_{01} आधार वर्ष (0) के मूल्य के आधार पर प्रचलित वर्ष (1) के मूल्यों का सूचकांक है।

p_1 चालू वर्ष के मूल्य और p_0 आधार वर्ष के मूल्य हैं।

उदाहरण (Illustration) 1 :

अग्रांकित आँकड़ों से सरल समूही रीति द्वारा 1982 को आधार वर्ष मानकर 1986, 1990 और 1994 के मूल्य-सूचकांक ज्ञात कीजिए—

वस्तु	मूल्य (रु० प्रति कुन्तल) 1982	1986	1990	1994
गेहूँ	240	270	300	330
चना	300	330	360	540
चावल	540	600	660	750
अरहर	480	570	630	720
मूंग	450	480	615	750
उड़द	690	780	915	930
मसूर	300	570	720	780

हल (Solution) :

मूल्य-सूचकांक रचना (सरल समूही रीति)
(आधार 1982=100)

वस्तु	1982	1986	1990	1994
गेहूँ	240	270	300	330
चना	300	330	360	540
चावल	540	600	660	750
अरहर	480	570	630	720
मूंग	450	480	615	750
उड़द	690	780	915	930
मसूर	300	570	720	780
योग (Aggregate)	3,000 Σp_0	3,600 Σp_1	4,200 Σp_2	4,800 Σp_3

$$1986-P_{01}=\frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0}\times 100=\frac{3,600}{3,000}\times 100=120$$

$$1990-P_{02}=\frac{\Sigma p_2}{\Sigma p_0}\times 100=\frac{4,200}{3,000}\times 100=140$$

$$1994-P_{03}=\frac{\Sigma p_3}{\Sigma p_0}\times 100=\frac{4,800}{3,000}\times 100=160$$

वर्ष	:	1982	1986	1990	1994
मूल्य सूचकांक (आधार 1982=100)	:	100	120	140	160

सूचकांक-निर्माण की सरल समूही रीति अत्यन्त सरल है परन्तु इसका प्रयोग तभी किया जा सकता है जब सभी वस्तुओं के मूल्य एक ही इकाई के रूप में व्यक्त किये गए हों। विभिन्न इकाइयाँ होने पर परिणाम भ्रमात्मक निकलते हैं। व्यवहार में इस विधि का प्रयोग नहीं किया जाता।

(ii) मूल्यानुपात सरल माध्य रीति (Simple Average of Price Relatives Method)—इस रीति के अनुसार प्रचलित वर्ष का सूचकांक बनाने के लिए सर्वप्रथम प्रत्येक वस्तु का मूल्यानुपात (price-relative) निकाला जाता है। स्थिर आधार के मूल्य को 100 मानकर निकाला गया प्रचलित वर्ष का प्रतिशत ही मूल्यानुपात कहलाता है। इसे अग्रांकित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है—

एक वर्षीय आधार
(One Year Base)

$$\text{मूल्यानुपात} = \frac{\text{प्रचलित वर्ष का मूल्य}}{\text{आधार वर्ष का मूल्य}} \times 100$$

या $$R = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

माध्य-अवधि आधार
(Average Period Base)

$$\text{मूल्यानुपात} = \frac{\text{चालू वर्ष का मूल्य}}{\text{औसत मूल्य}} \times 100$$

या $$R = \frac{p_1}{p_{\bar{x}}} \times 100$$

जहाँ R संकेत मूल्यानुपात (price relative) के लिए प्रयुक्त हुआ है।

p_1 संकेत प्रचलित वर्ष के मूल्य (price for the current year) के लिए है।

p_0 संकेत आधार वर्ष के मूल्य (price for the base year) के लिए है।

$p_{\bar{x}}$ संकेत आधार वर्षों के माध्य मूल्य (average price of base years) के लिए है।

यदि एक ही वस्तु के विभिन्न वर्षों के मूल्य दिए हैं तो इनके मूल्यानुपात ही अभीष्ट सूचकांक हैं। इसके विपरीत प्रत्येक वर्ष के कई वस्तुओं के मूल्य दिए हों तो विभिन्न वस्तुओं के मूल्यानुपातों का समान्तर माध्य ही सम्बन्धित प्रचलित वर्ष का सरल या अ-भारित सूचकांक (Simple or unweighted Index Number) होता है, अर्थात्—

$$\text{सूचकांक—Index No. for Current year} = \frac{\Sigma R}{N} \text{ या } \frac{\text{मूल्यानुपातों का योग}}{\text{वस्तुओं की संख्या}}$$

उदाहरण (Illustration) 2 :

एक वस्तु के 6 वर्षों के मूल्य निम्नांकित है—(i) 1983 को आधार वर्ष मानकर तथा (ii) छः साल के औसत मूल्य को आधार मानकर मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिए—

वर्ष :	1983	1985	1987	1989	1991	1993
मूल्य (रु० प्रति क्विन्टल) :	400	500	450	550	650	1050

हल (Solution) :

(i) आधार वर्ष 1983=100. 1983 में वस्तु के मूल्य (400 रु०) को 100 मानकर प्रत्येक वर्ष का मूल्यानुपात निकाला जायेगा। यही मूल्य सूचकांक है।

(ii) औसत मूल्य के आधार पर—पहले सभी वर्षों में उस वस्तु के मूल्यों के जोड़ को उनकी संख्या से भाग देकर माध्य मूल्य निकाला जायेगा अर्थात्—

$$\text{औसत मूल्य} = \frac{400+500+450+550+650+1050}{6} = \frac{3,600}{6} = 600 \text{ रु०}$$

इसके बाद 600 रु० को 100 मानते हुए प्रत्येक वर्ष का मूल्यानुपात निकाला जायेगा। यही अभीष्ट सूचकांक है। निम्न सारणी में दोनों आधारों पर मूल्य सूचकांकों का परिगणन स्पष्ट किया गया है।

मूल्यानुपातों का परिकलन

वर्ष	मूल्य (रु० प्रति क्विन्टल)	(i) आधार 1983=100		(ii) आधार—औसत मूल्य=100	
		परिकलन	मूल्यानुपात	परिकलन	मूल्यानुपात
1983	400	—	100	$\frac{400}{600} \times 100$	66·7
1985	500	$\frac{500}{400} \times 100$	125	$\frac{500}{600} \times 100$	83·3
1987	450	$\frac{450}{400} \times 100$	112·5	$\frac{450}{600} \times 100$	75
1989	550	$\frac{550}{400} \times 100$	137·5	$\frac{550}{600} \times 100$	91·7
1991	650	$\frac{650}{400} \times 100$	162·5	$\frac{650}{600} \times 100$	108·3
1993	1,050	$\frac{1,050}{400} \times 100$	262·5	$\frac{1,050}{600} \times 100$	175

उदाहरण (Illustration) 3 :

उदाहरण 1 में प्रदत्त मूल्यों की सहायता से, सरल मूल्यानुपात-माध्य विधि द्वारा 1982 को आधार मानते हुए 1986, 1990 और 1994 के मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिए—

हल (Solution) :

साधारण सूचकांकों का परिकलन—मूल्यानुपात रीति
(Average of Relatives Method)

वस्तु	1982–आधार		1986		1990		1994	
	मूल्य p_0	मूल्यानुपात R	मूल्य p_1	मूल्यानुपात R_1	मूल्य p_2	मूल्यानुपात R_2	मूल्य p_3	मूल्यानुपात R_3
गेहूँ	240	100	270	112·5	300	125	330	137·5
चना	300	100	330	110	360	120	540	180
चावल	540	100	600	111·1	660	122·2	750	138·9
अरहर	480	100	570	118·8	630	131·3	720	150
मूंग	450	100	480	106·7	615	136·7	750	166·7
उड़द	690	100	780	113·0	915	132·6	930	134·8
मसूर	300	100	570	190	720	240	780	260
योग	$\Sigma R_0 = 700$		$\Sigma R_1 = 862{\cdot}1$		$\Sigma R_2 = 1007{\cdot}8$		$\Sigma R_3 = 1167{\cdot}9$	
मूल्य सूचकांक	100		123·2		144·0		166·8	

मूल्यानुपातों का आगणन निम्न प्रकार किया गया है—

$$1986 - R = \frac{p_1}{p_0} \times 100 - \text{गेहूँ } \frac{270}{240} \times 100 = 112{\cdot}5, \text{ चना } \frac{330}{300} \times 100 = 110 \ldots\ldots$$

$$1990 - R = \frac{p_2}{p_0} \times 100 - \text{गेहूँ } \frac{300}{240} \times 100 = 125, \text{ चना } \frac{360}{300} \times 100 = 120 \ldots\ldots$$

$$1994 - R = \frac{p_3}{p_0} \times 100 - \text{गेहूँ } \frac{330}{240} \times 100 = 137{\cdot}5, \text{ चना } \frac{540}{300} \times 100 = 180 \ldots\ldots$$

$$\text{Index No.} = \frac{\Sigma R}{N}$$

वर्ष :	1982	1986	1990	1994
सूचकांक (आधार 1982=100) :	100	123·2	144·0	166·8

उदाहरण (Illustration) 4 :

औसत मूल्य को आधार मानकर तीन वर्षों के मूल्य-सूचकांक ज्ञात कीजिए—

वस्तुएँ (दर प्रति रुपया)

वर्ष	A	B	C
I	4 किलो	2 किलो	1 किलो
II	2·5 ,,	1·60 ,,	1 ,,
III	2 ,,	1·25 ,,	0·8 ,,

हल (Solution) :

मूल्य 'परिमाण प्रति रुपया' के रूप में दिए हुए हैं, अतः सर्वप्रथम उन्हें द्रव्य-मूल्यों अर्थात् 'रुपये प्रति क्विटल' के रूप में बदला जाएगा। इस प्रकार A के मूल्य क्रमशः $\frac{100}{4}$ या 25 रु० प्रति क्विटल, $\frac{100}{2 \cdot 5}$ या 40 रु० प्रति क्विटल व $\frac{100}{2}$ या 50 रु० प्रति क्विटल होंगे। इसके बाद वस्तु के तीनों वर्षों के मूल्यों का समान्तर माध्य निकाला जाएगा जिसको आधार मानकर उस वस्तु के मूल्यानुपात ज्ञात किये जायेंगे—

सरल सूचकांकों का परिगणन (माध्य-मूल्य आधार)

वस्तु	आधार माध्य मूल्य =100	वर्ष I		वर्ष II		वर्ष III	
		मूल्य	मूल्यानुपात	मूल्य	मूल्यानुपात	मूल्य	मूल्यानुपात
A	38·3	25	65·3	40	104·4	50	130·5
B	64·2	50	77·9	62·5	97·4	80	124·6
C	108·3	100	92·3	100	92·3	125	115·4
योग ΣR			235·5		294·1		370·5
सूचकांक			78·5		98·0		123·5

वर्ष :	I	II	II
सूचकांक (माध्य-मूल्य आधार) :	78·5	98·0	123·5

(ख) **श्रृंखला आधार रीति (Chain Base Method)**—जब वर्ष-प्रतिवर्ष के मूल्य-परिवर्तनों की आपस में तुलना करनी हो तो श्रृंखला-आधार रीति अपनायी जाती है। इस रीति के अनुसार प्रत्येक प्रचलित वर्ष के लिए उससे पिछला वर्ष आधार होता है अर्थात् 1993 के लिए 1992, 1992 के लिए 1991, 1991 के लिए 1990 आधार रहेगा। इस प्रकार, आधार वर्ष सदैव बदलता रहता है। यह वर्ष-प्रतिवर्ष के अल्पकालीन परिवर्तनों की तुलना करने के लिए उपयुक्त है।

गुण-दोष—श्रृंखला-आधार का प्रमुख गुण यह है कि इससे तात्कालिक परिवर्तनों का पता चल जाता है। प्रत्येक वर्ष में होने वाले परिवर्तनों की तुलना पिछले वर्ष के परिवर्तनों से की जा सकती है। यह तुलना व्यापारियों व उद्योगपतियों के लिए बहुत उपयोगी होती है। दूसरे, श्रृंखला आधार वाले सूचकांक में आवश्यकतानुसार पुरानी वस्तुओं को हटाकर उनके स्थान पर नई वस्तुओं का समावेश किया जा सकता है। परन्तु श्रृंखला आधार-रीति के अनुसार बनाये सूचकांक दीर्घकालीन प्रवृत्ति स्पष्ट नहीं करते। इनकी रचना भी कठिन है तथा एक स्थान पर अशुद्धि हो जाने से उसके आगे भी अशुद्धि होती जाती है।

श्रृंखला आधार सूचकांकों के निर्माण की क्रिया-विधि—

(i) **श्रृंखला मूल्यानुपात**—सर्वप्रथम, प्रत्येक वस्तु के प्रत्येक वर्ष के श्रृंखला मूल्यानुपात (Link Relatives) निम्न सूत्र द्वारा निकाले जाते हैं—

$$\text{श्रृंखला मूल्यानुपात} = \frac{\text{प्रचलित वर्ष का मूल्य}}{\text{पिछले वर्ष का मूल्य}} \times 100 \qquad \therefore L.R. = \frac{\text{Current year's price}}{\text{Previous year's price}} \times 100$$

(ii) **माध्य**—प्रत्येक वर्ष के श्रृंखला-मूल्यानुपातों को जोड़कर वस्तुओं की संख्या से [illegible]

दे दिया जाता है। इस प्रकार श्रृंखला-मूल्यानुपातों के माध्य (Average of Link Relatives) ज्ञात हो जाते हैं।

(iii) स्थिर आधार से श्रृंखलित श्रृंखला सूचकांक—श्रृंखला-मूल्यानुपातों का माध्य केवल प्रत्येक वर्ष की पिछले वर्ष से तुलना करता है। इस प्रकार दो निकटवर्ती वर्षों में कड़ियाँ (Links) स्थापित हो जाती हैं। इन कड़ियों की सहायता से एक श्रृंखला (Chain) का निर्माण होता है जिससे सभी वर्षों के परिवर्तन एक निश्चित वर्ष से श्रृंखलाबद्ध हो जाएँ। इस प्रकार से श्रृंखलित मूल्यानुपातों को श्रृंखला-अनुपात (Chain Relatives) या सामान्य आधार से श्रृंखलाबद्ध श्रृंखला-सूचकांक (Chain Indices chained to a common base) कहते हैं। इसे निकालने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\text{चालू वर्ष का श्रृङ्खलित सूचकांक} = \frac{\text{गत वर्ष का श्रृङ्खलित सूचकांक} \times \text{चालू वर्ष का औसत श्रृङ्खला मूल्यानुपात}}{100}$$

उदाहरण (Illustration) 5 :

1989 से 1993 के लिए 3 वस्तु-समूहों के निम्नलिखित मूल्यों से 1989 से श्रृंखलाबद्ध, श्रृंखला सूचकांक (Chain base index numbers chained to 1989) परिकलित कीजिए—

वर्ग (Group)	1989	1990	1991	1992	1993
I	4	6	8	10	12
II	16	20	24	30	36
III	8	10	16	20	24

हल (Solution) :

श्रृंखला-आधार सूचकांकों की रचना
(Chain Base Index Numbers)

वस्तु-वर्ग (Group)	1989		1990		1991		1992		1993	
	मूल्य (Price)	श्रृङ्खला मूल्यानुपात L.R.	मूल्य (Price)	श्रृङ्खला मूल्यानुपात L.R.	मूल्य (Price)	श्रृङ्खला मूल्यानुपात L.R.	मूल्य (Price)	श्रृङ्खला मूल्यानुपात L.R.	मूल्य (Price)	श्रृङ्खला मूल्यानुपात L.R.
I	4	100	6	150	8	133·3	10	125	12	120
II	16	100	20	125	24	120	30	125	36	120
III	8	100	10	125	16	160	20	125	24	120
योग		300		400		413·3		375		360
औसत श्रृङ्खला मूल्यानुपात		100		133·3		137·8		125		120
1989 से श्रृङ्खलित श्रृङ्खला सूचकांक		100		133·3 $\frac{100 \times 133{\cdot}3}{100}$		183·7 $\frac{133{\cdot}3 \times 137{\cdot}8}{100}$		229 6 $\frac{183{\cdot}7 \times 125}{100}$		275·5 $\frac{229{\cdot}6 \times 120}{100}$

स्थिर आधार व श्रृंखला आधार का अन्तर—स्थिर आधार व श्रृंखला आधार में बहुत अन्तर है। प्रथम, स्थिर आधार में आधार-वर्ष स्थिर रहता है, आगे के सभी वर्षों की स्थिर वर्ष के आधार पर की जाती है; जबकि श्रृंखला आधार में आधार प्रतिवर्ष बदलता

और प्रत्येक वर्ष की तुलना उससे पिछले वर्ष के आधार पर की जाती है। दूसरे, स्थिर आधार सूचकांकों की सहायता से दीर्घकालीन प्रवृत्ति का अध्ययन होता है। इसके विपरीत, शृङ्खला आधार सूचकांक वर्ष-प्रतिवर्ष के परिवर्तनों को प्रकट करते हैं। तीसरे, स्थिर आधार सूचकांक में शामिल वस्तुओं में परिवर्तन नहीं किये जा सकते जबकि शृङ्खला सूचकांक में प्रतिवर्ष वस्तु या पद में परिवर्तन किये जा सकते है। चौथे, स्थिर आधार सूचकांक की रचना मूल्यानुपातों के आधार पर की जाती है, परन्तु शृङ्खला आधार सूचकांकों के निर्माण में शृङ्खला मूल्यानुपातो का उपयोग किया जाता है।

आधार-परिवर्तन
(Base-Conversion)

स्थिर आधार वाले सूचकांकों को शृङ्खला आधार पर तथा शृङ्खला आधार वाले सूचकांकों को स्थिर आधार पर बदला जा सकता है।

स्थिर आधार से शृंखला आधार में (From Fixed Base to Chain Base)—स्थिर आधार सूचकांकों को शृङ्खला आधार में बदलने की निम्नलिखित विधि है—

(i) प्रथम वर्ष के शृङ्खला आधार सूचकांक को 100 माना जाता है।

(ii) आगामी वर्ष—आगामी वर्षों के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\text{प्रचलित वर्ष का शृङ्खला सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक}}{\text{गत वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक}} \times 100$$

Current Year's Chain Base Index No.

$$= \frac{\text{Current Year's Fixed Base Index No.}}{\text{Previous Year's Fixed Base Index No.}}$$

शृंखला आधार से स्थिर आधार में (From Chain Base to Fixed Base)—इसकी विधि निम्न प्रकार है—

(i) प्रथम वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक वही माना जाता है जो उस वर्ष का शृङ्खला आधार सूचकांक है, परन्तु यदि प्रथम वर्ष को स्थिर आधार मानकर सूचकांक बनाने हो तो उसे 100 माना जायेगा।

आगामी वर्ष—आगामी वर्षों के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जायेगा—

चालू वर्ष का स्थिर सूचकांक

$$= \frac{\text{चालू वर्ष का शृंखला सूचकांक} \times \text{गत वर्ष का स्थिर सूचकांक}}{100}$$

Current Year's Fixed Base Index No.

$$= \frac{\text{Current Year's Chain Base Index No.} \times \text{Previous Year's Fixed Base Index No.}}{100}$$

उदाहरण (Illustration) 6

(क) निम्नांकित स्थिर आधार सूचकांकों से शृङ्खला आधार सूचकांक तैयार कीजिए—

वर्ष :	1988	1989	1990	1991	1992	1993
शृङ्खला आधार सूचकांक :	94	98	102	95	98	100

(ख) निम्नलिखित शृङ्खला सूचकांकों से स्थिर आधार वाले सूचकांकों का निर्माण कीजिए—

वर्ष :	1988	1989	1990	1991	1992	1993
शृङ्खला आधार सूचकांक :	80	105	102	95	110	120

(ग) निम्नलिखित शृंखला आधार सूचकांकों से 1988 को आधार वर्ष मानते हुए स्थिर आधार सूचकांक तैयार कीजिए—

वर्ष	:	1988	1989	1990	1991	1992	1993
शृङ्खला सूचकांक	:	210	150	142	210	190	110

हल (Solution) :

(क) स्थिर आधार से शृंखला आधार

वर्ष	स्थिर आधार सूचकांक	परिवर्तन	शृङ्खला सूचकांक
1988	94	—	100
1989	[redacted]	$\frac{98}{94}\times 100$	104·26
1990	102	$\frac{102}{98}\times 100$	104·08
1991	95	$\frac{95}{102}\times 100$	93·14
1992	98	$\frac{98}{95}\times 100$	103·16
1993	100	$\frac{100}{98}\times 100$	102·04

(ख) शृंखला-आधार से स्थिर आधार

वर्ष	शृङ्खला आधार सूचकांक	परिवर्तन	स्थिर आधार सूचकांक
1988	80	—	80
1989	105	$\frac{105\times 80}{100}$	84
1990	102	$\frac{102\times 84}{100}$	85 68
1991	95	$\frac{95\times 85{\cdot}68}{100}$	81·40
1992	110	$\frac{110\times 81{\cdot}40}{100}$	89·54
1993	120	$\frac{120\times 89{\cdot}54}{100}$	107·45

(ग) शृंखला आधार से स्थिर आधार-वर्ष 1988=100

वर्ष	शृङ्खला आधार सूचकांक	परिवर्तन	स्थिर आधार सूचकांक (वर्ष 1988=100)
1988	210	—	100
1989	150	$\frac{150\times100}{100}$	150
1990	142	$\frac{142\times150}{100}$	213
1991	210	$\frac{210\times213}{100}$	447·3
1992	190	$\frac{190\times447\cdot3}{100}$	849·87
1993	110	$\frac{110\times849\cdot87}{100}$	934·86

आधार-वर्ष परिवर्तन
(Base Shifting)

दो सूचकांक मालाओं की तुलना करते समय यह देखना आवश्यक है कि दोनों का आधार-वर्ष एक है या नहीं। यदि आधार वर्ष भिन्न हों तो उनमें परिवर्तन करके उन्हें तुलना-योग्य बनाना परमावश्यक है। आधार-वर्ष में परिवर्तन करने की दो रीतियाँ हैं—

(i) **पुनर्निर्माण रीति**—इस रीति में नये आधार-वर्ष के मूल्यों को 100 मानकर फिर से चालू वर्षों के मूल्यानुपात ज्ञात किये जाते हैं। अन्त में उन मूल्यानुपातों का माध्य निकाला जाता है। गणन-क्रिया जटिल होने के कारण इसका बहुत कम प्रयोग किया जाता है।

(ii) **संक्षिप्त रीति**—यदि सूचकांकों में गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया गया है तो संक्षिप्त रीति द्वारा आधार-वर्ष में परिवर्तन किया जा सकता है। इसके लिए नये आधार वर्ष के पुराने सूचकांक को 100 मानकर बाकी सभी वर्षों के पुराने सूचकांकों को निम्न सूत्र द्वारा बदल दिया जाता है—

$$\text{नये आधार वाला सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का पुराना सूचकांक}}{\text{नये आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}} \times 100$$

उदाहरण (Illustration) 7

एक वस्तु के थोक-मूल्य सूचकांक 1987 के आधार पर नीचे दिये गए हैं—

वर्ष :	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
सूचकांक :	100	120	190	200	206	230	300

आधार वर्ष 1990 को आधार मानकर नये सूचकांक ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

वर्ष	सूचकांक आधार (1987=100)	आधार वर्ष परिवर्तन	सूचकांक आधार (1990=100)
1987	100	$\frac{100}{200}\times 100$	50
1988	120	$\frac{120}{200}\times 100$	60
1989	190	$\frac{190}{200}\times 100$	95
1990	200	$\frac{200}{200}\times 100$	100
1991	206	$\frac{206}{200}\times 100$	103
1992	230	$\frac{230}{200}\times 100$	115
1993	300	$\frac{300}{200}\times 100$	150

शिरोबन्धन या संयोजन (Splicing)—कभी-कभी एक निश्चित आधार-वर्ष पर निर्मित सूचकांक को बन्द कर दिया जाता है तथा उस सूचकांक के बन्द होने वाले वर्ष को आधार मानकर नई सूचकांक-माला की रचना की जाती है। ऐसी स्थिति में तुलना के लिए यह आवश्यक हो जाता है कि नई सूचकांक-माला को पुरानी श्रेणी से सम्बन्धित कर दिया जाये। इस क्रिया को शिरोबन्धन अथवा संयोजन (splicing) कहते है। इसके लिए दोनों श्रेणियों के सामान्य वर्ष (common year) के सूचकांकों का अनुपात निकालकर उससे नई श्रेणी के सूचकांकों को गुणा कर दी जाती है। शिरोबन्धन वास्तव में आधार-वर्ष-परिवर्तन का ही एक रूप है। इसमें दो श्रेणियाँ दी होती है—एक पुराने आधार पर और दूसरी नये आधार पर।

$$\text{शिरोबन्धित सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का सूचकांक} \times \text{नये आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}}{100}$$

उदाहरण (Illustration) 8 :

नीचे सूचकांकों की दो श्रेणियाँ दी गई हैं—एक 1984 आधार वर्ष पर दूसरी 1988 आधार वर्ष पर आधारित।

वर्ष :	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
सूचकांक (पुराना) :	100	105	115	123	125	—	—	—	—	—
सूचकांक (नया) :	—	—	—	—	100	104	110	112	120	150

नई श्रेणी का पुरानी श्रेणी से शिरोबन्धन कीजिए जिससे 1984 से एक सतत माला उपलब्ध हो जाए।

हल (Solution) :

वर्ष	पुराने सूचकांक	नये सूचकांक	शिरोबन्धन	शिरोबन्धित सूचकांक
1984	100	—		
1985	105	—		
1986	115	—		
1987	123	—		
1988	125	100	$\frac{100\times195}{100}$	125
1989	—	104	$\frac{104\times125}{100}$	130
1990	—	110	$\frac{110\times125}{100}$	137.5
1991	—	112	$\frac{112\times125}{100}$	140
1992	—	120	$\frac{120\times125}{100}$	150
1993	—	150	$\frac{150\times125}{100}$	187.5

माध्य का चुनाव
(Selection of Average)

सूचकांक विभिन्न वस्तुओं के मूल्यानुपातों का माध्य है। अतः यह भी तय करना आवश्यक है कि सूचकांक रचना में किस माध्य का प्रयोग करना चाहिए। अध्याय 8 मे सभी माध्यों के विशिष्ट गुण व दोष सविस्तार दिये गए है। सैद्धान्तिक रूप से तो किसी भी माध्य का प्रयोग किया जा सकता है, परन्तु व्यवहार में मध्यका, समान्तर माध्य या गुणोत्तर माध्य में से ही किसी एक का प्रयोग करना चाहिए।

मध्यका—मूल्यानुपातों का मध्यका सरलता से ज्ञात हो जाता है और चरम मूल्यों से अधिक प्रभावित नहीं होता, परन्तु मध्यका कभी-कभी अवास्तविक और अनिश्चित होता है। उससे निरपेक्ष परिवर्तनों का ही माप किया जा सकता है सापेक्ष परिवर्तनों का नहीं। अतः सूचकांकों में मध्यका का प्रयोग उपयुक्त नहीं है।

समान्तर माध्य—यह अत्यन्त सरल और बुद्धिगम्य माध्य है परन्तु यह अति सीमान्त पदों से बहुत प्रभावित होता है। समान्तर माध्य अधिक मूल्य को बहुत अधिक महत्व देता है और केवल निरपेक्ष माप के लिए उपयुक्त है। यह उत्क्राम्य (reversible) भी नहीं होता। अतः समान्तर माध्य का प्रयोग भी उचित नही है। परन्तु अधिक सरल व लोकप्रिय होने के कारण अनेक सूचकांकों में इसका प्रयोग किया जाता है।

गुणोत्तर माध्य—सूचकांकों की रचना में गुणोत्तर माध्य आदर्श एवं सर्वश्रेष्ठ माना जाता

है। इसके अनेक कारण हैं—पहले, यह सापेक्ष परिवर्तनों के माप के लिए सर्वोत्तम माध्य है। दूसरे, यह कम मूल्यों को अधिक और अधिक मूल्यों को कम महत्त्व देकर वस्तुस्थिति का सन्तुलित चित्र प्रस्तुत करता है। तीसरे इसके आधार पर बनाये गये सूचकांकों में उत्क्राम्यता का गुण होता है जो कि आदर्श सूचकांकों में होना अनिवार्य है। चौथे, गुणोत्तर माध्य के आधार पर निर्मित सूचकांकों में आधार-वर्ष या वस्तुओं में सरलता से परिवर्तन किया जा सकता है। गणन-सम्बन्धी कठिनाई ही इस माध्य का प्रमुख दोष है। परन्तु उपर्युक्त गुणों के कारण इस माध्य का प्रयोग सूचकांकों के लिए विशेष उपयोगी होता है।

उदाहरण (Illustration) 9 :

समान्तर माध्य, मध्यका तथा गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करते हुए, 1991 को आधार वर्ष मानकर 1992 और 1993 का मूल्य-सूचकांक बनाइए :

वस्तु	1991	1992	1993
A	100	120	150
B	40	45	60
C	150	175	225
D	10	12	15
E	200	220	230

हल (Solution) :

सूचकांक-रचना (विभिन्न माध्यों का प्रयोग)

वस्तु	आधार : 1991		1992		1993	
	मूल्य	मूल्यानुपात	मूल्य	मूल्यानुपात	मूल्य	मूल्यानुपात
A	100	100	120	120	150	150
B	40	100	45	112·5	60	150
C	150	100	175	116·7	225	150
D	10	100	12	120	15	150
E	200	100	220	110	230	115
अनुपातों का योग		500		579·2		715
अनुपातों का समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)		100		115·8		143
अनुपातों का मध्यका (Median)		100		116·7		150
अनुपातों का गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)		100		115·9		142·2

भारांकन विधि
(System of Weighting)

अब तक जिन सूचकांकों की रचना का वर्णन किया गया है, वे 'साधारण' या 'अ-भारित' सूचकांक (simple or unweighted index numbers) कहलाते हैं, क्योंकि उनमें सभी वस्तुओं को समान महत्त्व दिया जाता है। व्यवहार में, अलग-अलग वस्तुओं का अलग आपेक्षिक महत्त्व होता है। उपभोग में गेहूँ का महत्त्व नमक, पटसन या लोहे से कहीं अधिक है। उत्पादन में TV की तुलना में सूती वस्त्र अधिक महत्त्वपूर्ण हैं। विभिन्न वस्तुओं या पदों के तुलनात्मक महत्त्व को प्रकट करने के लिए किसी सुनिश्चित आधार पर भारों (weights) का प्रयोग किया जाता है। जब विभिन्न वस्तुओं से सम्बन्धित भारों को ध्यान में रखकर सूचकांक बनाया जाता है तो उसे भारित सूचकांक (weighted index number) कहते हैं। भारित सूचकांक की गणना करने के लिए मूल्यानुपातों को भार से गुणा करके उनका भारित समान्तर माध्य निकाल लिया जाता है। भारित गुणोत्तर माध्य का प्रयोग भारित सूचकांकों के निर्माण के लिए आदर्श माना जाता है।

उदाहरण (Illustration) 10 :

निम्न समंकों से जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक (Cost of Living Index Number) गणना कीजिये—(i) भारित समान्तर माध्य (weighted arithmetic mean) द्वारा तथा भारित गुणोत्तर माध्य (weighted geometric mean) द्वारा।

वर्ग (Group)	वर्ग-सूचकांक (Group Index No.)	वर्ग-भार (Group Weight)
खाद्य सामग्री (Food Articles)	352	48
ईंधन व प्रकाश (Fuel & Lighting)	200	10
वस्त्र (Clothing)	230	8
मकान का किराया (House Rent)	160	12
विविध (Miscellaneous)	190	15

हल (Solution) :

जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक का परिकलन
(Calculation of Cost of Living Index Number)

वर्ग Group	भार Weight w	वर्ग-सूचकांक Group Index R	भारित मूल्यानुपात Weighted Relatives Rw	सूचकांक लघु गणक $\log R$	भारित लघु गणक $w \log R$
खाद्य सामग्री	48	352	16,896	2·5465	122·2320
ईंधन व प्रकाश	10	200	2,000	2·3010	23·0100
वस्त्र	8	230	1,840	2·3617	18·8936
मकान का किराया	12	160	1,920	2·2041	26·4492
विविध	15	190	2,850	2·2788	34·1820
योग	93 Σw		25[illegible]		224·7668 $\Sigma (w \log R)$

(i) भारित समान्तर माध्य द्वारा (Using Weighted Arith. Mean)	(ii) भारित गुणोत्तर माध्य द्वारा (Using Weighted Geom. Mean)
$\text{I. No.} = \frac{\Sigma Rw}{\Sigma w} = \frac{25{,}506}{93} = 274{\cdot}26$	$\text{I. No.} = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma (w \log R)}{\Sigma w}\right] = AL\,\frac{224{\cdot}7668}{93} = \text{Antilog } 2{\cdot}4168 = 261{\cdot}1$

सूचकांकों की रचना में प्रयुक्त भार तर्कशुद्ध और विवेकपूर्ण (rational) होने चाहिएँ। उचित और विवेकपूर्ण भारों का निर्माण सूचकांकों के मूलभूत उद्देश्य व पदों या वस्तुओं की किस्म पर निर्भर होता है। उदाहरणार्थ, जीवन-निर्वाह सूचकांक की रचना में पारिवारिक बजट के आधार पर ज्ञात विभिन्न उपभोग की वस्तुओं पर किये गये आनुपातिक व्यय को उचित भार माना जाता है। सामान्य मूल्य-सूचकांकों के लिए वस्तुओं की उत्पादित मात्रा या बिक्री के लिए प्रस्तुत मात्रा या मूल्य के अनुपात में निर्धारित भार उचित और विवेकपूर्ण होते हैं।

भारत में निर्मित आर्थिक सलाहकार के नवीन थोक-मूल्य सूचकांक (आधार 1981–82=100) को विभिन्न वस्तुओं के बाजार में प्रस्तुत 'अतिरेक अनुपात' (market surplus ratios) के आधार पर भारांकित किया गया है। नवीन श्रृंखला में भारांकन के लिए भी आधार वर्ष 1981–82 के समंक प्रयोग किए गए है। पुरानी श्रृंखलाओं में यह दोष था कि भारांकन वर्ष भिन्न थे। उदाहरणार्थ, आधार वर्ष (1970–71=100) वाली श्रृंखला में भारांकन के लिए साठ के दशक के प्रारम्भिक वर्षों के उपलब्ध समंकों को आधार माना गया था।

नवीन सूचकांक श्रृंखला (1981–82=100) व पुरानी (1970–71=100) श्रृंखला में वर्ग भार व्यवस्था

	आधार (Base) 1970–71=100	1981–82=100
(I) मुख्य वस्तुएँ (Primary Products)	41·67	32·295
(II) ईंधन, ऊर्जा, रोशनी व स्नेहक पदार्थ (Fuel, Power, Light and Lubricants)	8·46	10·663
(III) निर्मित उत्पाद (Manufactured Products)	49·87	57·042
सभी वस्तुएँ (All Commodities)	100·00	100·000

प्रत्यक्ष तथा परोक्ष भारांकन (Explicit and Implicit Weighting)—भार देने की दो रीतियाँ है—प्रत्यक्ष तथा परोक्ष। प्रत्यक्ष भार वस्तुओं की मात्रा (quantity) या कुल मूल्य (value) अर्थात् उन पर किये जाने व्यय के अनुपात मे प्रत्यक्ष रूप से दिये जाते हैं। अधिकांश सूचकांको में प्रत्यक्ष भारो का ही प्रयोग किया जाता है। इसके विपरीत जब किसी वस्तु को अधिक महत्त्व देने के लिए सूचकाक में उसकी अनेक किस्में शामिल की जाती है तो वह अप्रत्यक्ष या अन्तर्निहित (implicit) भारांकन विधि कहलाती है। इस रीति के अनुसार यदि गेहूँ को नमक की अपेक्षा 5 गुना महत्त्व देना हो तो नमक की एक किस्म और गेहूँ की पाँच किस्में शामिल की जायेंगी। इस रीति का बहुत कम प्रयोग किया जाता है।

स्थिर एवं परिवर्तनशील भार (Fixed and Fluctuating Weights)—जब एक बार निश्चित किये गये भारों का ही अनेक वर्षों तक प्रयोग किया जाता है तो उन्हें स्थिर भार कहते

रचना में कठिनाइयाँ—उपभोक्ता-मूल्य सूचकांकों की रचना सरल नही है। उन्हें बनाते समय निम्न कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है—

(i) **जीवन-स्तर में अन्तर**—मनुष्यों के जीवन-स्तर में आय, व्यवसाय तथा स्थान के आधार पर अनेक अन्तर होते हैं। आवश्यकताओं में भिन्नता होने के कारण एक उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक सभी वर्गों व सभी स्थानों के लिए नहीं बनाया जा सकता। अलग-अलग वर्गों और स्थानों के लिए अलग सूचकांक बनाये जाते हैं।

(ii) **व्यय के अनुपात में अन्तर**—किसी वर्ग के सदस्य एक ही समय में विभिन्न वस्तुओं पर एक ही अनुपात मे व्यय नही करते। विभिन्न अवधियो में भी सभी सदस्यों के व्यय का अनुपात एक समान नहीं रहता। व्यय-अनुपात बहुत कुछ व्यक्तियों की रुचि, परिवार का आकार, आदत तथा अन्य परिस्थितियों पर निर्भर होता है। अतः किसी एक वस्तु के मूल्य-परिवर्तनों का उस वर्ग के सभी सदस्यों पर एक-सा प्रभाव नही पड़ता। उदाहरणार्थ, मछली के मूल्य में वृद्धि होने से शाकाहारी मजदूर प्रभावित नहीं होंगे।

(iii) **उपभोग की वस्तुओं में अन्तर**—उपभोग्य वस्तुओं की किस्म और मात्रा में भी समय और मूल्य-परिवर्तनों के साथ-साथ अन्तर होते रहते हैं जिनके कारण इन सूचकांकों में तुलनीयता का तत्त्व नहीं रह पाता। गेहूँ का मूल्य बहुत अधिक बढ़ जाने पर चना, मक्का आदि का अधिक उपभोग होने लगता है।

(iv) **फुटकर मूल्यों में अन्तर**—उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक वस्तुओ के फुटकर मूल्यों पर आधारित होते हैं, परन्तु फुटकर मूल्यो में स्थान-स्थान पर बहुत अधिक अन्तर होता है, अतः प्रतिनिधि मूल्यों का संकलन एक कठिन क्रिया है।

उपर्युक्त कठिनाइयों को दूर करने के लिए उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक विभिन्न वर्गों तथा विभिन्न स्थानों के लिए अलग-अलग बनाये जाते है।

उपभोक्ता-मूल्य सूचकांकों की रचना मे निम्नलिखित क्रियाएँ अपनायी जाती हैं—

(i) **वर्ग का निर्धारण**—सर्वप्रथम यह निश्चित कर लेना चाहिए कि उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक किस वर्ग विशेष के लिए बनाया जायेगा।

(ii) **पारिवारिक बजट अनुसन्धान**—फिर उस वर्ग मे से कुछ परिवार दैव प्रतिचयन के अनुसार छाँटकर उनके बजट ज्ञात करने चाहिएँ जिससे उनकी आय-व्यय की मदें, वस्तुओं की मात्रा, मूल्य, परिवार के आकार आदि का पता चल जाये। सुविधानुसार, उपभोग की वस्तुओं को पाँच प्रमुख श्रेणियों में बाँट लिया जाता है—(क) खाद्य-सामग्री, (ख) वस्त्र, (ग) ईंधन और प्रकाश, (घ) मकान का किराया तथा (च) विविध व्यय।

(iii) **मूल्य-उद्धरण**—चुनी हुई वस्तुओं के उन स्थानों के विश्वस्त सूत्रों से फुटकर मूल्य ज्ञात किये जाते हैं जहाँ से उस वर्ग के व्यक्ति उन्हे खरीदते है।

(iv) **भारांकन**—उपभोग की विभिन्न वस्तुओं का अलग-अलग सापेक्षिक महत्त्व व्यक्त करने के लिए उन्हें तर्कसंगत रीति द्वारा भारित किया जाता है। भार दो प्रकार से दिया जा सकता है—(अ) आधार-वर्ष में उपभोग की गयी वस्तु की मात्रा (q_0) के अनुपात में, या (ब) आधार-वर्ष में प्रत्येक वस्तु पर किये जाने वाले व्यय के मूल्य (w या p_0q_0) के अनुपात में। मात्रा-भार (quantity weights) तथा मूल्य-भार (value weights) के आधार पर भारित उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक बनाने की दो रीतियाँ हैं—

(अ) **समूही व्यय रीति या भारित समूही रीति (Aggregative Expenditure Method or Weighted Aggregative Method)**—इस रीति का संक्षिप्त विवरण भारित-मूल्य सूचकांकों की रचना के सम्बन्ध में किया जा चुका है। इस रीति में निम्न क्रियाएँ करनी पड़ती हैं—

(i) आधार-वर्ष में उपभोग की गयी वस्तुओं की मात्रा (q_0) और आधार-वर्ष के मूल्यों (p_0) की गुणा करके उनका जोड़ (Σp_0q_0) निकाल लिया जाता है। यह आधार-वर्ष का समूही व्यय है।

हैं तथा जब समय के साथ-साथ भारों में भी परिवर्तन किये जाते हैं तो वे परिवर्तनशील भार कहलाते हैं। सूचकांकों के लिए परिवर्तनशील भार ही अधिक उपयुक्त रहते हैं, क्योंकि इनसे वस्तुओं के सापेक्षिक महत्त्व में होने वाले परिवर्तनों का भी मापन हो जाता है।

भारित सूचकांकों की रचना की निम्न दो रीतियाँ हैं—

(अ) भारित समूह रीति (Weighted Aggregative Method)—इस रीति में आधार-वर्ष में उत्पादित या बिकी हुई या उपभोग की हुई वस्तुओं की मात्रा (q_0) को भार माना जाता है। प्रचलित वर्ष के मूल्यों (p_1) को आधार-वर्ष की मात्रा (q_0) से गुणा करके जोड़ ($\Sigma p_1 q_0$) निकाल लिया जाता है जिसे प्रचलित वर्ष का भारित समूह (current year's weighted aggregate) कहते हैं। फिर इसी प्रकार आधार-वर्ष के मूल्य और मात्रा को आपस में गुणा करके आधार-वर्ष को भारित समूह (base year's weighted aggregate or $\Sigma p_0 q_0$) निकाल कर उस पर प्रचलित वर्ष के भारित समूह का अनुपात ज्ञात कर लिया जाता है। इस अनुपात का प्रतिशत रूप ही भारित सूचकांक होता है।

(ब) मूल्यानुपातों का भारित माध्य (Weighted Average of Relatives Method)—इस रीति के अनुसार वस्तुओं के मूल्यानुपात निकाल कर उनकी और मूल्य भारों (value weights) की गुणा कर दी जाती है। फिर उन गुणाओं के जोड़ को भारों के जोड़ से भाग देकर सूचकांक ज्ञात कर लिया जाता है। इस रीति को पारिवारिक बजट रीति (Family Budget Method) भी कहते हैं।

उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक
(Consumer Price Index Numbers)

सामान्य-मूल्य सूचकांकों से यह ज्ञात नहीं होता कि सामान्य मूल्य-स्तर में होने वाले परिवर्तनों का समाज के विभिन्न वर्गों के रहन-सहन के व्यय पर क्या प्रभाव पड़ता है। भिन्न-भिन्न वर्गों के व्यक्ति विभिन्न प्रकार की वस्तुओं का भिन्न अनुपात में उपभोग करते हैं, अतः मूल्य-परिवर्तन उनको विभिन्न रूप से प्रभावित करते हैं। किसी स्थान से सम्बन्धित वर्ग-विशेष (जैसे कानपुर का औद्योगिक मजदूर वर्ग) पर पड़ने वाले मूल्य-परिवर्तनों के प्रभाव का माप करने के लिए जो सूचकांक बनाये जाते हैं, उन्हें निर्वाह-व्यय सूचकांक कहते हैं। निर्वाह-व्यय सूचकांक किसी वर्ग के व्यक्तियों द्वारा उपभोग की जाने वाली वस्तुओं के फुटकर मूल्यों में होने वाले उतार-चढ़ाव का मापन करने के उद्देश्य से बनाये जाते हैं। यही कारण है कि उन्हें उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index Number) भी कहा जाता है।

उपयोगिता— उपभोक्ता-मूल्य सूचकांकों की सहायता से एक वर्ग के व्यक्तियों के रहन-सहन के व्यय में होने वाले परिवर्तनों का पता चल जाता है जिसके आधार पर मूल्य-नियन्त्रण करके आवश्यकतानुसार राशनिंग व्यवस्था लागू की जा सकती है। विभिन्न कर्मचारियों का महँगाई-भत्ता व न्यूनतम मजदूरी आदि की रकम भी उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक के आधार पर ही निश्चित की जाती है। अतः ये सूचकांक बहुत उपयोगी होते हैं।

मान्यताएँ—उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक बनाते समय अनेक बातों में स्थिरता मानी जाती है। पहले, यह माना जाता है कि जिस वर्ग-विशेष के लिए यह सूचकांक बनाया जा रहा है उस वर्ग के सभी व्यक्तियों की आवश्यकताएं लगभग समान हैं। दूसरे, उपभोग की जाने वाली वस्तुएं तथा उसकी मात्रा आधार-वर्ष एवं प्रचलित वर्ष में बिल्कुल समान रही है। तीसरे, विभिन्न स्थानों पर मूल्य समान हैं। चौथे, यह माना जाता है कि सूचकांक में सम्मिलित वस्तुएं उस वर्ग के उपभोग का पूर्ण रूप से प्रतिनिधित्व करती है। अन्तिम मान्यता यह है कि उपभोक्ता मूल्य सूचकांक औसत रूप से ही सत्य होते हैं। वे प्रत्येक व्यक्ति या परिवार के लिए पूर्ण रूप से सत्य नहीं होते। व्यवहार में इन मान्यताओं में से अनेक पूरी नहीं उतरती। इसलिए इन सूचकांकों में अनेक त्रुटियाँ हो जाती है।

रचना में कठिनाइयाँ—उपभोक्ता-मूल्य सूचकांकों की रचना सरल नहीं है। उन्हें बनाते समय निम्न कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है—

(i) **जीवन-स्तर में अन्तर**—मनुष्यों के जीवन-स्तर में आय, व्यवसाय तथा स्थान के आधार पर अनेक अन्तर होते हैं। आवश्यकताओं में भिन्नता होने के कारण एक उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक सभी वर्गों व सभी स्थानों के लिए नहीं बनाया जा सकता। अलग-अलग वर्गों और स्थानों के लिए अलग सूचकांक बनाये जाते हैं।

(ii) **व्यय के अनुपात में अन्तर**—किसी वर्ग के सदस्य एक ही समय में विभिन्न वस्तुओं पर एक ही अनुपात मे व्यय नहीं करते। विभिन्न अवधियों में भी सभी सदस्यों के व्यय का अनुपात एक समान नही रहता। व्यय-अनुपात बहुत कुछ व्यक्तियों की रुचि, परिवार का आकार, आदत तथा अन्य परिस्थितियों पर निर्भर होता है। अतः किसी एक वस्तु के मूल्य-परिवर्तनों का उस वर्ग के सभी सदस्यों पर एक-सा प्रभाव नहीं पड़ता। उदाहरणार्थ, मछली के मूल्य में वृद्धि होने से शाकाहारी मजदूर प्रभावित नहीं होंगे।

(iii) **उपभोग की वस्तुओं में अन्तर**—उपभोग्य वस्तुओं की किस्म और मात्रा में भी समय और मूल्य-परिवर्तनों के साथ-साथ अन्तर होते रहते हैं जिनके कारण इन सूचकांकों में तुलनीयता का तत्व नही रह पाता। गेहूँ का मूल्य बहुत अधिक बढ़ जाने पर चना, मक्का आदि का अधिक उपभोग होने लगता है।

(iv) **फुटकर मूल्यों में अन्तर**—उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक वस्तुओं के फुटकर मूल्यों पर आधारित होते हैं, परन्तु फुटकर मूल्यों में स्थान-स्थान पर बहुत अधिक अन्तर होता है, अतः प्रतिनिधि मूल्यों का संकलन एक कठिन क्रिया है।

उपर्युक्त कठिनाइयों को दूर करने के लिए उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक विभिन्न वर्गों तथा विभिन्न स्थानों के लिए अलग-अलग बनाये जाते है।

उपभोक्ता-मूल्य सूचकांकों की रचना में निम्नलिखित क्रियाएँ अपनायी जाती हैं—

(i) **वर्ग का निर्धारण**—सर्वप्रथम यह निश्चित कर लेना चाहिए कि उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक किस वर्ग विशेष के लिए बनाया जायेगा।

(ii) **पारिवारिक बजट अनुसन्धान**—फिर उस वर्ग में से कुछ परिवार दैव प्रतिचयन के अनुसार छाँटकर उनके बजट ज्ञात करने चाहिएँ जिससे उनकी आय-व्यय की मदें, वस्तुओं की मात्रा, मूल्य, परिवार के आकार आदि का पता चल जाये। सुविधानुसार, उपभोग की वस्तुओं को पाँच प्रमुख श्रेणियों में बाँट लिया जाता है—(क) खाद्य-सामग्री, (ख) वस्त्र, (ग) ईंधन और प्रकाश, (घ) मकान का किराया तथा (च) विविध व्यय।

(iii) **मूल्य-उद्धरण**—चुनी हुई वस्तुओं के उन स्थानों के विश्वस्त सूत्रों से फुटकर मूल्य ज्ञात किये जाते है जहाँ से उस वर्ग के व्यक्ति उन्हें खरीदते है।

(iv) **भारांकन**—उपभोग की विभिन्न वस्तुओं का अलग-अलग सापेक्षिक महत्व व्यक्त करने के लिए उन्हें तर्कसंगत रीति द्वारा भारित किया जाता है। भार दो प्रकार से दिया जा सकता है—(अ) आधार-वर्ष में उपभोग की गयी वस्तु की मात्रा (q_0) के अनुपात में, या (ब) आधार-वर्ष में प्रत्येक वस्तु पर किये जाने वाले व्यय के मूल्य (w या p_0q_0) के अनुपात में। मात्रा-भार (quantity weights) तथा मूल्य-भार (value weights) के आधार पर भारित उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक बनाने की दो रीतियाँ है—

(अ) **समूही-व्यय रीति या भारित समूही रीति** (Aggregative Expenditure Method or Weighted Aggregative Method)—इस रीति का संक्षिप्त विवरण भारित-मूल्य सूचकांकों की रचना के सम्बन्ध में किया जा चुका है। इस रीति में निम्न क्रियाएँ करनी पड़ती हैं—

(i) आधार-वर्ष में उपभोग की गयी वस्तुओं की मात्रा (q_0) और आधार-वर्ष के मूल्यों (p_0) को गुणा करके उनका जोड़ (Σp_0q_0) निकाल लिया जाता है। यह आधार-वर्ष का समूही व्यय है।

1993 का उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (C. P. I. No.)

$$=\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}\times 100 \text{ या } \frac{3,336}{2,016}\times 100=165{\cdot}48$$

(ब) पारिवारिक बजट या भारित मूल्यानुपात विधि (Family Budget Method or Weighted Average of Relatives Method)—पारिवारिक बजट द्वारा उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक ज्ञात करने की निम्न क्रिया है—

(i) प्रत्येक वस्तु का प्रचलित वर्ष का मूल्यानुपात निकाला जाता है—

$$R=\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)$$

(ii) प्रत्येक वस्तु के मूल्यानुपात को उस पर आधारित वर्ष में किये जाने वाले व्यय (value weight or w) से गुणा करके भारित मूल्यानुपात (weighted relatives or Rw) ज्ञात किये जाते हैं। यदि आधार-वर्ष में उपभोग की गयी वस्तु की मात्रा (q_0) दी है तो उसकी आधार-वर्ष के मूल्य (p_0) से गुणा करके व्ययानुपात ($p_0q_0=w$) निकाल लिया जाता है।

(iii) भारित मूल्यानुपातों का जोड़ ΣRw प्राप्त किया जाता है।

(iv) भारों का जोड़ $[\Sigma w=\Sigma p_0q_0]$ निकाला जाता है।

(v) निम्नांकित सूत्र के प्रयोग द्वारा सूचकांक ज्ञात कर लिया जाता है—

$$\text{उपभोक्ता मूल्य-सूचकांक}=\frac{\Sigma Rw}{\Sigma w}$$

ΣRw भारित मूल्यानुपातों का जोड़ है, और

Σw भारों का जोड़ है।

उदाहरण (Illustration) 12 :

निम्न आंकड़ों की सहायता से 1991 को आधार वर्ष मानकर 1992 और 1993 के जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक तैयार कीजिए।

(मूल्य रु० में)

वर्ग	इकाई	1991	1992	1993
खाद्य पदार्थ	प्रति 40 kg.	128	144	60
वस्त्र	प्रति मीटर	16	14·40	17·60
ईंधन	प्रति 40 kg	32	40	44
बिजली	प्रति इकाई	1·60	2·00	2·00
मकान का किराया	प्रति कमरा	80	96	120
विविध	प्रति इकाई	4	4·80	6·00

उपर्युक्त वस्तु-वर्गों को क्रमशः 3, 2, 1, 1, 2 और 1 के अनुपात में भारांकित कीजिये।

गुणा करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि मूल्य और वस्तु की मात्रा की इकाइयाँ समान हों। यदि ऐसा नहीं है तो मात्रा की इकाई को मूल्य की इकाई में बदलकर ही गुणा करनी चाहिए। उदाहरणार्थ, यदि मूल्य प्रति किलोग्राम में है और मात्रा कुन्तल मे है तो कुन्तल को किलोग्राम में बदलकर ही गुणा करनी चाहिए।

(ii) आधार-वर्ष में वस्तु की मात्रा (q_0) और प्रचलित वर्ष के मूल्य (p_1) की गुणा करके उनका जोड़ ($\Sigma p_1 q_0$) निकाल लेना चाहिए यह प्रचलित वर्ष का समूही व्यय है।

(iii) निम्न सूत्र द्वारा सूचकांक ज्ञात कर लेना चाहिए—

$$\text{चालू वर्ष का सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का समूही व्यय}}{\text{आधार वर्ष का समूही व्यय}} \times 100$$

$$\text{या} \quad P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

उदाहरण (Illustration) 11 :

निम्नलिखित आँकड़ों से भारित समूही रीति (Weighted Aggregative Method) द्वारा 1983 को आधार वर्ष मानते हुए 1993 का उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index) ज्ञात कीजिए—

वस्तु Item	1983 में उपभोग-मात्रा Consumption in 1983	इकाई Unit	1983 में मूल्य Price in 1983 रु०	1993 में मूल्य Price in 1993 रु०
गेहूँ (Wheat)	2 कुन्तल	प्रति कुन्तल	200	400
चावल (Rice)	1 कुन्तल	प्रति कुन्तल	320	440
अरहर (Arhar)	20 किलो	प्रति किलो	4·80	11·20
चीनी (Sugar)	0·5 कुन्तल	प्रति किलो	8	12
नमक (Salt)	10 किलो	प्रति कुन्तल	80	120
तेल (Oil)	10 किलो	प्रति किलो	16	32
वस्त्र (Clothing)	20 मीटर	प्रति मीटर	12	20
ईंधन (Fuel)	4 कुन्तल	प्रति कुन्तल	48	60
मकान का किराया (House Rent)	—	प्रति मकान	200	300

हल (*Solution*)

उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक की रचना (समूही व्यय रीति)

वस्तु	1983 में उपभोग-मात्रा q_0	इकाई	1983 मे मूल्य p_0	1993 में मूल्य p_1	1983 मे समूही व्यय p_0q_0	1993 मे समूही व्यय p_1q_0
गेहूँ	2 कुन्तल	प्रति कुन्तल	200	400	400	800
चावल	1 कुन्तल	प्रति कुन्तल	320	440	320	440
अरहर	20 किलो	प्रति किलो	4·80	11·20	96	224
चीनी	0·5 कुन्तल	प्रति किलो	8	12	400	600
नमक	10 किलो	प्रति कुन्तल	80	120	8	12
तेल	10 किलो	प्रति किलो	16	32	160	320
वस्त्र	20 मीटर	प्रति मीटर	12	20	240	400
ईंधन	4 कुन्तल	प्रति कुन्तल	48	60	192	240
मकान का किराया	—	प्रति मकान	200	300	200	300
योग					2,016 Σp_0q_0	3,336 Σp_1q_0

1993 का उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (C. P. I. No.)

$$=\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}\times 100 \text{ या } \frac{3,336}{2,016}\times 100=165\cdot48$$

(ब) पारिवारिक बजट या भारित मूल्यानुपात विधि (Family Budget Method or Weighted Average of Relatives Method)—पारिवारिक बजट द्वारा उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक ज्ञात करने की निम्न क्रिया है—

(i) प्रत्येक वस्तु का प्रचलित वर्ष का मूल्यानुपात निकाला जाता है—

$$R=\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)$$

(ii) प्रत्येक वस्तु के मूल्यानुपात को उस पर आधारित वर्ष में किये जाने वाले व्यय (value weight or w) से गुणा करके भारित मूल्यानुपात (weighted relatives or Rw) ज्ञात किये जाते हैं। यदि आधार-वर्ष में उपभोग की गयी वस्तु की मात्रा (q_0) दी है तो उसकी आधार-वर्ष के मूल्य (p_0) से गुणा करके व्ययानुपात ($p_0q_0=w$) निकाल लिया जाता है।

(iii) भारित मूल्यानुपातों का जोड़ ΣRw प्राप्त किया जाता है।

(iv) भारों का जोड़ $[\Sigma w=\Sigma p_0q_0]$ निकाला जाता है।

(v) निम्नांकित सूत्र के प्रयोग द्वारा सूचकांक ज्ञात कर लिया जाता है—

$$\text{उपभोक्ता मूल्य-सूचकांक}=\frac{\Sigma Rw}{\Sigma w}$$

ΣRw भारित मूल्यानुपातों का जोड़ है, और

Σw भारों का जोड़ है।

उदाहरण (Illustration) 12 :

निम्न आँकड़ों की सहायता से 1991 को आधार वर्ष मानकर 1992 और 1993 के जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक तैयार कीजिए।

(मूल्य रु० में)

वर्ग	इकाई	1991	1992	1993
खाद्य पदार्थ	प्रति 40 kg.	128	144	60
वस्त्र	प्रति मीटर	16	14·40	17·60
ईंधन	प्रति 40 kg	32	40	44
बिजली	प्रति इकाई	1·60	2·00	2·00
मकान का किराया	प्रति कमरा	80	96	120
विविध	प्रति इकाई	4	4·80	6·00

उपर्युक्त वस्तु-वर्गों को क्रमशः 3, 2, 1, 1, 2 और 1 के अनुपात में भारांकित कीजिये।

हल (Solution) :

जीवन निर्वाह व्यय सूचकांकों की रचना (पारिवारिक व्यय विधि)

वर्ग	इकाई	भार	1991 (आधार)		1992			1993		
			मूल्य	अनुपात	मूल्य	अनुपात	$R \times w$	मूल्य	अनुपात	$R \times w$
		w	p_0		p_1	R	Rw	p_2	R	Rw
खाद्य पदार्थ	प्रति 40 kg.	3	128·00	100	144·00	112·5	337·5	160·00	125	375
वस्त्र	प्रति मीटर	2	16·00	100	14·40	90	180	17·60	110	220
ईंधन	प्रति 40 kg.	1	32·00	100	40·00	125	125	44·00	137·5	137·5
बिजली	प्रति इकाई	1	1·60	100	2·00	125	125	2·00	125	125
मकान का किराया	प्रति कमरा	2	80·00	100	96·00	120	240	120·00	150	300
विविध	प्रति इकाई	1	4·00	100	4·80	120	120	6·00	150	150
योग		10					1127·5			1307·5
		Σw					ΣRw_1			ΣRw_2

1992 का सूचकांक

$$I.\ No. = \frac{\Sigma Rw}{\Sigma w} \text{ या } \frac{1127 \cdot 5}{10} = 112 \cdot 75$$

1993 का सूचकांक

$$I.\ No. = \frac{\Sigma Rw}{\Sigma w} \text{ या } \frac{1307 \cdot 5}{10} = 130 \cdot 75$$

उदाहरण (Illustration) 13 :

उदाहरण 11 में प्रदत्त सामग्री से पारिवारिक बजट विधि द्वारा 1993 का उपभोक्ता मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

पारिवारिक बजट रीति (या भारित मूल्यानुपात रीति) द्वारा सूचकांक ज्ञात करने के लिए मूल्य-भारों (value weights) की आवश्यकता होती है। अतः आधार-वर्ष में वस्तु की मात्रा व मूल्य को गुणा (p_0q_0) करके भार ज्ञात किये जायेंगे। फिर निम्नलिखित प्रकार से सूचकांक निकाले जायेंगे—

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (पारिवारिक बजट रीति)
C.P.I. Nos (Family Budget Method)

वस्तु	उपभोग-मात्रा 1983 में	इकाई	1983 में मूल्य	1993 में मूल्य	मूल्यानुपात	भार	भारित मूल्यानुपात
	q_0		p_0	p_1	R	$w=p_0q_0$	Rw
गेहूँ	2 कुन्तल	प्रति कुन्तल	200	400	200	400	80,000
चावल	1 कुन्तल	प्रति कुन्तल	320	440	137·5	320	44,000
अरहर	20 किलो	प्रति किलो	4·80	11·20	233·33	96	22,400
चीनी*	0·5 कुन्तल	प्रति किलो	8	12	150	400	60,000
नमक	10 किलो	प्रति कुन्तल	80	120	150	8	1,200
घी	10 किलो	प्रति किलो	16	32	200	160	32,000
वस्त्र	20 मीटर	प्रति मीटर	12	20	166·67	240	40,000
ईंधन	4 कुन्तल	प्रति कुन्तल	48	60	125	192	24,000
मकान का किराया	—	प्रति मकान	200	300	150	200	30,000
						2,016 Σw	3,33,600 ΣRw

$$1993 \text{ का उपभोक्ता मूल्य सूचकांक} = \frac{\Sigma Rw}{\Sigma w} = \frac{3,33,600}{2016} = 165{\cdot}48$$

इन दोनों रीतियों के परिणाम एक समान होते हैं।

उपभोक्ता-मूल्य सूचकांकों में विभ्रम (Errors in Consumer Price Indices)—उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक किसी वर्ग के जीवन-निर्वाह-व्यय में होने वाले परिवर्तनों के सामान्य अनुमान-मात्र होते हैं। उनमें निम्न विभ्रम पाये जाते है—

(i) जिस वर्ग के लिए यह सूचकांक बनाया जा रहा है उस वर्ग के व्यक्तियों के वर्गीकरण में विभ्रम हो जाते हैं। कुछ ऐसे व्यक्ति शामिल किये जा सकते हैं जिनका उस वर्ग से सम्बन्ध न हो या उस वर्ग के प्रतिनिधियों को छोड़ा जा सकता है।

(ii) वस्तुओं के चुनाव में अशुद्धि होने की सम्भावना रहती है।

(iii) वस्तुओं की विविध किस्मों के कारण प्रतिनिधि मूल्य-उद्धरणों के छाँटने में गलती रह सकती है। इसके अतिरिक्त, फुटकर मूल्यों में भिन्न-भिन्न स्थानों व दुकानों पर अन्तर होते हैं।

(iv) भारांकन में भी विभ्रम की सम्भावना रहती है। अशुद्ध भारों के प्रयोग से सूचकांक निर्वाह-व्यय का समुचित प्रतिनिधित्व नहीं करता।

(v) वस्तुओं की माँग, उनके उपभोग की मात्रा और उनके मूल्यों में अत्यधिक परिवर्तन होने के कारण भी सूचकांक त्रुटिपूर्ण हो जाता है।

इन विभ्रमों को दूर करने के लिए उपभोक्ता-मूल्य सूचकांकों की रचना सावधानी से करनी चाहिए। समय-समय पर पारिवारिक बजट अनुसन्धान करके इन सूचकांकों की मान्यताओं में होने वाले परिवर्तनों का विश्लेषण करते रहना आवश्यक है।

सूचकांकों की अपस्फीति
(Deflating of Index Numbers)

मूल्य या निर्वाह-व्यय में होने वाले परिवर्तनों के अनुकूल, आय या मजदूरी आदि के

सूचकांकों में संशोधन करने की क्रिया सूचकांकों की अपस्फीति या समायोजन (Deflating of Index Numbers or Correction for price changes) कहलाती हैं। इस प्रकार के संशोधन द्वारा नकद मजदूरी से वास्तविक मजदूरी या नकद आय से वास्तविक आय ज्ञात हो जाती है। अपस्फीति के लिए निम्न सूत्र प्रयुक्त होता है—

$$\text{वास्तविक मजदूरी} = \frac{\text{मौद्रिक मजदूरी}}{\text{मूल्य सूचकांक}} \times 100 \quad \Big| \quad \text{वास्तविक आय} = \frac{\text{मौद्रिक आय}}{\text{उपभोक्ता मूल्य-सूचकांक}} \times 100$$

यदि वास्तविक मजदूरी या वास्तविक आय के सूचकांक ज्ञात करने हों तो पहले उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग किया जायगा, फिर प्रथम वर्ष को आधार मानकर सूचकांक निकाल लिए जायेंगे।

उदाहरण (Illustration) 14 :

निम्न सारणी में एक मजदूर की औसत वार्षिक मजदूरी तथा मूल्य-सूचकांक दिए गए हैं। मजदूर की वास्तविक मजदूरी के सूचकांक ज्ञात कीजिए।

वर्ष	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
मजदूरी	4,000	4,800	7,000	7,200	7,200	7,400	7,500
मूल्य सूचकांक	100	160	280	290	300	320	330

हल (Solution) :

वास्तविक मजदूरी सूचकांकों की रचना (अपस्फीति)

वर्ष	मजदूरी (रु०)	मूल्य सूचकांक	वास्तविक मजदूरी		वास्तविक मजदूरी सूचकांक	
1987	4000	100	$\frac{4000}{100}\times 100$	4000	—	100
1988	4800	160	$\frac{4800}{160}\times 100$	3000	$\frac{3000}{4000}\times 100$	75
1989	7000	280	$\frac{7000}{280}\times 100$	2500	$\frac{2500}{4000}\times 100$	62·5
1990	7200	290	$\frac{7200}{290}\times 100$	2482·8	$\frac{2482{\cdot}8}{4000}\times 100$	62·1
1991	7200	300	$\frac{7200}{300}\times 100$	2400	$\frac{2400}{4000}\times 100$	60
1992	7400	320	$\frac{7400}{320}\times 100$	2312·5	$\frac{2312{\cdot}5}{4000}\times 100$	57·8
1993	7500	330	$\frac{7500}{320}\times 100$	2272·7	$\frac{2272{\cdot}7}{4000}\times 100$	56·8

मात्राओं के सूचकांक
(Index Numbers of Quantities)

मात्राओं के सूचकांक उत्पादन में होने वाले परिवर्तनों को व्यक्त करते हैं। इस प्रकार के सूचकांक से उत्पादन की मात्रा का तुलनात्मक अध्ययन किया जाता है, मूल्यों का नहीं। इनके निर्माण की विधि मूल्य-सूचकांकों जैसी ही है। केवल मूल्य के स्थान पर मात्रा होती है। पहले निम्नलिखित सूत्र द्वारा मात्रानुपात (quantity relative) ज्ञात किये जाते हैं।

$$\text{मात्रानुपात} = \frac{\text{चालू वर्ष में मात्रा}}{\text{आधार वर्ष में मात्रा}} \times 100 \text{ या } \frac{q_1}{q_0} \times 100$$

तत्पश्चात्, प्रचलित वर्ष के सभी मात्रानुपातों का समान्तर माध्य निकाल लिया जाता है। यही मात्रा-सूचकांक है। उत्पादन-क्षेत्र में विभिन्न वस्तुओं के सापेक्ष महत्त्व को प्रकट करने के लिए तर्कयुक्त भारों का प्रयोग किया जा सकता है। भार निर्धारित करके अनुपातों के भारित माध्य (weighted average of relatives) द्वारा भारित मात्रा-सूचकांक ज्ञात कर लिया जाता है। किसी देश में विभिन्न क्षेत्रों के उत्पादन की वृद्धि या कमी का तुलनात्मक अध्ययन करने के लिए ये सूचकांक अत्यन्त उपयोगी होते हैं।

फिशर का आदर्श सूचकांक
(Fisher's Ideal Index Number)

अब तक हमने जिन भारित सूचकांकों का विवेचन किया है, उनमें यह दोष है कि उनकी रचना में आधार-वर्ष के स्थिर भारों का ही प्रयोग किया गया है। व्यवहार में, मूल्यों में परिवर्तनों के साथ-साथ वर्ष-प्रतिवर्ष वस्तुओं की मात्रा में भी परिवर्तन होते रहते हैं। अतः परिवर्तनशील भारों (fluctuating weights) का ही प्रयोग करना उचित है। यही कारण है कि आदर्श सूचकांक ज्ञात करने के लिए आधार-वर्ष और प्रचलित वर्ष—दोनों में प्रयुक्त वस्तुओं की मात्राओं (q_0 and q_1) का भार के रूप में प्रयोग करना चाहिए। प्रो० इरविंग फिशर (Prof. Irving Fisher) ने सूचकांकों के 134 सूत्रों का गहन अध्ययन करने के बाद एक आदर्श सूचकांक सूत्र निकाला जिसे फिशर का आदर्श सूचकांक (Fisher's Ideal Index Number) कहते हैं। इसे ज्ञात करने के लिए प्रत्येक वस्तु के आधार-वर्ष के मूल्य (p_0) और आधार-वर्ष की मात्रा (q_0) तथा प्रचलित वर्ष के मूल्य (p_1) और प्रचलित वर्ष की मात्रा (q_1) की आवश्यकता होती है। इसकी गणना-विधि निम्न प्रकार है—

(i) प्रत्येक वस्तु के आधार-वर्ष के मूल्य (p_0) और आधार-वर्ष की मात्रा (q_0) की गुणा करके उन गुणाओं का जोड़ निकाल लेना चाहिए। (Σp_0q_0)

(ii) प्रचलित वर्ष के मूल्य (p_1) तथा आधार-वर्ष की मात्रा (q_0) की गुणाओं का जोड़ ज्ञात करना चाहिए। (Σp_1q_0)

(iii) आधार-वर्ष के मूल्य (p_0) और प्रचलित वर्ष की मात्रा (q_1) की गुणाओं का जोड़ निकालना चाहिए। (Σp_0q_1)

(iv) प्रचलित वर्ष के मूल्य (p_1) व प्रचलित वर्ष की मात्रा (q_1) को गुणा करके उनका जोड़ ज्ञात करना चाहिए। (Σp_1q_1)

(v) निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करना चाहिए—

फिशर का आदर्श सूचकांक (Fisher's Ideal Index Number)

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$$

फिशर के सूत्र में आदर्श सूचकांक के सभी तत्त्व पाये जाते हैं। इसलिए यह आदर्श कहलाता है। प्रथम वह परिवर्तनशील भारों पर आधारित है, अर्थात् इसमें

एवं प्रचलित वर्ष—दोनों—की मात्राओं का भार दिया जाता है, दूसरे, इसमें गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है। आधार-वर्ष की मात्रा के भार पर आधारित अनुपात $\left(\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}\right)^*$ तथा प्रचलित वर्ष की मात्रा द्वारा भारांकित अनुपात $\left(\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}\right)^\dagger$ को आपस में गुणा करके गुणनफल का वर्ग मूल‡ निकाला जाता है। तीसरे, यह आदर्श सूचकांक की उत्क्राम्यता परीक्षाएँ—समय उत्क्राम्यता परीक्षा (time reversal test) और तत्व-उत्क्राम्यता परीक्षा (factor reversal test)—पूरी करता है।

फिशर के आदर्श सूचकांक में केवल यह दोष है कि इसे ज्ञात करने के लिए प्रत्येक वर्ष में वस्तु की मात्रा के समंक उपलब्ध करने पड़ते हैं। यदि किसी वर्ष ये समंक प्राप्त न हो सकें तो सूचकांक-रचना नहीं की जा सकती।

उत्क्राम्यता परीक्षाएँ
(Tests of Reversibility)

आदर्श सूचकांक का महत्वपूर्ण गुण यह है कि वह उत्क्राम्यता परीक्षणों पर खरा उतरा है। उत्क्राम्यता-परीक्षा निम्न दो प्रकार की होती है—

(क) समय-उत्क्राम्यता परीक्षा (Time Reversal Test),

(ख) तत्व-उत्क्राम्यता परीक्षा (Factor Reversal Test)।

(क) **समय-उत्क्राम्यता परीक्षा (Time Reversal Test)**—समय उत्क्राम्यता का यह अर्थ है कि यदि आधार-वर्ष के आधार पर प्रचलित वर्ष का सूचकांक (P_{01}) निकाला जाय और फिर प्रचलित वर्ष के आधार पर आधार वर्ष का सूचकांक (P_{10}) ज्ञात किया जाय तो ये दोनों एक दूसरे के व्युत्क्रम (reciprocal) होने चाहियें अर्थात् इन दोनों का गुणनफल 1 होना चाहिए—

$$P_{01}=\frac{1}{P_{10}} \text{ या } P_{01}\times P_{10}=1$$

उदाहरणार्थ, यदि 1983 के आधार पर बनाया हुआ 1993 का सूचकांक यह व्यक्त करे कि गेहूँ का मूल्य दोगुना हो गया है तो 1993 के आधार पर निर्मित 1983 के सूचकांक को यह स्पष्ट करना चाहिए कि 1983 में गेहूँ का मूल्य 1993 की तुलना में आधा रह गया है अर्थात् $2\times\frac{1}{2}=1$।

फिशर के शब्दों में, 'इस परीक्षण का यह अर्थ है कि सूचकांक-गणना का सूत्र ऐसा होना चाहिए कि वह तुलनात्मक विवेचन के दोनों बिन्दुओं के बीच एक समान अनुपात को ही व्यक्त करे, चाहे दोनों में से किसी को आधार माना जाये अथवा, दूसरे शब्दों में, आगे की ओर गणना वाला सूचकांक पीछे की ओर वाले सूचकांक का व्युत्क्रम होना चाहिए।'[1] फिशर का आदर्श सूचकांक इस परीक्षा को पूरा करता है।

* यह लास्पेयर का सूत्र (Laspeyre's formula) कहलाता है।

† इसे पाशे का सूत्र (Paasche's formula) कहते हैं।

‡ फिशर का सूत्र लास्पेयर और पाशे सूत्रों का गुणोत्तर माध्य है :

[1] 'The test is that the formula for calculating an index number should be such that it will give the same ratio between one point of comparison and the other, *no matter which of the two is taken as base.* Or, putting it another way, the index number reckoned forward should be the reciprocal of that reckoned backward.' —Irving Fisher : *Making of Index Numbers.*

$$P_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}},\ P_{10}=\sqrt{\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}\times\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}}$$

$$P_{01}\times P_{10}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}\times\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}}=1$$

P_{01}=आधार वर्ष के मूल्यों पर आधारित चालू वर्ष का मूल्य सूचकांक

P_{10}=चालू वर्ष के मूल्यों पर आधारित आधार वर्ष का मूल्य सूचकांक

(ख) तत्त्व-उत्क्राम्यता परीक्षा (Factor Reversal Test)—फिशर के अनुसार, जिस प्रकार हमारे सूत्र के अनुसार यह सम्भव होना चाहिए कि दो समयों के पारस्परिक परिवर्तन से असंगत परिणाम प्राप्त न हों, उसी प्रकार यह भी सम्भव होना चाहिए कि मूल्यों और मात्राओं का आपस में परिवर्तन करने पर भी असंगत परिणाम न प्राप्त हों—अर्थात्, दोनों राशियों को आपस में गुणा करने से वास्तविक मूल्य-अनुपात ज्ञात होना चाहिए।'[1] या-लुन चाऊ के शब्दों में, 'तत्त्व-उत्क्राम्यता परीक्षा के अनुसार कीमत-सूचकांक और मात्रा-सूचकांक का गुणनफल तत्संवादी वास्तविक मूल्य-सूचकांक के बराबर होना चाहिए।'[2]

उदाहरणार्थ, यदि 1993 में 1983 की अपेक्षा मूल्य दोगुने हो जायें तथा मात्रा ड्योढ़ी हो जाय तो 1993 में कुल मूल्य 1983 की तुलना में तीन गुना हो जाना चाहिए। अधिक स्पष्ट शब्दों में, यदि मूल्य के स्थान पर मात्रा और मात्रा के स्थान पर मूल्य रखकर सूचकांक (Q_{01}) बनाया जाये तो उसका और मूल्य-सूचकांक (P_{01}) का गुणनफल प्रचलित वर्ष के कुल मूल्य (Σp_1q_1) और आधार-वर्ष के कुल मूल्य (Σp_0q_0) के अनुपात के बराबर होना चाहिए। सूत्रानुसार—

$$P_{01}\times Q_{01}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$ वास्तविक मूल्य-अनुपात (True Value Ratio)

फिशर का आदर्श सूत्र तत्त्व-उत्क्राम्यता परीक्षा पर भी पूरा उतरता है—

$$P_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}\qquad Q_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_1q_0}}$$

$$P_{01}\times Q_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_1q_0}}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$

चक्रीय परीक्षा (Circular Test)—आदर्श सूचकांक की एक और जांच होती है जिसे चक्रीय परीक्षा कहते हैं। यह वास्तव में समय-उत्क्राम्यता परीक्षा का ही विस्तृत रूप है। इस परीक्षा के अनुसार, यदि 1993 का सूचकांक 1983 के आधार पर बनाया जाय और 1983 का सूचकांक 1973 के आधार पर बनाया जाय, तो 1973 के आधार पर प्रत्यक्ष रूप से निकाला गया 1993 का सूचकांक असंगत नहीं होना चाहिए। दूसरे शब्दों में, यदि 1993 का सूचकांक 1983 से दुगुना हो और 1983 का सूचकांक 1973 के सूचकांक से तीन गुना हो, तो 1973 के आधार पर ज्ञात 1993 का सूचकांक छः गुना होना चाहिए। सूत्र के रूप में :

$$P_{01}\times P_{12}\times P_{20}=1$$

यह परीक्षा केवल तभी पूरी होती है जब सूचकांक में या तो भार का बिल्कुल प्रयोग न किया गया हो या स्थिर भार का प्रयोग किया गया हो। फिशर का आदर्श सूत्र इस जांच पर पूरा नहीं उतरता।

---

[1] 'Just as our formula should permit the interchange of the two times without giving inconsistent results, so it ought to permit *interchanging the price and quantities without* giving inconsistent results—*i.e.* the two results multiplied together should give the *true value ratio*.'—Fisher.

[2] '*The factor reversal test holds that the product of a price index and the corresponding quantity index should equal the corresponding value index*.'—Ya-Lun Chou : *Applied Business and Economic Statistics*.

उदाहरण (Illustration) 15

निम्नलिखित आँकड़ों से फिशर का आदर्श सूचकांक (Fisher's Ideal Index Number) निकालिए—

वर्ष (Year)	चावल (Rice) मूल्य p	चावल (Rice) मात्रा q	गेहूँ (Wheat) मूल्य p	गेहूँ (Wheat) मात्रा q	बाजरा (Barley) मूल्य p	बाजरा (Barley) मात्रा q
1980	4	50	3	10	[illegible]	5
1990	10	40	8	8	4	4

[*B. Com., Kurukshetra Sept. 1991*]

हल (Solution) :

फिशर के आदर्श सूचकांक का निर्माण

वस्तु	1980 p_0	1980 q_0	1990 p_1	1990 q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
चावल	4	50	10	40	200	500	160	400
गेहूँ	3	10	8	8	30	80	24	64
बाजरा	2	5	4	4	10	20	8	16
			योग		240	600	192	480
					Σp_0q_0	Σp_1q_0	Σp_0q_1	Σp_1q_1

फिशर का आदर्श सूचकांक—

$$P_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}}\times 100$$

$$=\sqrt{\frac{600}{240}\times\frac{480}{192}}\times 100=\sqrt{\frac{25}{4}}\times 100$$

$$=2{\cdot}50\times 100=250$$

उपर्युक्त उदाहरण की सहायता से यह सिद्ध किया जा सकता है कि फिशर का आदर्श सूत्र दोनों परीक्षण पूरे करता है।

समय उत्क्राम्यता परीक्षा (Time Reversal Test)—

$$P_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}=\sqrt{\frac{600}{240}\times\frac{480}{192}}$$

$$P_{10}=\sqrt{\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}\times\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}}=\sqrt{\frac{240}{600}\times\frac{192}{480}}$$

$$P_{01}\times P_{10}=\sqrt{\frac{600}{240}\times\frac{480}{192}\times\frac{240}{600}\times\frac{192}{480}} \text{ या } \sqrt{1}=1$$

$\therefore$ समय उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी होती है।

तत्व उत्क्राम्यता परीक्षा (Factor Reversal Test)—

$$P_{01}=\sqrt{\frac{600}{240}\times\frac{480}{192}} \quad Q_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_1q_0}}=\sqrt{\frac{192}{240}\times\frac{480}{600}}$$

$$P_{01}\times Q_{01}=\sqrt{\frac{600}{240}\times\frac{480}{192}\times\frac{192}{240}\times\frac{480}{600}} \text{ या } \sqrt{\frac{480}{240}\times\frac{480}{240}}=\frac{480}{240}$$

लेकिन $\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}=\frac{480}{240}$ $\therefore$ $P_{01}\times Q_{01}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$ (True Value Ratio)

अतः फिशर सूत्र तत्व उत्क्राम्यता परीक्षा को भी पूरा करता है।

उदाहरण (Illustration) 16 :

निम्नलिखित समंकों से फिशर का आदर्श सूचकांक परिकलित कीजिये और सिद्ध कीजिये कि यह आदर्श सूत्र समय-उत्क्राम्यता एवं तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण सन्तुष्ट करता है—

From the following data calculate the Fisher's Ideal Index Number and show that it satisfies the time reversal test and factor reversal test.

वस्तु (Commodity)	आधार वर्ष (Base year) कीमत (Price)	आधार वर्ष (Base year) मात्रा (Quantity)	चालू वर्ष (Current year) कीमत (Price)	चालू वर्ष (Current year) मात्रा (Quantity)
A	6	50	10	56
B	2	100	2	120
C	4	60	6	60
D	10	30	12	24
E	8	40	12	36

[B. Com., Ajmer 1993; Awadh 1993; Meerut 1991]

हल (Solution) :

फिशर आदर्श सूचकांक की रचना
(Fisher's Ideal Index Number)

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष		समूह			
	कीमत p_0	मात्रा q_0	कीमत p_1	मात्रा q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	6	50	10	56	300	336	500	560
B	2	100	2	120	200	240	200	240
C	4	60	6	60	240	240	360	360
D	10	30	12	24	300	240	360	288
E	8	40	12	36	320	288	480	432
				योग	1360	1344	1900	1880
					Σp_0q_0	Σp_0q_1	Σp_1q_0	Σp_1q_1

फिशर का आदर्श सूचकांक (Fisher's Ideal Index No.)

$$P_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}\times 100$$

$$=\sqrt{\frac{1900}{1360}\times\frac{1880}{1344}}\times 100=\sqrt{1{\cdot}39706\times 1{\cdot}39881}\times 100$$

$$=\sqrt{1{\cdot}95422}\times 100=1{\cdot}39793\times 100=139{\cdot}79$$

समय उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal Test) पूर्ण होता है, यदि—

$$P_{01}\times P_{10}=1$$

$$P_{01}=\sqrt{\frac{1900}{1360}\times\frac{1880}{1344}},\quad P_{10}=\sqrt{\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}\times\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}}=\sqrt{\frac{1360}{1900}\times\frac{1344}{1880}}$$

$$\therefore\quad P_{01}\times P_{10}=\sqrt{\frac{1900}{1360}\times\frac{1880}{1344}\times\frac{1360}{1900}\times\frac{1344}{1880}}=\sqrt{1}=1$$

अतः फिशर का आदर्श सूत्र समय उत्क्राम्यता परीक्षण सन्तुष्ट करता है।

तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test) पूर्ण होता है, यदि—

$$P_{01}\times Q_{01}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$

$$Q_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_1q_0}}=\sqrt{\frac{1344}{1360}\times\frac{1880}{1900}}$$

$$\therefore\quad P_{01}\times Q_{01}=\sqrt{\frac{1900}{1360}\times\frac{1880}{1344}}\times\sqrt{\frac{1344}{1360}\times\frac{1880}{1900}}$$

$$=\sqrt{\frac{1900}{1360}\times\frac{1880}{1344}\times\frac{1344}{1360}\times\frac{1880}{1900}}=\frac{1880}{1360}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$

अतः फिशर सूत्र द्वारा तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण भी पूरा होता है।

उदाहरण (Illustration) 17 :

फिशर के आदर्श-सूत्र द्वारा निम्न समंको से कीमत-सूचकांक (Price-Index) और मात्रा सूचकांक (Quantity Index) परिकलित कीजिए—

वस्तु (Commodity)	1982		1984	
	कीमत प्रति इकाई (Price p.u.)	कुल मूल्य (Total value)	कीमत प्रति इकाई (Price p.u.)	कुल मूल्य (Total value)
A	5	50	4	48
B	8	48	7	49
C	6	18	5	20

[M.A., Kurukshetra, 1982; B.Com., Punjab, 1984]

हल (Solution) :

फिशर-सूत्र द्वारा कीमत-सूचकांक (P_{01}) एवं मात्रा-सूचकांक (Q_{01}) का परिकलन

वस्तु	1982 कीमत p_0	1982 कुल मूल्य $V_0=p_0q_0$	1984 कीमत p_1	1984 कुल मूल्य $V_1=p_1q_1$	$\frac{p_0q_0}{p_0}=q_0$	$\frac{p_1q_1}{p_1}=q_1$	p_0q_1	p_1q_0
A	5	50	4	48	10	12	60	40
B	8	48	7	49	6	7	56	42
C	6	18	5	20	3	4	24	15
योग		116 Σp_0q_0		117 Σp_1q_1			140 Σp_0q_1	97 Σp_1q_0

कीमत-सूचकांक

$$P_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}\times 100$$

$$=\sqrt{\frac{97}{116}\times\frac{117}{140}} \text{ or } \sqrt{\frac{11349}{16240}}\times 100$$

$$=0{\cdot}83596\times 100=83{\cdot}60$$

कीमत-सूचकांक$=83{\cdot}60$

मात्रा-सूचकांक

$$Q_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_1q_0}}\times 100$$

$$=\sqrt{\frac{140}{116}\times\frac{117}{97}} \text{ or } \sqrt{\frac{16380}{11252}}\times 100$$

$$=1{\cdot}2065\times 100=120{\cdot}65$$

मात्रा-सूचकांक$=120{\cdot}65$

सूचकांकों के अन्य सूत्र (Other Formulae for Index Numbers)—फिशर के अतिरिक्त अनेक सांख्यिकों व अर्थशास्त्रियों ने समय-समय पर सूचकांक रचना के विभिन्न सूत्रों का प्रतिपादन किया है जिनमें से प्रमुख सूत्र निम्न प्रकार हैं—

(i) लास्पेयर (Laspeyre's) का सूत्र—

$$P_{01}=\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}$$

(ii) पाशे (Paasche's) का सूत्र—

$$P_{01}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}$$

(iii) ड्रोबिश व बाउले का सूत्र (Drobisch and Bowley)—

$$P_{01}=\frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}+\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\right]$$

(iv) मार्शल-एजवर्थ सूत्र—(Marshall-Edgeworth)—

$$P_{01}=\frac{\Sigma(q_0+q_1)\,p_1}{\Sigma(q_0+q_1)\,p_0}$$

(v) वाल्श (Walsh's) का सूत्र—

$$P_{01}=\sqrt{\frac{q_0\,(q_1p_1)}{q_0\,(q_1p_0)}}$$

(vi) कैली (Kelly's) का सूत्र—

$$P_{01}=\frac{\Sigma p_1q}{\Sigma p_0q}$$

प्रथम दो सूत्र क्रमशः आधार-वर्ष की मात्रा और प्रचलित-वर्ष की मात्रा द्वारा भारांकित किये गए हैं। सरलता व सुविधा की दृष्टि से प्रथम सूत्र लोकप्रिय है, क्योंकि इसमें भार वर्ष-प्रतिवर्ष बदलने नहीं पड़ते। तीसरा सूत्र प्रथम दोनों सूत्रों का समान्तर माध्य है। फिशर का आदर्श सूत्र प्रथम दोनों सूत्रों का गुणोत्तर माध्य है। चौथा सूत्र फिशर का वैकल्पिक सूत्र (Fisher's Alternate Formula) कहलाता है। मार्शल व एजवर्थ ने भी इसका प्रयोग उत्तम माना है। इसमें वही गुण-दोष पाये जाते हैं जो फिशर के आदर्श सूत्र में विद्यमान हैं। वाल्श ने गुणोत्तर माध्य पर आधारित भारित समूहों वाला सूत्र प्रतिपादित किया है, परन्तु यह अत्यन्त जटिल है। अन्तिम सूत्र कैली ने प्रस्तुत किया है। इसमें आधार-वर्ष या प्रचलित वर्ष के मात्रा-भार न लेकर एक प्रमापित वर्ष (q) के मात्रा-भार लिये गए हैं।

उदाहरण (Illustration) 18 :

निम्न सामग्री से 1993 का मूल्य सूचकांक बनाइए—(i) लास्पेयर रीति द्वारा, (ii) पाशे रीति से (iii) ड्रोबिश एवं बाउले सूत्र द्वारा और (iv) मार्शल-एजवर्थ सूत्र द्वारा।

वस्तु	1973		1993	
	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा
A	8	50	20	40
B	6	10	[redacted]	2
C	4	5	8	2

हल (Solution) :

विभिन्न सूत्रों द्वारा मूल्य-सूचकांकों का परिगणन

वस्तु	1973		1993		भारित समूह			
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	8	50	20	40	400	320	1000	800
B	6	10	18	2	60	12	180	36
C	4	5	8	2	20	8	40	16
			योग		480	340	1220	852
					Σp_0q_0	Σp_0q_1	Σp_1q_0	Σp_1q_1

(i) लास्पेयर (Laspeyre) रीति :

$$P_{01}=\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times 100=\frac{1220}{480}\times 100$$
$$=254{\cdot}2$$

(ii) पाशे (Paasche) रीति :

$$P_{01}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times 100=\frac{852}{340}\times 100$$
$$=250{\cdot}6$$

(iii) 'ड्रोबिश एवं बाउले' (Drobisch-Bowley) सूत्र :

$$P_{01}=\frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}+\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\right]\times 100$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1220}{480}+\frac{852}{340}\right]\times 100$$
$$=\frac{1}{2}[2{\cdot}542+2{\cdot}506]\times 100$$
$$=\frac{5{\cdot}048}{2}\times 100$$
$$=2{\cdot}524\times 100 \text{ or } 252{\cdot}4$$

या $P_{01}=\frac{L+P}{2}=\frac{254{\cdot}2+250{\cdot}6}{2}$

$$=\frac{504{\cdot}8}{2}=252{\cdot}4$$

(iv) 'मार्शल-एजवर्थ' (Marshall-Edgeworth) सूत्र :

$$P_{01}=\frac{\Sigma\{p_1(q_0+q_1)\}}{\Sigma\{p_0(q_0+q_1)\}}\times 100$$
$$=\frac{\Sigma p_1q_0+\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0+\Sigma p_0q_1}\times 100$$
$$=\left[\frac{1220+852}{480+340}\right]\times 100$$
$$=\frac{2072}{820}\times 100=252{\cdot}7$$

उदाहरण (Illustration) ९१ :

निम्न प्रदत्त समंकों से ज्ञात कीजिए (i) फिशर का आदर्श सूचकांक; तथा (ii) मार्शल-एजवर्थ का सूचकांक—

Find out (i) Fisher's Ideal Index Number and (ii) Marshall-Edgeworth's Index Number, given that—

$\Sigma p_1q_1=250$; $\Sigma p_0q_0=150$, पाशे सूचकांक (Paasche s Index No.)$=150$, तथा ड्रॉबिश-बाउले सूचकांक (Drobisch-Bowley's Index Number)$=145$ ।

[B. Com., Delhi, 1992]

हल (Solution) :

प्रदत्त $\Sigma p_1q_1=250$; $\Sigma p_0q_0=150$, पाशे (Paasche's) सूचकांक—

$$P_{01}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times 100=150$$

ड्रॉबिश-बाउले (Drobisch Bowley's) सूचकांक—

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}+\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\right)\times 100=145$$

अभीष्ट सूचकांकों का परिगणन करने के लिए निम्न चार भारित समूहों की आवश्यकता है—

Σp_1q_1, Σp_0q_0 (दोनों प्रदत्त हैं) तथा Σp_1q_0 और Σp_0q_1 जिन्हें दोनों प्रदत्त सूचकांकों से ज्ञात किया जायेगा—

$$\text{Paasche's I. No.}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times 100=150$$

या $$\frac{250}{\Sigma p_0q_1}\times 100=150$$

$$\frac{25000}{\Sigma p_0q_1}=150 \text{ या } \Sigma p_0q_1=\frac{25000}{150}=166{\cdot}67$$

$$\text{Drobisch-Bowley's I. No.}=\frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}+\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\right)\times 100=145$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma p_1q_0}{150}+\frac{250}{166{\cdot}67}\right)\times 100=145$$

$$\left(\frac{\Sigma p_1q_0}{150}+1{\cdot}50\right)=\frac{145}{50}$$

$$\frac{\Sigma p_1q_0}{150}=2{\cdot}9-1{\cdot}5 \text{ or } 1{\cdot}4$$

$$\therefore \quad \Sigma p_1q_0=150\times 1{\cdot}4=210$$

अतः

$$\Sigma p_1q_0=210$$
$$\Sigma p_0q_1=166{\cdot}67$$
$$\Sigma p_1q_1=250$$
$$\Sigma p_0q_0=150$$

(i) फिशर का आदर्श सूचकांक (Fisher's Ideal Index No.)

$$=\sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}\times\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}\times 100=\sqrt{\frac{210}{150}\times\frac{250}{166\cdot67}}\times 100$$

$$=\sqrt{\frac{52500}{25000}}\times 100=144\cdot91$$

(ii) मार्शल-एजवर्थ सूत्र (Marshall-Edgeworth I. No.)

$$P_{01}=\frac{\Sigma\{p_1\,(q_0+q_1)\}}{\Sigma\{p_0\,(q_0+q_1)\}}\times 100=\frac{\Sigma p_1 q_0+\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0+\Sigma p_0 q_1}\times 100$$

$$=\left[\frac{210+250}{150+166\cdot67}\right]\times 100=\frac{460}{316\cdot67}\times 100=145\cdot26$$

उदाहरण (Illustration) 20 :

वर्ष 1982 को आधार मानकर निम्नलिखित सूचना से उपयुक्त उत्पादकता सूचकांक की रचना कीजिये और परिणाम का निर्वचन कीजिए—

Construct a suitable productivity index with base 1982 from the following information and also interpret your result—

मदें (Items)	1982 में उत्पादित इकाइयाँ Units produced in 1982	प्रति इकाई मानव घण्टे Man-hours per unit 1982	1983
A	20,000	0·5	0·4
B	2,000	5·0	4·5
C	1,000	2·0	1·75
D	500	1·5	1·5

[B. Com., Nagpur 1983, Delhi 1980]

हल (Solution) :

उत्पादकता सूचकांक की रचना
(Construction of Productivity Index)

मदें (Items)	1982 में उत्पादित इकाइयाँ (Units produced in 1982)	मानव घण्टे प्रति इकाई (Man hours per unit) 1982	1983	कुल अभीष्ट मानव घण्टे (Total man hours required) 1982	1983
	q_0	-	m_1	m_0q_0	m_1q_0
A	20,000	0·5	0·4	10,000	8,000
B	2,000	5·0	4·5	10,000	9,000
C	1,000	2·0	1·75	2,000	1,750
D	500	1·5	1·5	750	750
योग (Total)	23,500			22,750	19,500
	Σq_0			Σm_0q_0	Σm_1q_0

1983 का उत्पादकता सूचकांक (Productivity Index for 1983)

$$=\frac{\Sigma m_1 q_0}{\Sigma m_0 q_0}\times 100=\frac{19500}{22750}\times 100=85{\cdot}71$$

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि 1982 (100) की अपेक्षा 1983 में अभीष्ट मानव-घण्टों की संख्या (85·71) कम है। अर्थात् कम मानव घण्टों से उतना ही उत्पादन हुआ है। प्रति मानव घण्टा उत्पादन बढ़ा है अर्थात् वह $\left(\frac{100}{85{\cdot}71}\times 100\right)=116{\cdot}67$ हो गया है। उत्पादन प्रति मानव घण्टों में 16·67 प्रतिशत की वृद्धि हुई है।

उदाहरण (Illustration) 21 :

अहमदाबाद के वस्त्र उद्योग के एक श्रमिक की आय 750 रु० प्रति माह है। जनवरी 1986 में जीवन-निर्वाह व्यय सूचकांक 160 था। निम्न समंकों का प्रयोग करते हुए (i) खाद्य पदार्थ तथा (ii) मकान किराये पर खर्च होने वाली राशि ज्ञात कीजिये—

A textile worker in Ahmedabad earns Rs. 750 per month. The cost of living index for January 1986 is given as 160. Using the following data find out the amount spent on (*i*) Food, (*ii*) Rent—

वर्ग *(Group)*	व्यय रु० में *(Expenditure in Rs.)*	वर्ग-सूचकांक *(Group Index)*
खाद्य-पदार्थ	?	190
वस्त्र	125	181
किराया	?	140
ईंधन व प्रकाश	100	118
विविध	75	101

[B. Com. (H), Delhi 1993]

हल (Solution) :

मान लीजिए 'खाद्य सामग्री' और 'किराये' पर व्यय की जाने वाली राशि क्रमशः X और Y है। वर्ग सूचकांकों को व्यय-राशि से भारांकित करके जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक परिकलित किया गया है जो 160 है—

वर्ग Group	व्यय (भार) Expenditure (weight) (V)	वर्ग-सूचकांक Group Index (I)	भारित वर्ग-सूचकांक Weighted Group-Index $(I.V.)$
खाद्य पदार्थ	X	190	$190X$
वस्त्र	125	181	22,625
किराया	Y	140	$140Y$
ईंधन व प्रकाश	100	118	11,800
विविध	75	101	7,575
योग	750		$42{,}000+190X+140Y$
	ΣV		ΣIV

$$X+Y=750-(125+100+75)=450 \qquad ...(i)$$

$$\text{जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक}=\frac{\Sigma IV}{\Sigma V}$$

जनवरी 1986 के लिए—

$$\frac{42,000+190X+140Y}{750}=160$$

$$\therefore \quad 190X+140Y=(750\times 160)-42,000$$

$$=78,000$$

$$\text{or} \quad 19X+14Y=7,800 \qquad ...(ii)$$

दोनों युगपत् समीकरणों को हल करने पर—

$$14X+14Y=6,300 \qquad ...(i)\times 14$$

$$19X+14Y=7,800 \qquad ...(ii)$$

$$5X \quad =1,500$$

$$\therefore \quad X=300$$

$$\text{तथा,} \quad Y=450-300=150$$

अतः खाद्य पदार्थ पर व्यय 300 रु० है और मकान किराये पर व्यय 150 रु० मासिक है।

महत्त्वपूर्ण सूत्रों की सूची

सरल सूचकांक

(i) सरल समूही विधि $P_{01}=\frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0}\times 100$

(ii) सरल मूल्यानुपात विधि—

स्थिर आधार : मूल्यानुपात–$R=\frac{p_1}{p_0}\times 100$, सूचकांक$=\frac{\Sigma R}{N}$

शृंखला आधार : शृंखला मूल्यानुपात$=\frac{\text{चालू वर्ष का मूल्य}}{\text{गत वर्ष का मूल्य}}\times 100$

शृंखला सूचकांक

$$=\frac{\text{चालू वर्ष का माध्य शृंखला मूल्यानुपात}\times\text{गत वर्ष का शृंखलित सूचकांक}}{100}$$

आधार परिवर्तन : (i) स्थिर आधार से शृंखला आधार में—

चालू वर्ष का शृंखला सूचकांक$=\frac{\text{चालू वर्ष का स्थिर सूचकांक}}{\text{गत वर्ष का स्थिर सूचकांक}}\times 100$

(ii) शृंखला आधार से स्थिर आधार में—

चालू वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक—

$$=\frac{\text{चालू वर्ष का शृंखला सूचकांक}\times\text{गत वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक}}{100}$$

आधार वर्ष परिवर्तन :

नए आधार का सूचकांक$=\frac{\text{चालू वर्ष का पुराना सूचकांक}}{\text{नए आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}}\times 100$

अपस्फीति :

वास्तविक मजदूरी$=\frac{\text{मौद्रिक मजदूरी}}{\text{मूल्य सूचकांक}}\times 100$ | वास्तविक आय$=\frac{\text{मौद्रिक आय}}{\text{उपभोक्ता मूल्य सूचकांक}}\times 100$

भारांकित सूचकांक

भारित समूही रीति :

चालू वर्ष का सूचकांक$=\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times 100$

परिवार बजट रीति :

चालू वर्ष का सूचकांक$=\frac{\Sigma Rw}{\Sigma w}$

फिशर का आदर्श सूत्र$=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}\times 100$

समय उत्क्राम्यता परीक्षा : $P_{01}=\frac{1}{P_{10}}$ or $P_{01}\times P_{10}$

खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षा : $P_{01}\times Q_{01}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0p_0}$

अन्य आदर्श सूत्र

लास्पेयर सूत्र

$P_{01}=\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}$

'ड्रोबिश एवं बाउले' सूत्र

$P_{01}=\frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}+\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\right]$

पाशे सूत्र

$P_{01}=\frac{\Sigma p_1p_1}{\Sigma p_0q_1}$

'मार्शल एजवर्थ' सूत्र

$P_{01}=\frac{\Sigma\{p_1(q_0+q_1)\}}{\Sigma\{p_0(q_0+q_1)\}}=\frac{\Sigma p_1q_0+\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0+\Sigma p_0q_1}$

प्रश्न

1. एक सूचकांक क्या है ? सूचकांकों के बनाने में आने वाली विभिन्न समस्याओं को समझाइये ।
What is an Index Number ? Explain the various problems involved in the construction of Index Numbers.

[*B. Com., Ajmer, 1992*]

2. एक सूचकांक क्या है ? उसकी क्या उपयोगिता है ? संक्षेप में थोक मूल्य सूचकांक ज्ञात करने की क्रिया-विधि का वर्णन कीजिए ।
What is an Index Number ? What purpose does it serve ? Describe briefly the procedure for constructing an index of wholesale prices.

[*B. Com., Meerut, 1992*]

3. सूचकांक से क्या तात्पर्य है ? जीवन निर्वाह लागत सूचकांक की रचना किस प्रकार की जाती है ?
What is meant by Index Number ? How is cost of living index number prepared ?

[*M.A., Meerut, 1993*]

4. 'सूचकांक सम्बन्धित चल-मूल्यों के परिणाम में होने वाले अन्तरों का माप करने का साधन है ।' इस कथन का विवेचन कीजिए और सूचकांकों के महत्त्वपूर्ण उपयोगों का वर्णन कीजिए ।
'Index Numbers are devices for measuring differences in the magnitude of a group of related variables.' Discuss the statement and point out the important uses of Index Numbers.

5. (अ) 'सूचकांक आर्थिक दाब-मापक यन्त्र है ।' स्पष्ट कीजिए ।
'Index Numbers are economic barometers.' Explain.

[*B. Com., Meerut, 1990*]

(ब) एक सूचकांक के निर्माण में आधार वर्ष, माध्य और भारों का चुनाव करते समय किन-किन बातों का ध्यान रखा जाता है ?
What points are considered in the selection of (i) base year; (ii) average; and (iii) weights in the construction of an Index Number ?

6. 'सूचकांक' का अर्थ समझाइये । फिशर का सूत्र आदर्श सूचकांक क्यों कहलाता है ? स्पष्ट कीजिए ।
Explain 'index number'. Why Fisher's formula is referred to as an 'Ideal Index' ? Explain.

[*B. Com. Hons., Raj., 1994*]

7. (a) स्थिर आधार सूचकांक और शृंखला-आधार सूचकांकों का अन्तर स्पष्ट कीजिए और उनके तुलनात्मक गुण-दोषों का वर्णन कीजिए ।
Distinguish clearly between fixed base and chain base index numbers and point out their relative merits and demerits.

[*M.A., Kurukshetra, 1983; M. Com., Jammu, 1984*]

(b) सूचकांकों के 'अपस्फीतिकरण' का अर्थ उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए ।
Explain the meaning of 'deflating of Index numbers' with the help of a suitable example.

[*B. Com. (H), Delhi, 1988*]

8. मूल्य-सूचकांकों के लिए फिशर का आदर्श सूत्र लिखिए तथा समझाइए । बताइए यह किस प्रकार समय-उत्क्राम्यता और तत्त्व-उत्क्राम्यता परीक्षणों को पूरा करता है ? व्यवहार में यह क्यों कम प्रयोग होता है ?
State and Explain Fisher's Ideal formula for price index numbers. Show how it satisfies the time reversal and factor reversal tests. Why is it little used in practice ?

[*M.B.A., Himachal, 1986*]

9. निम्न आँकड़ों से सूचकांक निर्माण कीजिए (i) 1983 को आधार-वर्ष मानकर, (ii) 1992 को आधार-वर्ष मानकर, और (iii) पहले पाँच वर्षों के औसत मूल्यों को आधार मानकर—
Prepare index numbers from the following data taking (i) 1983 as base year, (ii) 1992 as base year and (iii) average of prices for first five years as base—

Year :	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Price of wheat per 10 kg (Rs.) :	16	20	24	28	32	40	36	40	44

[(i) 100, 125, 150, 175, 200, 250, 225, 250, 275; (ii) 40, 50, 60, 70, 80, 100, 90, 100, 110 (iii) 66·7, 83·3, 100, 116·7, 133·3, 166·7, 150, 166·7, 183·3]

10. छः वर्षों के लिए गेहूँ के मूल्य नीचे दिए गए हैं। मूल्यानुपात का परिकलन (*a*) 1988 को आधार मानकर, (*b*) छः वर्षों के लिए औसत मूल्य को आधार मानकर कीजिए—
Price of wheat for six years is given below. Calculate price-relatives taking (a) 1988 as base, and (*b*) average prices for six years as base—

Year	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Wheat per Qtl. (Rs.)	120	150	135	165	195	315

[(*a*) *100, 125, 112·5, 137·5, 162·5, 262·5;* (*b*) *66·7, 83·3, 75, 91·7, 108·3, 175*]

11. निम्न आँकड़ों से (i) सरल समूही रीति, और (ii) मूल्यानुपात माध्य रीति द्वारा 1983 के आधार पर 1993 के साधारण सूचकांकों की रचना कीजिए—
From the following data, construct simple index numbers for 1993 taking 1983 as base year by (*i*) *simple aggregative method and* (*ii*) *simple average of price relatives* method—

Item	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
1983 price (Rs.)	15	22	38	25	50
1993 price (Rs.)	30	25	57	35	63

[(i) 140, (ii) 145·9]

12. 1981 और 1985 में कुछ वस्तुओं के निम्नांकित मूल्य से 1981 को आधार-वर्ष मानकर 1985 का मूल्य-सूचकांक परिगणित कीजिए—
From the following data of commodity prices in 1981 and 1985, compute the Index Number for 1985 with 1981 as base—

Item :	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Price (in Rs.) :							
1981	100	[illegible]	5	4	1	2	3
1985	100	9	4	2	1	2·50	3·25

[93·3] [*B. Com., Jabalpur, 1988*]

13. 1991 को आधार-वर्ष मानकर मूल्यानुपातों का (i) समान्तर माध्य, (ii) मध्यका, और (*iii*) गुणोत्तर माध्य प्रयोग करते हुए 1994 का मूल्य-सूचकांक ज्ञात कीजिए।
Calculate the index number for 1994 with 1991 as base year, using (i) arithmetic mean, (ii) median, and (iii) geometric mean of relatives—

Item :	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1991 prices :	40	25	50	8·62	24·60	15
1994 prices :	60	31·25	37·50	8·62	18·45	11·25

[$\bar{x}$=100, *M*=87·5, *GM*=96·2]

14. निम्नलिखित आँकड़ों की सहायता से (i) 1991 का आधार-वर्ष मानकर, और (ii) तीनों वर्षों के औसत मूल्यों को आधार मानकर सूचकांकों की रचना कीजिए।
With the help of following data, construct index numbers taking (i) 1991 as the base, (ii) average prices for 3 years as base—

Year	*Price per Rupee*		
	A	*B*	*C*
1991	2 kgms.	1 kgm.	400 gms.
1992	1·6 kgms.	800 gms.	400 gms.
1993	1 kgm.	750 gms.	250 gms.

[(i) 1992—116·7, 1993—164·4, (ii) 1991—79·2, 1992—92·1, 1993—128·7]

15. माध्य मूल्यों को आधार मानकर तीन वर्षों के मूल्यों के सूचकांक बनाइए—
Prepare price index numbers for the three years, taking average prices as base—

Year	Price per quintal (Rs.)		
	Wheat	*Cotton*	*Oil*
I	100	25	30
II	90	20	25
III	99	15	20

[I—116·27, II—97 81, III—85·92]　　　　*[B. Com., Ajmer, 1992]*

16. (i) निम्न सूचकांकों से नये सूचकांक ज्ञात कीजिए। (*a*) 1992 को आधार-वर्ष मानकर, और (*b*) शृंखला आधार विधि द्वारा—
From the following index numbers, construct new indices, (*a*) with 1992 as base year, and (*b*) by chain base method—

Year :	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Index No. :	100	110	175	250	300	400

(ii) 1991, 92 व 93 के लिए शृंखला आधार रीति द्वारा 1990 को आधार मानकर सूचकांक ज्ञात कीजिए—
Prepare index numbers for 1991, 92 and 93 chained to 1990, by chain base method—

Year :	1990	1991	1992	1993
Index No. :	100	110	95·5	109·5

[(i) 40, 44, 70, 100, 120, 160, (*b*) शृंखला मूल्यानुपात 100, 110, 159, 143, 120, 133·3, सूचकांक स्थिर आधार वाले ही रहेंगे, (ii) 100, 110, 105 05, 115 03]

17. निम्नांकित समंकों से शृंखला आधार सूचकांक परिकलित कीजिए—
From the following data, calculate chain base index numbers :

कीमत रु० में (Price in Rs.)

मदें (Items)	वर्ष (Years)				
	1986	1987	1988	1989	1990
A	5	8	10	12	15
B	3	6	8	10	12
C	2	3	5	7	10 5

[100, 170, 141 67, 128·33, 131 67]　　　　*[B. Com. (H) Delhi, 1992]*

18. निम्न सारणी तीन वस्तु-वर्गों के थोक-मूल्यों को प्रदर्शित करती है। 1983 से शृंखलाबद्ध करके शृंखला सूचकांक बनाइये—
The following table gives the wholesale prices of three commodity-groups. Construct chain base index numbers chained to 1983—

Group	1983	1984	1985	1986	1987
I	2	3	5	7	8
II	8	10	12	14	18
III	4	5	7	9	19

[B. Com., Meerut, 1993]

[शृंखला मूल्यानुपात : 100, 133·3, 142·1, 128·2, 125 4 ;
1983 से शृंखलित सूचकांक : 100, 133·3, 189·6, 243·4, 305 2]

19. नीचे दिये हुए स्थिर-आधार सूचकांकों से शृंखला-आधार सूचकांक बनाइये—
From the following fixed base index numbers, construct chain base index numbers—

Year :	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Fixed Base I. No. :	376	392	408	380	392	400

[100, 104·3, 104·1, 93·1, 103 2, 102]

20. नीचे दिये हुए शृंखला-आधार सूचकांकों से स्थिर-आधार सूचकांक निकालिये—
From the chain base index numbers given below, prepare fixed base index numbers—

Year :	1990	1991	1992	1993	1994
Chain Base I. No. :	90	105	102	95	99

[90, 94·5, 96·4, 91·6, 90·7]

21. निम्नांकित शृंखला-आधार सूचकांकों से स्थिर-आधार वाले सूचकांक बनाइये—
From the chain base index numbers given below, prepare fixed base index numbers—

Year :	1945	1946	1947	1948	1949	1950
Chain Base I. No. :	92	102	104	98	103	101

[92, 93·8, 97·6, 95·6, 98·5, 99·5]

22. नीचे दिये शृंखला-आधार सूचकांक से स्थिर-आधार सूचकांक तैयार कीजिये—
From the chain base index numbers given below, prepare fixed base index numbers—

Year :	1971	1972	1973	1974	1975
Index :	110	160	140	200	150

[110, 176, 246, 493, 739]

23. सूचकांकों की निम्न श्रेणी को (*a*) 1991 के आधार पर और (*b*) 1993 आधार-वर्ष पर पुनर्निर्मित कीजिये—
Reconstruct the following series of indices on the base of (*a*) 1991 and (*b*) 1993—

Year :	*1986*	*1987*	*1988*	*1989*	*1990*	*1991*	*1992*	*1993*
Index No. :	120	150	160	180	200	200	210	240

[(*a*) 60, 75, [illegible], 90, 100, 105, 120 ; (*b*) 50, 62·5, 66·7, 75, 83·3, 83·3, 87·5, 100]

24. 1976 में किसी सांख्यिकीय कार्यालय की ओर से 1970 के आधार पर एक उत्पादन सूचकांक प्राप्त किया गया जिसके परिणाम निम्नांकित हैं—
In 1976, a statistical bureau started an index of production based on 1970, with the following results—

Year :	*1970 (Base)*	*1976*	*1985*
Index No :	100	120	200

1986 में उक्त कार्यालय ने 1985 के आधार पर सूचकांक पुनर्निर्मित किया—
In 1986, the bureau reconstructed the index on a plan with base 1985—

Year :	1985 (Base)	1991
Index No. :	100	150

1992 से कार्यालय ने फिर 1991 को आधार-वर्ष मानते हुए सूचकांक का पुनर्निर्माण किया—
In 1992, the bureau again reconstructed the index on yet another plan with the base year 1991—

Year :	1991 (Base)	1993
Index No. :	100	120

तीन श्रेणियों का शिरोबन्धन करते हुए सतत् सूचकांक श्रेणी ज्ञात कीजिए जिसका आधार-वर्ष 1991 हो।
Obtain a continuous series with the base 1991 by splicing the three series.
[33·3, 40, 66·7, 100, 120]

25. निम्नलिखित सारणी एक अध्यापक का औसत मासिक वेतन और गत वर्षों के मूल्यों के सामान्य सूचकांक प्रस्तुत करती है। वास्तविक वेतन में परिवर्तन प्रकट करने वाले सूचकांक (आधार-वर्ष 1985) बनाइये—
The following table presents the *average monthly salary of a teacher* and simple price-indices for the last 9 years. Find the real average monthly salary index with 1985 as base—

Year :	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Income (Rs).	360	420	500	550	600	640	680	720	750
Price Index :	100	104	115	160	250	290	300	320	330

[B. Com., Raj., 1994]

[100, 112·2, 120·8, 95·5, 59·5, 61·3, 63, 62·5, 63·1]

26. आय और जीवन निर्वाह-सूचकांकों के निम्न प्रदत्त समंकों से परिगणित कीजिये (i) वास्तविक आय, (ii) 1976 आधार वर्ष लेते हुए वास्तविक आय के सूचकांक—

Data relating to income and cost of living index numbers are given below. Calculate (i) real income, (ii) index-number of real income with 1976 as base—

वर्ष (Year) :	1976	1977	1978	1979	1980	1981
आय (Income Rs.) :	1200	1250	1400	1475	1500	1650
जीवन निर्वाह सूचकांक (Cost of Living Indices) :	100	110	112	120	125	130

[M. Com., Raj., 1982]

[(i) 1200, 1136·4, 1250, 1229·2, 1200, 1269·2; (ii) 100, 94·7, 104·2, 102 4, 100, 105·8]

27. निम्न सारणी में एक औसत भारतीय मजदूर के पारिवारिक बजट से सम्बन्धित वर्ग-सूचकांक, और उनके भार दिये गये हैं। उपभोक्ता मूल्य-सूचकांक ज्ञात कीजिए—

The following are the group index numbers and the group weights of an average working class family's budget. Construct the Consumer Price Index Number—

Group	*Food*	*Fuel and Lighting*	*Clothing*	*Rent*	*Miscellaneous*
I. No.	352	220	230	160	190
Weight	48	10	8	12	15

[276·4] [B. Com., Delhi, 1991

28. एक जीवन निर्वाह सूचकांक की रचना में निम्नांकित वर्ग-सूचकांक ज्ञात हुए। भारांकित गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करते हुए जीवन निर्वाह सूचकांक का परिकलन कीजिये—

In the construction of a certain cost of living index number, the following group index numbers were found. Calculate the Cost of Living Index Number by using the weighted geometric mean—

वर्ग (Groups)	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
वर्ग-सूचकांक (Group Index)	352	200	230	160	190
भार (Weight)	50	10	10	15	15

[258 2] [B. Com. (H), Delhi, 19..

29. निम्नलिखित मूल्यानुपातों की सहायता से 1991 को आधार-वर्ष मानते हुए 1992 और 1993 के लिए व्यय सूचकांकों की रचना कीजिए। भोजन, किराया, वस्त्र, ईंधन व प्रकाश तथा विविध वर्गों के लिए भार क्रमश: 60, 16, 12, 8 और 4 हैं।

With the help of following price relatives and taking 1981 as base, construct consumer price index numbers for 1992 and 1993. Weights assigned to Food, Rent Clothing, Fuel and Lighting and Miscellaneous groups are 60, 16, 12, 8 and 4 respectively—

Year	*Food*	*Rent*	*Clothing*	*Fuel and Light*	*Miscellaneous*
1991	100	100	100	100	100
1992	107	105	108	101	109
1993	108	106	110	104	104

[1992—106·12, 1993—107·44]

30. किसी नगर के श्रमिक-वर्ग के जीवन-निर्वाह सम्बन्धित निम्नलिखित समंकों से अवधि *A* और *B* के लिए सूचकांक ज्ञात कीजिए—

Calculate index numbers for periods *A* and *B* from the following data relating to cost of living of the working class in a city—

मदें *Item*	भार *Weight*	मद-सूचकांक *Price Index for the Item* *Period A*	*Period B*
Food	48	110	130
Clothing	8	120	125
Fuel and Light	7	110	120
Room Rent	13	100	110
Miscellaneous	14	115	135

अवधि A से अवधि B में 8% मजदूरी-वृद्धि की गई है। क्या यह पर्याप्त है ?

There is a wage increase of 8% from period A to period B. Is it adequate ?

(M Com., Avadh, 1993)

[सूचकांक : A—110·22, B—125·22. वृद्धि अपर्याप्त है, क्योंकि जीवन-निर्वाह व्यय में होने वाली वृद्धि 13·6% है। Increase is inadequate]

31 किसी नगर के श्रमिक वर्ग के जीवन निर्वाह सम्बन्धी निम्नलिखित समकों से 1980 के आधार पर 1990 के कीमत सूचकांक ज्ञात कीजिए—

From the following data relating to cost of living of the working class in a city construct price index numbers for 1980 and 1990.

% Expenses on	*Food Items*	*Rent*	*Clothing*	*Fuel*	*Misc.*
	35%	15%	20%	10%	20%
	Rs.	Rs.	Rs	Rs.	Rs
Price (1980) (Rs)	150	50	100	20	60
Price (1990) (Rs.)	174	60	125	25	90

1980 की तुलना मे 1990 मे जीवन-निर्वाह व्यय मे क्या परिवर्तन हुए है ? 1980 से 1990 में मजदूरी में 20% वृद्धि हुई। क्या यह पर्याप्त है ?

What changes in the cost of living figure of 1990 have taken place as compared to 1980 ? There was a wage increase of 20% from 1980 to 1990. Is it adequate ?

(M. A., Raj., 1994)

[1980—100; 1990—126·1; 26·1% की वृद्धि हुई। अपर्याप्त]

32. निम्नांकित सूचना से (i) समूही व्यय रीति द्वारा, तथा (ii) पारिवारिक बजट रीति द्वारा मार्च 1992 के आधार पर मार्च 1993 और मार्च 1994 के लिए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक परिकलित कीजिए—

From the following information, calculate consumer price index numbera for March 1993 and March 1994 on the base of March 1992 by (i) aggregate expenditure method and (ii) family budget method—

Head of the Expenditure	*Qty. Consumed in March 1992*	*Unit*	*Price (Rs.) Mar. 92*	*Mar. 93*	*Mar. 94*
Wheat	2 Quintals	Quintal	150	225	375
Rice	25 Kgms.	Quintal	300	360	480
Arhar	10 Kgms.	Quintal	240	360	480
Ghee (Vegetable)	10 Kgms.	Kgm.	19·50	23 40	29 25
Oil	0·25 Quintal	Kgm.	6	9	15
Clothing	50 metres	metre	[illegible]	6·75	7·50
Fuel	4 Quintals	Quintal	24	30	36
Rent	1 House	House	60	75	120

[March 1993—130·6, March 1994—185 4]

33. निम्न समंकों से फिशर का आदर्श-सूचकांक परिगणित कीजिए—

From the following data, calculate Fisher's ideal index number—

Article	*Base Year Price*	*Qty.*	*Current Year Price*	*Qty.*
A	6	50	9	55
B	2	100	3	125
C	4	60	6	65
D	10	30	14	25

[147] *[B A, Raj., 1992]*

34. निम्नलिखित समकों से फिशर का आदर्श सूचकांक परिगणित कीजिए—

Calculate Fisher's Ideal Index Number from the following data—

वस्तु Commodity	आधार वर्ष (Base Year) कीमत Price	मात्रा Quantity	चालू वर्ष (Current Year) कीमत Price	मात्रा Quantity
A	12	100	20	120
B	4	200	4	240
C	8	120	12	150
D	20	60	24	50

[M. A., Meerut, 1992]

[फिशर का सूचकांक=137·4]

निम्न समको से फिशर के आदर्श सूचकाक की गणना कीजिए तथा दोनो (समय व तत्त्व) परीक्षण प्रयोग कीजिए।

Calculate Fisher's Ideal Index Number and apply the Time and Factor Reversal tests.

वस्तु Commodity	आधार वर्ष (Base Year) कीमत Price	मात्रा Quantity	प्रचलित वर्ष (Current Year) कीमत Price	मात्रा Quantity
A	10	3	15	3
B	4	15	4	12
C	6	2	6	4
D	8	8	12	6
E	6	4	6	12

[P_{01}=121·1]

[B. A. Hons., Raj., 1993]

36. निम्नांकित समको से आप किस सूचकाक का निर्माण उचित समझते हैं और क्यो ? उस सूचकांक का निर्माण कीजिए—

From the following data, which index number do you consider appropriate to construct and why ? Prepare that index number.

Year	Rice Price	Qty.	Wheat Price	Qty.	Jawar Price	Qty.
1947	9·3	100	6·4	11	5·1	5
1957	4·5	90	3·7	10	2·7	3

[B Com, Meerut, 1992]

[फिशर का सूचकाक—49·1]

37 निम्न सामग्री से एक आदर्श सूचकाक तैयार कीजिए—

From the following information, prepare an ideal index number—

Article	1980 (Base Year) Price per unit	Total Exp.	1990 (Current Year) Total Exp.	Qty. in kg.
	Rs.	Rs.	Rs.	
A	6	300	560	56
B	2	200	240	120
C	4	240	360	60
D	10	300	288	24
E	8	320	432	36

यह भी सिद्ध कीजिए कि फिशर का सूत्र समय उत्क्राम्यता परीक्षण तथा तत्त्व उत्क्राम्यता परीक्षा को संतुष्ट करता है।

Also prove that Fisher's formula satisfies time reversal test and factor reversal test.

[139·8]

[B. Com. (Hons.), Raj., 1994; Ajmer, 1993]

38. निम्न आंकड़ों से, (i) लास्पेयर विधि, (ii) पाशे-रीति, और (iii) बाउले की रीति द्वारा मूल्य-सूचकांक की रचना कीजिए—

From the following data construct price index number by (*i*) Laspeyre's method, (*ii*) Paasche's method, (*iii*) Bowley's method—

	आधार-वर्ष Base Year		प्रचलित वर्ष Current Year	
वस्तु Article	मूल्य Price	मात्रा Quantity	मूल्य Price	मात्रा Quantity
A	2	8	4	6
B	5	10	6	5
C	4	14	5	10
D	2	19	2	13

इन सूचकांको की समीक्षा कीजिए।
Comment upon these index numbers.

[(i) 125, (ii) 126 2, (iii) 125 6]

39. निम्नलिखित समको से (i) लास्पेयर विधि, (ii) पाशे विधि, तथा (iii) फिशर विधि द्वारा सूचकांक ज्ञात कीजिए।

From the following data calculate Index Number by (i) Laspeyre's method, *(ii) Paasche's method and (iii) Fisher's method.*

	आधार वर्ष (*Base Year*)		चालू वर्ष (*Current Year*)	
वस्तु *Commodity*	मात्रा *Qty.*	कीमत *Price*	मात्रा *Qty.*	कीमत *Price*
A	12	10	15	12
B	15	7	20	5
C	24	5	20	9
D	5	16	5	14

(B. Com., Delhi, 1993)

[(i) L 118·82, (ii) P 112·77, (iii) Fisher's Index 115·75]

40 1987 मे थोक मूल्यो का औसत 1986 की तुलना मे 15 1% अधिक था जबकि दोनो वर्षों के मूल्य-सूचकांक (आधार 1980=100) क्रमशः 108·7 और 94·4 थे। यह वृद्धि पिछले तीन वर्षों में क्रमशः 6·1, 1·0 और 2·8 वृद्धियों के बाद हुई जबकि प्रत्येक वर्ष की पिछले वर्ष से तुलना की गई। 1983 में मूल्य-स्तर वही था जो 1982 में था लेकिन यह 1981 की अपेक्षा 2·5% कम था। 1981 में मूल्य 1980 की तुलना मे 12·2% कम थे।

इन समंको से 1980 से 1987 तक प्रत्येक वर्ष का मूल्य-सूचकांक ज्ञात कीजिए।

The average of wholesale prices was higher in 1987 than in 1986 by 15·1%, the index numbers for the two years being 108 7 and 94 4 respectively (1980=100). This increase followed rise of 6 1%, 1·0% and 2·8%, each year being compared with the preceding year. In 1983 prices were the same as in 1982 but 2·5% below 1981. From these data compute the index numbers for each year from 1980 to 1987.

[100, 87·8, 85·6, [illegible] 6, 88, 88 9, 94 4, 108 7]

41. कुछ समको में पाँच मदो—खाद्य-सामग्री, किराया, ईंधन व प्रकाश, वस्त्र तथा विविध—पर आधारित उपभोक्ता मूल्य-सूचकांक 205 परिकलित किया गया। चार मदों के लिए आधार-वर्ष की अपेक्षा वर्तमान वर्ष में मूल्य-वृद्धि प्रतिशत के रूप में निम्न प्रकार दी गई है—

The consumer price index number based on 5 groups—Food, Rent, Fuel and Lighting, Clothing and Miscellaneous—was computed as 205 for a particular [illegible]. The percentage increases in current year as compared to base year for four groups were as follows—

किराया—60, वस्त्र—210, ईंधन व प्रकाश—1[illegible], विविध—130

Rent—60, Clothing—210, Fuel & Lighting—1[illegible], Miscellaneous—[illegible]

यदि विभिन्न मदों के लिए निम्न भार दिए गए हैं तो 'खाद्य-सामग्री' के लिए [illegible]

If the following weights were assigned to various groups [illegible] increase for food group—

खाद्य—60, किराया—16, ईंधन व प्रकाश—8, वस्त्र—12, विविध—4
Food—60, Rent—16, Fuel & Lighting—8, Clothing—12, Miscellaneous—4
[98·3%]

42 दो नगरों, *A* और *B*, में किए गए कर्मचारी-वर्ग पारिवारिक बजट अनुसंधान के अनुसार यह ज्ञात हुआ कि 1985 में 'खाद्य' तथा 'अन्य मदें' पर किया जाने वाला औसत श्रमिक परिवार का व्यय निम्न प्रकार था—

In 1985 in an enquiry of two towns *A* and *B* it was found that the average working class was spending on 'Food' and 'Other Items' as follows—

	Town A	*Town B*
(*i*) खाद्य-पदार्थ (Food)	64%	50%
(*ii*) अन्य मदें (Other Items)	36%	50%

1988 में नगर *A* व नगर *B* के लिए उपभोक्ता मूल्य-सूचकांक (आधार 1985 = 100) क्रमशः 279 और 265 थे। यह ज्ञात है कि श्रमिक-वर्ग द्वारा उपभोग की गई सभी वस्तुओं की कीमतों में दोनों नगरों में समान वृद्धि हुई है। 1988 में (*i*) खाद्य-पदार्थ, और (*ii*) अन्य मदों के सूचकांक ज्ञात कीजिए।

In 1988 the consumer price index stood at 279 for Town *A* and 265 for Town *B* (Base year 1985 = 100). It was known that the rise in the prices of all articles consumed by the working class was the same for *A* and *B*. Calculate the index for (*i*) Food and (*ii*) Other Items for 1988. *[B. Com., Raj., 1989]*

[(i) 315, (ii) 215]

43. निम्न समंक दिए हुए हैं—
Given the data—

	वस्तुएँ Commodities *A*	*B*
p_0	1	1
q_0	10	5
p_1	2	*X*
q_1	5	2

जहाँ पर *p* और *q* क्रमशः कीमत और मात्रा के लिए और उप-संकेत (subscript) समय के लिए प्रयुक्त हुए हैं। यदि लास्पेयर (*L*) और पाशे (*P*) सूचकांकों में निम्नांकित अनुपात हो तो *X* का मान ज्ञात कीजिए—

Where *p* and *q* respectively stand for price and quantity and subscripts stand for time period. Find *X*, if the ratio between Laspeyre's (*L*), and Paasche's (*P*) Index Number is—

$$L : P :: 28 : 27$$

[$X = 4$]

44. मूल्यों में तीव्र वृद्धि के कारण किसी क्षेत्र में श्रमिक-वर्ग का उपभोक्ता मूल्य-सूचकांक एक ही महीने में पिछले महीने के सूचकांक का एक चौथाई (one quarter) बढ़कर 225 हो गया। खाद्य-पदार्थ का सूचकांक 198 से बढ़कर 252 हो गया, वस्त्र का 185 से 205, ईंधन व प्रकाश का 175 से 195 और विविध वर्ग का 138 से बढ़कर 212 हो गया। मकान-किराये का सूचकांक 150 पर यथावत् रहा। वस्त्र, किराया तथा ईंधन व प्रकाश-वर्गों के भार समान हैं। सभी वर्गों के भार ज्ञात कीजिए।

Owing to rapid change in prices, the consumer price index of the working class in a certain area rose in a month by one-quarter of what it was before, to 225. The index of food increased from 198 to 252, that of clothing from 185 to 205, that of fuel and lighting from 175 to 195 and that of miscellaneous group from 138 to 212. The index of rent, however, remained unchanged at 150. It was known that the weights of clothing, rent and fuel and lighting were the same. Find out the exact weight of all the groups. *[I.C.W.A. June, 1990]*

[54, 10, 10, 10, 16]

15

काल-श्रेणी का विश्लेषण

(ANALYSIS OF TIME SERIES)

आधुनिक आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में समय के साथ-साथ अविराम गति से अनेक प्रकार के परिवर्तन दृष्टिगोचर होते हैं। उदाहरणार्थ, यदि हम गत पच्चीस वर्षों में भारत में खाद्यान्न के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों का विश्लेषणात्मक अध्ययन करें तो हम इस निष्कर्ष पर पहुँचेंगे कि उक्त अवधि में मूल्यों में निरन्तर वृद्धि की प्रवृत्ति पायी जाती है परन्तु किसी-किसी वर्ष मूल्य कम भी हुए हैं। इसके अतिरिक्त एक ही वर्ष में फसल कटाई के समय मूल्य कम हो जाते हैं और बोने के समय अधिक हो जाते हैं। कभी-कभी आकस्मिक कारणों (जैसे बाढ़, युद्ध, सूखा आदि) से भी मूल्य अनियमित रूप से बढ़ जाते हैं। काल की गति के साथ-साथ मूल्यों में होने वाले इन विभिन्न दीर्घकालीन एवं अल्पकालीन उच्चावचनों का विधिवत् विश्लेषण किसान, उपभोक्ता, व्यापारी, प्रशासक, आदि सभी वर्गों के व्यक्तियों के लिए आवश्यक और उपयोगी है। प्रस्तुत अध्याय में हम काल-श्रेणी में होने वाले विभिन्न परिवर्तनों का विश्लेषण और उनके मापन की विधियों का अध्ययन करेंगे।

काल-श्रेणी का अर्थ व महत्त्व
(Meaning and Importance)

समय के किसी माप (जैसे वर्ष, माह, दिन आदि) के आधार पर प्रस्तुत समंकों के व्यवस्थित क्रम[1] को काल-श्रेणी, कालान्तर माला (time series) अथवा ऐतिहासिक चर-मूल्य (historical variables) कहते हैं। वर्नर हर्श के शब्दों में, 'समय के क्रमिक बिन्दुओं (अर्थात् इकाइयों) के तत्संवादी उसी चर के मूल्यों का व्यवस्थित अनुक्रम ही काल-श्रेणी कहलाता है।'[2] काल-श्रेणी के अन्तर्गत स्वतन्त्र चर-मूल्य (independent variable) समय के माप को प्रस्तुत करते हैं तथा आश्रित चर-मूल्य (dependent variable) समंकों पर समय के साथ-साथ होने वाले परिवर्तनों के प्रभाव को प्रकट करते हैं। समय के माप का आधार एक वर्ष, माह, सप्ताह, दिन या घण्टा आदि कोई भी हो सकता है। जनगणना-वर्षों में भारत की जनसंख्या, योजना-काल में इस्पात का वार्षिक उत्पादन, प्रचलित मुद्रा की मात्रा के मासिक आँकड़े, अस्पताल में किसी टाइफाइड के रोगी का प्रतिघण्टा तापक्रम, एक प्रक्षेपणास्त्र (missile) की प्रति सेकिण्ड गति आदि काल-श्रेणी के ही उदाहरण हैं।

आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में काल-श्रेणी के अध्ययन का बहुत महत्त्व है। इन क्षेत्रों में अधिकतर समंक काल-श्रेणी के रूप में ही होते हैं। काल-श्रेणी में होने वाले सुदीर्घकालीन तथा

[1] 'A time series consists of data arranged chronologically.'—Croxton and Cowden, *Practical Business Statistics*, p. 417.

[2] 'A time series is a sequence of values of the same variate corresponding to successive points in time.'—Werner Z. Hirsch, *An Introduction to Modern Statistics*, p. 285.

अल्पकालीन उच्चावचनों का अध्ययन अर्थशास्त्री व व्यवसायी के लिए परमावश्यक होता है। भूतकाल में होने वाले विभिन्न प्रकार के परिवर्तनों का विश्लेषण करके ही अर्थशास्त्री एवं व्यवसायी पिछले अनुभव से लाभ उठाकर अपनी वर्तमान नीतियाँ निर्धारित कर सकते हैं। दीर्घकालीन प्रवृत्ति, मौसमी परिवर्तन तथा चक्रीय उच्चावचनों के विश्लेषण द्वारा भावी प्रवृत्तियों व परिवर्तनों का पूर्वानुमान लगाया जा सकता है और इस प्रकार व्यवसायी अपनी क्रियाओं का नियन्त्रण करके भावी जोखिम व हानि से अपने व्यवसाय की सुरक्षा कर सकते हैं। बर्नर हर्श के अनुसार, 'काल-श्रेणी का विश्लेषण करने का एक मुख्य उद्देश्य भावी घटनाओं की गति-विधि का सही अनुमान लगाने के लिए आर्थिक तथ्यों में होने वाले परिवर्तनों को समझना, समझाना व मूल्यांकित करना है।'[1] विभिन्न काल-श्रेणियों के परिवर्तन का तुलनात्मक अध्ययन करके अनेक प्रकार के निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। इस प्रकार, अर्थशास्त्री, व्यवसायी, किसान, उपभोक्ता, योजनाकार, शासक, राजनीतिज्ञ आदि सभी वर्ग के व्यक्तियों के लिए काल-श्रेणी में होने वाले विभिन्न परिवर्तनों का विश्लेषण विशेष रूप से उपयोगी है।

काल-श्रेणी के संघटक (अंग)
(Components of Time Series)

काल-श्रेणी पर अनेक प्रकार के परिवर्तनों का सामूहिक प्रभाव पड़ता है। इन परिवर्तनों को **प्रमुख रूप से** निम्न वर्गों में बाँटा जा सकता है। ये वर्ग काल-श्रेणी के संघटक अंग (components) कहलाते हैं जो निम्न प्रकार हैं—

(क) सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनति (Long Term or Secular Trend)

(ख) *नियमित अल्पकालीन उच्चावचन (Regular Short-Time Oscillations)*—

(1) आर्तव विचरण या मौसमी उच्चावचन (Seasonal Variations),

(2) चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuations),

(ग) अनियमित या दैव उच्चावचन (Irregular or Random Fluctuations) ।

(क) सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनति (Secular Trend)—किसी भी काल-श्रेणी में समय-समय पर विभिन्न उतार-चढ़ाव होते रहते हैं परन्तु दीर्घकाल में उस श्रेणी मे एक ही दिशा में बढ़ने या घटने की सामान्य अन्तर्निहित प्रवृत्ति (underlying tendency) पायी जाती है। उदाहरणार्थ, भारत में खाद्यान्नों के मूल्यों में वर्ष प्रतिवर्ष उतार-चढ़ाव होते रहते हैं, परन्तु यदि हम उनमें होने वाले 1947 से अब तक के परिवर्तनों का अध्ययन करें तो यह बात स्पष्ट हो जायेगी कि अल्पकालीन उच्चावचनों के बावजूद दीर्घकाल में खाद्यान्न मूल्यों मे वृद्धि की ही सामान्य प्रवृत्ति पायी जाती है। इसी प्रकार, 1947 से अब तक भारत में प्रति सहस्र मृत्यु-दर में निरन्तर कमी होती रही है। किसी-किसी वर्ष असामान्य कारणों से मृत्यु-दर बढ़ी भी है परन्तु दीर्घकालीन प्रवृत्ति कमी की ओर ही है। अतः दीर्घकाल में किसी काल-श्रेणी के बढ़ने या घटने की सामान्य मूलभूत प्रवृत्ति को ही सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनति (secular trend) कहते हैं।[2] दूसरे शब्दों में, दीर्घकालिक उपनति वह अनुत्क्रमणीय परिवर्तन (*irreversible movement*) है

[1] 'A main objective in analysing time series is to understand, interpret and evaluate changes in economic phenomena in the hope of most correctly anticipating the course of future events.'—*Ibid.*

[2] 'Trend, also called secular or long-term trend, is the basic tendency (of a series)...to grow or decline over a period of time. The concept of trend does not include short-range oscillations but rather steady movements over a long time.'—Simpson and Kafka, *Basic Statistics*, p. 223.

'By trend, sometimes also called secular trend, we mean the long-run gradual growth or decline in a series...'—Hirsch, *Ibid.*, p. 286.

जो काल-श्रेणी में मूल वृद्धि या ह्रास की प्रवृत्ति का वर्णन करता है और दीर्घकाल तक एक ही दिशा में होता रहता है।

सामान्य प्रवृत्ति सदा एक ही दिशा में होती है—या तो वृद्धि की ओर या ह्रास की ओर। वृद्धि की प्रवृत्ति वृद्धि तत्त्व (growth factor) की उपस्थिति के कारण होती है तथा कमी की ओर प्रवृत्ति ह्रास-तत्त्व (decline factor) के परिणाम-स्वरूप दृष्टिगोचर होती है। एक काल-श्रेणी में ये दोनों प्रवृत्तियाँ एक साथ प्रकट नहीं हो सकतीं। इसके अतिरिक्त, प्रवृत्ति के अन्तर्गत वृद्धि या कमी एकदम आकस्मिक रूप से न होकर धीरे-धीरे क्रमिक गति से होती है। अधिकतर, जनसंख्या वृद्धि, उत्पादन-तन्त्र व प्रणाली में सुधार, पूँजी-सचय, व्यावसायिक संगठन में सुधार, माँग-वृद्धि व सरकारी हस्तक्षेप आदि कारणों से ही आर्थिक काल-श्रेणी में सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति प्रकट होती है।

(ख) नियमित अल्पकालीन उच्चावचन (Regular Short-Time Oscillations)—काल-श्रेणी में अल्पकाल में जो उतार-चढ़ाव होते रहते हैं उन्हें अल्पकालीन उच्चावचन कहते हैं। ये परिवर्तन दोनों दिशाओं में होते रहते हैं। अल्पकालिक परिवर्तन नियमित या नियतकालिक (periodic) हो सकते हैं अथवा अनियमित। नियत कालक्रम के अनुसार आवर्तित होने वाले उतार-चढ़ाव नियतकालिक या नियमित अल्पकालीन उच्चावचन कहलाते हैं। ये आर्तव विचरण या चक्रीय उच्चावचन के रूप में हो सकते हैं।

(1) आर्तव या मौसमी विचरण (Seasonal Variations)—काल-श्रेणी में एक ही वर्ष के अन्दर जलवायु (climate) अथवा रीति-रिवाज (custom) में परिवर्तनों के कारण होने वाले नियमित तथा आवर्तक अल्पकालीन उतार-चढ़ाव आर्तव या ऋतुकालिक विचरण या मौसमी परिवर्तन कहलाते हैं।[1] आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्र में होने वाले अधिकांश अल्पकालिक परिवर्तन इसी प्रकार के होते हैं। खाद्यान्नों के मूल्य फसल कटने पर कम होते हैं और बोने के समय अधिक रहते हैं। जाड़ों में ऊनी वस्त्र के दाम बढ़ जाते हैं और गर्मी में कम हो जाते हैं। ग्रीष्म ऋतु में ज्यों-ज्यों तापमान बढ़ता जाता है बर्फ का मूल्य भी बढ़ता जाता है तथा गर्मी कम होने पर वह कम हो जाता है। आवश्यक वस्तुओं की बिक्री की मात्रा माह के प्रथम सप्ताह में सर्वाधिक होती है तथा अन्तिम सप्ताह में सबसे कम। भारत में मई-जून में विवाह के मौसम के कारण सोना-चाँदी, आभूषण, वस्त्र, बर्तन आदि के दाम बढ़ जाते हैं। इस प्रकार उत्पादन, उपभोग, वस्तुओं के मूल्य, ब्याज की दरें आदि सभी में वर्ष प्रतिवर्ष ऋतुनिष्ठ कारणों (seasonal factors) के फलस्वरूप घट-बढ़ होती रहती है। अतः आर्तव विचरण अधिकतर एक वर्ष के विभिन्न महीनों व सप्ताहों में दृष्टिगोचर होते हैं,[2] इनकी प्रति वर्ष उसी प्रकार पुनरावृत्ति होती रहती है, परिवर्तन उतार-चढ़ाव के रूप में अर्थात् दोनों दिशाओं में होते हैं और इन पर मौसम तथा रीति-रिवाज का प्रभाव पड़ता है। आर्तव-विचरण एक ही काल-क्रम के अनुसार होते हैं अतः भावी मौसमी उच्चावचनों का काफी यथार्थता से पूर्वानुमान लगाया जा सकता है।

(2) चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuations)—चक्रीय उच्चावचन भी आर्तव विचरणों की भाँति नियतकालिक होते हैं परन्तु उनकी अवधि एक वर्ष से अधिक होती है। ये व्यापार-चक्रों (business cycles) के कारण उत्पन्न होते हैं। बर्न्स व मिचेल के अनुसार अनेक आर्थिक क्रियाओं में लगभग एक साथ आने वाली प्रसार और संकुचन की क्रमिक तरंगों को ही व्यावसायिक-चक्र कहा जाता है।[3] प्रत्येक चक्रीय उच्चावचन के चार चरण (phases) होते हैं—

[1] 'Seasonal variations are the recurrent pattern of change within the period that results from the operation of forces connected with climate or custom at different times of the period.'—Hirsch, *Ibid.*, p. 288.

'*Seasonal variation* is that part of fluctuation which recurs annually with the seasons.' Croxton [illegible]

p. 298.

which has a duration of one

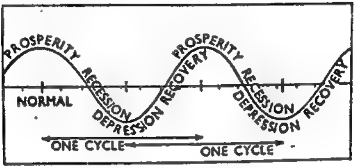
. 447.

litchell as successive waves

in many economic

[illegible] *Business Statistics*, p. 309.

समृद्धि (prosperity), प्रतिसार (recession), अवसाद (depression) तथा पुनरुत्थान (recovery) । समृद्धि की अवस्था में व्यावसायिक क्रियाएँ (उत्पादन, मूल्य, रोजगार, विक्री आदि) चरमोत्कर्ष पर पहुँच जाती हैं फिर अवनति या प्रतिसार आरम्भ होता है और धीरे-धीरे व्यावसायिक क्रियाओं में अवनति की निम्नतम सीमा आ जाती है । यह अवसाद का चरण है । इसके बाद फिर अवसाद से समृद्धि की ओर प्रगति होती है जिसे पुनरोद्धार या पुनरुत्थान कहते हैं । निम्न चित्र में इन चरणों को प्रदर्शित किया गया है—



चित्र 1—व्यापार-चक्र के चरण

चक्रीय उच्चावचनों में परिवर्तनो का क्रम यही रहता है परन्तु प्रत्येक चक्र तथा उसके चरणो की अवधि भिन्न होती है । अनुमानतः 3 से 10 वर्षों मे व्यवसाय-चक्र पूर्ण होता है ।[1] फिर उसकी पुनरावृत्ति होती है । इसी प्रकार यह क्रम चलता रहता है ।

आर्तव विचरण और चक्रीय उच्चावचनों मे काफी अन्तर है । प्रथम, आर्तव विचरण अधिकतर एक वर्ष में पूरे होते हैं जबकि चक्रीय उच्चावचनों की आवर्तिता सामान्यतया 3 से 10 वर्ष तक होती है । दूसरे, आर्तव विचरणों में अवधि और क्रम दोनों मे नियमितता होती है, चक्रीय उच्चावचनों का क्रम—समृद्धि, प्रतिसार, अवसाद व पुनरुत्थान—तो निश्चित रहता है परन्तु प्रत्येक चरण की अवधि में परिवर्तन होते रहते हैं । तीसरे, आर्तव विचरण मौसम व रीति-रिवाज के परिणाम हैं परन्तु चक्रीय विचरण अन्य कारण से उत्पन्न होते हैं जिनमें प्रमुख हैं—मुद्रा का प्रसार अथवा सकुचन, विक्रय में वृद्धि या कमी, एक निश्चित सीमा से अधिक उत्पादन, मनोवैज्ञानिक तथा अन्य विशिष्ट कारण । चौथे, मौसमी परिवर्तन प्रत्येक व्यवसाय में अलग-अलग क्रम से प्रकट होते हैं जबकि चक्रीय परिवर्तन प्रत्येक व्यवसाय मे अलग-अलग क्रम से प्रकट होते हैं जबकि चक्रीय परिवर्तन लगभग सभी व्यवसायों को समान रूप से प्रभावित करते हैं । अन्त मे, दोनों प्रकार के उच्चावचनों के मापन और विश्लेषण की विधियाँ भिन्न हैं ।

(ग) अनियमित या दैव उच्चावचन (Irregular or Random Fluctuations)—उपर्युक्त नियमित उच्चावचनों के अतिरिक्त कभी-कभी कालश्रेणी में अनियमित या दैव उच्चावचन भी दृष्टिगोचर होते हैं । ऐसे अल्पकालिक उच्चावचन जो आकस्मिक कारणों (जैसे युद्ध, भूकम्प, बाढ़, चुनाव, औद्योगिक संघर्ष आदि) से अनियमित रूप से कभी-कभी उत्पन्न होते हैं, अनियमित, क्रमहीन या दैव उच्चावचन कहलाते हैं । ये किसी सुनिश्चित रूप से या निश्चित क्रम से नही होते वरन् अकस्मात् दैवयोग से होते हैं । अतः इनका मापन तथा पूर्वानुमान लगभग असम्भव है । कभी-कभी ये इतने अधिक प्रभावशाली होते हैं कि इनसे चक्रीय उच्चावचनों का उदय होता है । भारत में 1972 तथा 1973 में लगभग सभी वस्तुओं के मूल्यों मे अत्यन्त तीव्र वृद्धि के अनेक कारणो में से 1971 में बंगलादेश से लगभग 1 करोड़ शरणार्थियों का आगमन, दिसम्बर 1971 का भारत-पाकिस्तान युद्ध, अनेक स्थानों में निरन्तर सूखा, 1973 के अरब-इजरायल युद्ध के कारण पैट्रोलियम पदार्थों मे होने वाली कमी इत्यादि आकस्मिक एवं अनियमित कारण है ।

[1] 'In duration business cycles vary from more than one year to ten or twelve years...
—Burns and Mitchell.

काल-श्रेणी का विश्लेषण या विघटन
(Analysis or Decomposition of Time Series)

यह स्पष्ट है कि किसी काल-श्रेणी के मूल समंक (Original data or O), प्रवृत्ति (Trend or T), आर्तव विचरण (Seasonal Variations or S), चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuations or C) तथा अनियमित परिवर्तन (Irregular Fluctuations or I) द्वारा सामूहिक रूप से प्रभावित होते हैं। अतः काल-श्रेणी इन चारों संघटक अंगो (Component Parts) का सम्मिश्रण है। इन चार संघटक अंगों को अलग-अलग करके उनका अध्ययन व मापन करना ही काल-श्रेणी का विश्लेषण या विघटन कहलाता है।[1]

काल-श्रेणी निदर्श (Time Series Models)—काल-श्रेणी के चारों संघटकों का विश्लेषणक मापन निम्न दो निदर्शों पर आधारित है—

(क) योज्य निदर्श (Additive Model), तथा

(ख) गुणनात्मक निदर्श (Multiplicative Model)।

(क) **योज्य निदर्श** (Additive Model) की आधारभूत मान्यता यह है कि मूल-समंक (O) चारों संघटक अंगो का योग ($T+S+C+I$) होता है। सूत्रानुसार—

$$O=T+S+C+I$$

इस मान्यता के आधार पर दीर्घकालिक उपनति (T) को मूल-समंकों में से घटाकर ($O-T$) अल्पकालिक उच्चावचनों ($S+C+I$) का पृथक्करण किया जा सकता है—

$$O-T=S+C+I$$

अल्पकालीन उच्चावचनों में से मौसमी विचरणों (S) को घटाकर चक्रीय व अनियमित परिवर्तनों ($C+I$) का अनुमान लगाया जा सकता है—

$$O-T-S=C+I$$

इसी प्रकार अल्पकालिक उच्चावचनों ($O-T$) में से मौसमी और चक्रीय उच्चावचनों ($S+C$) को घटाकर अनियमित परिवर्तन (I) ज्ञात किये जा सकते हैं—

$$O-T-(S+C)=O-T-S-C=I$$

योज्य निदर्श में सभी संघटकों को अवशिष्ट अंगों (residual components) के रूप में माना जाता है।

(ख) **गुणनात्मक निदर्श** (Multiplicative Model)—काल-श्रेणी के गुणनात्मक निदर्श में मूल-समको (O) को विभिन्न संघटकों का गुणनफल ($T\times S\times C\times I$) माना जाता है। सूत्र रूप में—

$$O=T\times S\times C\times I=TSCI$$

यह परम्परागत प्रतिरूप है जिसका प्रयोग अल्पकालिक विचरणों के मापन व पृथक्करण में किया जाता है। उदाहरणार्थ—

$$\frac{O}{T}=S\times C\times I=SCI;\quad \frac{O}{T\times C}=S\times I;\quad \frac{O}{T\times S\times C}=I$$

गुणनात्मक निदर्श में उपनति मूल समंको की इकाई में व्यक्त की जाती है। शेष संघटक अनुपात के रूप में प्रस्तुत किये जाते हैं।

अन्तर—योगशील व गुणनात्मक निदर्शों में बहुत अन्तर है। प्रथम, योज्य निदर्श के अन्तर्गत मूलसमक सभी संघटकों का योग होते हैं जबकि गुणनात्मक प्रतिरूप में वे उनका गुणनफल माने जाते हैं। दूसरे, योज्य निदर्श में संघटक मूलसमंकों की इकाई मे व्यक्त किये जाते हैं जबकि गुणनात्मक निदर्श में केवल प्रवृत्ति मूलसमंकों की इकाई मे होती है शेष संघटक प्रवृत्ति के अनुपात

[1] 'The analysis of time series consists in an investigation of T, C, S and I and is often referred to as a *decomposition* of a time series into its basic component
—Spiegel, *Theory and Problems of Statistics*, p. 285.

होते हैं। तीसरे, योज्य निदर्श में विभिन्न अंग एक दूसरे से प्रभावित नही माने जाते। इसके विपरीत, गुणनात्मक निदर्श के अनुसार उनमें परस्पर आश्रितता व बीजगणितीय सम्बन्ध माना जाता है। *सावधिक अल्पकालीन विचरण, दीर्घकालिक उपनति के फलन* (function) माने जाते हैं। चौथे, योगात्मक निदर्श में उपनति के बढ़ने या घटने पर भी ऋतुनिष्ठ विचरण अधिकतर स्थिर रहते हैं जबकि गुणनात्मक निदर्श के अन्तर्गत मौसमी परिवर्तन का उपनति पर अनुपात स्थिर रहता है। *अधिकांश आर्थिक काल-श्रेणियों के लिए गुणनात्मक निदर्श ही उपयुक्त होता है* अतः इसी का सर्वाधिक प्रयोग होता है।

काल-श्रेणी के विश्लेषण में उक्त निदर्शों के आधार पर विभिन्न संघटक अंगों का पृथक्करण किया जाता है।

काल-श्रेणी को प्रभावित करने,वाली परिस्थितियाँ पूर्णरूपेण सांख्यिक के नियन्त्रण में नहीं होती अतः वह भौतिक-शास्त्री की भाँति प्रयोगात्मक रीति (experimental method) का अनुसरण करके काल-श्रेणी के संघटक का विश्लेषण नही कर सकता। उसे अन्य प्रकार के परिवर्तनो को स्थिर मानते हुए (other things remaining constant) विचाराधीन परिवर्तन का मापन व पृथक्करण करना पड़ता है। अतः काल-श्रेणी-विश्लेषण की रीतियाँ अत्यधिक परिशुद्ध नही कही जा सकती। फिर भी काल-श्रेणी के विश्लेषण का अर्थशास्त्री व व्यवसायी के लिए सर्वोपरि महत्व है। नीस्वैंगर[1] के मतानुसार काल-श्रेणी-विश्लेषण से निम्न उद्देश्यों की प्राप्ति होती है—

(i) भविष्य के लिए योजना बनाने का कार्य सुगम हो जाता है,

(ii) व्यावसायिक संस्था या उद्योग की सांख्यिकीय स्थिति का माप सम्भव हो जाता है।

(iii) एक उपक्रम के अन्तर्गत अनुभव के आधार पर अनुसूचीयन व नियन्त्रण (schedules and controls) स्थापित किये जा सकते हैं।

(iv) अवांछनीय विचरणों के प्रभाव को कम करने की योजनायें अधिक बुद्धिमत्ता से बनाई और अपनाई जा सकती हैं।

(v) व्यवसायी व अर्थशास्त्री आर्थिक घटनाक्रम की गति-विधि को भली-भाँति समझकर, निर्वचित तथा मूल्यांकित कर सकते हैं।

प्रारम्भिक समायोजन (Preliminary Adjustment)—काल-श्रेणी का विश्लेषण करने से पूर्व मूल-समंकों में तुलनायोग्यता व सजातीयता लाने के लिए कभी-कभी निम्नलिखित समायोजन करने आवश्यक हो जाते हैं—

(i) **तिथि-सम्बन्धी-विचरण के लिए** (For Calendar Variation)—ग्रेगोरी कलैंडर (Gregorian calendar) के अनुसार 12 महीनो के दिनो की संख्या में भिन्नता होती है जिसके फलस्वरूप फरवरी का उत्पादन जनवरी या मार्च के उत्पादन से कम हो सकता है। इसी प्रकार विशेष छुट्टियों के कारण भी काल-श्रेणी मे उतार-चढ़ाव आ सकते हैं। इस प्रकार के परिवर्तन तिथिपत्री विचरण कहलाते हैं। इनके लिए समायोजन का यह तरीका अपनाया जाता है कि कुल माह के समंकों के जोड़ को उस माह के दिनो से भाग देकर प्रतिदिन का माध्य मूल्य निकाल लिया जाता है फिर उसे 30·4167 [365 ÷ 12] या 30·5 [366 ÷ 12] से गुणा करके मासिक मूल्य प्राप्त कर लिए जाते हैं। इसी प्रकार साप्ताहिक विचरणों के लिए *समायोजन कर लिया जाता है।*

(ii) **मूल्य परिवर्तनों के लिए अपस्फीति** (Deflation for Price Changes)—मूल्य-परिवर्तनो से प्रभावित काल-समंको को उपयुक्त मूल्य-सूचकांक से *भाग देकर वास्तविक समंक ज्ञात* कर लिए जाते हैं।

(iii) **जनसंख्या परिवर्तनों के लिए समायोजन** (Adjustment for Population Changes)—जनसख्या के आकार में परिवर्तन होते रहने से जो काल-श्रेणी समंकों पर प्रभाव पड़ता है उसका समायोजन करने के लिए कुल समंक का *जनसंख्या से भाग देकर प्रति व्यक्ति* उत्पादन या मूल्य आदि ज्ञात कर लेना आवश्यक है।

[1] See Neiswanger, *Elementary Statistical Methods*, p. 484.

उपर्युक्त समायोजनों के अतिरिक्त परिभाषा, इकाई, सकलन-रीति आदि मे भी सजातीयता लाने के लिए मूल-समंकों का आवश्यक सम्पादन कर लेना चाहिए। तत्पश्चात् ही काल-श्रेणी के विभिन्न सघटक अंगों का विश्लेषण करना उचित है।

सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का मापन
(Measurement of Secular Trend)

काल-श्रेणी मे सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनति का माप करने के तीन प्रमुख कारण हैं—प्रथम, प्रवृत्ति-विश्लेषण से एक श्रेणी की भूतकालीन वृद्धि या ह्रास का पता चलता है। प्रवृत्ति-मापन से एक ही उद्योग के अनेक सार्थों तथा अनेक उद्योगों की भूतकालीन प्रगति का तुलनात्मक अध्ययन हो जाता है। दूसरे, प्रवृत्ति-विश्लेषण से भावी पूर्वानुमान लगाये जा सकते हैं जो व्यावसायिक नियोजन मे सहायक होते हैं। यदि उपनति पर प्रभाव डालने वाली परिस्थितियों में कोई आमूल परिवर्तन न हों तो भावी प्रवृत्ति के अनुमान यथोचित रूप से परिशुद्ध होते हैं। तीसरे, प्रवृत्ति का विश्लेषण करके काल-श्रेणी को उसके प्रभाव से मुक्त किया जा सकता है जिससे अन्य प्रकार के अल्पकालिक उच्चावचनों का अलग से अध्ययन और विश्लेषण किया जा सके।

रीतियाँ—प्रवृत्ति का माप निम्न रीतियो द्वारा किया जा सकता है—

(1) मुक्त-हस्त वक्र रीति (Freehand Curve Method),
(2) अर्द्ध-मध्यक रीति (Semi-Averages Method),
(3) चल-माध्य रीति (Moving Averages Method),
(4) न्यूनतम वर्ग रीति (Method of Least Squares)।

(1) **मुक्त-हस्त वक्र रीति (Freehand Curve Method)**—इस रीति में मूल काल-श्रेणी को बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित करके एक कालिक-चित्र (historigram) बना लिया जाता है तथा फिर समकों के उतार-चढ़ाव को ध्यान मे रखते हुए उच्चावचनो के लगभग बीच से गुजरता हुआ एक सर्वोपयुक्त सरलित वक्र (smoothed curve) खींचा जाता है। यही मुक्त-हस्त प्रवृत्ति वक्र है जिसके द्वारा अल्पकालिक उच्चावचनों को दूर करके काल-समंकों की सुदीर्घकालीन उपनति नष्ट हो जाती है। इस रीति को निरीक्षण द्वारा वक्र-अन्वायोजन (curve fitting by inspection) भी कहते हैं।

गुण-दोष—यह रीति सरलतम है। वक्र शीघ्रता से केवल निरीक्षण द्वारा ही खींच लिया जाता है। इसके लिए जटिल गणितीय क्रिया का प्रयोग आवश्यक नहीं है। इस रीति में सबसे महत्त्वपूर्ण दोष यह है कि यह रीति सांख्यिक के पक्षपात की भावना से पूर्ण रूप से प्रभावित होती है। वस्तुतः यह एक व्यक्तिनिष्ठ रीति (subjective method) है। इसमें सुनिश्चितता का तत्त्व नहीं होता। एक ही परिस्थिति में विभिन्न व्यक्ति भिन्न प्रकार से मूल वक्र को सरलित करेंगे। गणितीय आधार न होने के कारण इस रीति में परिशुद्धता का अभाव होता है। इससे तो प्रवृत्ति का अनुमान मात्र लगाया जा सकता है। इन कारणो से इस रीति का प्रयोग बहुत कम होता है।

(2) **अर्द्ध-मध्यक रीति (Semi-Averages Method)**—अर्द्ध-मध्यक का अर्थ है श्रेणी के प्रत्येक आधे भाग (पूर्वार्द्ध तथा उत्तरार्द्ध) के मूल्यो का समान्तर माध्य।[1] इस रीति के अनुसार सम्पूर्ण काल-श्रेणी को दो बराबर भागो में बाँटकर तथा प्रत्येक भाग के समकों का समान्तर माध्य निकालकर उस भाग के मध्यका समय-बिन्दु (median point of time) के सामने रखा जाता है। फिर निर्धारित दोनों माध्यो को रेखाचित्र पर दोनों भागों के मध्यका-बिन्दुओं के ऊपर प्रांकित करके मिला दिया जाता है। उपलब्ध सरल रेखा ही अर्द्ध-मध्यक रीति द्वारा प्राप्त प्रवृत्ति-रेखा (trend line) है। यदि मूल्यों की संख्या अयुग्म (odd) हो तो बिल्कुल बीच के समंक को छोड़ दिया जाता है शेष क्रिया पूर्ववत् रहती है। उदाहरणार्थ, अर्द्ध-मध्यक रीति द्वारा 15 वर्षों के मूल्यों की उपनति ज्ञात करने के लिए आठवें (केन्द्रीय) मूल्य को छोड़कर पहले 7 और बाद के 7 मूल्यों के माध्यों को रेखाचित्र पर अंकित करके उपनति-रेखा खींच ली जायेगी।

---

[1] 'Semi-average means *average of semis* or *average of halves*, that is, the average of each half of the series.'—Simpson and Kafka, *Basic Statistics*, *f. n.* p. 238.

उदाहरण (Illustration) 1—

किसी फर्म के 11 वर्षों के निम्नलिखित लाभों से अर्द्ध-मध्यक रीति द्वारा सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए तथा उपनति-बिन्दुरेख से 1975 के लाभ का पूर्वानुमान लगाइये—

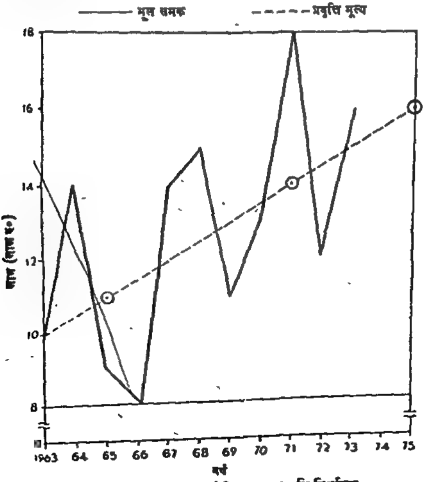
वर्ष	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
लाभ (लाख रु०)	10	14	9	8	14	15	11	13	18	12	16

हल (Solution)—

वर्षों की संख्या विषम (11) है, अतः बीच के वर्ष (1968) के मूल्य को छोड़कर प्रथम 5 और बाद के 5 मूल्यों के आधार पर अलग-अलग दो समान्तर माध्य ज्ञात किये जायेंगे और उन्हें इन अवधियों के मध्यका-वर्षों (1965 और 1971) पर अंकित किया जायगा—

वर्ष	लाभ (लाख रु०)	योग	अर्द्ध-मध्यक	मध्यका-वर्ष
1963	10			
1964	14			
1965	9	55÷5=	11	1965
1966	8			
1967	14			
1968	15	×		
1969	11			
1970	13			
1971	18	70÷5=	14	1971
1972	12			
1973	16			

1975 के लाभ का पूर्वानुमानित मूल्य 16 लाख रु० है।



चित्र 2—अर्द्ध-मध्यक रीति द्वारा उपनति-निर्धारण

उदाहरण (Illustration) 2—

एक कारखाने में 1973 में मासिक उत्पादन निम्न प्रकार रहा—

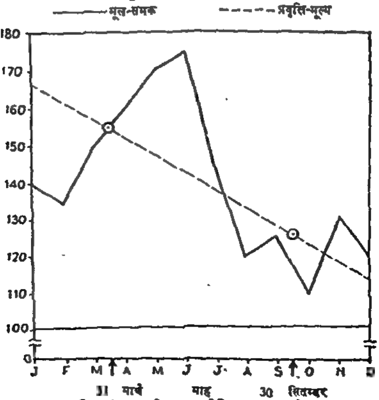
माह	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
उत्पादन (टन)	140	135	150	160	170	175	145	120	125	110	130	120

अर्द्ध-मध्यक रीति का प्रयोग करके दीर्घकालिक उपनति ज्ञात कीजिए और मूल समंकों तथा उपनति का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन कीजिए।

हल (Solution)—

पूरी श्रेणी को 6–6 महीनों के दो बराबर भागों में बाँटकर प्रत्येक भाग का माध्य ज्ञात किया जायगा। इस प्रकार प्राप्त दोनों अर्द्ध-माध्यों में से प्रथम को मध्यका-बिन्दु $\left(\frac{6+1}{2}=3{\cdot}5\right)$ अर्थात् मार्च और अप्रैल के मध्य में और दूसरे को इसी प्रकार सितम्बर व अक्टूबर के बीच में अंकित किया जायगा।

माह	उत्पादन (टन)	योग	अर्द्ध-मध्यक	मध्यका-बिन्दु
जनवरी	140			
फरवरी	135			
मार्च	150	930 ÷ 6 =	155	→ मार्च/अप्रैल
अप्रैल	160			
मई	170			
जून	175			
जौलाई	145			
अगस्त	120			
सितम्बर	125	750 ÷ 6 =	125	→ सितम्बर/अक्टूबर
अक्टूबर	110			
नवम्बर	130			
दिसम्बर	120			



चित्र 3—अर्द्ध-मध्यक रीति द्वारा उपनति

गुण-दोष—प्रवृत्ति-विश्लेपण की यह रीति भी सरल है और सांख्यिक की अभिनति से मुक्त है। इसे अपनाने में समय और श्रम की भी बचत होती है। परन्तु, यह रीति उसी दशा मे उपयुक्त है जिसमें प्रवृत्ति रेखीय या लगभग रेखीय (approximately linear) हो। दूसरे, यदि चरम मूल्यों की उपस्थिति के कारण समान्तर माध्य श्रेणी का समुचित प्रतिनिधित्व नहीं करता तो इस रीति द्वारा प्रदर्शित प्रवृत्ति भी अवास्तविक होगी। फिर भी यह रीति प्रथम रीति से उत्तम है।

(3) **चल-माध्य रीति (Method of Moving Averages)**—दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए अधिकतर 'चल माध्य' रीति का प्रयोग किया जाता है। चल माध्य या गतिमान माध्य काल-श्रेणी के समंकों के विशिष्ट समान्तर माध्य हैं जिनका, श्रेणी के आरम्भ से अन्त तक पूर्व-निश्चित अवधि (जैसे 3, 5, 7 या 9 वर्ष) के आधार पर परिगणन किया जाता है। तीन-वर्षीय चल-माध्यों की गणना-विधि अध्याय 8 मे (देखिए पृष्ठ 189) स्पष्ट की गई है। इसी प्रकार, पंचवर्षीय चल-माध्य निकालने के लिए पहले, प्रथम पाँच वर्षों के मूल्यों का समान्तर माध्य ज्ञात करके उसे मध्यक-वर्ष (तीसरा) के सामने लिख देते हैं फिर पहले वर्ष को छोड़कर और छठे वर्ष के मूल्य को जोड़कर माध्य को चौथे वर्ष के सम्मुख रखा जाता है और अन्तिम वर्ष तक यही क्रिया प्रयुक्त की जाती है। आरम्भ से अन्त तक अवधि 5 वर्ष ही रहेगी। प्रथम दो और अन्तिम दो वर्षों के स्थान रिक्त रहेंगे अर्थात् उनके सामने चल-माध्य नहीं होंगे।

आवर्तिता-निर्धारण (Determination of Periodicity)—चल-माध्य रीति का प्रयोग करने के लिए उपयुक्त अवधि का निर्धारण अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है। चल-माध्य-अवधि ज्ञात करने के लिए कालिक-चित्र की आवर्तिता या कालक्रम का अध्ययन किया जाता है। मूल-वक्र मे अनेक चक्रीय तरंगें (cyclical waves) होती हैं जिनके शिखरों (successive crests) के पारस्परिक अन्तर निकालकर उन अन्तरों का माध्य ज्ञात कर लिया जाता है। यही उपयुक्त अवधि मानी जाती है। शिखरो के स्थान पर तरंगों के क्रमिक निम्नतम बिन्दुओं (troughs) के अन्तरों का माध्य प्रयोग किया जा सकता है। यदि चल-माध्य की अवधि चक्र के अनुरूप है तो उपनति के अतिरिक्त लगभग सभी प्रकार के अल्पकालिक उच्चावचन दूर हो जाते हैं और एक सरलित प्रवृत्ति (smoothed trend) दृष्टिगोचर होने लगती है।

उदाहरण (Illustration) 3—

नीचे एक देश में कुछ वर्षों के वर्षा के आँकड़े दिये गये हैं—

इन्च : 100, 94, 81, 78, 102, 147, 158, 118, 96, 101,
103, 91, 89, 103, 121, 123, 118, 117, 137, 151,

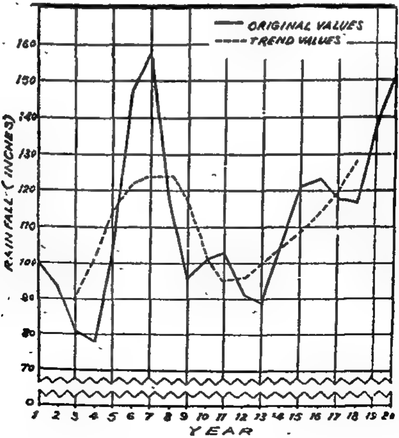
उक्त समंकों का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन कीजिए और पंचवर्षीय चलमाध्य द्वारा उपनति मूल्य भी दर्शाइए (दशमलव बिन्दु छोड़ दीजिए)।

हल (Solution) :

पंचवर्षीय चल माध्यों का परिगणन (उपसादित)

वर्ष	वर्षा	पंच-वर्षीय चल योग	पंच-वर्षीय चल-माध्य (प्रवृत्ति-मूल्य)
1	100	...	...
2	94	...	...
3	81	455	91
4	78	502	100
5	102	566	113
6	147	603	121
7	158	621	124
8	118	620	124
9	96	576	115
10	101	509	102
11	103	480	96
12	91	487	97
13	89	507	101
14	103	527	105
15	121	554	111
16	123	582	116
17	118	616	123
18	117	646	129
19	137	...	...
20	151	...	...

मूल-समंकों तथा पंचवर्षीय चल-माध्य द्वारा ज्ञात प्रवृत्ति-मूल्यों को रेखाचित्र पर दिखाया जाएगा—



चित्र 4—चलमाध्यों द्वारा उपनति

चलमाध्यों को केन्द्र में लाना (Centering the Moving Averages)—जब चक्र की अवधि युग्म (even) वर्षों, तिमाहियों या महीनों जैसे 4, 6, 8, 10 या 12 आदि के रूप में हो तो चलमाध्यों को केन्द्र में लाना पड़ता है। इसकी प्रक्रिया इस प्रकार है। यदि चारवर्षीय चलमाध्य निकालने हों तो पहले चार मूल्यों के जोड़ को दूसरे और तीसरे वर्ष के बीच में रखा जाएगा फिर अगले जोड़ (दूसरे से पांचवें वर्ष तक) को तीसरे और चौथे वर्ष के बीच में और इसी प्रकार अन्त तक रखा जाएगा। तत्पश्चात्, पहले और दूसरे चारवर्षीय जोड़ों को जोड़कर तीसरे वर्ष के सामने, दूसरे और तीसरे चारवर्षीय जोड़ों के जोड़ को चौथे वर्ष के सामने रखा जाएगा। इस प्रकार से उपलब्ध जोड़ों (आठवर्षीय) को चल-माध्य अवधि के दो गुने (यहाँ पर 8) से क्रमशः भाग देकर चारवर्षीय चल-माध्य निकाले जाएंगे।

उदाहरण (Illustration) 4 :

निम्न समंकों से चारवर्षीय चल माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ष	बैंक समाशोधन (सूचकांक)	वर्ष	बैंक समाशोधन (सूचकांक)
1	52·7	8	87·2
2	79·4	9	79·3
3	76·3	10	103·6
4	66 0	11	97·3
5	68·6	12	92·4
6	93·8	13	100·7
7	104·7		

चार-वर्षीय चलमाध्यों का परिगणन

वर्ष	बैंक समाशोधन	चार वर्षीय चल योग	युग्मों के चल योग	चार वर्षीय चल-माध्य (Col. iv ÷ 8)
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
1	52 7		...	...
2	79·4		...	...
3	76·3 →	274·4 →	564 7	70 6
4	66 0 →	290·3 →	595 0	74·4
5	68 6 →	304·7 →	637·8	79·7
6	98 8 →	333·1 →	687 4	85 9
7	104·7 →	354·3 →	719·3	89 9
8	87 2 →	365 0 →	739·8	92·5
9	79·3 →	374·8 →	742·2	92·8
10	103·6 →	367·4 →	740 0	92 5
11	97·3 →	372 6 →	766 6	95·8
12	92 4 →	394 0	...	...
13	100·7		...	...

चल-माध्यों की कुछ विशेषताएं (Some Characteristics of Moving Averages)—चल-माध्य काल-श्रेणी की सरलित प्रवृत्ति को व्यक्त करते हैं। सामान्यतः इनसे लगभग सभी प्रकार के नियमित व अनियमित अल्पकालिक उच्चावचनों का निरसन (elimination) हो जाता है। प्रवृत्ति-विश्लेषण के सन्दर्भ में चल-माध्यों की निम्नांकित विशेषताएं उल्लेखनीय हैं—

(i) यदि मूल-समंकों में कोई उच्चावचन न हो अर्थात् श्रेणी सरल रेखा के रूप में प्रांकित की जा सके तो उनके चल-माध्य भी बिल्कुल वही होंगे और उन्हें अंकित करने से रेखीय प्रवृत्ति

(linear trend) ही दृष्टिगोचर होगी। दूसरे शब्दों में, मूल समंकों और चलमाध्यो की एक ही सरल रेखा अंकित होगी।

(ii) चल-माध्य वक्ररेखीय प्रवृत्ति (curvi-linear trend) की वक्रता (curvature) को कम कर देते हैं। मूल-समंकों के अवतल वक्र (concave to the base) होने की दशा में चल-माध्य वक्र इससे नीचे होगा और मूलसमंकों के उत्तल वक्र (convex) होने पर वह मूल-वक्र से ऊपर की ओर होगा। चल-माध्य अवधि जितनी लम्बी होगी उसका वक्र मूल-वक्र से उतनी ही अधिक दूर होगा।

(iii) ऐसी अवधि में चल-माध्य, जो नियमित उतार-चढ़ाव वाली श्रेणी के चक्रीय परिवर्तन की अवधि के बिल्कुल बराबर हों या उसके गुणक (multiple) हों, नियतकालिक उच्चावचनो को पूर्ण रूप से निरसित कर देते हैं। अन्य किसी अवधि से चल-माध्यों के आवधिक उच्चावचनों को केवल कम किया जा सकता हैं।

(iv) चल-माध्य अनियमित या दैव उच्चावचनों को पृथक् (isolate) नही कर सकते। वे केवल इन परिवर्तनों को कम कर सकते हैं।

चल-माध्य रीति के लाभ-दोष—प्रवृत्ति ज्ञात करने की यह रीति समझने व प्रयोग करने मे सरल है। इससे परिणाम भी परिशुद्ध प्राप्त होते हैं। यह रीति व्यक्तिनिष्ठ (subjective) नही हैं अतः पक्षपात के अभाव से सर्वथा मुक्त है। स्पष्ट आवधिक उच्चावचनों वाली काल-श्रेणी के लिए यह रीति अत्युत्तम है। इस रीति में लचनशीलता भी है। परन्तु इसमें कुछ महत्त्वपूर्ण दोष भी हैं—प्रथम, चल-माध्यों की उचित अवधि निश्चित करना सरल कार्य नही है। दूसरे, इस रीति का प्रयोग केवल स्पष्ट नियमित परिवर्तनों वाली काल-श्रेणी के लिए ही उपयुक्त है अन्य प्रकार की श्रेणियों के लिए नहीं। तीसरे, इस विधि के अनुसार प्रवृत्ति मापन करने में कुछ आरम्भ के और कुछ (उतने ही) अन्त के उपनति मूल्य स्वतः छूट जाते हैं। उदाहरणार्थ, पंचवर्षीय चल-माध्य निकालने में (Illus. 3) 2 आरम्भ के और 2 अन्त के प्रवृत्ति-मूल्य छूट गए हैं। इस दोष को दूर करने के लिए चल-माध्य वक्र को मुक्तहस्त विधि द्वारा दोनों ओर बढ़ाया जा सकता है या शुरू के रिक्त स्थानो मे प्रथम चल-माध्य को तथा अन्त के रिक्त स्थानों में अन्तिम चल-माध्य को लिखा जा सकता है। परन्तु ये उपाय उपयुक्त नही हैं। चौथे, चल-माध्य समंकों में अनायास ही चक्रीय उच्चावचनो को जन्म दे सकते हैं। अन्त में, समान्तर माध्य की भाति चल-माध्य भी अत्यधिक आकृति (size) के मूल्यों से अनावश्यक रूप से अधिक प्रभावित होकर सही प्रवृत्ति को विकृत कर देते हैं।

इतने दोष होते हुए भी यह रीति प्रथम दोनों रीतियों से अधिक अच्छी है और स्पष्ट आवर्तिता (periodicity) वाली श्रेणियो में प्रवृत्ति-विश्लेषण के लिए सर्वश्रेष्ठ मानी जाती है।

(4) **न्यूनतम वर्ग रीति (Method of Least Squares)**—सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का माप करने की यह रीति सर्वोत्तम मानी जाती है। इसके अनुसार गणितीय समीकरणों के प्रयोग द्वारा न्यूनतम-वर्ग मान्यता (least square assumption) के आधार पर काल-श्रेणी के लिए सर्वाधिक उपयुक्त रेखा (line of best fit) खीची जाती है। यह रेखा या तो सरल रेखा (straight line) हो सकती है या परवलयिक वक्र (parabolic curve) के रूप में खीची जा सकती है।

न्यूनतम-वर्ग रेखा, प्रसामान्य समीकरणों (normal equations) की सहायता से खीची जाने वाली ऐसी रेखा है जो दो शर्तों पर आधारित है—(i) $\Sigma(Y-Y_C)=0$: प्रदत्त मूल्यों और तत्संवादी प्रवृत्ति-मूल्यों के विचलनों का योग शून्य होता है; तथा (ii) $\Sigma(Y-Y_C)^2=$ न्यूनतम : इस रेखा से विभिन्न पद-मूल्यों के विचलनो के वर्गों का जोड़ अन्य किसी रेखा से निकाले गए विचलन-वर्गों के योग की तुलना मे न्यूनतम (minimum) होता है। जिससे मूल समंको के बिन्दुओं के विचलनो के वर्गों का जोड़ अन्य किसी रेखा की तुलना में न्यूनतम होता है—

Y संकेत मूल समंक (original value of dependent variate) के लिए प्रयुक्त हुआ है; और

Y_C Y के संगणित मूल्य (trend values of Y computed by the method of least squares) हैं।

सरल रेखीय प्रवृत्ति-अन्वायोजन (Fitting a straight line trend)—न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा रेखीय अथवा एक घातीय प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए निम्न आधारभूत समीकरण का प्रयोग किया जाता है—

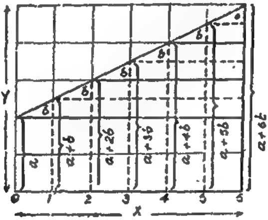
$Y=a+bX$ (आधारभूत समीकरण)

जहाँ Y अभीष्ट उपनति-मूल्य (the required trend-value) है,

X काल-एकक (unit of time) है, तथा

a व b अचर मूल्य (constants) है।

अचर-मूल्य 'a' Y-अन्तःखण्ड (Y-intercept) कहलाता है। यह मूलबिन्दु (0) और Y-अक्ष पर स्थित उस बिन्दु का अन्तर है जहाँ से उपनति रेखा आरम्भ होती है। यह $X=0$ पर Y का संगणित मूल्य व्यक्त करता है। 'b' प्रवृत्ति रेखा के ढलान (*slope*) का संकेत-चिह्न है जो यह बताता है कि समय की एक इकाई के बढ़ने से उपनति-रेखा कितनी ऊपर (या नीचे) की ओर जाती है। अगले प्रतिरूपचित्र से सरल रेखा समीकरण का आधार स्पष्ट हो जाता है—



चित्र 5—सरल रेखा का प्रतिरूप चित्र

सूत्र : $Y=a+bX$

अचर मूल्य—अचर-मूल्यों (a व b) का परिगणन दो प्रकार से किया जा सकता है—

(अ) ऋजु या दीर्घ विधि द्वारा या (ब) लघु रीति अपनाकर।

(अ) दीर्घ रीति (Least Squares Long Method)—यह इस प्रकार है :

(i) समय बिन्दुओं (points of time) के लिए आरम्भ से क्रम-संख्याएँ 1, 2, 3... आदि) प्रयुक्त की जाती हैं। दूसरे शब्दों में, प्रथम काल-एकक से पिछले एकक को मूल-बिन्दु (origin—0) माना जाता है। ये क्रम-संख्याएँ (natural numbers) X द्वारा व्यक्त की जाती हैं तथा इनका योग (ΣX) कर लिया जाता है।

(ii) क्रम संख्याओं के वर्गों का योग ΣX^2 निकाला जाता है।*

(iii) X और मूल-समंकों (Y) के तत्सवादी मूल्यों को गुणा करके उनका जोड़ ΣXY निकाला जाता है।

---

* स्वतन्त्र चर-मूल्य (X) को दी जाने वाली ये प्राकृतिक क्रम-संख्याएँ (natural numbers 1, 2, 3...N) होती हैं। अतः इनके जोड़ और इनके वर्गों के जोड़ के लिए निम्न सूत्र प्रयोग किये जा सकते हैं—

$$\Sigma X=(1+2+3+\ldots N)=\frac{N(N+1)}{2}$$

(जहाँ N अन्तिम समय-बिन्दु की क्रम-संख्या है)

$$\Sigma(X^2)=(1^2+2^2+3^2+\ldots N^2)=\left[\frac{2N+1}{3}\times\Sigma X\right]$$

(iv) Y मूल्यों का जोड़ ΣY प्राप्त किया जाता है।

(v) $\Sigma X, \Sigma X^2, \Sigma XY$ व ΣY निकालने के बाद निम्न प्रसामान्य समीकरणों में इन संख्याओं को आदिष्ट करके 'a' और 'b' के मूल्य निश्चित कर लिए जाते हैं।

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

प्रवृत्ति-मूल 'a' और 'b' ज्ञात होने के बाद सरल रेखा के आधारभूत समीकरण ($Y=a+bX$) का प्रयोग करके प्रवृत्ति-मूल्य (trend values or T) प्राप्त कर लिए जाते हैं।

उदाहरण (Illustration) 5 :

शक्कर उत्पादित करने वाली एक फैक्ट्री के उत्पादन आँकड़े निम्नलिखित हैं। आप न्यूनतम वर्ग रीति (method of least squares) द्वारा सरल रेखा उपनति (straight-line trend) निश्चित कीजिए तथा समंकों को इस उपनति के साथ बिन्दुरेखीय चित्र पर दिखाइए।

वर्ष :	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
उत्पादन (हजार मनों में) :	80	90	92	83	94	99	92

[B. Com., Poona, 1971, Meerut and Madras, 1970, Mysore and Andhra, 1968, Alld., 1963, M. Com. Agra, 1970, Vikram, 1967, M. A., Agra, 1969, Kanpur, 1970]

हल (Solution) :

प्रवृत्ति मूल्य का परिकलन (न्यूनतम वर्ग रीति)

वर्ष	उत्पादन (हजार मनों में) X	X	X^2	XY	उपनति-मूल्य $a+bX$	$=Y_c$
1951	80	1	1	80	82+2×1	84
1952	90	2	4	180	82+2×2	86
1953	92	3	9	276	82+2×3	88
1954	83	4	16	332	82+2×4	90
1955	94	5	25	470	82+2×5	92
1956	99	6	36	594	82+2×6	94
1957	92	7	49	644	82+2×7	96
योग	630	28	140*	2576		630
	ΣY	ΣX	ΣX^2	ΣXY		ΣY_c

$\Sigma Y = Na + b\Sigma X$: $\quad$ $\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$

$630 = 7a + 28b$ (i) $\quad$ $2576 = 28a + 140b$ (ii)

प्रथम समीकरण को 4 से गुणा करके उसे समीकरण (ii) में से घटाया जाएगा—

$$2576 = 28a + 140b$$
$$4\,[630 = 7a + 28b] \text{ या } \frac{2520 = 28a + 112b}{56 = \quad 28b}$$

$$\therefore \quad b = \frac{56}{28} \text{ या } 2 \qquad 630 = 7a + 28 \times 2$$

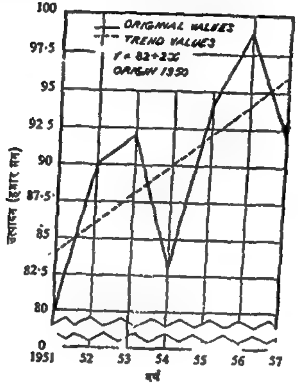
$$a = \frac{630 - 56}{7} = \frac{574}{7} = 82$$

* $\Sigma X^2 = \left\{\frac{(2\times 7)+1}{3}\right\} \times 28 = 140 \qquad \Sigma X = \frac{7(7+1)}{2} = 28$

$\therefore$ $Y=82+2X$ मूलबिन्दु 1950 ; X इकाइयाँ : 1 वर्ष
Y इकाई : उत्पादन (हजार मन)

इस प्रकार उपलब्ध उपनति मूल्यों (84, 86, 88......96) को बिन्दुरेखीय-पत्र पर प्रांकित करने पर प्रवृत्ति-रेखा (trend line) बन जाएगी।

सरल रेखा उपनति



चित्र 6—रेखीय प्रवृत्ति

मूलबिन्दु परिवर्तन (Shifting the Origin)—उक्त उदाहरण में 'a' और 'b' की गणना करने के लिए 1951 को मूलबिन्दु (origin या 0) माना जा सकता है। ऐसा करने से X के मूल्य क्रमशः 0, 1, 2,......6 हो जाएँगे और $\Sigma X=21$, $\Sigma X^2=91$, $\Sigma XY=1946$, $N=7$, इन मूल्यों को प्रसामान्य समीकरणों मे आदिष्ट करके निम्न उपनति-समीकरण प्राप्त किया जाएगा—

$$630=7a+51b \qquad 1946=21a+91b$$
$$1946=21a+91b \qquad \underline{1890=21a+63b} \qquad \therefore\ b=2\ a=84$$
$$56=\quad 28b$$

$\therefore$ $Y=84+2X$ मूलविन्दु 1951, X इकाई, 1 वर्ष
Y इकाई, (हजार मन)

उक्त समीकरण मे X के मूल्य 0, 1, 2,......6 क्रमशः आदिष्ट करने पर वही उपनति मूल्य 84, 86, 88......96 निकल आएँगे। इससे यह निष्कर्ष निकलता है, कि X को मूलविन्दु (origin) में परिवर्तन करने से Y-अन्तःखण्ड (Y-intercept) अर्थात् 'a' का मूल्य तो बदल जाता है परन्तु रेखा के ढाल (slope of the line or 'b') के मूल्य में कोई अन्तर नही होता। स्पष्ट है कि उपनति मूल्य एक समान ही रहते हैं चाहे मूलबिन्दु कुछ भी हो। उपनति समीकरण लिखते समय X के मूलविन्दु (origin) का अवश्य उल्लेख करना चाहिए।

(ब) लघु रीति (Least Squares Short Method)—प्रवृत्ति मूल्य निकालने के लिए यदि

मध्यका वर्ष (median or middle year) को मूल-बिन्दु (0) माना जाए तो गणन-क्रिया अत्यन्त सरल हो जाती है। ΣX शून्य (0) हो जाता है अतः प्रसामान्य समीकरण निम्न सरल रूप में बदल जाती हैं—

दीर्घ रीति	लघु रीति
$\Sigma Y = Na + b\Sigma X$	$\Sigma Y = Na \quad \because \Sigma X = 0$
$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$	$\Sigma XY = b\Sigma X^2$
	$\therefore a = \frac{\Sigma Y}{N};\ b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$

लघुरीति के अन्तर्गत क्रिया-विधि निम्न प्रकार है—

(i) मध्य-वर्ष को शून्य (0) मानकर वर्षों के कालिक-विचलन (time deviations) निकाले जाते हैं जो कि शून्य से पहले की ओर ऋणात्मक $-1, -2, -3$ आदि और बाद की ओर धनात्मक $+1, +2, +3$ आदि होते हैं। स्पष्ट है कि इनका बीजगणितीय योग (ΣX) शून्य होगा।

(ii) $\Sigma Y, \Sigma XY$ तथा ΣX^2 की गणना की जाएगी।

(iii) a और b निकाले जाएँगे—

$$a = \frac{\Sigma Y}{N};\ b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$$

(iv) मूल-समंकों के समान्तर माध्य (a) को मध्यका वर्ष के सामने उपनति मूल्यों के खाने में लिख लेना चाहिए।

(v) अन्त में $Y = a + bX$ वाले समीकरण में क्रमशः X के मूल्यों को आदिष्ट करके प्रवृत्ति-समंक ज्ञात कर लिए जाते हैं।

पिछले उदाहरण को लघु-रीति द्वारा निम्न प्रकार हल किया जा सकता है।

उपनति-मूल्यों का आकलन (लघु रीति)

वर्ष	उत्पादन (००० मन)	समय-विचलन मूल-1954	वर्गित-समय विचलन	X व Y की गुणा	प्रवृत्ति-मूल्य	
	Y	X	X^2	XY	$a+bX$ =	Y_c
1951	80	−3	9	−240	$90+(2\times-3)$ =	84
1952	90	−2	4	−180	$90+(2\times-2)$ =	86
1953	92	−1	1	−92	$90+(2\times-1)$ =	88
1954	83	0	0	0	$90+(2\times0)$ =	90
1955	94	+1	1	+94	$90+2\times1$ =	92
1956	99	+2	4	+198	$90+2\times2$ =	94
1957	92	+3	9	+276	$90+2\times3$ =	96
योग	630		28	−512+568 =56		630
$N=7$	ΣY		ΣX^2	ΣXY		ΣY_c

प्रसामान्य समीकरण—

$$\Sigma Y = Na \qquad \therefore a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{630}{7} = 90$$

$$\Sigma XY = b\Sigma X^2 \qquad \therefore b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{56}{28} = 2$$

उपनति-समीकरण—

$$Y = 90 + 2X \qquad \text{मूल 1954, } X \text{ इकाई, 1 वर्ष}$$
$$Y \text{ इकाई, 000 मन}$$

यदि समय की इकाइयों की संख्या युग्म (even) हो, (जैसे 8, 10 या 12 आदि) तो लघु रीति के अन्तर्गत मूल-बिन्दु बीच के दो वर्षों (या माहों) के मध्य में होगा और X की इकाई आधे-वर्ष (यदि समय क्रमिक वर्षों के रूप में हो) के बराबर मानी जाएगी। विचलन −·5, −1·5, −2·5 और +·5, +1·5, +2·5 आदि होंगे। परन्तु गणन-क्रिया की सरलता के हेतु इन्हें दुगुना कर दिया जाता है। शेष क्रिया पूर्ववत् रहती है।

उदाहरण (Illustration) 6 :

निम्नलिखित आँकड़ों को न्यूनतम वर्ग-विधि से सरल रेखा उपनति (straight line trend) प्रदान कीजिए। यह मानकर कि परिवर्तन इसी दर से होता रहेगा, 1972 वर्ष की पूर्वकल्पित आय का निर्धारण कीजिए।

वर्ष :	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
आय (लाख रु०) :	38	40	65	72	69	60	87	95

(उपनति मानों को ग्राफ पर आलेखित न कीजिए।)

[B. Com. (Hons.), Delhi, 1972 ; Bombay, 1967]

हल (Solution) :

सरल रेखा उपनति-निर्धारण, न्यूनतम वर्ग (लघु) विधि

वर्ष	आय (लाख रु०)	1966·5 से विचलन (वर्षों में)	विचलन (आधे वर्षों में)	X व Y की गुणा	काल विचलनों के वर्ग	उपनति-मूल्य
	Y		X	XY	X^2	$a+bX=Y_c$
1963	38	−3·5	−7	−266	49	65·75+3·67×−7=40·06
1964	40	−2·5	−5	−200	25	65·75+3·67×−5=47·40
1965	65	−1·5	−3	−195	9	65·75+3·67×−3=54·74
1966	72	−0·5	−1	− 72	1	65·75+3·67×−1=62·08
1967	69	+0·5	+1	+ 69	1	65·75+3·67× 1=69·42
1968	60	+1·5	+3	+ 180	9	[illegible] 75+3·67× 3=76·76
1969	87	+2·5	+5	+ 435	25	65·75+3·67× 5=84·10
1970	95	+3·5	+7	+ 665	49	65·75+3·67× 7=91·44
योग	526		$\Sigma X=0$	−733+1349 =+616	168	$\Sigma Y_c=\Sigma Y=526·00$
	ΣY			ΣXY	ΣX^2	

प्रवृत्ति-रेखा का समीकरण—

$$Y = a + bX$$

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{526}{8} = 65·75 \; ; \quad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{616}{168} = \frac{11}{3} = 3·67$$

अभीष्ट समीकरण—

$Y = 65·75 + 3·67X$ मूल-बिन्दु 1966–67 का मध्य

X इकाई = आधा वर्ष Y इकाई = लाख रु०

1972 के लिए पूर्वानुमानित आय—

वर्ष 1972 के लिए $X = +11$ (1970 → +7 ; 1971 → +9)

$$Y_{1972} = 65·75 + 3·67 \times 11 = 106·12$$

अतः 1972 के लिए पूर्व-कल्पित आय 106·12 लाख रु० है।

यदि हम काल-विचलनों को 2 से गुणा न करके प्रश्न को हल करें तो उत्तर वही प्राप्त होगा, परन्तु गणन-क्रिया जटिल हो जायेगी। '*a*' का मान तो वही रहेगा (65·75) किन्तु '*b*' का मूल्य पहले (3·67) से दो गुना (7·33) हो जाएगा—

$$a=\frac{\Sigma Y}{N}=65{\cdot}75\,;\quad b=\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}=\frac{308}{42}=7{\cdot}33$$

$b=7{\cdot}33$ परिवर्तन (वृद्धि) की वार्षिक दर है।.

अभीष्ट समीकरण $Y=65{\cdot}75+7{\cdot}33X$ है।

1963 के लिए प्रवृत्ति-मूल्य $65{\cdot}75+7{\cdot}33X-3{\cdot}5=40{\cdot}09$ (थोड़ा अन्तर सन्निकटन के कारण है) ;

1972 के लिए अनुमानित मूल्य ज्ञात करने के लिए $X=+5{\cdot}5$ तो $Y=65{\cdot}75+7{\cdot}33\times5{\cdot}5=106{\cdot}1$ लाख रु० होगा।

उदाहरण (Illustration) 7 :

नीचे दिये गये आंकड़ों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा उपनति मूल्यों की गणना दीजिए।

वर्ष :	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
भेड़ों की संख्या (लाखों में) :	56	55	51	47	42	38	35	32

[*M. Com., Delhi and Raj., 1970*]

हल (Solution) :

न्यूनतम वर्ग (लघु) रीति द्वारा सरल रेखीय उपनति-निर्धारण

वर्ष	भेड़ों की संख्या (लाखों में)	1965·5 से विचलन (आधे वर्षों में)	X व Y की गुणा	विचलन वर्ग	प्रवृत्ति-मूल्य
	Y	X	XY	X^2	$a+bX=Y_c$
1962	56	−7	−392	49	44·5+(−1·86)×−7=57·52
1963	55	−5	−275	25	44·5+(−1·86)×−5=53·80
1964	51	−3	−153	9	44·5+(−1·86)×−3=50·08
1965	47	−1	−47	1	44·5+(−1·86)×−1=46·36
1966	42	+1	+42	1	44·5+(−1·86)× 1=42·64
1967	38	+3	+114	9	44·5+(−1·86)× 3=38·92
1968	35	+5	+175	25	44·5+(−1·86)× 5=35·20
1969	32	+7	+224	49	44·5+(−1·86)× 7=31·48
योग	356	$\Sigma X=0$	−876+555 = −312	168	$\Sigma Y_c=\Sigma Y=356{\cdot}00$
	ΣY		ΣXY	ΣX^2	

$$Y=a+bX$$

$$a=\frac{\Sigma Y}{N}=\frac{356}{8}=44{\cdot}5\,;\quad b=\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}=\frac{-312}{168}=-1{\cdot}86$$

अभीष्ट समीकरण— $Y=44{\cdot}5-1{\cdot}86\,X$

परवलय-वक्रीय या अ-रेखीय प्रवृत्ति-अन्वायोजन (Fitting a Parabolic or Non-linear trend)—आर्थिक व व्यावसायिक क्षेत्र में अनेक परिस्थितियों में सरल रेखा दीर्घकालीन प्रवृत्ति का यथार्थ रूप से चित्रण नहीं करती। ऐसी दशा में प्रवृत्ति निकालने के लिए निश्चित घात (द्वितीय, तृतीय या चतुर्थ आदि) का एकेन्द्रिक-वक्र खींचना पड़ता है। यहाँ हम केवल द्वितीय घात के परवलयिक-वक्र या द्विघातीय प्रवृत्ति (Parabolic Curve of the Second degree or Quadratic trend) का विवेचन करेंगे। इस वक्र का मूल समीकरण इस प्रकार है—

$$Y=a+bX+cX^2$$

X के वर्ग-मूल्य से ही यह द्विघातीय प्रवृत्ति कहलाती है। यदि c धनात्मक है तो वक्र का झुकाव ऊपर की ओर (upward bulge) होगा और c ऋणात्मक होने पर झुकाव नीचे की ओर (downward bulge) होगा।

मूल समीकरण मे a, b, c अचर-मूल्य (constants) हैं जिन्हें प्रसामान्य समीकरणों (normal equations) की सहायता से ज्ञात किया जाता है।

रीति—जब मूल-बिन्दु पहले वर्ष से पिछला वर्ष लिया जाता है, तो निम्न 3 प्रसामान्य समीकरणों का प्रयोग करके दीर्घ रीति (long method) द्वारा $a; b, c$ के मूल्य निकालकर तथा उन्हें मूल समीकरण में आदिष्ट करके प्रवृत्ति-मूल्य प्राप्त कर लिए जाते हैं। परन्तु व्यवहार में लघु विधि ही अपनानी चाहिए। इसमें X का मूल-बिन्दु मध्य (middle year) में रखने से गणन-क्रिया अत्यन्त सरल हो जाती है (क्योंकि $\Sigma X=\Sigma X^3=0$)। दोनों विधियों मे प्रयुक्त प्रसामान्य समीकरण निम्नांकित हैं—

	प्रारम्भिक मूलबिन्दु (दीर्घ रीति)	मध्यका-मूलबिन्दु (लघु रीति)
(i)	$\Sigma Y=Na+b\Sigma X+c\Sigma X^2$	$\Sigma Y=Na+c\Sigma X^2$
(ii)	$\Sigma XY=a\Sigma X+b\Sigma X^2+c\Sigma X^3$	$\Sigma XY=b\Sigma X^2$
(iii)	$\Sigma X^2Y=a\Sigma X^2+b\Sigma X^3+c\Sigma X^4$	$\Sigma X^2Y=a\Sigma X^2+c\Sigma X^4$
		$(\because \Sigma X=\Sigma X^3=0)$

दीर्घ रीति में प्रयुक्त प्रसामान्य समीकरणों में से प्रथम, मूल समीकरण ($Y=a+bX+cX^2$) को 'a' के गुणांक (1) से गुणा करके, योग द्वारा ; दूसरा, b के गुणांक (X) से उक्त समीकरण को गुणा करके जोड़ द्वारा और तीसरा, c के गुणांक (X^2) से गुणा करके जोड़ द्वारा प्राप्त किया गया है। व्यवहार में, मध्यका-मूलबिन्दु लेकर लघु रीति का ही प्रयोग करना चाहिए परन्तु वर्षों की संख्या युग्म (even) होने पर कालिक विचलन निकालने में अधिक सावधानी अपेक्षित है।

उदाहरण (Illustration) 8 :

एक बड़े अल्मोनियम (Aluminium) कारखाने में कुछ वर्षों के उत्पादन के निम्नलिखित आँकड़ों से द्विघातीय परवलयिक उपनति (second degree parabola) का अन्वायोजन कीजिए तथा मूल-समंकों और प्रवृत्ति-मूल्यों को बिन्दुरेख-चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए।

वर्ष	उत्पादन (हजार टनों में)	वर्ष	उत्पादन (हजार टनों में)
1961	12	1968	21
1962	20	1969	30
1963	10	1970	35
1964	11	1971	40
1965	12	1972	37
1966	13	1973	40
1967	10		

हल (Solution) :

मध्यका-वर्ष 1967 को उद्गम-बिन्दु (0) मानकर लघु रीति द्वारा उपनति-मूल्य ज्ञात किए जाएँगे—

द्विघातीय उपनति-मूल्यों का परिगणन

वर्ष	उत्पादन (हजार टनों में)	कालिक विचलन					उपनति-मूल्य	
	Y	X	XY	X^2	X^2Y	X^4	$a+bX+cX^2$	$=Y_c$
1961	12	−6	−72	36	432	1296	17·9−16·14+11·52	13·28
1962	20	−5	−100	25	500	625	17·9−13·45+8·00	12·45
1963	10	−4	−40	16	160	256	17·9−10·76+5·12	12·26
1964	11	−3	−33	9	99	81	17·9−8·07+2·88	12·71
1965	12	−2	−24	4	48	16	17·9−5·38+1·28	13·80
1966	13	−1	−13	1	13	1	17·9−2·69+0·32	15·53
1967	10	0	0	0	0	0	17·9+0+0·00	17·90
1968	21	+1	+21	1	21	1	17·9+2·69+0·32	20·91
1969	30	+2	+60	4	120	16	17·9+5·38+1·28	24·56
1970	35	+3	+105	9	315	81	17·9+8·07+2·88	28·85
1971	40	+4	+160	16	640	256	17·9+10·76+5·12	33·78
1972	37	+5	+185	25	925	625	17·9+13·45+8·00	39·35
1973	40	+6	+240	36	1440	1296	17·9+16·14+11·52	45·56
योग $N=13$	291 ΣY		489 ΣXY	182 ΣX^2	4713 ΣX^2Y	4550 ΣX^4		290·94 291 ΣY_c

प्रसामान्य समीकरण (लघु रीति)

I

$$\Sigma Y = Na + c\Sigma X^2$$

$$291 = 13a + 182c$$

$$291 = 13a + 182 \times \frac{639}{2002}$$

$$291 = 13a + 58{\cdot}1$$

$$\therefore a = \frac{291 - 58{\cdot}1}{13} = 17{\cdot}9$$

या $a = \dfrac{\Sigma Y - c\Sigma X^2}{N}$

$$= \frac{291 - 182 \times {\cdot}32}{13}$$

$$= 17{\cdot}9$$

II

$$\Sigma XY = b\Sigma X^2$$

$$489 = 182b$$

$$\therefore b = \frac{489}{182}$$

$$= 2{\cdot}69$$

III

$$\Sigma X^2Y = a\Sigma X^2 + c\Sigma X^4$$

$$4713 = 182a + 4550c$$

$$\frac{4074 = 182a + 2548c}{639 = \qquad 2002c}$$ (I को 14 से गुणा करने पर)

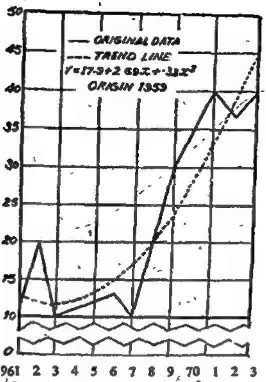
$$\therefore c = \frac{639}{2002} = 0{\cdot}32$$

या $c = \dfrac{N(\Sigma X^2Y) - \Sigma X^2 . \Sigma Y}{N\Sigma X^4 - (\Sigma X^2)^2} = \dfrac{8307}{26026}$

$$= 0{\cdot}32$$

$$\therefore \quad Y = 17{\cdot}9 + 2{\cdot}69X + 0{\cdot}32X^2$$

मूलबिन्दु : 1967, समय-एकक—1 वर्ष ; Y एकक—000 टन



चित्र 7—परवलयिक उपनति (द्विघातीय)

प्रवृत्ति का प्रक्षेपण (Projection of Trend)—न्यूनतम-वर्ग पद्धति द्वारा परिगणित प्रवृत्ति-समीकरण के आधार पर भावी प्रवृत्ति का पूर्वानुमान लगाया जा सकता है। बाह्यगणन-वर्ष से सम्बद्ध 'X' का मूल्य उक्त समीकरण में आदिष्ट करने से उस वर्ष का आश्रित मूल्य अनुमानित हो जाएगा।

उदाहरण 5 में 1958 और 1960 से सम्बन्धित उत्पादन समंकों का अनुमान लगाने के लिए इन वर्षों के X के मूल्य (8 व 10) क्रमशः उपनति-समीकरण ($Y=82+2X$) में आदिष्ट किए जाएँगे—

1958 ($X=8$) $Y=82+2\times 8 = 98$ हजार टन

1960 ($X=10$) $Y=82+2\times 10=102$ " "

इसी प्रकार पिछले उदाहरण (Illustration) 8 मे 1974 वर्ष ($X=+7$) के लिए उत्पादन-समंक का निम्न प्रकार पूर्वानुमान लगाया जाएगा—

$$1974 \text{ के लिए } Y=17{\cdot}9+(2{\cdot}69\times 7)+({\cdot}32\times 7^2)$$

$$=52{\cdot}41 \text{ हजार टन}$$

अर्द्ध-लघुगणकीय या घातांकीय वक्र (Semi-Logarithmic or Exponential curve)—यदि काल-श्रेणी में एक स्थिर प्रतिशत दर से वृद्धि या कमी होती है तो अर्द्ध-लघुगणकीय या घातांकीय वक्र (Semi-logarithmic or Exponential Curve) का प्रयोग उचित रहता है। इसका समीकरण यह है—

$$Y=ab^X \quad \text{या} \quad \log Y=\log a+(\log b)X$$

मध्यका-वर्ष को मूल-बिन्दु मानकर $\log a=\frac{\Sigma \log Y}{N}$ तथा $\log b=\frac{\Sigma(X.\log Y)}{\Sigma X^2}$

द्वारा a और b के logs ज्ञात किए जाते हैं फिर उपर्युक्त समीकरण मे आदिष्ट करके प्रवृत्ति-मूल्य निकाले जाते हैं।

उपर्युक्त प्रवृत्ति-वक्रों के अतिरिक्त अन्य उपनति-प्रतिरूप (Trend types) भी प्रयुक्त किए जाते हैं जिनमे गोम्पर्ट्ज वक्र (Gompertz Curve), पर्ल-रीड वक्र या वृद्धिघातीय-वक्र (Pearl-Reed Curve or Logistic Curve) प्रमुख हैं। इनकी रचना में प्रगत गणितीय क्रियाओं का प्रयोग किया जाता है।

गुण-दोष—न्यूनतम वर्ग पद्धति प्रवृत्ति-माप की श्रेष्ठतम रीति है। इसके आधार पर ज्ञात किए गए प्रवृत्ति-मूल्य अधिक उपयुक्त और परिशुद्ध होते हैं क्योंकि उनका परिगणन सुनिश्चित गणितीय सिद्धान्तों के अनुसार किया जाता है। यह रीति व्यक्तिगत अभिनति से सर्वथा मुक्त है। इसकी सहायता से आगामी वर्षों के लिए उपनति का यथोचित पूर्वानुमान लगाना सम्भव हो जाता है। परन्तु जटिल गणन-क्रिया इसका सबसे बड़ा दोष है। दूसरे, उपयुक्त उपनति-समीकरण का ठीक प्रकार चुनाव न होने से यह रीति भ्रमात्मक निष्कर्ष प्रदान करती है। उपनति-प्रतिरूप का सही चुनाव समंकों की प्रकृति, उनकी परिवर्तन दर, उपनति मापन का उद्देश्य तथा सांख्यिक की योग्यता एवं अनुभव पर निर्भर करता है। तीसरे, इस रीति में लचनशीलता नहीं है। यदि मूल समंकों में एक मूल्य की भी वृद्धि या कमी कर दी जाए तो प्रवृत्ति-समीकरण ही बदल जाएगा। इन दोषों के होते हुए भी न्यूनतम वर्ग रीति प्रवृत्ति-मापन की सर्वोत्कृष्ट विधि मानी जाती है।

अल्पकालीन उच्चावचनों का मापन
(Measurement of Short-time Fluctuations)

काल-श्रेणी पर सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति और अल्पकालीन उच्चावचनों—दोनों—का ही सामूहिक प्रभाव पड़ता है। अतः चलमाध्य या न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा निकाले गए प्रवृत्ति-संघटक (Trend Component) को मूल-श्रेणी में से निरसित कर दिया जाये तो अल्पकालीन उच्चावचन शेष रह जाते हैं।

उदाहरण 4 (Illustration 4) में चारवर्षीय चल-माध्यों द्वारा दीर्घकालीन उपनति ज्ञात की गई है। उसमें अल्पकालीन उच्चावचनों का माप निम्न प्रकार किया जाएगा।

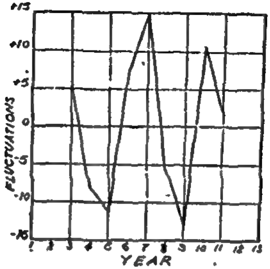
उदाहरण (Illustration) 9 :

उदाहरण 4 में प्रदत्त समंकों से अल्पकालिक उच्चावचन ज्ञात कीजिए और उन्हें बिन्दुरेख द्वारा प्रस्तुत कीजिए।

हल (Solution) :

वर्ष	बैंक समाशोधन सूचकांक	4 वर्षीय चल-माध्य (T)	अल्पकालिक उच्चावचन (ii)−(iii)
(i)	(ii)	(iii)	(iv)
1	52·7	...	...
2	79·4	...	...
3	76·3	70·6	+ 5·7
4	66.0	74·4	− 8 4
5	68 6	79·7	−11·1
6	93 8	85·9	+ 7 9
7	104·7	89·9	+14 8
8	87·2	92·5	− 5 3
9	79·3	92·8	−13·5
10	103 6	92 5	+11·1
11	97·3	95·8	+ 1·5
12	92·4	...	...
13	100·7	...	...

अल्पकालिक उच्चावचनों का मापन



चित्र 8—अल्पकालिक उच्चावचन

उदाहरण (Illustration) 10 :

निम्नलिखित समंकों को न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखा उपनति प्रदान कीजिए।

वर्ष :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
पद-आकार :	110	125	115	135	150	165	155	175	180	200

[M. A., Raj., 1965]

अल्पकालीन उच्चावचनों का भी मापन कीजिए।

हल (Solution) :

न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा उपनति-निर्धारण व अल्पकालिक उच्चावचनों का माप

वर्ष	पद-मूल्य (O)	कालिक विचलन (5·5 से)	का० वि० वर्ग	X व Y की गुणा	उपनति-मूल्य (T)	अल्पकालीन उच्चावचन (O−T)
	Y	X	X^2	XY	$a+bX=Y_c$ $151+4.76X=Y_c$	$(Y-Y_c)$
1	110	−9	81	−990	108·16	+1·84
2	125	−7	49	−875	117·68	+7·32
3	115	−5	25	−575	127·20	−12·20
4	135	−3	9	−405	136·72	−1·72
5	150	−1	1	−150	146·24	+3·76
6	165	+1	1	+165	155·76	+9·24
7	155	+3	9	+465	165·28	−10·28
8	175	+5	25	+875	174·80	+0·20
9	180	+7	49	+1260	184·32	−4·32
10	200	+9	81	+1800	193·84	+6·16
$N=10$	$\Sigma Y=1510$		$\Sigma X^2=330$	1570 ΣXY	$\Sigma Y_c=1510$	$\Sigma(Y-Y_c)=0$

$$a=\frac{\Sigma Y}{N}=\frac{1510}{10}=151 \qquad b=\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}=\frac{1570}{330}=4{\cdot}76$$

$Y=151+4{\cdot}76X$

मूल-बिन्दु 5·5; X इकाई—आधा-वर्ष; Y इकाई—पद-मूल्य

ऋतुनिष्ठ (मौसमी) विचरणों का मापन
(Measurement of Seasonal Variations)

एक व्यवसायी के लिए प्रवृत्ति-विश्लेषण ही नही वरन् ऋतुनिष्ठ या मौसमी विचरणो का माप भी अत्यन्त उपयोगी है। इन नियतकालिक उच्चावचनों से उसे अपनी व्यावसायिक क्रियाओं के अल्पकालिक नियोजन (short-term planning) में सहायता मिलती है। वह उपयुक्त योजनाबद्ध कार्यक्रम अपनाकर भावी आर्तव उच्चावचनों से होने वाली हानि से अपने आपको बचा सकता है। अन्य प्रकार के अल्पकालिक विचरणों का विश्लेषण करने के लिए भी आर्तव विचरणों का अध्ययन आवश्यक है।

ऋतुनिष्ठ विचरण-विश्लेषण की निम्न प्रमुख रीतियाँ हैं—

(1) आर्तव-विचरण सूचकांक अथवा आर्तव-मध्यक रीति (Seasonal Variation Index or 'Seasonal Averages' Method),

(2) चल-माध्य द्वारा मौसमी विचरण (Seasonal Variation through Moving Averages),

(3) शृङ्खला-मूल्यानुपात विधि (Link Relatives Method),

(4) प्रवृत्ति-अनुपात विधि (Ratio-to-trend Method),

(5) चल-माध्य अनुपात विधि ('Ratio to Moving Average' Method)।

(1) **आर्तव विचरण सूचकांक विधि** (Seasonal Variation Index Method)—आर्तव विचरण निकालने की यह सबसे सरल रीति है। इसका प्रयोग अधिकतर बारह-मासिक समंकों में ऋतुनिष्ठता का माप करने के लिए किया जाता है। यह रीति उस परिस्थिति मे उपयुक्त है जहाँ समंको में कोई सुनिश्चित दीर्घकालीन प्रवृत्ति स्पष्ट रूप से दृष्टिगोचर न हो।

प्रक्रिया—(i) सर्वप्रथम, समान महीनों या त्रैमासिक अवधियों के मूल्यों को जोड़कर तथा वर्षों की संख्या से भाग देकर आर्तव मध्यक (seasonal averages) ज्ञात कर लिए जाते हैं।

(ii) बारह महीनो के आर्तव मध्यकों को जोड़कर, योग को 12 से भाग देकर या त्रैमासिक के जोड़ माध्यों को 4 से भाग देकर सामान्य मध्यक (general average) निकाला जाता है।

(iii) सामान्य मध्यक को 100 (आधार) मानकर प्रत्येक आर्तव माध्य को निम्न सूत्र द्वारा सूचकांक मे बदल दिया जाता है—

$$\text{आर्तव विचरण सूचकांक} = \frac{\text{आर्तव माध्य}}{\text{सामान्य माध्य}} \times 100$$

ये प्रतिशत अंक ही आर्तव-विचरण-सूचकांक हैं जिन्हे बिन्दुरेखा-पत्र पर प्रांकित करके आर्तव विचरणों का भली प्रकार विश्लेषण किया जा सकता है।

उदाहरण (Illustration) 11 :

गत पाँच वर्षों में भारत से किसी वस्तु के निर्यात के आँकड़े (करोड़ रु० मे) नीचे दिए गए हैं। उनसे आर्तव सूचकांक ज्ञात कीजिए—

वर्ष	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्तूबर	नवम्बर	दिसम्बर
1969	28	20	30	20	19	23	24	27	26	19	30	28
1970	33	25	25	18	20	20	22	29	22	23	26	32
1971	29	26	26	23	18	23	26	30	26	23	29	29
1972	29	25	30	24	19	23	21	28	28	28	28	
1973	31	24	29	20	19	21	22	26	23	22	27	

हल (Solution) :

ऋतुनिष्ठ विचरण सूचकांकों का परिगणन

माह	निर्यात (करोड़ रु०)					5 वर्षों का योग	मासिक माध्य	आर्तव विचरण सूचकांक
	1969	1970	1971	1972	1973			
जनवरी	28	33	29	29	31	150	30	120
फरवरी	20	25	26	25	24	120	24	96
मार्च	30	25	26	30	29	140	28	112
अप्रैल	20	18	23	24	20	105	21	84
मई	19	20	18	19	19	95	19	76
जून	23	20	23	23	21	110	22	88
जुलाई	24	22	26	21	22	115	23	92
अगस्त	27	29	30	28	26	140	28	112
सितम्बर	26	22	26	28	23	125	25	100
अक्टूबर	19	23	23	28	22	115	23	92
नवम्बर	30	26	29	28	27	140	28	112
दिसम्बर	28	32	29	29	27	145	29	116
					योग	1500	300	1200
					सामान्य माध्य	125	25	100

$$\text{आर्तव विचरण सूचकांक—जनवरी} = \frac{\text{जनवरी का माध्य}}{\text{सामान्य माध्य}} \times 100 = \frac{30}{25} \times 100 = 120$$

इस प्रकार बाकी सब महीनों के आर्तव विचरण सूचकांक निकाले गए हैं।

उदाहरण (*Illustration*) 12 :

निम्न समंकों में, उपनति अनुपस्थित मानते हुए, ऋतुनिष्ठा (seasonality), यदि हो तो, ज्ञात कीजिए—

वर्ष	त्रैमासिक अवधि			
	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ
1970	[illegible]	82	66	70
1971	74	78	72	72
1972	80	82	66	62
1973	66	88	80	80

विभिन्न त्रैमासिक अवधियों के आर्तव-विचरण सूचकांक (seasonal variation indices) का परिकलन कीजिए।

हल (Solution) :

विभिन्न त्रैमासिक अवधियों के माध्यों में अन्तर ऋतुनिष्ठा का द्योतक होगा। अतः त्रैमासिक औसत और त्रैमासिक विचरण सूचकांकों का परिकलन किया जाएगा—

त्रैमासिक माध्यों और त्रैमासिक-विचरण सूचकांकों का परिकलन

वर्ष	त्रैमासिक अवधियाँ (Quarters)			
	प्रथम I	द्वितीय II	तृतीय III	चतुर्थ IV
1970 1971 1972 1973	74 74 80 66	82 78 82 88	66 72 66 80	70 72 62 80
योग	294	330	284	284
त्रैमासिक माध्य	73 5	82 5	71	71
आर्तव (त्रैमासिक) विचरण सूचकांक	(73·5÷74·5)×100 =98·66	(82·5÷74 5)×100 =110 74	(71÷74 5)×100 =95·30	(71÷74·5)×100 =95 30

$$\text{सामान्य माध्य (grand average)} = \frac{73{\cdot}5 + 82{\cdot}5 + 71 + 71}{4} = 74{\cdot}5$$

$$\text{आर्तव (त्रैमासिक) सूचकांक} = \frac{\text{त्रैमासिक माध्य}}{\text{सामान्य माध्य}} \times 100$$

$$\text{प्रथम तिमाही का सूचकांक} = \frac{73{\cdot}5}{74{\cdot}5} \times 100 = 98{\cdot}66$$

सभी त्रैमासिक सूचकांकों की गणना सारणी की अन्तिम पंक्ति में दिखाई गई है। तीसरे व चौथे तिमाहियों के माध्य समान हैं शेष मे अन्तर है अतः उक्त काल-श्रेणी में कुछ मात्रा में आर्तव विचरण मौजूद है।

(2) **चल-माध्य द्वारा आर्तव विचरण** (Seasonal Variations through Moving Averages)—यदि काल-श्रेणी के मूल समंको पर उपनति का भी प्रभाव हो तो चल-माध्यों का प्रयोग करके आर्तव विचरणों का मापन किया जा सकता है। इस रीति का यह विशेष लाभ है कि इसके द्वारा लगभग सभी प्रकार के विचरणों—प्रवृत्ति, अल्पकालिक परिवर्तन तथा आर्तव एवं अनियमित या दैव उच्चावचन—का विश्लेषण हो जाता है। यह रीति काल-श्रेणी विश्लेषण के योगशील निदर्श ((*additive model*) पर आधारित है।

विधि निम्न प्रकार है—

(i) समकों के चल-माध्य निकाले जाएँगे। यदि मासिक आँकड़े दिए हों तो बारह-मासिक चल-माध्य और यदि त्रैमासिक ऋतुओ के समंक ज्ञात हों तो चार त्रैमासिक (Quarterly) चल-माध्य निकालने होंगे। दोनों ही परिस्थितियो मे अवधि युग्म (even) होने के कारण चल-माध्यों को केन्द्रित किया जाएगा।

(ii) प्रत्येक मूल-समंक में से तत्संवादी चल-माध्य को घटाकर अल्पकालीन विचलन ज्ञात किए जाएँगे। $[O-T=S+C+I]$

(iii) फिर, अलग सारणी बनाकर, समान महीनों या तिमाही अवधियों के [illegible] विचलनो को जोड़कर उन विचलनों की संख्या से भाग देकर पृथक् आर्तव [illegible] लिए जाएँगे।

(iv) प्रत्येक ऋतु के अल्पकालीन विचरण में से तत्संवादी आर्तव [illegible]

अनियमित या दैव उच्चावचन (Irregular or Random Fluctuations) उपलब्ध हो जाते हैं। इस प्रकार इस रीति से अनियमित विचरणों का भी पृथक्करण (Isolation) हो जाता है। स्पष्टीकरण के लिए निम्न उदाहरण देखिए।

उदाहरण (Illustration) 13 :

निम्नलिखित आंकड़ों से आर्तव-विचरण निकालिए—

[B. Com., Meerut, 1972; Raj., 1961; M. Com., Raj., 1971; Vikram, 1968, 60; M. A., Raj., 1967]

वर्ष	ग्रीष्म	मानसून	शरद	शीत ऋतु
1	30	81	62	119
2	33	104	86	171
3	42	153	99	221
4	56	172	129	235
5	67	201	136	302

हल (Solution) :

चल-माध्यों द्वारा अल्पकालिक, ऋतुनिष्ठ व अनियमित उच्चावचनों का निर्धारण

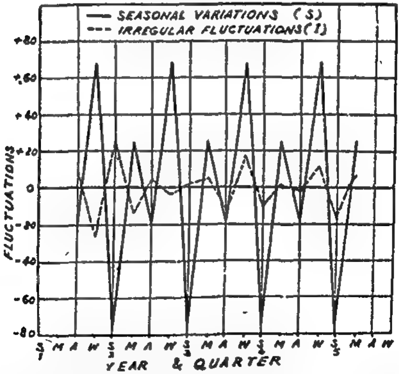
वर्ष	ऋतु	मूल-समंक (O)	आर्तव योग	केन्द्रित योग	त्रैमासिक चल-माध्य (T)	अल्प-कालिक उच्चावचन iii − vi	आर्तव विचरण (S)	अनियमित उच्चावचन (I) vii − viii
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)
1	ग्रीष्म	30						
	मानसून	81	292					
	शरद	62	295	587	73	−11	−19	+ 8
	शीत	119	318	613	77	+42	+68	− 26
2	ग्रीष्म	33	342	660	83	−50	−75	+25
	मानसून	104	394	736	92	+12	+25	−13
	शरद	86	403	797	100	− 14	−19	+ 5
	शीत	171	452	855	107	+64	+68	− 4
3	ग्रीष्म	42	465	917	115	−73	−75	+ 2
	मानसून	153	515	980	123	+30	+25	+ 5
	शरद	99	529	1044	131	−32	−19	−13
	शीत	221	548	1077	135	+86	+68	+18
4	ग्रीष्म	56	578	1144	141	−85	−75	−10
	मानसून	172	592	1177	146	+26	+25	+ 1
	शरद	129	603	1195	149	−20	−19	− 1
	शीत	235	[illegible]	1235	154	+81	+68	+13
5	ग्रीष्म	67	639	1271	159	−92	−75	−17
	मानसून	201	706	1345	168	+33	+25	+ 8
	शरद	136						
	शीत	302	...	---				

Col. viii में प्रस्तुत आर्तव विचरण निम्नांकित आर्तव विचरण सारणी में संगणित किए गए हैं।

माध्य आर्तव विचरणों की गणना

वर्ष	त्रैमासिक अवधि			
	ग्रीष्म	मानसून	शरद	शीत
1	...	...	−11	+42
2	−50	+12	−14	+64
3	−73	+30	−32	+86
4	−85	+26	−20	+81
5	−92	+33	...	...
योग	−300	+101	−77	+273
माध्य	−75	+25	−19	+68

रेखाचित्र



चित्र 9—आर्तव एवं अनियमित उच्चावचन

(3) शृंखला मूल्यानुपात विधि (Link Relatives Method)—आर्तव विचरण का विश्लेषण करने की यह एक सतोषजनक रीति है। इसके अनुसार, पहले प्रत्येक मौसम (माह या तिमाही अवधि) के शृंखलानुपात (Chain Relatives) परिगणित किए जाते हैं तथा फिर उनमें से अवशिष्ट प्रवृत्ति (residual trend) निकाल ली जाती है। इसकी क्रिया-विधि निम्नलिखित है—

(i) प्रत्येक मौसम (महीना या त्रैमासिक अवधि) का अग्र सूत्र द्वारा शृंखला (Link Relative) ज्ञात किया जाएगा—

$$\text{शृङ्खला मूल्यानुपात} = \frac{\text{प्रचलित ऋतु-मूल्य}}{\text{पिछला ऋतु-मूल्य}} \times 100$$

(ii) प्रत्येक अवधि के शृङ्खला मूल्यानुपातों का समान्तर माध्य (Average of Link *Relatives*) निकाला जाएगा।

(iii) उक्त शृङ्खला मूल्यानुपात-माध्यों को प्रथम कालावधि के आधार (100) पर शृङ्खला-सूचकांकों (Chain Relatives) में बदला जाएगा। पहली अवधि का सूचकांक 100 होगा। अगली अवधियों के शृङ्खला-सूचकांक निम्न सूत्रानुसार निकाले जाएँगे—

$$\text{प्रचलित-ऋतु का शृङ्खला-सूचकांक} = \frac{\text{चालू-ऋतु का L. R.} \times \text{गत-ऋतु का C. R.}}{100}$$

C. R. = शृङ्खला-सूचकांक (Chain Relative)

L. R. = शृङ्खला-मूल्यानुपात (Link Relative)

(iv) अन्तिम अवधि को आधार मानकर प्रथम अवधि का शृङ्खला-सूचकांक निकाला जाएगा—

$$\text{प्रथम ऋतु का संगणित C. R.} = \frac{\text{अन्तिम ऋतु का C. R.} \times \text{प्रथम ऋतु का L. R}}{100}$$

सैद्धान्तिक रूप से प्रथम अवधि का संगणित शृङ्खला-सूचकांक 100 होना चाहिए परन्तु व्यवहार में प्रवृत्ति के प्रभाव के कारण यह कुछ भिन्न होगा। इस संगणित शृङ्खला-सूचकांक में से 100 घटाकर कुल अन्तर प्राप्त हो जाएगा।

(v) प्रथम अवधि के संगणित सूचकांक और 100 के अन्तर को ऋतुओं (महीने या तिमाही अवधियाँ) की संख्या से भाग देकर प्रति मौसम औसत अन्तर निकल आएगा। इस अन्तर के लिए आर्तव शृङ्खला-सूचकांकों का निम्न प्रकार समायोजन (Adjustment) होगा—

प्रथम शृङ्खला-सूचकांक (100) में कोई संशोधन नहीं होगा।

दूसरी अवधि के शृङ्खला-सूचकांक में प्रति मौसम औसत अन्तर ($\pm d$) के बराबर समायोजन होगा।

तीसरे सूचकांक में उक्त औसत अन्तर का दुगुना ($\pm 2d$) समायोजित किया जाएगा।

चौथे सूचकांक में उक्त अन्तर के तिगुने ($\pm 3d$) का संशोधन होगा और इसी प्रकार अन्तिम कालावधि तक समायोजन होगा। यह बात ध्यान रखनी चाहिए कि यदि अन्तर ऋणात्मक है तो उसे (Correction factor) सम्बन्धित सूचकांक में जोड़ना होगा और यदि धनात्मक है तो घटाना होगा।

(vi) अन्त में, संशोधित-शृङ्खला सूचकांकों का समान्तर माध्य निकालकर उसे आधार (100) मानते हुए प्रत्येक आर्तव शृङ्खलानुपात (Seasonal Chain Relative) को प्रतिशत में बदला जाएगा। यही संशोधित शृङ्खला-सूचकांक है। इन सूचकांकों का योग '100 × ऋतुओं की संख्या' के बराबर होना चाहिए।

निम्न उदाहरण से यह रीति स्पष्ट हो जाएगी—

उदाहरण (Illustration) 14 :

निम्न समंकों से शृङ्खला-मूल्यानुपात विधि (Link Relatives Method) द्वारा संशोधित आर्तव सूचकांक परिकलित कीजिए।

त्रैमासिक समंक

तिमाही	1969	1970	1971	1972	1973
I	45	48	49	52	60
II	54	56	63	65	70
III	72	63	70	[illegible]	84
IV	60	56	65	72	66

हल (Solution) :

त्रैमासिक आर्तव विचरण सूचकांकों की गणना (शृंखला-मूल्यानुपात विधि)

वर्ष	त्रैमासिक अवधि			
	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ
1969 1970 1971 1972 1973	— 80 88 80 83	120* 117 129 125 117	133 113 111 115 120	83 89 93 96 79
शृंखला-मूल्यानुपातों का योग	331	608	592	440
शृंखला-मूल्यानुपातों का माध्य	82·8	121·6	118·4	88
शृंखला सूचकांक	100	$\frac{100\times121\cdot6}{100}=121\cdot6$	$\frac{121\cdot6\times118\cdot4}{100}=143\cdot9$	$\frac{143\cdot9\times88}{10}=126\cdot6$
संशोधित शृंखला सूचकांक	100	121·6−1·2 =120·4†	143·9−2·4 =141·5	126·6−3·6 =123·0
संशोधित आर्तव सूचकांक‡	82·5	99·3	116·7	101·5

समायोजित शृंखला सूचकांक-प्रथम त्रैमास $\frac{126\cdot6\times82\cdot8}{100}=104\cdot8$

* शृंखला-मूल्यानुपात—1969 : I —; II $\frac{54}{45}\times100=120$

III $\frac{72}{54}\times100=133$; IV $\frac{60}{72}\times100=83$

1970 : I $\frac{48}{60}\times100=80$... ...

† संशोधन कारक प्रति त्रैमास $=\frac{104\cdot8-100}{4}=\frac{4\cdot8}{4}=1\cdot2$

I. 104·8−4·8=100 ; III. 121·6−1·2×1=120·4 ;
III. 143·9−2×1·2=141·5 ; IV. 126·6−1·2×3=123·0.

‡ संशोधित शृंखला सूचकांक का माध्य $=\frac{100+120\cdot4+141\cdot5+123\cdot0}{4}=121\cdot2$

आर्तव सूचकांक—

I $\frac{100}{121\cdot2}\times100=82\cdot5$ II $\frac{120\cdot4}{121\cdot2}\times100=99\cdot3$

III $\frac{141\cdot5}{121\cdot2}\times100=116\cdot7$ IV $\frac{123}{121\cdot2}\times100=101\cdot5$.

संशोधित आर्तव सूचकांकों का योग '100× ऋतुओं की संख्या' के बराबर होना चाहिए। यहाँ पर योग 100×4=400 है।

(4) **प्रवृत्ति-अनुपात विधि (Ratio-to-Trend Method)**—यह रीति गुणनात्मक निदर्श पर आधारित है, प्रवृत्ति को अधिक महत्त्व देती है और गणन-क्रिया जटिल होने के कारण इसका प्रयोग भी कम किया जाता है। इस रीति की निम्नांकित प्रक्रियाएँ हैं—

(i) न्यूनतम वर्ग पद्धति द्वारा ऋतुकालिक अवधि (मास या त्रैमास) की दीर्घकालीन उपनति ज्ञात की जाएगी।

यदि त्रैमासिक समंक दिए हों तो प्रत्येक वर्ष के तिमाही समंकों का समान्तर माध्य (Y) निकालकर प्रवृत्ति-समीकरण का प्रयोग करना चाहिए। ये वार्षिक प्रवृत्ति-मूल्य होंगे जिन्हें त्रैमासिक प्रवृत्ति-मूल्यों में बदलने के लिए वार्षिक-परिवर्तन-दर को 4 से भाग देकर पहले त्रैमासिक-वृद्धि-दर निकाली जाएगी। फिर प्रथम वर्ष के प्रवृत्ति-मूल्य में से त्रैमासिक दर का आधा घटाकर व जोड़कर क्रमशः पहले वर्ष के दूसरे व तीसरे त्रैमास के उपनति मूल्य निकाले जायेंगे। इसके बाद इस दर के आधार पर सभी त्रैमासिक अवधियों के प्रवृत्ति-समंक प्राप्त किए जायेंगे।

यदि मासिक समंक दिए हों तो वार्षिक-दर को 12 से भाग देकर मासिक वृद्धि-दर निकाली जाएगी और प्रथम वर्ष के प्रवृत्ति-मूल्य में से इस दर का आधा घटाकर व जोड़कर पहले वर्ष के क्रमशः छठे व सातवें महीने के उपनति-मूल्य ज्ञात हो जायेंगे। शेष क्रिया पूर्ववत् होगी।

(ii) सभी अवधियों के प्रत्येक मूल-समंक को तत्संवादी ऋतु के प्रवृत्ति-मूल्य से भाग देकर तथा भजनफल को 100 से गुणा करके $\left(\frac{O}{T}\times 100\right)$ प्रवृत्ति-अनुपात (ratio-to-trend) या प्रतिशत-उपनति मूल्य (percentage trend) उपलब्ध किए जाएँगे।

(iii) प्रत्येक ऋतुकालिक अवधि के सभी वर्षों के प्रवृत्ति-अनुपातों का समान्तर माध्य निकाला जाएगा।

(iv) विभिन्न मौसमों के प्रवृत्ति-अनुपातों को आर्तव सूचकांकों में बदला जाएगा। इसके लिए सभी ऋतुकालिक प्रवृत्ति-अनुपात माध्यों को जोड़कर उनका सामान्य माध्य (General Average) निकाला जाएगा। फिर इसको आधार (100) मानकर सभी प्रवृत्ति-अनुपात-माध्यों को आर्तव सूचकांकों में बदला जायेगा। निम्न उदाहरण से यह विधि स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण (Illustration) 15 :

निम्न समंकों से प्रवृत्ति-अनुपात विधि द्वारा आर्तव सूचकांक परिगणित कीजिए—

	त्रैमासिक अवधियाँ			
वर्ष	I	II	III	IV
1969	30	40	36	34
1970	34	52	50	44
1971	40	58	54	48
1972	54	76	68	62
1973	80	92	86	82

हल (Solution) :

पहले निम्न सारणी बनाकर वार्षिक प्रवृत्ति मालूम की जाएगी। इसके लिए प्रत्येक वर्ष के त्रैमासिक समंकों का समान्तर माध्य निकालना होगा। फिर सभी वार्षिक माध्यों को Y's मानते हुए न्यूनतम वर्ग समीकरण द्वारा उपनति-मूल्य ज्ञात किये जायेंगे—

वार्षिक उपनति-मूल्यों की गणना

वर्ष	कुल मूल्य	त्रैमासिक मूल्यों का माध्य	उद्गम 1971 X	XY	X^2	वार्षिक उपनति-मूल्य $a+bX$	$=Y_c$
1969	140	35	−2	− 70	4	56+(12×−2)	32
1970	180	45	−1	− 45	1	56+(12×−1)	44
1971	200	50	0	0	0	56+ 12×0	56
1972	260	65	+1	+ 65	1	56+ 12×1	68
1973	340	85	+2	+170	4	56+ 12×2	80
$N=5$	1120	280 ΣY		+120 ΣXY	10 ΣX^2		280 ΣY_c

$$\Sigma Y = Na \qquad \therefore \quad a=\frac{\Sigma Y}{N}=\frac{280}{5}=56;$$

$$\Sigma XY = b\Sigma X^2 \qquad \therefore \quad b=\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}=\frac{120}{10}=12$$

$$\text{वार्षिक वृद्धि}=12 \qquad \therefore \quad \text{त्रैमासिक वृद्धि}=\frac{12}{4}=3$$

त्रैमासिक प्रवृत्ति-मूल्य—प्रथम वर्ष 1969 का वार्षिक उपनति-मूल्य 32 है तथा त्रैमासिक वृद्धि दर 3 है। 32 दूसरे व तीसरे त्रैमास के मध्य में आना चाहिए और इन दोनों मूल्यों का अन्तर 3 होना चाहिए अतः दूसरे त्रैमास का प्रवृत्ति मूल्य 32−(3÷2) या 30·5 और तीसरे त्रैमास का प्रवृत्ति-मूल्य 32+(3÷2) या 33·5 होगा। 1969 के पहले तिमाही का प्रवृत्ति-मूल्य (30·5−3) या 27·5 होगा। इसी प्रकार सभी अवधियों के त्रैमासिक उपनति-मूल्य (quarterly trend values) निकाल लिये जायेंगे।

त्रैमासिक प्रवृत्ति-मूल्य

वर्ष	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ	योग
1969	27 5	30·5	33·5	36 5	128
1970	39 5	42·5	45·5	48·5	176
1971	51·5	54·5	57·5	60 5	224
1972	63 5	66·5	69 5	72 5	272
1973	75 5	78·5	81·6	84·5	320
				योग*	1120

* सभी त्रैमासिक प्रवृत्ति-मूल्यों का जोड़ त्रैमासिक मूल-समंकों के कुल जोड़ के बराबर होना चाहिए इससे इस बात की जाँच हो जाती है कि प्रवृत्ति ठीक प्रकार से ज्ञात की गई है या नहीं।

प्रवृत्ति-अनुपात व आर्तव सूचकांकों का परिकलन

वर्ष	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ
1969	109·1†	131·1	107·5	93·1
1970	86·1	122·4	109·9	90·7
1971	77·7	106·4	93·9	79·3
1972	85·0	114·3	97·8	85·5
1973	106·0	117·2	105·5	97·0
योग	463·2	591·4	514·6	445·6
माध्य	92·78	118·28	102·92	89·12
आर्तव सूचकांक	92·1	117·4	102·1	88·4

प्रवृत्ति-अनुपातों का सामान्य माध्य—

$$=\frac{92{\cdot}78+118{\cdot}28+102{\cdot}92+89{\cdot}12}{4}=\frac{403{\cdot}10}{4}=100{\cdot}775$$

आर्तव सूचकांक— Qr. I. $\frac{92{\cdot}780}{100{\cdot}775}\times 100$......

त्रैमासिक आर्तव-सूचकांकों का जोड़ 400 और मासिक आर्तव सूचकांकों का योग 1200 होना चाहिए।

(5) **चल-माध्य-अनुपात विधि** (Ratio-to-Moving Average Method)—आर्तव विचरण ज्ञात करने की यह रीति इस प्रकार है—

(i) सर्वप्रथम, बारह-मासिक या चार-त्रैमासिक चल-माध्य निकाले जाते हैं। $(T\times C)$

(ii) प्रत्येक मूल समंक (O) का तत्संवादी चल-माध्य $(T\times C)$ पर अनुपात प्रतिशत के रूप में निकाला जाता है—

अर्थात् $\left[\frac{O}{T\times C}\times 100=\frac{T\times S\times C\times I}{T\times C}=S\times I\times 100\right]$

(iii) विभिन्न अवधियों (माह या त्रैमास) से सम्बन्धित चल-माध्यानुपातों के समान्तर माध्य निकाले जायेंगे। ऐसा करने से अनियमित उच्चावचन काफी सीमा तक दूर हो जाते हैं और आर्तव विचरण पृथक् हो जाते हैं।

(iv) अन्त में आर्तव विचरणों के सामान्य समान्तर-माध्य को आधार (100) मानकर सभी कालावधियों के आर्तव-सूचकांक (seasonal indices) प्राप्त कर लिए जायेंगे। नियमित आवर्तिता वाली कालश्रेणी के आर्तव विचरणों के विश्लेषण के लिए यह रीति उत्तम है।

आर्तव विचरणों के मापन के लिए प्रवृत्ति के लिए समायोजित सामान्य माध्यों (simple average adjusted for trend) का भी प्रयोग किया जा सकता है। यह रीति प्रवृत्ति-अनुपात विधि का सरल रूप है। इसके अनुसार विभिन्न वर्षों और उनकी विभिन्न ऋतुओं के समंकों के समान्तर माध्य निकाले जाते हैं। वार्षिक माध्यों के आधार पर न्यूनतम वर्ग-रीति के अनुसार वार्षिक प्रवृत्ति निकाली जाती है। फिर वार्षिक प्रवृत्ति-मूल्यों को ऋतुकालीन माध्यों के प्रवृत्ति-मूल्यों में बदला जाता है (प्रवृत्ति अनुपात-विधि की भाँति प्रत्येक ऋतु के मूल-समंकों की प्रवृत्ति नहीं निकाली जाती)। अन्त में, ऋतुकालीन माध्यों को तत्सम्बन्धी प्रवृत्ति-मूल्यों से भाग देकर और 100 से गुणा करके आर्तव विचरण सूचकांक उपलब्ध कर लिए जाते हैं।

† $\frac{O}{T}\times 100=\frac{30}{27{\cdot}5}\times 100=109{\cdot}1$; $\frac{40}{30{\cdot}5}\times 100=131{\cdot}1$ और इसी प्रकार।

उदाहरण (Illustration) 16 :

उदाहरण 13 में प्रदत्त आँकड़ों से चल माध्य-अनुपात विधि (ratio to moving averages method) द्वारा आर्तव विचरण सूचकांक परिकलित कीजिए।

हल (Solution) :

'चलमाध्य-अनुपात' द्वारा आर्तव विचरण सूचकांकों का परिगणन

वर्ष	ऋतु	मूल समंक (O)	त्रैमासिक चल-माध्य* (T)	चल माध्य-अनुपात (%) (O÷T)×100	आर्तव सूचकांक
1.	ग्रीष्म	30	—	—	39·72
	मानसून	81	—	—	118·86
	शरद	62	73	(62÷ 73)×100= 85	83·34
	शीत	119	77	(119÷ 77)×100=155	158·08
2.	ग्रीष्म	33	83	(33÷ 83)×100= 40	39·72
	मानसून	104	92	(104÷ 92)×100=113	118·86
	शरद	86	100	(86÷100)×100= 86	83·34
	शीत	171	107	(171÷107)×100=160	158 08
3.	ग्रीष्म	42	115	(42÷115)×100= 37	39·72
	मानसून	153	123	(153÷123)×100=124	118·86
	शरद	99	131	(99÷131)×100= 76	83·34
	शीत	221	135	(221÷135)×100=164	158 08
4.	ग्रीष्म	56	141	(56÷141)×100= 40	39·72
	मानसून	172	146	(172÷146)×100=118	118·86
	शरद	129	149	(129÷149)×100= 86	83·34
	शीत	235	154	(235÷154)×100=153	158 08
5.	ग्रीष्म	67	159	(67÷159)×100= 42	39·72
	मानसून	201	168	(201÷168)×100=120	118·86
	शरद	136	—	—	83·34
	शीत	302	—	—	158·08

वर्ष	त्रैमासिक अवधि				
	ग्रीष्म	मानसून	शरद	शीत	
1	—	—	85	155	
2	40	113	86	160	
3	37	124	76	164	
4	40	118	86	153	
5	42	120	—	—	
योग	159	475	333	632	योग ↓
आर्तव मध्यक	39·7	118·8	83·3	158·00	399·8
संशोधित आर्तव सूचकांक	39·72	118 86	83·34	158·08	400

* इनके परिकलन के लिए देखिए उदाहरण 13-सारणी-Col. iv से vi तक।

ऋतुकालिक विचरण सूचकांक ज्ञात करने के लिए उक्त विश्लेषण सारणी बनाई जाएगी— चारों त्रैमासों के आर्तव मध्यकों (%) का योग 399·8 है जबकि यह $100 \times 4 = 400$ होना चाहिए। अतः इन मध्यकों को $\frac{400}{399 \cdot 8} = 1 \cdot 0005$ से गुणा किया जाएगा जिससे संशोधित सूचकांकों का योग 400 हो जाए।

ग्रीष्म $39 \cdot 7 \times 1 \cdot 0005 = 39 \cdot 72$; मानसून $118 \cdot 8 \times 1 \cdot 0005 = 118 \cdot 86$; शरद $83 \cdot 3 \times 1 \cdot 0005 = 83 \cdot 34$; शीत $158 \times 1 \cdot 0005 = 158 \cdot 08$

चक्रीय विचरण का मापन
(Measurement of Cyclical Variations)

व्यावसायिक काल-समंकों मे चक्रीय विचरणों का विशेष महत्त्व है परन्तु उनका स्पष्ट मापन और पृथक्करण अत्यन्त कठिन है क्योंकि, एक तो, क्रमिक चक्र, कालावधि, आयाम, तरंग और स्वरूप में एक दूसरे से भिन्न होते हैं और दूसरे, वे अनियमित उच्चावचनों से इस प्रकार गुँथे हुए रहते हैं कि उन्हें अलग करना लगभग असम्भव ही प्रतीत होता है। अतः चक्रीय उच्चावचनों के मापन के लिए अवशिष्ट पद्धति (residual method) का प्रयोग किया जाता है।

अवशिष्ट रीति (Residual Method)—चक्रीय विचरणों के मापन की यह विधि काल-श्रेणी के गुणनात्मक निदर्श ($O = TSCI$) पर आधारित है। इसकी निम्न प्रक्रिया है—

(i) सर्वप्रथम, उपयुक्त विधि द्वारा उपनति-मूल्य (T) और ऋतु-सम्बन्धी सूचकांक (S) ज्ञात किये जाते हैं।

(ii) मूलसमंकों को प्रवृत्ति मूल्यों से भाग देकर 100 से गुणा करके प्रवृत्ति-अनुपात (प्रतिशत में) निकाल लिया जाता है—

$$\frac{O}{T} \times 100 \quad \text{या} \quad \frac{TSCI}{T} \times 100 = SCI \times 100$$

(iii) प्रवृत्ति अनुपातों (अल्पकालिक विचरणों) को आर्तव सूचकांकों से भाग करके चक्रीय उच्चावचन ज्ञात कर लिए जायेंगे—

$$\frac{SCI}{S} = CI$$

मूल समंकों को उपनति और आर्तव सूचकांकों के गुणनफल से भाग देकर भी एक साथ चक्रीय उच्चावचन निकाले जा सकते हैं—

$$\frac{T \times S \times C \times I}{T \times S} \times 100 = C \times I$$

(iv) यदि प्रदत्त काल-श्रेणी अनियमित विचरणों से प्रभावित न हो तो (iii) से प्राप्त विचरण ही अभीष्ट चक्रीय उच्चावचन होंगे। परन्तु यदि मूल समंकों मे अनियमित या दैव उच्चावचनों का प्रभाव भी निहित हो तो (iii) से प्राप्त संख्याओं के एक उपयुक्त अवधि के चल माध्य निकालकर उस प्रभाव को भी दूर कर दिया जाएगा। इस प्रकार जो विचरण प्राप्त होंगे वे चक्रीय-मूल्यानुपात (cyclical relatives) कहलाते हैं।

अनिय...

(Meas...

अनियमित उच्चावचन (I... रीति (residual method) द्वारा

(क) ... निदर्श के

विधि द्वारा चक्रीय विचरण (C) ज्ञात कर लिए जाते हैं। तत्पश्चात् निम्न सूत्र द्वारा अनियमित विचरणों का पृथक्करण किया जाता है—

$$I=\frac{O}{T\times S\times C} \text{ या } \frac{TSCI}{TSC}$$

योज्य निदर्श के आधार पर—इस आधार पर अनियमित उच्चावचन ज्ञात करने के लिए लिए पहले चल माध्य द्वारा उपनति (T) ज्ञात की जाती है; फिर मूल-समंको में से उपनति-मूल्य घटाकर ($O-T$) अल्पकालिक विचरण निकाल लिए जाते हैं। इन विचरणों की ऋतु-सम्बन्धी माध्य ज्ञात करके प्रत्येक ऋतु के आर्तव विचरण (S) प्राप्त कर लिए जाते हैं जिन्हें अल्पकालिक उच्चावचनों में से घटा दिया जाता है ($O-T-S=C+I$)। परन्तु इस प्रकार प्राप्त विचरणों मे चक्रीय विचरणों का प्रभाव रहता है।

उदाहरण 13 में सारणी के अन्तिम स्तम्भ (Col. ix) में इस विधि द्वारा अनियमित उच्चावचन ज्ञात किए गए हैं।

न्यूनतम वर्ग द्वारा उपनति-विश्लेपण

काल श्रेणी का विश्लेषण

1. योगात्मक (योज्य) निदर्श (Additive Model)—

$$O=T+S+C+I$$

2. गुणनात्मक निदर्श (Multiplicative Model)—

$$O=T\times S\times C\times I$$

रेखीय प्रवृत्ति (Linear Trend)

मूल समीकरण $Y=a+bX$

प्रसामान्य समीकरण

ऋजुरीति (आरम्भिक मूल-बिन्दु)	लघु रीति (मध्यका वर्ष मूल-बिन्दु)
$\Sigma Y=Na+b\Sigma X$	$\Sigma Y=Na$
$\Sigma XY=a\Sigma X+b\Sigma X^2$	$\Sigma XY=b\Sigma X^2$

परवलयिक (अ-रेखीय) उपनति (Parabolic or Non-linear trend)

मूल समीकरण द्विघातीय (Second Degree) $Y=a+bX+cX^2$

प्रसामान्य समीकरण

दीर्घ रीति	लघु रीति
$\Sigma Y=Na+b\Sigma X+c\Sigma X^2$	$\Sigma Y=Na+c\Sigma X^2$
$\Sigma XY=a\Sigma X+b\Sigma X^2+c\Sigma X^3$	$\Sigma XY=b\Sigma X^2$
$\Sigma X^2Y=a\Sigma X^2+b\Sigma X^3+c\Sigma X^4$	$\Sigma X^2Y=a\Sigma X^2+c\Sigma X^4$
	($\because \Sigma X=\Sigma X^3=0$)

ऋतुकालिक विचरण सूचकांक ज्ञात करने के लिए उक्त विश्लेषण सारणी बनाई जाएगी—चारों त्रैमासों के आर्तव मध्यकों (%) का योग 399·8 है जबकि यह $100 \times 4 = 400$ होना चाहिए। अत: इन मध्यकों को $\frac{400}{399 \cdot 8} = 1 \cdot 0005$ से गुणा किया जाएगा जिससे संशोधित सूचकांकों का योग 400 हो जाए।

ग्रीष्म $39 \cdot 7 \times 1 \cdot 0005 = 39 \cdot 72$; मानसून $118 \cdot 8 \times 1 \cdot 0005 = 118 \cdot 86$; शरद $83 \cdot 3 \times 1 \cdot 0005 = 83 \cdot 34$; शीत $158 \times 1 \cdot 0005 = 158 \cdot 08$

चक्रीय विचरण का मापन
(Measurement of Cyclical Variations)

व्यावसायिक काल-समंकों में चक्रीय विचरणों का विशेष महत्त्व है परन्तु उनका स्पष्ट मापन और पृथक्करण अत्यन्त कठिन है क्योंकि, एक तो, क्रमिक चक्र, कालावधि, आयाम, तरंग और स्वरूप में एक दूसरे से भिन्न होते हैं और दूसरे, वे अनियमित उच्चावचनों से इस प्रकार गुँथे हुए रहते हैं कि उन्हें अलग करना लगभग असम्भव ही प्रतीत होता है। अत: चक्रीय उच्चावचनों के मापन के लिए अवशिष्ट पद्धति (residual method) का प्रयोग किया जाता है।

अवशिष्ट रीति (Residual Method)—चक्रीय विचरणों के मापन की यह विधि काल-श्रेणी के गुणनात्मक निदर्श ($O = TSCI$) पर आधारित है। इसकी निम्न प्रक्रिया है—

(i) सर्वप्रथम, उपयुक्त विधि द्वारा उपनति-मूल्य (T) और ऋतु-सम्बन्धी सूचकांक (S) ज्ञात किये जाते हैं।

(ii) मूलसमंकों को प्रवृत्ति मूल्यों से भाग देकर 100 से गुणा करके प्रवृत्ति-अनुपात (प्रतिशत में) निकाल लिया जाता है—

$$\frac{O}{T} \times 100 \quad \text{या} \quad \frac{TSCI}{T} \times 100 = SCI \times 100$$

(iii) प्रवृत्ति अनुपातों (अल्पकालिक विचरणों) को आर्तव सूचकांकों से भाग करके चक्रीय उच्चावचन ज्ञात कर लिए जायेंगे—

$$\frac{SCI}{S} = CI$$

मूल समंकों को उपनति और आर्तव सूचकांकों के गुणनफल से भाग देकर भी एक साथ चक्रीय उच्चावचन निकाले जा सकते हैं—

$$\frac{T \times S \times C \times I}{T \times S} \times 100 = C \times I$$

(iv) यदि प्रदत्त काल-श्रेणी अनियमित विचरणों से प्रभावित न हो तो (iii) से प्राप्त विचरण ही अभीष्ट चक्रीय उच्चावचन होंगे। परन्तु यदि मूल समंकों में अनियमित या दैव उच्चावचनों का प्रभाव भी निहित हो तो (iii) से प्राप्त संख्याओं के एक उपयुक्त अवधि के चल माध्य निकालकर उस प्रभाव को भी दूर कर दिया जाएगा। इस प्रकार जो विचरण प्राप्त होंगे वे चक्रीय-मूल्यानुपात (cyclical relatives) कहलाते हैं।

अनियमित उच्चावचनों का मापन
(Measurement of Irregular Fluctuations)

अनियमित उच्चावचन (I) आकस्मिक एवं अप्रत्याशित होते हैं। इनका मापन भी अवशिष्ट रीति (residual method) द्वारा निम्न दो प्रकार से किया जा सकता है—

(क) गुणनात्मक निदर्श के आधार पर—इस आधार पर सर्वप्रथम T, S और उपर्युक्त

विधि द्वारा चक्रीय विचरण (C) ज्ञात कर लिए जाते हैं। तत्पश्चात् निम्न सूत्र द्वारा अनियमित विचरणों का पृथक्करण किया जाता है—

$$I=\frac{O}{T\times S\times C} \text{ या } \frac{TSCI}{TSC}$$

योज्य निदर्श के आधार पर—इस आधार पर अनियमित उच्चावचन ज्ञात करने के लिए लिए पहले चल माध्य द्वारा उपनति (T) ज्ञात की जाती है; फिर मूल-समंकों में से उपनति-मूल्य घटाकर ($O-T$) अल्पकालिक विचरण निकाल लिए जाते हैं। इन विचरणों की ऋतु-सम्बन्धी माध्य ज्ञात करके प्रत्येक ऋतु के आर्तव विचरण (S) प्राप्त कर लिए जाते हैं जिन्हें अल्पकालिक उच्चावचनों मे से घटा दिया जाता है ($O-T-S=C+I$)। परन्तु इस प्रकार प्राप्त विचरणों मे चक्रीय विचरणो का प्रभाव रहता है।

उदाहरण 13 में सारणी के अन्तिम स्तम्भ (Col. ix) में इस विधि द्वारा अनियमित उच्चावचन ज्ञात किए गए हैं।

न्यूनतम वर्ग द्वारा उपनति-विश्लेषण

काल श्रेणी का विश्लेषण

1. योगात्मक (योज्य) निदर्श (Additive Model)—

$$O=T+S+C+I$$

2. गुणनात्मक निदर्श (Multiplicative Model)—

$$O=T\times S\times C\times I$$

रेखीय प्रवृत्ति (Linear Trend)

मूल समीकरण $Y=a+bX$

प्रसामान्य समीकरण

ऋजुरीति (आरम्भिक मूल-बिन्दु)	लघु रीति (मध्यका वर्ष मूल-बिन्दु)
$\Sigma Y=Na+b\Sigma X$	$\Sigma Y=Na$
$\Sigma XY=a\Sigma X+b\Sigma X^2$	$\Sigma XY=b\Sigma X^2$

परवलयिक (अ-रेखीय) उपनति (Parabolic or Non-linear trend)

मूल समीकरण द्विघातीय (Second Degree) $Y=a+bX+cX^2$

प्रसामान्य समीकरण

दीर्घ रीति	लघु रीति
$\Sigma Y=Na+b\Sigma X+c\Sigma X^2$	$\Sigma Y=Na+c\Sigma X^2$
$\Sigma XY=a\Sigma X+b\Sigma X^2+c\Sigma X^3$	$\Sigma XY=b\Sigma X^2$
$\Sigma X^2Y=a\Sigma X^2+b\Sigma X^3+c\Sigma X^4$	$\Sigma X^2Y=a\Sigma X^2+c\Sigma X^4$
	($\because \Sigma X=\Sigma X^3=0$)

ऋतुकालिक विचरण सूचकांक ज्ञात करने के लिए उक्त विश्लेषण सारणी बनाई जाएगी—चारों त्रैमासों के आर्तव मध्यकों (%) का योग 399·8 है जबकि यह $100 \times 4 = 400$ होना चाहिए। अतः इन मध्यकों को $\frac{400}{399 \cdot 8} = 1 \cdot 0005$ से गुणा किया जाएगा जिससे संशोधित सूचकांकों का योग 400 हो जाए।

ग्रीष्म $39 \cdot 7 \times 1 \cdot 0005 = 39 \cdot 72$; मानसून $118 \cdot 8 \times 1 \cdot 0005 = 118 \cdot 86$; शरद $83 \cdot 3 \times 1 \cdot 0005 = 83 \cdot 34$; शीत $158 \times 1 \cdot 0005 = 158 \cdot 08$

चक्रीय विचरण का मापन
(Measurement of Cyclical Variations)

व्यावसायिक काल-समंको मे चक्रीय विचरणों का विशेष महत्व है परन्तु उनका स्पष्ट मापन और पृथक्करण अत्यन्त कठिन है क्योंकि, एक तो, क्रमिक चक्र, कालावधि, आयाम, तरंग और स्वरूप में एक दूसरे से भिन्न होते है और दूसरे, वे अनियमित उच्चावचनों से इस प्रकार गुँथे हुए रहते है कि उन्हें अलग करना लगभग असम्भव ही प्रतीत होता है। अतः चक्रीय उच्चावचनों के मापन के लिए अवशिष्ट पद्धति (residual method) का प्रयोग किया जाता है।

अवशिष्ट रीति (Residual Method)—चक्रीय विचरणों के मापन की यह विधि काल-श्रेणी के गुणनात्मक निदर्श ($O = TSCI$) पर आधारित है। इसकी निम्न प्रक्रिया है—

(i) सर्वप्रथम, उपयुक्त विधि द्वारा उपनति-मूल्य (T) और ऋतु-सम्बन्धी सूचकांक (S) ज्ञात किये जाते हैं।

(ii) मूलसमंकों को प्रवृत्ति मूल्यों से भाग देकर 100 से गुणा करके प्रवृत्ति-अनुपात (प्रतिशत में) निकाल लिया जाता है—

$$\frac{O}{T} \times 100 \quad \text{या} \quad \frac{TSCI}{T} \times 100 = SCI \times 100$$

(iii) प्रवृत्ति अनुपातों (अल्पकालिक विचरणों) को आर्तव सूचकांकों से भाग करके चक्रीय उच्चावचन ज्ञात कर लिए जायेंगे—

$$\frac{SCI}{S} = CI$$

मूल समंकों को उपनति और आर्तव सूचकांको के गुणनफल से भाग देकर भी एक साथ चक्रीय उच्चावचन निकाले जा सकते हैं—

$$\frac{T \times S \times C \times I}{T \times S} \times 100 = C \times I$$

(iv) यदि प्रदत्त काल-श्रेणी अनियमित विचरणो से प्रभावित न हो तो (iii) से प्राप्त विचरण ही अभीष्ट चक्रीय उच्चावचन होंगे। परन्तु यदि मूल समंको में अनियमित या दैव उच्चावचनो का प्रभाव भी निहित हो तो (iii) से प्राप्त संख्याओं के एक उपयुक्त अवधि के चल माध्य निकालकर उस प्रभाव को भी दूर कर दिया जाएगा। इस प्रकार जो विचरण प्राप्त होंगे वे चक्रीय-मूल्यानुपात (cyclical relatives) कहलाते हैं।

अनियमित उच्चावचनों का मापन
(Measurement of Irregular Fluctuations)

अनियमित उच्चावचन (I) आकस्मिक एवं अप्रत्याशित होते हैं। इनका मापन भी अवशिष्ट रीति (residual method) द्वारा निम्न दो प्रकार से किया जा सकता है—

(क) गुणनात्मक निदर्श के आधार पर—इस आधार पर सर्वप्रथम T, S और उपर्युक्त

विधि द्वारा चक्रीय विचरण (C) ज्ञात कर लिए जाते हैं। तत्पश्चात् निम्न सूत्र द्वारा अनियमित विचरणों का पृथक्करण किया जाता है—

$$I=\frac{O}{T\times S\times C} \text{ या } \frac{TSCI}{TSC}$$

योज्य निदर्श के आधार पर—इस आधार पर अनियमित उच्चावचन ज्ञात करने के लिए लिए पहले चल माध्य द्वारा उपनति (T) ज्ञात की जाती है; फिर मूल-समंकों में से उपनति-मूल्य घटाकर ($O-T$) अल्पकालिक विचरण निकाल लिए जाते हैं। इन विचरणों की ऋतु-सम्बन्धी माध्य ज्ञात करके प्रत्येक ऋतु के आर्तव विचरण (S) प्राप्त कर लिए जाते हैं जिन्हे अल्पकालिक उच्चावचनो मे से घटा दिया जाता है ($O-T-S=C+I$)। परन्तु इस प्रकार प्राप्त विचरणों में चक्रीय विचरणों का प्रभाव रहता है।

उदाहरण 13 मे सारणी के अन्तिम स्तम्भ (Col. ix) में इस विधि द्वारा अनियमित उच्चावचन ज्ञात किए गए हैं।

न्यूनतम वर्ग द्वारा उपनति-विश्लेषण

काल श्रेणी का विश्लेषण

1. योगात्मक (योज्य) निदर्श (Additive Model)—

$$O=T+S+C+I$$

2. गुणनात्मक निदर्श (Multiplicative Model)—

$$O=T\times S\times C\times I$$

रेखीय प्रवृत्ति (Linear Trend)

मूल समीकरण $Y=a+bX$

प्रसामान्य समीकरण

ऋजुरीति (आरम्भिक मूल-बिन्दु)	लघु रीति (मध्यका वर्ष मूल-बिन्दु)
$\Sigma Y=Na+b\Sigma X$	$\Sigma Y=Na$
$\Sigma XY=a\Sigma X+b\Sigma X^2$	$\Sigma XY=b\Sigma X^2$

परवलयिक (अ-रेखीय) उपनति (Parabolic or Non-linear trend)

मूल समीकरण द्विघातीय (Second Degree) $Y=a+bX+cX^2$

प्रसामान्य समीकरण

दीर्घ रीति	लघु रीति
$\Sigma Y=Na+b\Sigma X+c\Sigma X^2$	$\Sigma Y=Na+c\Sigma X^2$
$\Sigma XY=a\Sigma X+b\Sigma X^2+c\Sigma X^3$	$\Sigma XY=b\Sigma X^2$
$\Sigma X^2Y=a\Sigma X^2+b\Sigma X^3+c\Sigma X^4$	$\Sigma X^2Y=a\Sigma X^2+c\Sigma X^4$
	($\because \Sigma X=\Sigma X^3=0$)

प्रश्न

1. काल-श्रेणी क्या है ? दीर्घकालीन प्रवृत्ति, मौसमी परिवर्तनों तथा चक्रीय उच्चावचनों में अन्तर स्पष्ट कीजिए। किन्हीं दिए गए समंकों में दीर्घकालीन प्रवृत्ति का माप आप किस प्रकार करेंगे ?
What is a time series ? Distinguish between secular trend, seasonal variations and cyclical fluctuations. How would you measure secular trend in any given data ?
[M. A., Meerut, 1973, 1967 ; M. Com., Raj., 1973 ; Vikram, 1972 ; B. Com., Raj., 1972, 1966]

2. (क) एक काल-श्रेणी में विचरण के संघटकों का उल्लेख कीजिए और उदाहरण सहित उनके प्रमुख अभिलक्षणों को स्पष्ट कीजिए।
Name the components of variation in a time series and explain their salient features with illustrations. *[B. Com., Bombay, April, 1973]*
(ख) काल-श्रेणी के विभिन्न संघटक कौन-कौन से हैं ? (i) किसी काल-श्रेणी में उपनति का प्रभाव पृथक् करने; और (ii) ऋतु-सम्बन्धी विचरणों का माप करने की एक रीति का वर्णन कीजिए।
What are the various components of a time series ? Describe one method of (i) eliminating the effect of trend from a time series, and (ii) measuring seasonal variations. *[B. Com., Punjab, 1972]*

3. (क) काल-श्रेणी क्या है ? उपनति-आकलन की चल-माध्य विधि को स्पष्ट कीजिए।
What is a time series ? Explain the moving average method of estimating trend. *[B. Com., Hons., Delhi, 1970]*
(ख) चल-माध्य क्या होती है ? आर्थिक काल-समंकों के विश्लेषण के विभिन्न चरणों में यह प्रविधि किस प्रकार उपयोगी होती है ? वर्णन कीजिए।
What is a moving average ? Describe how this technique is useful in different stages of analysis of economic time series data ? *[U. P. C. S., 1970]*

4. (क) काल-श्रेणी के विश्लेषण से क्या अभिप्राय है ? व्यापार में ऐसे विश्लेषण का महत्त्व पूर्णतया स्पष्ट कीजिए।
What is meant by time series analysis ? Indicate fully the importance of such analysis in business. *[B. A. II, Raj., 1972]*
(ख) काल-श्रेणी के विभिन्न संघटकों को पृथक् करने की विधियों को विकसित करने में जो मान्यताएँ अन्तर्निहित हैं उन्हें स्पष्ट कीजिए। उपनति-निर्धारण में चल-माध्यों के प्रयोग की आलोचना कीजिए और चल-माध्यों द्वारा उपनति-पृथक्करण का अन्य संघटकों पर प्रभाव स्थापित कीजिए।
Explain the assumptions made for developing methods for isolating different components of a time series. Criticize the use of moving averages for determining trend, and establish the effects of eliminating trend by moving averages on the other components of a time series. *[I. A. S., 1968]*

5. (क) काल-श्रेणी के कौन-कौन से संघटक हैं ? काल-श्रेणी का विश्लेषण करने में चल-माध्यों की महत्ता और परिसीमाओं पर प्रकाश डालिए।
What are the components of a time series ? Bring out the significance of moving averages in analysing a time series and point out its limitations.
[M. A., Alld., 1968 ; I. C. W. A., 1968]
(ख) काल माला के कौन-कौन से संघटक होते हैं ? न्यूनतम-वर्ग-रीति द्वारा आप उपनति-मूल्य कैसे ज्ञात करेंगे। संख्यात्मक उदाहरण देकर समझाइए।
What are the components of a time series ? How would you find out the trend values in a time series by the method of least squares ? Illustrate your answer by a numerical example.
[M. Com., Vikram, 1972 ; Agra, 1968 ; M. A., Gorakhpur, 1967 ; Saugar, 1968]

6. काल-श्रेणी के संघटक क्या हैं और क्यों ? क्या प्रत्येक संघटक का हेतु शक्तियों का अलग स्वतन्त्र समूह होता है ? व्यापार चक्र को कैसे निकालते हैं ?
What are the components of a time series and why ? Is each component caused by a separate and independent set of forces ? How is the trade cycle isolated ?
[M. A., Meerut, 1969]

7. (i) एक काल-श्रेणी के ऋतुनिष्ठ विचरण का क्या अर्थ है ? उसे मूल्यांकित करने की विभिन्न रीतियों का वर्णन कीजिए और इन विधियों के तुलनात्मक गुणों की समीक्षा कीजिए।
What is seasonal variation of a time series ? Describe the different methods you know to evaluate it, and examine their relative merits. [*U. P. C. S., 1966*]

(ii) (क) क्या आर्तव विचरण चक्रीय विचरण होता है ? व्यवसाय-चक्र और आर्तव-चक्र में क्या अन्तर है ?
(a) Is seasonal variation a cyclical variation ? What is the difference between business cycle and a seasonal cycle ?
(ख) काल-श्रेणी विश्लेषण कार्य-कारण विश्लेषण में सहायक नहीं होता और निरर्थक है। विवेचना कीजिए।
(b) 'Time series analysis does not help causal analysis and is of little use.' Discuss. [*M. A., Meerut, 1968*]

8. एक काल-श्रेणी क्या होती है ? निम्नलिखित में से प्रत्येक को आप काल-श्रेणी के किस विशिष्ट परिवर्तन के साथ सम्बन्धित करेंगे ? कारण सहित बताइए—
What is a time series ? With which characteristic movement of a time series would you mainly associate each of the following :
(i) अवसाद (recession) (ii) फसल-कटाई के समय रोजगार में वृद्धि (an increase in employment during harvest time); (iii) विज्ञान में प्रगति होने पर मृत्यु-दर में कमी (decline in mortality rate due to improvements in science); (iv) इस्पात-उद्योग में हड़ताल (a steel strike); (v) कृत्रिम रेशों की माँग में निरन्तर होने वाली वृद्धि (a continually increasing demand for synthetic fibres)। [*B. A., Bombay, 1968*]
[(i) *C* (ii) *S* (iii) *T* (iv) *I* (v) *T*].

9. निम्नलिखित में से प्रत्येक को आप काल-श्रेणी के किस विशिष्ट घटक के साथ सम्बन्धित करेंगे ? कारण सहित बताइए—
With which component of a time series would you mainly associate each of the following ? Give reasons :
(i) समृद्धि का युग (An era of prosperity)।
(ii) दिवाली के अवसर पर सुपर बाजार में अत्यधिक बिक्री (Heavy sales at the super bazar on the occasion of Diwali)।
(iii) गत तीन वर्षीय अवधि में एक नगर में मासिक वर्षा की मात्रा (The mean monthly rainfall 'in inches' in a city over a three year period)।
(iv) लोको कर्मचारियों की आकस्मिक हड़ताल से रेल यातायात का अस्त-व्यस्त होना (Dislocation of railway transport due to wild-cat strike by locomen in Dec., 1973)।
(v) भारत में चीनी की लगातार बढ़ती हुई माँग (Constantly rising demand for sugar in India)।
(vi) अक्तूबर 1973 में अरब-इजराइली युद्ध के कारण पैट्रोलियम की कीमतों में भारी वृद्धि (Price-hike in petroleum products due to Arab-Israeli war in Oct., 1973)।
(vii) फरवरी में क्रियाशील दिनों की कम संख्या के कारण उस माह में कम उत्पादन (Production during February due to smaller number of working days of that month)।
[(i) *C* (ii) *S* (iii) *S* (iv) *I* (v) *T* (vi) *I* (vii) *Calender Variation*].

दीर्घकालीन उपनति का माप (Measurement of Secular Trend)—

10. निम्न आँकड़ों से, दीर्घकालिक उपनति का मापन कीजिए (क) मुक्त-हस्त वक्र रीति द्वारा (by drawing a freehand curve) तथा (ख) अर्द्धमध्यक विधि द्वारा (by semi-averages method)—

वर्ष :	1963	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
बिक्री (लाख रु०) :	18	25	21	15	26	31	30	20	35	32	23

[(ख) अर्द्ध-मध्यक 21 व 28; वर्ष 1965 व 1971 से सम्बद्ध]

11. अग्रलिखित समंक संयुक्त राज्य अमेरिका (U.S.A.) में कुछ वर्षों के लिए माल यातायात के वार्षिक रेलवे-मील (annual railway-miles) से सम्बन्धित हैं—

Year	Railway-miles (millions)	Year	Railway-miles (millions)
1911	626 5	1919	560·5
1912	612·3	1920	619·5
1913	643 8	1921	519 8
1914	607·9	1922	544·5
1915	552 0	1923	631·1
1916	632·3	1924	590 9
1917	646 4	1925	602·9
1918	628·4		

(i) अर्द्ध-मध्यक रीति द्वारा उक्त समको को सरल रेखीय प्रवृत्ति प्रदान कीजिए।

(ii) इस प्रकार परिकलित प्रवृत्ति से 1933 के लिए सम्भाव्य सामान्य रेलवे-मील का पूर्वानुमान लगाइए। (वास्तविक संख्या 368·7 थी)। विषमता को स्पष्ट कीजिए।

(i) Fit a straight-line trend to the above data by semi-averages method.

(ii) From the trend thus computed, project the likely railway mileage for 1933 (the actual figure was 368 7 mlns). Explain the difference.

[*B. Com., (Hons.) Delhi, 1966*]

[Plot semi-averages 617·3 (on 1914) and 581·3 (on 1922). For 1933 the estimate is 531·5]

12. निम्न समको को उपनति प्रदान करने के लिए अर्द्ध-मध्यक रीति का प्रयोग कीजिए और 1970 के लिए सम्भावित मूल्य अनुमानित कीजिए—

Apply the method of semi-averages for determining trend to the following data and estimate the value for 1970—

Year :	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Sales ('000 Units) :	20	24	22	30	28	32

यदि 1970 के लिए वास्तविक बिक्री 35,000 इकाइयाँ हो तो पूर्वानुमानित और वास्तविक संख्या में अन्तर किन कारणों से हो सकता है ? स्पष्ट कीजिए।

If the actual figure of sales for 1970 is 35,000 units, how do you account for the difference between the figure you obtain and the actual figure given to you ?

[*M. B. A., Delhi, 1970; B. Com., Kurukshetra, 1974*]

[1964 → 22, 1967 → 30 ; 1970—38,000]

13. त्रिवर्षीय चल-माध्य से उपनति का मूल्य ज्ञात कीजिए तथा उन्हें ग्राफ पेपर पर अंकित कीजिए—

Find out the value of the trend by three-yearly moving averages and plot them on a graph paper—

Year :	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Value :	10	15	12	18	15	22	19	24	20	26	22	30	25

[*B. Com., Meerut, 1977*]

[—, 12·3, 15, 15, 18·3, 18·7, 21·7, 21, 23 3, 22·7, 26, 25·7, —]

14. निम्नांकित समको का लेखाचित्र पर निरूपण कीजिए। पंचवर्षीय गतिमान (चल) माध्य निकालिए तथा उसी पत्र पर उपनति को दिखलाइए—

Plot the following data on a graph paper. Calculate 5-yearly moving averages and show trend values on the same graph paper—

Year :	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949
Index No. :	105	115	100	90	80	95	85	75	60	65

[*B. Com , Meerut 1971*]

[—, —, 98, 96, 90, 85, 79, 76, —, —]

15. चल-माध्य रीति द्वारा बैंक समाशोधनों की प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए (पंचवर्षीय चक्र मानकर)—

Determine the trend of bank clearings by moving averages method (assuming five yearly cycle)—

Year :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Bank Clearings (Crore Rs.) :	53	79	76	66	69	94	105	87	79	104	97	92

[*B. Com., Bombay, 1970*]

[—, —, 68 6, 76 8, 82, 84 2, 86 8, 93·8, 94 4, 91·8, —, —]

16. निम्नांकित ग्राम-धंधों के लिए पंचवर्षीय चल-माध्य ज्ञात कीजिए और प्रवृत्ति प्रदर्शित करने के लिए उन्हें एक ही बिन्दु रेखाचित्र पर मूल समकों के साथ अंकित कीजिए—

Calculate the five-yearly moving averages for the following time series and plot them with the original figures on the same graph to show its secular trend—

Year :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Annual Figures :	110	104	98	105	109	120	115	110	114	122

[B. Com., Banaras, 1975]

[—, —, 175·3, 178·7, 182·3, 186 3, 189·3, 193 7, —, —]

17. निम्न काल-श्रेणी के लिए पचवर्षीय चल-माध्य निकालिए और उन्हे इसी बिन्दुरेखीय चित्र पर मूल संख्याओ के साथ दिखाइए—

Calculate the five-yearly moving averages for the following time series and plot them with the original figures on the same graph—

Analysis of Time Series

Year	*Annual Figure*	*Year*	*Annual Figure*
1	110	11	130
2	104	12	127
3	98	13	122
4	105	14	118
5	109	15	130
6	120	16	140
7	115	17	135
8	110	18	130
9	114	19	127
10	122	20	135

[B. Com., Meerut, 1969]

[—, —, 105·2, 107·2, 109 4, 111·8, 113·6, 116·2, 118·2, 120 6, 123, 123 8, 125 4, 127·4, 129, 130·6, 132 4, 133 4, —, —]

18. एक देश मे 1929—44 में व्यावसायिक एव औद्योगिक प्रतिष्ठानो की असफलता के निम्नलिखित आकड़ो से सात वर्षीय चल-माध्य परिकलित कीजिए। मूल समको एवं प्रवृत्ति-मूल्यों को रेखाचित्र पर भी दर्शाइए—

Calculate seven-yearly moving averages from the following data relating to failure of commercial and industrial establishments in a country. Also show original values and trend-values on a graph paper—

Year :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
No. of Unsuccessful Establishments :	23	26	28	32	20	12	12	10	9	13	11	14	12	9	3	1

[C. A., Nov., 1964]

[—, —, —, 21 9, 20, 17·6, 15·4, 12·4, 11 6, 11 1, 10 1, 9, —, —, —]

19. निम्न समको से चार साप्ताहिक चल-माध्य का प्रयोग करते हुए उपनति का परिगणन कीजिए—

Calculate trend from the following data by using four-weekly moving averages—

Week :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Production :	82	73	74	75	73	72	76	76	74	75
Week :	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Production :	75	73	75	76	75	75	78	76	78	79

[B. Com., Bombay, April, 1971]

[—, —, 74·9, 73·6, 73·8, 74·1, 74·4, 74·9, 75·1, 74·6, 74·4, 74·6, 74·8, 75, 75·6, 76, 76 4, 77·3, —, —]

20. निम्नलिखित उत्पादन-सूचकाको से दस-वर्षीय चल-माध्य निकालिए और उन्हे मूल समको के साथ रेखाचित्र पर प्रदर्शित कीजिए—

From the following indices of production, compute ten-yearly moving averages and represent them graphically along with original figures.

Year	*Index No.*	*Year*	*Index No.*	*Year*	*Index No.*	*Year*	*Index No.*
1	165	7	180	13	280	19	256
2	178	8	187	14	351	20	304
3	236	9	210	15	320	21	291
4	213	10	237	16	370	22	277
5	180	11	203	17	325	23	274
6	163	12	215	18	325	24	272

[......196 58, 200 5, 204·6, 213·7, 227 6, 244·95, 262·55, 278·75, 290, 295 65, 303 4, 310·9, 313 7, 309 45...]

21. नीचे दिए हुए कपड़े के लाख गजों में उत्पादन के आधार पर न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए—

Given below are the figures of the manufacture of cloth in lakhs of yards. Calculate the values of trend by the method of least squares—

Year :	1961	1962	1963	1964	1965
Production (in lakh yards) :	4	6	3	5	7

[$Y=5+0{\cdot}5X$, Origin—1963, Trend 4, 4·5, 5, 5·5, 6] [*B. Com., Meerut, 1973*]

22. निम्न समंकों को न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखा उपनति प्रदान कीजिए : (i) 1972 को उद्गम वर्ष मानकर और (ii) 1975 को मूल बिन्दु मानकर। 1979 के लिए उपनति मूल्य का अनुमान लगाइए—

Fit a straight line trend to the following data by the method of least squares taking (i) 1972 as origin, and (ii) 1975 as origin. Estimate the trend value for 1979—

Year :	1973	1974	1975	1976	1977
Sales (lakh Rs.) :	45	56	78	46	75

[Trend : 50, 55, 60, 65, 70 : (i) $Y=45+5X$; (ii) $Y=60+5X$, 1979—80]

23. अल्पतम वर्ग रीति द्वारा निम्न समंकों से उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए और दोनों को रेखाचित्र पर अंकित कीजिए—

Determine the trend values from the following data by least square method and plot both sets of figures on a graph paper—

Year :	1966	1967	1968	1969	1970
Sales ('000 Rs.) :	35	56	79	80	40

[$Y=58+3{\cdot}4X$, 51·2, 54·6, 58, 61·4, 64·8] [*M. Com., Raj., 1972*]

24. उपनति से आप क्या समझते हैं ? निम्न आँकड़ों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए और वास्तविक मूल्यों तथा उपनति मूल्यों को एक ग्राफ-पेपर पर अंकित कीजिए—

What do you understand by 'trend'? Calculate trend values by the method of least squares from the data given below and plot the original data and trend values on a graph paper—

Year :	1970	1971	1972	1973	1974
Production of Wheat (in '000 tonnes) :	35	40	36	46	52

[$Y=41{\cdot}8+4X$, Origin 1972=0; 33·8, 37·8, 41·8, 45·8, 49·8] [*M. Com., I, III Sem., Raj., Dec., 1976*]

25. निम्नांकित से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए—

From the following data determine the long term trend, using the method of least squares—

Year :	1966–67	67–68	68–69	69–70	1970–71
Crores of lbs :	83	92	71	90	169

[$Y=101+17X$; Origin 1968–69=0; Trend. 67, 84, 101, 118, 135] [*M. Com. Alld., 1972, B. Com., Punjab, 1966*]

26. निम्नलिखित श्रेणी से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रवृत्ति-मूल्य ज्ञात करके उन्हें बिन्दुरेखापत्र पर अंकित कीजिए—

Find out the trend values from the following series by the method of least squares and plot these values on the graph—

Year :	1954	1955	1956	1957	1958	1959
Production (in crores of lbs) :	7	10	12	14	17	24

[$Y_{1956-57}=14+1{\cdot}543X$; 6·29, 9·37, 12·46, 15·54, 18·63, 21·71] [*B. Com., Kurukshetra, 1975*]

27. निम्न समंकों को न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखीय उपनति प्रदान कीजिए। दोनों श्रेणियों को रेखाचित्र पर दर्शाइए और 1974 के उत्पादन का अनुमान लगाइए—

Fit a straight line trend to the following data by least squares method, show the trend line along with the original data series on a graph paper and estimate the production in 1974—

Year :	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
Production (Quintals) :	80	90	92	83	94	99	92

[$Y_{1970}=90+2X$; $Y_{1974}=98$] [*M. A., Gorakhpur, 1975*]

28. एक चीनी मिल के उत्पादन के समंक नीचे दिए गए हैं। न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखीय प्रवृत्ति प्रदान कीजिए, उपनति-मूल्यों को सारणीबद्ध कीजिए तथा प्रवृत्ति रेखा दर्शाइए। चीनी उत्पादन के वृद्धि की मासिक दर कितनी है ?—
From the following figures of output of a sugar factory, fit a linear trend by least squares and show the trend-line on graph paper. What is the monthly increase in production.

Year :	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
Production ('000 mds.) :	77	88	94	85	91	98	90

[*B. Com., Delhi, 1976* ; *M. A., Kanpur, 1972* ; *Rohil., 1977*]
[$Y=89+2X$; 83, 85......95 ; 167 mds]

29. निम्न काल-श्रेणी की समंक-सामग्री से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखा उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए और बताइए कि इस आधार पर 1971 वर्ष में अनुमानित उपार्जन कितना होगा—
From the data relating to the following time-series, determine linear trend values by least squares method and estimate the earnings for 1971—

Year :	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
Earnings (lakh Rs) :	90	80	90	92	83	94	99	92

[85·333, 86·667, 88, 89·333, 90·667, 92, 93·333, 94·667 ; 1971—96] [*B Com., Raj., 1971*]

30. किसी चीनी मिल के उत्पादन समंक निम्नांकित हैं। न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखीय उपनति-मूल्य ज्ञात ... —
... of a sugar factory. Find the straight ... o not plot the trend values on the graph).

Year :	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Production ('000 Quintals) :	38	40	65	72	69	60	87	95

[*B. Com. Kurukshetra, 1976* ; *Delhi, 1972* : *Bombay 1967*]
[$Y_{1964\cdot65}=65{\cdot}75+3{\cdot}67X$; 40·08, 47 42, 54·75, 62·08, 69 42, 76 75, 84·08, 91 42]

31. 1968–75 अवधि में एक वस्तु की निर्यातित इकाइयों की संख्या नीचे दी गई है। समंकों को सरल रेखा उपनति प्रदान कीजिए। प्रदत्त समंकों और उपनति रेखा को बिन्दुरेख पर प्रांकित कीजिए। 1976 के लिए सर्वोत्तम अनुमान लगाइए—
The number of units of a product, in thousands, exported during 1968-75 are given below. Fit a straight line trend to the data. Also find an estimate for the year 1976—

Year :	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
No. of units (000's) :	12	13	15	16	19	23	21	23

[*M. B. M., Banaras, 1976* ; *B. Com. Bombay, 1970*]
[$Y=17{\cdot}5+{\cdot}89X$; 11·27, 13 05, 14·83, 16·61, 18·39, 20·17, 21·95, 23 73; $Y_{1976}=25{\cdot}531$]

32. निम्नलिखित काल-श्रेणी की समंकसामग्री से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखा उपनति-मूल्य ज्ञात कीजिए और बताइए कि इस आधार पर 1970 वर्ष का अनुमानित उपार्जन कितना होगा—
From the following time-series, determine the linear trend-values by least squares method and estimate the earnings for 1970—

Year :	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
Earnings (Rs) :	13·4	16·2	19·2	22 7	25·1	29·5	33·5	37 8	40 6

[$Y_{1970}=43\ 85$] [*B Com., Raj, 1969*]

33. निम्नलिखित सारणी में कुछ वस्तुओं के मूल्य-सूचकांक 1959 से 1973 तक के दिए हुए हैं। न्यूनतम वर्ग ... —
... 1973.- Fit ... values and trend-values on a graph paper—

Year :	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966
Index No. :	100	138	187	221·8	245	238·9	233 6	229·2
Year :	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	
Index No. :	191 6	259·9	181·5	246 6	310·5	190 6	261·2	

[*B Com, Alld, 1973*]
[$Y=215{\cdot}7+7{\cdot}04X$; Origin 1966=0; 166·4, 173·5, 180·5, 187·5, 194, 201·6, 208·7, 215 7, 222·7, 229 8, 236·8, 243·9, 250 9, 257·9, 265·0]

34. निम्नलिखित दोनों काल-मालाओं से अल्पतम-वर्ग प्रणाली द्वारा उपनति का मापन कीजिए तथा [illegible] उपनति को एक ही बिन्दुरेख-पत्र पर अंकित कीजिए—

Using the method of least squares compute the trends in the series given [illegible] plot the trends of both on a graph paper—

Year :	1958–59	59–60	60–61	61–62	62–63	63–64	64–65	65–66	[illegible]	[illegible]
Percapita Income (at current prices)	303	305	326	333	339	371	427	421	470	[illegible]
A—I. C.P.I Nos. :	115	121	124	126	130	139	152	166	[illegible]	[illegible]

[M. Com , III Sem , Raj, [illegible]

[$Y=383+12{\cdot}218X$, Origin 1963=0 ; 273·038, 297·574, 321·91, 346·346, 370·[illegible], [illegible] 419·654, 444 09, 468 526, 492 962.

$Y=146{\cdot}5+4{\cdot}773X$; Origin : Middle Yr. (1963)=0, 103 543, 113[illegible], [illegible] 132·181, 141 727, 151·273, 160·819, 170·365, 179·911, 189 457]

35. निम्न समंकों से इन तीन रीतियों में से किन्हीं दो द्वारा [illegible] ज्ञात कीजिए—(i) पंचवर्षीय [illegible]

[illegible] adopting any two of the three methods—(i) five-yearly moving average, (ii) semi averages [illegible] (iii) least squares method—

Year :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	[illegible]	[illegible]
Output (000 tons) :	50 0	36·5	43·0	44·6	38 8	38·1	32 6	38·7	41·7	41[illegible]	[illegible]

[M. A., [illegible]

[(i) —, —, 42·58, 40 20, 39·42, 38·56, 37·98, 38 44, 37·58, —, — ; (ii) [illegible] 9—37·58 ; (iii) $Y=39{\cdot}9-0{\cdot}768X$; 43 7, 43, 42 2, 41·4, 40·7, 39 9, 39·1, [illegible] 36[illegible]

36. नीचे दी हुई सारणी हमारी नगरीय जनसंख्या को कुल जनसंख्या के प्रतिशत के रूप में प्रदर्शित [illegible] (1921–1961)। उपर्युक्त तथ्यों के लिए द्वितीय-घात प्रवृत्ति-समीकरण का परिकलन कीजिए तथा [illegible] समीकरण से 1971 के जनगणना वर्ष के लिए [illegible]

The following table presents o[illegible] lation during 1921-1961. From [illegible] equation and estimate the figure for 1971—

Census year :	1921	1931	1941	1951	1961
Population Percentage :	11·4	12·1	13·9	17·3	18·0

[$Y=14{\cdot}311+1{\cdot}84X+0{\cdot}1143X^2$; 1971→20 86] [M. Com., [illegible]

37. 1970–75 में एक वस्तु की कीमतें नीचे दी गई हैं। इन समंकों को $Y=a+bX+cX^2$ [illegible] परवलय-उपनति वक्र प्रदान कीजिए। 1976 के लिए कीमत का पूर्वानुमान भी लगाइए—

Price of a commodity during 1970–75 is given below. Fit a parabolic trend to the data by applying to equation $Y=a+bX+cX^2$. Also make a forecast for 1976—

Year :	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Price :	100	107	128	140	181	192

[$Y=124{\cdot}88+21{\cdot}6X+1{\cdot}786X^2$; 88 82, 105 07, 124 88, 148·30, 175·30, 206 70; Forecast for 1976 239 86] [B. Com., Guj[illegible]

38. निम्न समंक एक वस्तु के वार्षिक उत्पादन से सम्बन्धित हैं। 1952 के लिए उत्पादन का पूर्वानुमान लगाइए—यह मानते हुए कि [illegible] रेखीय है, (ii) द्वितीय-घात परवलय है।

T[illegible] [illegible]oduction of an article. For[illegible] [illegible] is (i) linear, (ii) second-degree [illegible]

Year :	1971	1972	1973	1974	1975	1976
Output ('000 tons) :	12	14	12	26	[illegible]	40

[(i) 56 Thousand tons ; $Y=28+7X$; (ii) 62·3 Thousa[illegible] [illegible] Origin 1974] [M. A., [illegible]

39. (i) प्रदत्त उपनति समीकरण $Y_c=35+5X+3X^2$; उद्गम 19[illegible] [illegible] मूल-बिन्दु को 1970 पर हस्तान्तरित कीजिए।

Given the trend equation $Y_c=35+5X+3X^2$ where [illegible] change the origin of the equation to 1970.

(ii) प्रदत्त समीकरण—$Y_c = 10\,(1{\cdot}5)^X$; उद्गम 1968=0; X-इकाई=1 वर्ष
मूल-बिन्दु को दो वर्ष आगे हस्तान्तरित कीजिए।
Given the equation $Y_c = 10\,(1{\cdot}5)^x$ where 1968=0 and X-unit=1 year, shift the origin forward by two years.

(iii) भारत अल्मोनियम कम्पनी की वार्षिक बिक्री की उपनति समीकरण निम्नांकित है—
$Y_c = 12 + 0{\cdot}7X$; उद्गम 1970=0 , X-इकाई=1 वर्ष, Y-इकाई=वार्षिक-उत्पादन
उक्त समीकरण को मासिक आधार पर परिवर्तित कीजिए और मूल-बिन्दु जनवरी 1970 पर हस्तान्तरित कीजिए।
The trend of the annual sales of the Bharat Aluminium Co. is described by the following equation—
$Y_c = 12 + 0{\cdot}7X$, where 1970=0, X-unit=1 year and Y-unit=annual production. Step the equation down to month to month basis and shift the origin to January 1970

[M. Com., Delhi, 1972]

[(i) $Y_c = 57 + 5X + 3X^2$; (ii) $Y_c = 22{\cdot}5\,(1{\cdot}5)^X$; (iii) $Y_c = 1 + 0{\cdot}0049X$, $Y_{Jan\ 70} = {\cdot}9708 + {\cdot}0049X$]

अल्पकालिक उच्चावचनों का मापन (Measurement of Short-term Oscillations)—

40. किसी गाँव में दिन के तापक्रम के सम्बन्ध में निम्न आँकड़े प्राप्त हुए। 5 दिन का चल-माध्य लेकर उपनति-मूल्य और अल्पकालीन उच्चावचनों को निकालिये। अल्पकालीन उच्चावचनों को एक ग्राफ पेपर पर दिखलाइये और जो परिवर्तन पाए जाते हैं उनका निर्वचन कीजिये—
In a certain village, the following figures were noted regarding the temperature during daytime. Using a 5-day moving average, calculate trend values and short term fluctuations. Plot the short term fluctuations on a graph paper and interpret the variations observed—

July 1975 :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temperature (Fahrenheit) :	40	50	44	70	52	44	36	40	56	68	78	80

[M. Com., I Sem., Rajasthan, Jan. 1976]

[*T* : —, —, 51·2, 52, 49·2, 48·4, 45·6, 48·8, 55·6, 64·4, —, — ; *Short term fluctuations* —, —, −7, 2, +18, +2·8, −4·4, −9·6, −8·8, +0·4, +3·6, —, —]

41. विभिन्न वर्षों में चाय के उत्पादन (हजार किलोग्राम में) के समंक निम्नांकित हैं। पंचवर्षीय चल-माध्य द्वारा प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए और अल्पकालीन उच्चावचन भी प्रदर्शित कीजिए। (बिन्दु रेखीय प्रदर्शन नहीं करना है)।
Production of tea in thousand Kilos in various years is given below—Find the trend by taking a Five Yearly Cycle and show the short time oscilations also. The graph is not to be shown.

Year :	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
Production :	672	679	690	702	712	802	807	809	816	821

[B. Com., Meerut, 1976 ; M. A., Punjab, 1977]

[*T* —, —, 691, 717, 742·6, 766·4, 789·2, 811, —, — : Short time Osc. —, —, −1, −15, −30·6, +35·6, +17·8, −2, —, —]

42. पंचवर्षीय चल-माध्य निकालकर, निम्न काल-श्रेणी के अल्पकालिक उच्चावचन ज्ञात कीजिए। इनका बिन्दुरेखीय प्रदर्शन भी कीजिए—
Taking five yearly moving averages calculate short time oscillations of the following time series. Also represent them graphically—

Year :	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
Value :	239	242	238	252	257	250	273	270	268
Year :	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
Value :	288	284	282	300	303	298	313	317	309
Year :	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	
Value :	329	333	327	345	344	343	362	360	

[−7·6, +4·2, +3, −10·4, +9·4, +·2, −8·6, +9·6, −·4, −9·4, +6·6, +3·8, −8·2, +5, +3·8, −11·2, +6, +4·4, −8·6, +6·6, −·2, −7·8]

43 निम्न सारणी 1951–62 में एक उद्योग में लगे हुए कर्मचारियों की औसत संख्या प्रस्तुत करती है। उक्त समंकों से तीन-वर्षीय चल-माध्य परिकलित कीजिए और उपनति-निरसित श्रेणी (trend eliminated series) को ग्राफ पर प्रांकित कीजिए—

The following table presents the average number of employees engaged in an industrial undertaking. Compute three-yearly moving averages from the data and plot the trend-eliminated series on a graph paper—

Year :	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962
No. of Employees	433	465	449	451	483	464	463	498	488	484	510	500

[B. Com., Bombay, April, 1973]

[Trend : —, 449, 455, 461, 466, 470, 475, 483, 490, 494, 498, —
Trend-eliminated series : —, +16, −6, −10, +17, −6, −12, +15, −2, −10, +12, —]

44 निम्न आँकड़ो से आर्तव विचरणो के सूचकांक ज्ञात कीजिए—

From the following data, determine the seasonal variation indices—

Month	1974	1975	1976	1977
January	18	20	22	24
February	20	22	19	24
March	18	19	20	22
April	17	18	18	20
May	15	16	17	18
June	16	20	18	22
July	17	24	24	25
August	19	23	25	26
September	21	23	26	27
October	23	24	24	26
November	23	24	25	27
December	24	26	27	29

[95, 95, 91, 82, 77, 86, 105, 105, 109, 109, 114, 123]

45 उपनति अनुपस्थित मानकर, निम्न समंको से विभिन्न तिमाही अवधियो के लिए आर्तव विचरण सूचकांक परिकलित कीजिए—

Assuming trend to be absent, calculate the seasonal variation indices for various quarters from the following data—

Year	Quarters I	II	III	IV
1974	37	41	33	35
1975	37	39	36	36
1976	40	41	33	31
1977	33	44	40	40

[98 7, 110 8, 95·3, 95·3]

46. भारत मे कोयले के उत्पादन की निम्नलिखित अंक-राशि का विश्लेषण करके ज्ञात कीजिए—(अ) आर्तव विचरण, (ब) दैव या अनियमित उच्चावचन।

Analysing the following figures of coal production find (*a*) seasonal variations, (*b*) random or irregular fluctuations—

Coal Production (mln. tons)

Year	*Quarterly periods* I	II	III	IV
1950	108	112	122	119
1951	110	116	128	132
1952	114	121	131	141
1953	128	132	109	150
1954	139	151	161	149

[B. Com., Raj , 1970]

[(a) −6·18, −1 05, −1·80, +9 03; (b) —, —, +8 3, −6·33, −1·32, −2 85, +7 8, −·13, −3 92, −3·55, +4·3, −·37, +3·88, +4 45, −20 3, +6·07, +1·38, +1·95, —, —]

47. शृंखला-मूल्यानुपात विधि (Link Relatives Method) द्वारा आर्तव-सूचकांकों के निर्धारण की प्रक्रिया समझाइए। इस रीति का प्रयोग करके निम्न समंकों से तीसरे त्रिमास का आर्तव सूचकांक परिगणित कीजिए—

Explain the procedure of determining seasonal indices by link relatives method. Using this method, calculate seasonal index for third quarter from the following data—

Year	Quarter I	II	III	IV
1974	78	62	56	69
1975	84	64	61	84
1976	92	70	65	86
1977	[illegible]	71	72	95

[121·4, 89·6, 82·2, 106 8] *[I. A. S., 1965]*

48. निम्न सारणी एक कारखाने मे इस्पात पिण्डो के त्रैमासिक उत्पादन (हजार टनो मे) के समंक प्रस्तुत करती है—

The following table presents the data of quarterly production of steel ingots in a factory (in thousand tons)—

Quarter	1972	1973	1974	1975	1976	1977
I	35	35	35	40	41	42
II	39	41	39	46	44	46
III	34	37	37	38	42	43
IV	36	40	42	45	45	47

शृंखला-मूल्यानुपात विधि द्वारा आर्तव सूचकांकों का परिकलन कीजिए।

Calculate seasonal variation indices by link relatives method.

[95·4, 105·8, 94·9, 103 9]

49. उपनति-अनुपात विधि का प्रयोग करते हुए निम्न समंकों से आर्तव सूचकांक ज्ञात कीजिए—

Compute seasonal indices from the following data by using 'ratio-to-trend' method—

Sales (In lakhs of Rs.)

Month	1973	1974	1975	1976	1977
January	19	27	29	33	36
February	20	26	28	32	34
March.	20	30	37	41	43
April	22	30	39	44	47
May	27	35	40	50	49
June	27	32	35	52	51
July	24	26	33	44	40
August	30	30	35	45	43
September	32	35	40	53	49
October	36	39	49	63	57
November	37	38	46	54	55
December	42	47	56	71	66

[Linear trend equation, $Y=25{\cdot}74+0{\cdot}455X$, Origin Jan. 1973=0 X-units, 1 month
79 2, 76·4, 90·8, 95·2, 104·9, 101, [illegible], 93·2, 104 7, 120·4, 112·9, 136·3]

50. निम्न समंको से उपनति-अनुपात विधि द्वारा ऋतुकालिक सूचकांक ज्ञात कीजिये—

Calculate seasonal indices by ratio to trend method from the following data—

Year	*I Quarter*	*II Quarter*	*III Quarter*	*IV Quarter*
1966	36	34	38	32
1967	38	48	52	42
1968	42	56	50	52
1969	[illegible]	74	68	62
1970	82	90	88	80

[100 03, 109·54, 103·14, 87·29] *[M. Com., Madras, 1973]*

51. निम्न सारणी से 'चल-माध्य-अनुपात' रीति द्वारा ऋतुकालिक विचरण सूचकांकों का परिगणन कीजिए—

From the following table, calculate seasonal variation indices by ratio to moving average method—

Season	1973	1974	1975	1976	1977
First Quarter	40	42	41	45	44
Second	35	37	35	36	38
Third ,,	38	39	38	36	38
Fourth ,,	40	38	42	41	42

[108·9, 92·4, 96·5, 102·2]

52. निम्न समंकों से चल-माध्य अनुपात रीति द्वारा ऋतुकालीन सूचकांकों का परिगणन कीजिये—
Calculate seasonal indices by the 'ratio to moving average' method from the following data—

Year	*Quarter* *I*	*II*	*III*	*IV*
1971	68	62	61	63
1972	65	58	66	61
1973	68	53	63	67

[B. Com., (Hons.) Delhi, 1975]

[$(O \div T) \times 100$ — —, —, 96·6, 101·2, 104·2, 92·4, 105, 95·5, 106, 97·7, —, —; *S. V. I.*—105·3, 95·2, 101·0, 98·5]

53. (i) यदि यह ज्ञात हो कि वार्षिक मूल्यों की निम्न काल-श्रेणी में चक्रीय विचरण निहित हैं तो उसे (चक्र) पृथक् कीजिए और प्रदत्त श्रेणी के सोलहवें साल का मूल्य ज्ञात कीजिए। यदि उक्त समंकों का विश्लेषण न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा किया जाता तो क्या सोलहवें साल की वास्तविक संख्या बदल जाती ? क्यों ?

If it is known that the following time series of annual values contains cyclical variations in it, isolate it (cycle) and estimate the value for 16th year. If these data were analysed through the method of least squares, would the actual value for 16th year have changed ? Why ?

5, 1, 0, 8, 4, 3, 11, 7, 6, 14, 10, 9, 17, 13, 12

(ii) प्रश्न 49 में प्रदत्त समंकों को अनियमित उच्चावचनों के प्रभाव से मुक्त मानते हुए चक्रीय विचरण परिकलित कीजिए। यदि श्रेणी अनियमित उच्चावचनों से भी प्रभावित हो तो चक्रीय उच्चावचन क्या होंगे ?

Assuming the data given in Q. No. 49 to be free from irregular fluctuations calculate cyclical variations. If the series were affected by irregular fluctuations, what would be the cyclical variations ?

[(i) 3-yearly cycle; value for 16th year is 20; yes, because with the use of this method, the effect of cycle will be removed.
(ii) *CI*— —, —, 102·3, 100·4, 97·9, 102·1, 104, 96·6, 98·8, 98·4, 99·7, 102·4, 103·3, 98·3, 94·8, 101·6, 101, 101·9, —, —; *C*— —, —, —, —, 100·9, 100·6, 100·3, 99·9, 98·9, 99·1, 100·4, 100·9, 100·3, 99·6, 99·2, 99·4, —, —, —, —]

54. (i) किसी प्रदत्त कालश्रेणी से उपनति निरसित करने के योग्य निदर्श की गुणनात्मक निदर्श से तुलना कीजिए।

Compare the additive model with multiplicative model as the methods of eliminating trend from a given time series. *[M. Com., Delhi, 1975]*

(ii) किसी वस्त्र भण्डार में एक विशेष प्रकार के तैयार कपड़ों की बिक्री के ऋतुक सूचकांक निम्नांकित हैं— यदि पहले त्रैमास में कुल बिक्री 10,000 रुपए के मूल्य का हो; तो यह निर्धारित कीजिए कि शेष त्रैमासिक अवधियों में माँग पूरा करने के लिए व्यापारी द्वारा कितने मूल्य के तैयार कपड़े भण्डार-गृह में रखे जाने चाहिए ?

The seasonal indices of the sale of readymade garments of a particular type in a certain store are given below. If the total sales in the first quarter of a year be worth Rs. 10,000 determine how much worth of garments of this type should be kept in stock by the store to meet the demand in each of the remaining quarters ?

Quarters	*Seasonal Index*
I Jan.—March	98
II April—June	89
III July—Sept.	82
IV Oct.—Dec.	130

[(ii) II-Rs. 9082, III-Rs. 8367, IV-Rs. 13266] *[M. Com., Delhi, 1973, I.A.S., 1967]*

16

व्यावसायिक पूर्वानुमान
(BUSINESS FORECASTING)

भावी घटनाओं के प्रति प्रत्येक मनुष्य उत्सुक होता है। वास्तव में, मानव वर्तमान में जो कुछ करता है वह इस आशा और सम्भावना से करता है कि भविष्य में निश्चित घटनाएँ प्रत्याशित ढंग से पूरी होंगी। भविष्य की घटनाओं के बारे में वह पिछले अनुभव और वर्तमान प्रवृत्तियों के आधार पर सर्वोत्तम अनुमान लगा लेता है। इस प्रकार प्रत्येक क्षेत्र में भविष्य के बारे में पूर्वानुमान लगाना मानव व्यवहार का एक अभिन्न अङ्ग है। व्यवसाय और वाणिज्य में सफलता तो पर्याप्त सीमा तक सर्वोत्तम व्यावसायिक पूर्वानुमान पर निर्भर होती है। सफल व्यवसायी वह होता है जिसका पूर्वानुमान यथार्थता के काफी निकट हो। विश्वसनीय समंकों के आधार पर सांख्यिकीय विधियों द्वारा लगाए गए पूर्वानुमान यथार्थता के सन्निकट होते हैं। अतएव आधुनिक व्यावहारिक सांख्यिकी के क्षेत्र में वैज्ञानिक ढंग से पूर्वानुमान लगाने के विभिन्न सिद्धान्तों और विधियों का यथेष्ट विकास हुआ है।

अर्थ और प्रकृति (Meaning and Nature)—सांख्यिकी में, 'संख्यात्मक तथ्यों के भूतकालीन व्यवहार (परिवर्तन) के आधार पर भविष्य के लिए काल-श्रेणी को विस्तृत या विक्षेपित करने की क्रिया को पूर्वानुमान (Forecasting) कहते हैं।'[1] दूसरे शब्दों में 'परिवर्तनों के भावी स्वरूप के सम्बन्ध में सूचना उपलब्ध करने के हेतु प्रस्तुत काल-श्रेणी के भूतकालीन और वर्तमान परिवर्तनों के सांख्यिकीय विश्लेषण की क्रिया को व्यावसायिक पूर्वानुमान कहते हैं।'[2]

व्हैल्डन के अनुसार, 'विक्रय, उत्पादन, लाभ आदि के निश्चित समंकों को अनुमानित करने की क्रिया ही व्यावसायिक पूर्वानुमान नहीं कहलाती वरन् उसका सही तात्पर्य आन्तरिक एवं बाह्य ज्ञात समंकों के इस प्रकार के विश्लेषण से है जिससे सर्वोत्तम लाभप्रद रीति से संम्भाव्य भावी परिस्थितियों का सामना करने के लिए नीति निर्धारित की जा सके।'[3] संक्षेप में, भूतकालीन व वर्तमानकालीन आर्थिक परिस्थितियों के सांख्यिकीय विश्लेषण के आधार पर सम्भावित भविष्यकालीन व्यावसायिक स्थितियों का सर्वोत्कृष्ट अनुमान लगाने की विधि को 'व्यावसायिक पूर्वानुमान' (Business Forecasting) कहते हैं।

वैज्ञानिक व्यावसायिक पूर्वानुमान की प्रकृति भूतकालीन व्यावसायिक परिस्थितियों और

[1] 'In Statistics, the term (forecasting) refers to extending or projecting time series into the future based on past behaviour of the quantitative data.' —Simpson and Kafka, *Basic Statistics*, p. 297.

[2] 'Business forecasting refers to the statistical analysis of the past and current movements in a given time series, so as to obtain clues about the future pattern of the movements.' —Neter & Wasserman, *Fundamental Statistics for Business and Economics*.

[3] 'Business forecasting is not so much the estimation of certain figures of sales, production, profits etc., as the analysis of known data, internal and external, in a manner which will enable policy to be determined to meet probable future conditions to the best advantage.' —H. J. Wheldon, *Business Statistics & Statistical Methods*.

(i) सकल राष्ट्रीय उत्पादन (GNP)
(ii) रोजगार (Employment),
(iii) थोक मूल्य तथा उपभोक्ता मूल्य (Wholesale and Consumer Prices),
(iv) अंशों व प्रतिभूतियों के मूल्य (Prices of Shares and Securities),
(v) कृषि उत्पादन (Agricultural Production),
(vi) औद्योगिक उत्पादन (Industrial Production),
(vii) बैंक जमाएँ (Bank Deposits)
(viii) उपभोक्ता साख (Consumer Credit),
(ix) स्वायत्त व्यक्तिगत आय (Disposable Personal Income), तथा
(x) सामान्य सामुदायिक उपभोग (General Aggregate Consumption)।

उपर्युक्त शृङ्खलाओं के सूचकांकों को उपयुक्त भार देकर व्यावसायिक क्रिया का सामान्य सूचकांक (general index of business activity) ज्ञात कर लिया जाता है। यही व्यवसाय-मापकयन्त्र कहलाता है।

व्यवसाय मापक-यन्त्र तीन प्रकार के हो सकते हैं—

(क) सामान्य व्यावसायिक क्रिया से सम्बन्धित मापकयन्त्र जिसे व्यावसायिक क्रिया का सामान्य सूचकांक भी कहते हैं। जैसा कि स्पष्ट किया जा चुका है यह विभिन्न व्यावसायिक क्रियाओं जैसे उत्पादन, व्यापार, वित्त आदि के अलग-अलग सूचकांकों का आरित, सामान्य या संग्रथित (composite) सूचकांक होता है। इससे किसी देश की कुल आर्थिक क्रियाओं की दीर्घकालिक प्रवृत्तियों तथा चक्रीय उच्चावचनों का माप हो जाता है। परन्तु किसी उद्योग-विशेष में प्रवृत्तियाँ सामान्य प्रवृत्तियों से कुछ भिन्न हो सकती हैं। अतः प्रत्येक उद्योग एवं व्यवसाय के लिए अलग सूचकांक बनाना भी परमावश्यक है।

(ख) विशिष्ट उद्योग या व्यवसाय से सम्बन्धित सूचकांक जिनसे किसी विशेष उद्योग जैसे सूती वस्त्र उद्योग, लोहा और इस्पात उद्योग, रेल यातायात आदि में होने वाले परिवर्तनों का मापन होता है। ये सूचकांक सामान्य व्यावसायिक क्रिया-सूचकांक के अनुपूरक होते हैं।

(ग) व्यक्तिगत व्यावसायिक संस्था के सूचकांक जिनसे व्यवसाय के किसी क्षेत्र की एक व्यक्तिगत या विशिष्ट संस्था में होने वाले उच्चावचनों का पता चलता है।

वास्तव में, इन तीनों प्रकार के व्यावसायिक मापकयन्त्रों का प्रयोग करने से व्यवसाय की भावी गति का सही पूर्वानुमान लगाया जा सकता है। विभिन्न प्रबन्धकीय निर्णय लेने में ये व्यवसायी का मार्गदर्शन करते हैं। इनकी सहायता से व्यवसाय-विस्तार, पूँजी-निवेश, बाजार-विकास आदि अनेक समस्याओं का समुचित समाधान किया जा सकता है। इस प्रकार ये बहुत उपयोगी होते हैं। परन्तु, व्यवसाय-मापकयन्त्रों की कुछ सीमाएँ भी होती हैं। हो सकता है कि उद्योग-विशेष में होने वाले परिवर्तन, सामान्य-व्यवसाय सूचकांक द्वारा व्यक्त परिवर्तनों से सर्वथा भिन्न या प्रतिकूल हों। यही कारण है कि अलग-अलग उद्योगों व व्यवसायों के लिए अलग सूचकांक बनाने आवश्यक होते हैं। दूसरे, बहुधा इस प्रकार के मापकयन्त्र, अशुद्ध और भ्रमात्मक सूचना प्रदान करते हैं। ऐसा अधिकतर सूचकांकों के निर्माण में अपर्याप्त और अशुद्ध समंकों के प्रयोग के कारण होता है। तीसरे, यदि केवल व्यवसाय-मापकयन्त्रों के आधार पर ही भावी पूर्वानुमान लगाए जाएँ तो परिणाम गलत हो सकते हैं क्योंकि वे केवल भूतकालीन परिस्थितियों के ही द्योतक होते हैं जबकि पूर्वानुमान लगाते समय वर्तमान परिस्थितियों का भी पूरा-पूरा ध्यान रखना चाहिए।

(2) बाह्यगणन या गणितीय प्रक्षेपण (Extrapolation or Mathematical Projection)—बाह्यगणन व्यावसायिक पूर्वानुमान की सरलतम रीति है जो अनेक परिस्थितियों में उपयोगी रहती है। इस विधि के अनुसार सर्वप्रथम यह ज्ञात किया जाता है कि प्रस्तुत श्रेणी में किस प्रकार का उपनति-वक्र उपयुक्त है। इसके बाद उसी प्रवृत्ति-वक्र का भविष्य के लिए तत्सम्बन्धी गणितीय नियम के आधार पर प्रक्षेपण (projection) कर लिया जाता है। व्यावसायिक पूर्वानुमान में प्रयुक्त अनेक प्रकार के उपनति-वक्र प्रचलित हैं जिनमें से प्रमुख अग्रांकित हैं—

(i) अंकगणितीय उपनति (Arithmetic Trend)—सरल रेखा गणितीय उपनति इस मान्यता पर आधारित है कि समय की प्रत्येक इकाई पर आश्रित चर-मूल्य एक समान या स्थिर राशि से घटता-बढ़ता है। इसका समीकरण— $Y=a+bX$ है।

(ii) अर्द्ध-लघुगणकीय उपनति (Semi-logarthmic Trend)—इसमें समय की प्रत्येक इकाई पर मूल्यों में स्थिर प्रतिशत से परिवर्तन प्रदर्शित किया जाता है। Y-अक्ष पर लघुगणकीय मापदण्ड लेकर उपनति का बिन्दुरेखीय चित्रण किया जाता है। स्थिर प्रतिशत से वृद्धि होने पर अर्द्ध-लघुगणकीय उपनति एक सरल रेखा के रूप में होती है।

(iii) संशोधित घातांकीय उपनति (Modified Exponential Trend)—इसके अनुसार समय की इकाई से सम्बद्ध आश्रित चर-मूल्य में प्रत्येक वृद्धि पिछले मूल्य के एक स्थिर प्रतिशत (100 से कम) के रूप में होती है। यह निम्न समीकरण पर आधारित है—

$$Y=ab^x$$

(iv) पर्ल-रीड वक्र अथवा वृद्धिघातीय उपनति (Pearl-Reed Curve or Logistic Growth Trend)—यह एक S-आकार वाला वक्र होता है जो जनसंख्या-प्रक्षेपण में तथा ऐसे उद्योगों की प्रगति प्रदर्शित करने में उपयुक्त होता है जिनकी प्रारम्भिक विकास-गति बहुत धीमी होकर फिर तेजी से बढ़ती हुई परिपक्वता के स्तर पर पहुँच जाती है जहाँ से वह फिर शिथिल हो जाती है।

(v) गोम्पर्ट्ज वक्र (Gompertz Curve)—इस वक्र के अभिलक्षण वृद्धिघातीय वक्र से मिलते-जुलते हैं। यह निम्न समीकरण पर आधारित है—

$$Y_C=ab^{cx}$$

लघुगणकीय रूप में—

$$\log Y_C=\log a+(\log b)C^x$$

जटिल होने के कारण इस प्रकार के उपनति वक्रों (iv) व (v) का बहुत कम प्रयोग किया जाता है।

बाह्यगणन विधि की परिशुद्धता मुख्यतः समंकों के सम्भाव्य उच्चावचनों और तत्सम्बन्धी घटनाओं के समुचित ज्ञान पर निर्भर होती है। इस रीति की निम्न दो मान्यताएँ हैं—

(i) दी हुई अवधि के समंकों में कोई तीव्र व आकस्मिक वृद्धि या कमी नहीं हुई है; तथा

(ii) उच्चावचनों में नियमितता है अर्थात् वृद्धि या कमी की दर लगभग समान रही है।

पूर्वानुमान की यह रीति सरल है परन्तु इसका प्रयोग उन परिस्थितियों तक ही सीमित है जहाँ उपर्युक्त मान्यताएँ पूरी उतरती हों। उपयुक्त उपनति वक्र का चयन भी अधिकतर कठिन होता है।

(3) काल-श्रेणी विश्लेषण (Time Series Analysis)—जब पिछले अनेक वर्षों के व्यवसाय-समंक उपलब्ध हों और उनमें सुनिश्चित प्रवृत्ति तथा ऋतुनिष्ठ उच्चावचन दृष्टिगोचर हों, तो काल-समंकों के विश्लेषण द्वारा पूर्वानुमान किया जा सकता है। इस रीति के अनुसार काल-समंकों से सुदीर्घकालीन उपनति (secular trend), आर्तव विचरण (seasonal fluctuations) और चक्रीय उच्चावचनों (cyclical variations) का विश्लेषण एवं पृथक्करण किया जाता है। विश्लेषण का आधार योगात्मक (additive) या गुणनात्मक निदर्श* (multiplicative model) होता है। सर्वप्रथम, उपयुक्त रीति द्वारा उपनति का निर्धारण कर लिया जाता है, फिर आर्तव विचरण (S) का मापन करके संशोधित श्रेणी का भविष्य के लिए प्रक्षेपण कर दिया जाता है। इस रीति में चक्रीय उच्चावचनों (C) तथा आकस्मिक परिवर्तनों (I) का विश्लेषण सरल कार्य नहीं है। फिर भी उपनति, आर्तव विचरण तथा मापनीय चक्रीय विचरणों के विश्लेषण से पर्याप्त मात्रा में परिशुद्ध पूर्वानुमान लगाए जा सकते हैं।

(4) प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis)—व्यावसायिक पूर्वानुमान में

* विस्तार के लिए देखिए पिछला अध्याय 15।

प्रतीपगमन विश्लेषण की तकनीक का महत्त्वपूर्ण योगदान है। यह प्रविधि प्रमुख रूप से विभिन्न चर-मूल्यों के पारस्परिक सम्बन्ध की प्रकृति व मात्रा का माप करके हमें भावी अनुमान लगाने की क्षमता प्रदान करती है।[1] इसके अन्तर्गत, यदि दो (या अधिक) चर-मूल्यों में क्रियात्मक या फलनात्मक सम्बन्ध (functional relationship) हो तो एक चर (स्वतन्त्र चर) के किसी प्रदत्त मूल्य के तत्सवादी दूसरे चर (आश्रित चर) का सम्भाव्य मूल्य अनुमानित किया जा सकता है। इस अनुमान के लिए द्विचर श्रेणियों में दो प्रतीपगमन समीकरणों (regression equations) का प्रयोग किया जाता है—एक, Y का X पर जिससे प्रदत्त X-मूल्य से सम्बन्धित Y का मूल्य अनुमानित किया जा सकता है, और दूसरा, X का Y पर जिससे Y के तत्संवादी X का सम्भाव्य मूल्य अनुमानित किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, विज्ञापन-व्यय (X) विक्रय (Y) के प्रतीपगमन समीकरणों से किसी निश्चित विज्ञापन-व्यय से सम्बन्धित विक्रय और प्रदत्त विक्रय से सम्बद्ध विज्ञापन-व्यय का पूर्वानुमान लगाया जा सकता है। इसी प्रकार, दो से अधिक चर-मूल्यों के सम्बन्ध का विश्लेषण बहुगुणी प्रतीपगमन द्वारा (by multiple regression) करके भी पूर्वानुमान लगाया जा सकता है।

आर्थिक, व्यावसायिक और सामाजिक क्षेत्रों में पूर्वानुमान के लिए प्रतीपगमन विश्लेषण की सीमित उपयोगिता है। इन क्षेत्रों से सम्बद्ध काल-श्रेणियों में निरर्थक सहसम्बन्ध (spurious correlation) की भी सम्भावना रहती है। अतः पूर्वानुमान करते समय सांख्यिक को अपना अनुभव और तात्कालिक परिस्थितियों के ज्ञान का भी प्रयोग करना चाहिए।

(5) **आधुनिक अर्थमितीय विधि** (Modern Econometric Method)—वैज्ञानिक व्यावसायिक पूर्वानुमान के क्षेत्र में आधुनिक युग में, विशेषकर द्वितीय महायुद्ध-काल से अर्थमिति (econometrics) की विधि का काफी प्रयोग किया जाने लगा है। इस विधि के अनुसार अर्थ-व्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों से सम्बन्धित चर-मूल्यों (variables) के आधार पर अनेक द्विपद समीकरणों (simultaneous equations) का निर्माण किया जाता है। इन समीकरणों की सहायता से अर्थव्यवस्था का विकास-निदर्श (growth model) बनाया जाता है। इस प्रतिरूप से अर्थ-व्यवस्था या व्यवसाय की भावी गतिविधियों का प्रक्षेपण (projection) कर लिया जाता है। बड़े-बड़े निदर्शों में अनेक द्विपद समीकरण होते हैं जिनसे विभिन्न आर्थिक व व्यावसायिक क्रियाओं के अन्तर्सम्बन्ध (interrelations) स्पष्ट हो जाते हैं।

पूर्वानुमान की अर्थमितीय विधि जटिल है। गणन-क्रिया को सरल बनाने के लिए आधुनिक विद्युत-संचालित गणक-यन्त्रों (electronic computers) का प्रयोग किया जाता है। इस विधि की सफलता के लिए पर्याप्त मात्रा में शुद्ध समंकों और उनका प्रयोग करने वाले विशेषज्ञों का उपलब्ध होना परमावश्यक है। फिर हर व्यवसायी के लिए अर्थव्यवस्था का निजी प्रतिरूप तैयार करना भी असम्भव है। इन्हीं कारणों से यह रीति भारत में अधिक लोकप्रिय नहीं हो सकी है।

पूर्वानुमान की उपयुक्त रीति का चुनाव निम्न प्रमुख तत्त्वों पर निर्भर करता है—

(i) व्यवसाय-सम्बन्धी समंकों की पर्याप्तता एवं उपलब्धि ;
(ii) पूर्वानुमान की अवधि—अल्पकालिक अथवा दीर्घकालिक ;
(iii) पूर्वानुमान का उद्देश्य ;
(iv) संस्थान के लिए पूर्वानुमान की उपयोगिता ;
(v) उपलब्ध समय व धन ;
(vi) परिशुद्धता की अभीष्ट मात्रा ;
(vii) विद्युत-संगणक-सम्बन्धी सुविधाओं की उपलब्धि ;
(viii) उत्पाद के जीवन-क्रम का विशिष्ट चरण, इत्यादि।

1 '...Regression analysis measures the nature and extent of the relation, thus enabling us to make predictions.' —Werner Z. Hirsch.

व्यावसायिक पूर्वानुमान के सिद्धान्त
(Theories of Business Forecasting)

आजकल व्यावसायिक पूर्वानुमान केवल अनुभव, प्रातिभ-ज्ञान या अन्तर्ज्ञान (intuition) और कल्पना के आधार पर नहीं किया जाता वरन् वैज्ञानिक ढंग से कुछ सुनिश्चित सिद्धान्तों (theories) के अनुसार किया जाता है। यही कारण है कि आधुनिक पूर्वानुमान अधिक शुद्ध, विशिष्ट और वैज्ञानिक होते हैं।

व्यावसायिक पूर्वानुमान के अनेक सिद्धान्त प्रचलित हैं परन्तु उनमें से निम्नलिखित अधिक महत्त्वपूर्ण हैं—

(1) काल-विलम्बना या काल-क्रम सिद्धान्त (Time Lag or Sequence Theory) ;
(2) क्रिया-प्रतिक्रिया सिद्धान्त (Action and Reaction Theory) ;
(3) विशिष्ट ऐतिहासिक सादृश्य सिद्धान्त (Specific Historical Analogy Theory);
(4) प्रति-काट आर्थिक विश्लेषण सिद्धान्त (Cross-Cut Economic Analysis Theory) ;
(5) आर्थिक लय सिद्धान्त (Economic Rhythm Theory) ।

(1) काल-विलम्बना अथवा काल-क्रम सिद्धान्त (Time-Lag or Sequence Theory) यह सिद्धान्त इस मान्यता पर आधारित है कि व्यावसायिक परिवर्तन एक साथ न होकर निश्चित अनुक्रम के अनुसार होते हैं।[1] दूसरे शब्दों में, व्यवसाय सम्बन्धी समंकों में निश्चित काल विलम्बना (time-lag) होती है। उदाहरणार्थ, किसी देश में मुद्रा-स्फीति होती है तो उसके फलस्वरूप विदेशी विनिमय दर प्रतिकूल हो जाती है, कुछ समय बाद थोक-मूल्य बढ़ जाते हैं, तत्पश्चात् फुटकर मूल्यों में भी वृद्धि होती है जिसके परिणामस्वरूप जीवन-निर्वाह-व्यय बढ़ता है और फिर कालान्तर में मजदूरी भी बढ़ जाती है। इसके विपरीत, मुद्रा-संकुचन से विनिमय दर में कमी हो जाती है जिससे थोक-मूल्य और फिर फुटकर-मूल्य घट जाते हैं और तत्पश्चात् जीवन-निर्वाह-व्यय और मजदूरी में भी कमी हो जाती है। इन विभिन्न श्रृंखलाओं का अनुक्रम लगभग इसी प्रकार रहता है परन्तु कारण और परिणाम में समय का अन्तर रहता है ; सभी उच्चावचन एक साथ नहीं होते।

इस सिद्धान्त की सबसे महत्त्वपूर्ण समस्या विभिन्न उच्चावचनों में काल-विलम्बना का निर्धारण है। इसके लिए सहसम्बन्ध गुणांक और बिन्दुरेखीय विधियाँ अपनायी जाती हैं। काल-विलम्बना की अवधि निश्चित करने के बाद व्यावसायिक पूर्वानुमान का कार्य सरल हो जाता है। परन्तु वर्तमान विशेष आर्थिक परिस्थितियों को ध्यान में रखकर पूर्वानुमानों में आवश्यक संशोधन कर देने चाहिएँ। अमेरिका की हार्वार्ड-आर्थिक संस्था, इंगलैंड की लन्दन व कैम्ब्रिज आर्थिक सेवा और स्वीडेन का व्यापार मण्डल इसी सिद्धान्त के अनुसार व्यावसायिक पूर्वानुमान करते हैं।

(2) क्रिया-प्रतिक्रिया सिद्धान्त (Action and Reaction Theory)—यह सिद्धान्त भौतिक विज्ञान के इस महत्त्वपूर्ण नियम पर आधारित है कि 'प्रत्येक क्रिया की सदा उतनी ही मात्रा की विपरीत प्रतिक्रिया होती है।'[2] इस सिद्धान्त के अधीन व्यावसायिक क्षेत्र में एक क्रिया की विपरीत प्रतिक्रिया होती है। उदाहरणार्थ, यदि किसी वस्तु का थोक मूल्य अपने प्रसामान्य स्तर (normal level) से बढ़ जाता है तो कालान्तर में उस वस्तु का उत्पादन भी बढ़ता है और पूर्ति अधिक हो जाने से फिर उस वस्तु का मूल्य सामान्य-स्तर से नीचे गिर जाता है। इस सिद्धान्त के अनुसार पूर्वानुमान करते समय व्यावसायिक क्रियाओं के प्रसामान्य स्तर का विशेष रूप से निर्धारण करना पड़ता है। प्रसामान्य-स्तर स्थिर नहीं होता ; वह भी परिवर्तनशील है। अतः उसे निश्चित करना सरल नहीं है। वास्तविक स्तर की तुलना प्रसामान्य-स्तर से की जाती है। यदि वास्तविक समंक सामान्य-स्तर से ऊपर चले जाते हैं तो निश्चय ही कुछ समय बाद वे उस स्तर से नीचे हो

[1] Changes in business are *not simultaneous*, they are *successive*.
[2] For every action there is always an equal and opposite reaction.

जाएँगे। क्रिया और प्रतिक्रिया के बीच की अवधि और समंकों का सामान्य-स्तर, पिछले अनुभव और वर्तमान परिवर्तनों के आधार पर निश्चित किए जाते हैं।

अमेरिका का व्यवसाय-सांख्यिकी संगठन इसी सिद्धान्त के अनुसार व्यावसायिक पूर्वानुमान करता है।

(3) 'विशिष्ट ऐतिहासिक सादृश्य' सिद्धान्त ('Specific Historical Analogy' Theory)—यह सिद्धान्त इस धारणा पर आधारित है कि 'इतिहास की पुनरावृत्ति होती है।'[1] इसके अनुसार भूतकाल में से एक ऐसी अवधि छाँट ली जाती है जिसमें व्यावसायिक परिस्थितियाँ वही थीं जो वर्तमान काल में पायी जाती हैं। इन समंकों के विश्लेषण से यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि जो परिवर्तन उन भूतकालीन परिस्थितियों के बाद हुए थे, भविष्य में भी उन्हीं की पुनरावृत्ति होगी क्योंकि वर्तमान परिस्थितियाँ भी उन्हीं पिछली परिस्थितियों के समान हैं। यदि किसी क्षेत्र के पिछले 20 वर्षों के साप्ताहिक औसत वर्षा के आँकड़े दिए हों तो उन वर्षों में से ऐसा वर्ष छाँटा जायगा जिसमें साप्ताहिक वर्षा की मात्रा और वितरण चालू वर्ष के समान हो रहे हों। फिर उस पिछले वर्ष में रबी की फसल की स्थिति के अनुसार ही भावी फसल का पूर्वानुमान लगाया जायगा। द्वितीय महायुद्ध के तुरन्त पश्चात् किए गये आर्थिक और व्यावसायिक पूर्वानुमान अधिकतर प्रथम-महायुद्ध के तुरन्त बाद के परिवर्तनों को ध्यान में रखकर ही लगाये गये थे।

इस सिद्धान्त के अनुसार लगाये गये पूर्वानुमानों में वर्तमान विशेष परिवर्तनों के आधार पर आवश्यक संशोधन भी कर दिये जाते हैं परन्तु मुख्यतः यह सिद्धान्त भूतकालीन परिस्थितियों के विश्लेषण पर ही आधारित है। इसके अतिरिक्त वर्तमान और भूतकालीन परिस्थितियों में पूर्ण समानता का होना भी लगभग असम्भव है।

(4) 'प्रति-काट आर्थिक विश्लेषण' सिद्धान्त, ('Cross-cut Economic Analysis' Theory)—यह सिद्धा[illegible] ऐतिहासिक सादृश्य सिद्धान्त का बिल्कुल विपरीत है। इसके अनुसार यह नहीं माना जाता कि इ[illegible] भूतकालीन विशिष्ट परिस्थितियों के परिणामों को वर्तमान [illegible]। इसके विपरीत, इस सिद्धान्त में आर्थिक परिस्थिति पर प्रभाव डालने वाले प्रत्येक तथ्य का स्वतन्त्र रूप से गहन अध्ययन किया जाता है। भूतकालीन तथ्यों को महत्व नहीं दिया जाता वरन् वर्तमान परिस्थितियों का उनकी महत्ता के अनुसार विश्लेषण किया जाता है।

(5) आर्थिक लय सिद्धान्त (Economic Rhythm Theory)—यह सिद्धान्त भी इस मान्यता पर आधारित है कि इतिहास की पुनरावृत्ति होती है (History repeats itself)। इस सिद्धान्त के समर्थक यह मानते हैं कि आर्थिक घटनाएँ एक लयबद्ध क्रम (rhythmic order) से घटित होती हैं। व्यावसायिक चक्रों की पुनरावृत्ति समान तीव्रता और समान अवधि के अनुरूप होती है। इस सिद्धान्त के अनुसार काल-श्रेणी के घटकों का विश्लेषण करके सुदीर्घकालीन उपनति ज्ञात कर ली जाती है जिसका गणितीय या बिन्दुरेखीय रीति द्वारा भविष्य के लिए प्रक्षेपण कर दिया जाता है; फिर अन्य घटकों जैसे आर्तव विचरण, चक्रीय उच्चावचन और आकस्मिक परिवर्तनों का ध्यान रखकर पूर्वानुमान लगा लिया जाता है। व्यवहार में, विभिन्न चक्रों की अवधि व तीव्रता भिन्न होने के कारण इस सिद्धान्त के अनुसार लगाये गये पूर्वानुमान अधिक शुद्ध नहीं होते।

पूर्वानुमान-सिद्धान्तों की अन्तर्निहित मान्यताएँ
(Assumptions Underlying Theories of Forecasting)

प्रति-काट विश्लेषण सिद्धान्त को छोड़कर व्यावसायिक पूर्वानुमान के बाकी सभी सिद्धान्तों की अन्तर्निहित मान्यता (underlying assumption) यह है कि समंकों में एक नियमितता आ

[1] History repeats itself.

क्रमागति (orderliness) होती है, उनमें आकस्मिक और तीव्र परिवर्तन नहीं होते। परिवर्तन धीमी गति से निरन्तर एक निश्चित विधान के अनुसार होते हैं।

इसी मान्यता के आधार पर प्रवृत्ति-प्रक्षेपण (trend projection) किया जाता है। वास्तव में सांख्यिकीय विश्लेषण की अनेक रीतियाँ जैसे आन्तरगणन, बाह्यगणन आदि सामान्य नियमितता की इस परिकल्पना पर ही आधारित हैं। दूसरी मान्यता यह है कि भूतकालीन आर्थिक घटनाओं की नियमित रूप से पुनरावृत्ति (recurrence of economic events) होती है। परन्तु साथ ही साथ नवीन वर्तमान परिस्थितियों के प्रभाव को भी ध्यान में रखा जाता है।

व्यावसायिक पूर्वानुमान की उपयोगिता
(Utility of Business Forecasting)

व्यावसायिक पूर्वानुमान का आर्थिक व व्यावसायिक क्षेत्र में अत्यधिक महत्त्व है। जब एक व्यक्ति व्यवसाय आरम्भ करता है तब वह वस्तुतः पूर्वानुमान के क्षेत्र में पदार्पण करता है। व्यवसाय में लाभ कमाने के लिए व्यवसायी को पग-पग पर विभिन्न समंकों को पूर्वानुमानित करना पड़ता है। व्यवसायी और उद्योगपति को विशेषकर वस्तु की भावी मांग उसका मूल्य तथा अन्य सम्बन्धित तथ्यों के वैज्ञानिक पूर्वानुमान लगाने पड़ते हैं। इन पूर्वानुमानों की यथार्थता पर ही उसकी सफलता आधारित है। व्यावसायिक पूर्वानुमान की सहायता से ही व्यवसायी अपनी नीति निर्धारित करता है तथा भावी योजनायें बनाता है।

व्यावसायिक पूर्वानुमान व्यापार-चक्रों को नियन्त्रित करने में बहुत उपयोगी है। व्यापार-चक्रों के बुरे परिणामों को रोकने में व्यावसायिक पूर्वानुमान का बहुत महत्त्व है। मूल्यों में आकस्मिक चक्रीय उतार-चढ़ाव से केवल व्यापारी को ही नहीं अपितु उद्योगपति, कृषक, प्रशासक, उपभोक्ता और सम्पूर्ण समाज को भारी नुकसान उठाना पड़ता है। व्यापारिक-चक्रों से व्यवसाय की जोखिम बहुत बढ़ जाती है, बेरोजगारी फैलती है, सट्टे को प्रोत्साहन मिलता है और पूंजी-निर्माण में शिथिलता आ जाती है। फिर ये मन्दी की लहर एक देश से दूसरे देश में फैलकर पूरे संसार के आर्थिक ढाँचे को ही अस्त-व्यस्त कर देती है जैसा कि वर्तमान शताब्दी की तीसरी दशाब्दी (Thirties) के विश्व-व्यापी आर्थिक मन्दी काल में हुआ। यदि आने वाली आर्थिक मन्दी या व्यवसायोत्कर्ष के बारे में पूर्वाभास हो जाता है तो व्यवसायी, उद्योगपति और अर्थशास्त्री उसके दुष्परिणामों का प्रभावशाली ढंग से मुकाबला कर सकते हैं। आने वाले खतरे की पूर्व-चेतावनी मिल जाने पर व्यवसायी उसको दूर करने के उपायों से अपने आपको सुसज्जित कर सकता है। (To be fore-warned is to be fore-armed)। इसी प्रकार, व्यवसाय-उत्कर्ष का पूर्वाभास होने पर व्यवसायी उससे अधिकतम लाभ उठा सकता है। अतः व्यापार-चक्रों के कुप्रभावों पर नियन्त्रण करने के लिए व्यावसायिक पूर्वानुमान बहुत उपयोगी सिद्ध होता है।

इस प्रकार, व्यापारी, उद्योगपति, प्रशासक, प्रबन्धक, उपभोक्ता आदि समाज के सभी अंगों के लिए व्यवसाय-पूर्वानुमान की बहुत उपादेयता है।

सीमायें (Limitations)—परन्तु यह नहीं समझ लेना चाहिए कि व्यावसायिक पूर्वानुमान, व्यावसायिक सफलता की एकमात्र कुञ्जी है। इसकी कुछ सीमायें भी हैं। व्यावसायिक पूर्वानुमान एक पूर्ण और यथार्थ विज्ञान नहीं है। भावी पूर्वानुमानों में सदा अनिश्चितता का तत्त्व रहता है। वे पूर्ण रूप से सत्य नहीं होते। जैसा कि क्लैरेन्स जड ने कहा है 'किसी पूर्वानुमान में एकमात्र निश्चित तथ्य यह होता है कि उसमें कुछ अशुद्धि अवश्य होगी।'[1] पूर्वानुमान बहुत थोड़े समय के लिए ही पूरे उतर सकते हैं। मोरोने ने व्यंग्यात्मक रूप से कहा भी है, 'इंग्लैण्ड में मौसम-पूर्वानुमान की भाँति आर्थिक पूर्वानुमान केवल आगामी लगभग छः घण्टों के लिए ही वैध (सत्य) होता है।

[1] 'The only thing you can be sure about in any forecast is that it will error. —Clarence Judd quoted by Simpson & Kafka, in *Basic Statistics*, p. 299.

इसके आगे वह कोरा अनुमान-मात्र है।'[1]

व्यावसायिक पूर्वानुमानों की अनिश्चितता का प्रधान कारण यह है कि उसकी अन्तर्निहित मान्यतायें सदैव पूरी नहीं होती। व्यावसायिक परिवर्तनों की गति सदा नियमित नहीं होती। आर्थिक घटनाओं की पुनरावृत्ति तो होती है परन्तु प्रत्येक काल में ऐसी नवीन विशेष परिस्थितियाँ प्रकट हो जाती है जो भावी-पूर्वानुमानों को अनिश्चित बना देती हैं। अतः व्यावसायिक पूर्वानुमान भावी प्रवृत्तियों का संकेत मात्र है—इससे अधिक कुछ नहीं।

व्यावसायिक पूर्वानुमान-सेवाएँ
(Business Forecasting Services)

आधुनिक-युग में 'व्यावसायिक पूर्वानुमान' भी एक व्यवसाय बन गया है। आजकल अनेक विकसित देशों में बहुत सी विशिष्ट संस्थाएँ वैज्ञानिक व्यावसायिक पूर्वानुमान की पेशेवर सेवाएँ (professional services) प्रदान करती हैं। इनमें विशेष योग्यता प्राप्त सांख्यिकों की नियुक्ति की जाती है जो उपलब्ध समंकों का विस्तृत विश्लेषण करके सामान्य एवं विशिष्ट पूर्वानुमान प्रस्तुत करते हैं। विभिन्न व्यावसायिक इकाइयाँ इन पूर्वानुमानों का काफी प्रयोग करती हैं। कुछ संसार-प्रसिद्ध व्यावसायिक पूर्वानुमान संस्थाएँ निम्न प्रकार है—

अमेरिका (U. S. A) में—हार्वर्ड आर्थिक समाज (Harvard Economic Society), ब्रुकमायर आर्थिक सेवा (Brookmire Economic Services), व्यावसायिक सांख्यिकी संगठन (Business Statistics Organisation), अर्थमितीय संस्थान (Econometric Institute), *सूचकांक संस्थान (Index Numbers Institute), मूडी की विनियोक्ता सेवा (Moody's* Investors Service) इत्यादि।

इंग्लैण्ड (U. K.) में—लन्दन तथा कैम्ब्रिज आर्थिक सेवा (London and Cambridge Economics Service), 'इकॉनॉमिस्ट' का व्यावसायिक-क्रिया सूचकांक (Economist's Index of Business Activity)।

स्वीडेन (Sweden) में—स्वीडिश व्यापार मण्डल (Swedish Board of Trade)।

भारत में—वैज्ञानिक व्यावसायिक पूर्वानुमान सेवाओं का विकास नहीं हुआ है। सरकारी और कुछ गैर-सरकारी संस्थाओं द्वारा औद्योगिक उत्पादन, थोक मूल्य, प्रतिभूति-मूल्य, आयात-निर्यात, उपभोक्ता-मूल्य, मुद्रा की मात्रा आदि के बारे में सूचकांक नियमित रूप से प्रकाशित किये जाते हैं। परन्तु इन विभिन्न सूचकांकों के समन्वय द्वारा सग्रथित व्यावसायिक-क्रिया सूचकांकों की रचना करने के व्यवस्थित और संगठित प्रयास नहीं किये गये है। कुछ आर्थिक पत्रिकाओं जैसे कैपिटल (Capital), कॉमर्स (Commerce), ईस्टर्न इकॉनॉमिस्ट (Eastern Economist), इकॉनॉमिक टाइम्स (Economic Times) आदि द्वारा औद्योगिक-क्रिया सूचकांक समय-समय पर प्रकाशित किये जाते हैं परन्तु उनके आधार पर भावी परिवर्तनों के वैज्ञानिक पूर्वानुमान नहीं लगाये जाते। उपलब्ध सामग्री की कमी, सूचकांकों की अपर्याप्तता, सुसंगठित पूर्वानुमान संस्था का अभाव आदि भारत में वैज्ञानिक व्यावसायिक पूर्वानुमान के विकास में प्रमुख बाधक रहे हैं।

[1] 'Economic forecasting, like weather fore-casting in England, is only valid for the next six hours or so. Beyond that it is sheer guess-work.' —Moroney, *Facts From Figures.*

प्रश्न

1. व्यापारिक पूर्वानुमान के ध्येय, प्रकृति तथा तकनीक की विवेचना कीजिए।
Discuss the object, nature and technique of business forecasting.
[*B. Com., Meerut, 1972*]

2. 'व्यावसायिक पूर्वानुमान' क्या है ? वे मान्यताएँ कौन सी हैं जिनके अन्तर्गत 'व्यावसायिक पूर्वानुमान' किए जाते हैं ? पूर्वानुमान की उन प्रविधियों का वर्णन कीजिए जिनका प्रयोग सामान्यतया बड़े व्यापारिक संस्थानों द्वारा किया जाता है।
What is 'business forecasting' ? What are the assumptions on which business forecasts are made ? Describe the techniques of forecasting that are commonly employed by big business houses. [*M. Com., Delhi, 1972*]

3. 'व्यापार पूर्वानुमान' का क्या अर्थ है ? व्यापार पूर्वानुमान के महत्वपूर्ण सिद्धान्तों का संक्षिप्त विवेचन कीजिए।
What is meant by business forecasting ? Discuss briefly the important theories of business forecasting. [*B. Com., (F) Raj., 1971; M. Com., Agra, 1972; Alld., 1966*]

4. व्यापार में पूर्वानुमान का वास्तविक महत्व क्या है ? व्यापारिक पूर्वानुमान के किन्हीं दो सिद्धान्तों का विवेचन कीजिए जो आप को ज्ञात हों।
What is the practical importance of forecasting in business ? Describe any two theories of business forecasting known to you ?
[*M. Com., Vikram 1972, B. Com., Meerut, 1969*]

5. व्यावसायिक पूर्वानुमान के 'काल-विलम्बना' एवं 'क्रिया-प्रतिक्रिया' सिद्धान्त की आलोचनात्मक समीक्षा कीजिए। आपके विचार से दोनों में से कौनसा सिद्धान्त अधिक उत्तम है और क्यों ?
Examine critically the time-lag and the action and reaction theory of business forecasting. Which of these, in your opinion, is better and why ?
[*M. Com., Allahabad, 1968*]

6. व्यावसायिक पूर्वानुमान की रीतियों के रूप में प्रयुक्त 'भूतकालीन परिस्थितियों के ऐतिहासिक विश्लेषण' और 'वर्तमान घटनाओं के प्रतिच्छेद विश्लेषण' का अन्तर स्पष्ट कीजिए।
Distinguish between the 'historical analysis of past conditions' and 'cross-section analysis of current events' as methods of bussiness forecasting.
[*M. Com., Gorakhpur, 1969*]

7. व्यावसायिक पूर्वानुमान में काल श्रेणी विश्लेषण की महत्ता को समझाइए।
Explain the importance of time series analysis in business forecasting.
[*B. Com., Madurai, 1971*]

8. क्या व्यावसायिक प्रवृत्तियों का पूर्वानुमान लगाया जा सकता है ? किस प्रकार ? भली प्रकार समझाइये।
Is it possible to forecast business trends ? How ? Explain clearly.
[*B. Com. (F), Raj., 1973*]

9. 'व्यापार पूर्वानुमान' से क्या आशय है ? आर्थिक घटनाओं का पूर्वानुमान करने में आर्थिक भारमापक यन्त्र कहाँ तक सहायता कर सकते हैं ?
What is meant by business forecasting ? How far can economic barometers be helpful in forecasting economic events ? [*M. Com., Vikram, 1972*]

10. 'व्यावसायिक पूर्वानुमान' का क्या अर्थ है ? व्यावसायिक पूर्वानुमान की क्रिया में प्रयुक्त रीतियों का आलोचनात्मक मूल्यांकन कीजिए।
What is meant by business forecast ? Give a critical estimate of the methods used in business forecasting. [*M. Com., Gorakhpur, 19..*]

11. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ (short notes) लिखिए।
    (*i*) व्यावसायिक पूर्वानुमान सिद्धान्त (Theories of Business forecasting).
    [*B. Com., Meerut, 1972*]
    (*ii*) व्यवसाय-पूर्वानुमान सेवाएँ (Forecasting Services);
    (*iii*) व्यवसाय-भारमापक यन्त्र (Business Barometers).
    (*iv*) पूर्वानुमान की अर्थमितीय रीति (Econometric Method of Forecasting)

17

आन्तरगणन एवं बाह्यगणन

(INTERPOLATION AND EXTRAPOLATION)

सांख्यिकीय विश्लेषण तथा निर्वचन करते समय कभी-कभी ऐसी अनेक परिस्थितियाँ उत्पन्न हो जाती हैं जब प्रस्तुत समंक-श्रेणी पूर्ण नहीं होती। उसके कुछ मूल्य अनेक कारणों से अज्ञात रह जाते हैं। समंकों से सही निष्कर्ष निकालने के लिए यह आवश्यक है कि समंकमाला में अज्ञात मूल्यों के कारण बीच-बीच मे स्थान रिक्त न हों। यही नहीं, कभी-कभी उपलब्ध समंकों के आधार पर भावी समंकों के पूर्वानुमान लगाने भी आवश्यक हो जाते हैं। इस प्रकार, उपलब्ध समंकों के आधार पर श्रेणी के बीच के अज्ञात मूल्यों या भावी मूल्यो के सांख्यिकीय अनुमान लगाने के लिए आन्तरगणन एवं बाह्यगणन (Interpolation and Extrapolation) की क्रियाओं का प्रयोग किया जाता है।

आन्तरगणन एवं बाह्यगणन का अर्थ और अन्तर (Meaning and Difference)—कुछ सुनिश्चित परिकल्पनाओं के अन्तर्गत, ज्ञात समंकों के आधार पर समक-श्रेणी के बीच किसी अज्ञात मूल्य का सर्वोत्तम सम्भाव्य अनुमान लगाने की क्रिया को आन्तरगणन या अन्तर्वेशन (interpolation) कहते हैं। इसके विपरीत, उपलब्ध सांख्यिकीय तथ्यों के आधार पर, विशेष परिकल्पनाओं के अधीन किसी भावी समंक के पूर्वानुमान प्राप्त करने की प्रक्रिया बहिर्वेशन या बाह्यगणन (Extrapolation) कहलाती है। आन्तरगणन श्रेणी के बीच की रिक्तियों को पूरा करने मे उपयोगी है जबकि बाह्यगणन भावी पूर्वानुमान में सहायक होता है। निम्न उदाहरण से इन दोनो क्रियाओं का अन्तर स्पष्ट हो जायगा—

भारत की जनसंख्या

जनगणना-वर्ष :	1921	1931	1941	1951	1961	1971
जनसंख्या (करोड़ों में) :	25·1	27·9	31·9	36·1	43·9	54 8

उपर्युक्त सारणी मे दिए गये जनसंख्या के समंको के आधार पर कुछ मान्यताओं के अन्तर्गत यदि हमें 1921 और 1971 के बीच के किसी वर्ष मे जैसे 1925, 1947 या 1966 में, भारत की जनसंख्या का सर्वोत्तम अनुमान प्राप्त करना हो तो सम्बन्धित क्रिया आन्तरगणन कहलायेगी। इसके विपरीत, उपलब्ध आँकड़ो के आधार पर 1919 (1921 से पहले) या 1976 (1971 के बाद के किसी वर्ष) के लिए जनसख्या का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाने की क्रिया को बाह्यगणन कहा जाएगा। सांख्यिकीय दृष्टिकोण से आन्तरगणन व बाह्यगणन का अन्तर कोई विशेष महत्त्व नहीं रखता क्योंकि क्रियाओं के लिए एक सी रीतियो का ही प्रयोग किया जाता है।

आवश्यकता व महत्त्व

(Need and Importance)

डा० बाउले के शब्दों में, 'एक सांख्यिकीय अनुमान, अच्छा हो या बुरा, ठीक हो या गलत

परन्तु प्राय: प्रत्येक दशा में वह एक आकस्मिक प्रेक्षक के अनुमान से अधिक ठीक होगा।'[1] आधुनिक सांख्यिकी में आन्तरगणन एवं बाह्यगणन द्वारा सर्वोत्तम सांख्यिकीय अनुमान का अत्यधिक महत्त्व है जिसके निम्न प्रमुख कारण हैं—

(i) मध्यवर्ती वर्ष के लिए अनुमान—अक्सर जिन तिथियों के लिए समंक एकत्र किये जाते हैं उनके बीच की किसी तिथि से सम्बद्ध समंक प्राप्त करने आवश्यक हो जाते हैं। उपलब्ध सामग्री के आधार पर इन समंकों का सर्वोत्तम अनुमान लगाया जाता है। उदाहरणार्थ, भारत में जनगणना प्रत्येक दशक (decade) में एक बार की जाती है परन्तु जनसंख्या समंकों की प्रतिवर्ष, विभिन्न व्यक्तियों द्वारा विभिन्न उद्देश्यों के लिए, आवश्यकता रहती है। अत्यधिक खर्च के कारण हर साल जनगणना नहीं कराई जा सकती अत: जनगणनाओं के उपलब्ध समंकों के आधार पर विभिन्न मध्यवर्ती वर्षों (intercensal years) की जनसंख्या का आन्तरगणन किया जाता है।

(ii) अभाव या अपर्याप्तता—कभी-कभी कुछ भूतकालीन समंक या तो एकत्र ही नहीं किये जाते या यदि एकत्र भी किये गये हों तो वे सही परिणाम निकालने के लिए सर्वथा अपर्याप्त होते हैं। इस अभाव (gap in coverage) या अपर्याप्तता (inadequacy) की पूर्ति आन्तरगणन द्वारा सर्वोपयुक्त अनुमान लगाकर की जाती है।

(iii) समंकों का खो जाना या नष्ट हो जाना—कुछ दशाओं में आवश्यक समंक या तो खो जाते हैं या दैवी प्रकोप (जैसे बाढ़ आ जाना या आग लगना आदि) के कारण नष्ट हो जाते हैं। इन परिस्थितियों में, बचे हुए समंकों के आधार पर आन्तरगणन द्वारा रिक्त स्थानों की पूर्ति की जाती है।

(iv) तुलनात्मक अध्ययन—यदि कुछ समस्याओं से सम्बन्धित विभिन्न देशों के समंक अलग-अलग तिथियों में दिये हों तो उनका तुलनात्मक अध्ययन नहीं किया जा सकता। उन्हें तुलना-योग्य बनाने के लिए आन्तरगणन व बाह्यगणन का सहारा लेना आवश्यक हो जाता है। उदाहरणार्थ, पिछली जनगणना अमरीका में 1970 में सम्पन्न हुई और भारत में 1971 में की गई। दोनों देशों की जनसंख्या की तुलना करने के लिए या तो जनगणनाओं के उपलब्ध आँकड़ों के आधार पर भारत की 1970 की जनसंख्या आन्तरगणित करनी होगी या अमरीका के उपलब्ध समंकों का प्रयोग करके वहाँ की 1971 की जनसंख्या का बाह्यगणन करना होगा।

(v) भावी अनुमान—समय-समय पर आर्थिक, व्यावसायिक एवं राजकीय क्षेत्रों में विभिन्न उद्देश्यों के लिए भूतकालीन व वर्तमान उपलब्ध सामग्री के आधार पर बाह्यगणन की रीति द्वारा भविष्यकालीन समंकों के पूर्वानुमान लगाने पड़ते हैं। विशेष रूप से आर्थिक नियोजन में बाह्यगणन की रीति का काफी प्रयोग किया जाता है।

(vi) स्थानिक माध्यों का निर्धारण—अध्याय 8 में हम देख चुके हैं कि अविच्छिन्न समंक श्रेणी में बहुलक, मध्यका आदि स्थानिक माध्यों (positional averages) का तत्सम्बन्धी वर्गान्तरों में मूल्य-निर्धारण करने के लिए कुछ निश्चित परिकल्पनाओं के अधीन आन्तरगणन का प्रयोग किया जाता है।

आन्तरगणन व बाह्यगणन की क्रियाओं का सभी क्षेत्रों में अत्यधिक महत्त्व है। आधुनिक व्यवसाय तो अधिकतर अनुमानों एवं सम्भाविताओं पर आधारित है। ज्ञात सामग्री के आधार पर माँग और उत्पादन में होने वाले भावी परिवर्तनों का सही अनुमान लगाना व्यापार व उद्योग में सफलता प्राप्त करने के लिए परमावश्यक है। इन क्रियाओं की सहायता से अर्थशास्त्री मूल्य-स्तर, उत्पादन, राष्ट्रीय आय इत्यादि के भावी अनुमान लगाते हैं। योजना-निर्माताओं के लिए ये रीतियाँ बहुत उपयोगी हैं क्योंकि वे इनके प्रयोग द्वारा ही अर्थ-व्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों [illegible] तथा वार्षिक लक्ष्य निश्चित करते हैं तथा अपर्याप्त समंकों की पूर्ति करते हैं। [illegible]

[1] 'A statistical estimate may be good or bad, accurate or the reverse; but in all cases it is likely to be more accurate than a casual observer's impression.

राजनीतिज्ञों और शासकों के लिए भी आन्तरगणन एवं बाह्यगणन का बहुत उपयोग है। भावी प्रवृत्तियों के सर्वोत्तम अनुमानों के आधार पर ही सरकार की कर नीति, मूल्य नीति, औद्योगिक नीति आदि का निर्धारण किया जाता है। वार्षिक बजट बनाने में इन क्रियाओं द्वारा आय तथा व्यय सम्बन्धी विभिन्न अनुमान लगाने पड़ते हैं। इस प्रकार व्यापारी, उद्योगपति, अर्थशास्त्री, नियोजन-विशेषज्ञ, राजनीतिज्ञ, शासक, समाज-सुधारक इत्यादि सभी श्रेणियों के अनुसन्धान-कर्त्ताओं के लिए आन्तरगणन व बाह्यगणन की विधियाँ अत्यन्त आवश्यक व उपयोगी होती हैं।

मान्यतायें
(Assumptions)

जैसा कि पहले बताया जा चुका है आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की क्रियायें कुछ मान्यताओं के अन्तर्गत की जाती हैं। ये मान्यताएँ निम्नांकित हैं—

(i) **आकस्मिक उतार-चढ़ाव न होना** (No sudden or violent fluctuations)—आन्तरगणन व बाह्यगणन करते समय यह मान लिया जाता है कि दी हुई अवधि के समंकों में एकदम कोई प्रचण्ड वृद्धि या अत्यधिक कमी नहीं हुई है। उदाहरण के लिए, यदि हमें 1941, 1951, 1961 और 1971 के किसी नगर के दिए हुए जनसंख्या-समंकों के आधार पर उसकी 1954 की जनसंख्या का आन्तरगणन करना हो, या 1981 के लिए पूर्वानुमान लगाना हो तो यह मानना पड़ेगा कि उक्त वर्ष प्रसामान्य (normal) थे और बाढ़, युद्ध, अकाल आदि के कारण *उन वर्षों की जनसंख्या में एकदम कोई बहुत अधिक कमी या वृद्धि नहीं हुई थी।*

(ii) **परिवर्तनों में नियमितता या एकरूपता** (Regularity or uniformity in changes)—यह भी माना जाता है कि दी हुई अवधि के समंकों में लगभग नियमित परिवर्तन हुए हैं अर्थात् वृद्धि या कमी की दर लगभग एक समान रही है। उपर्युक्त उदाहरण में हमारी यह भी मान्यता रहेगी कि 1954 से पहले के तथा बाद के वर्षों में जनसंख्या लगभग एक ही समान गति से लगातार बढ़ रही है।

आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की परिशुद्धता
(Accuracy of Interpolation and Extrapolation)

आन्तरगणन व बाह्यगणन की क्रियाएँ उपर्युक्त दो महत्त्वपूर्ण मान्यताओं के आधार पर की जाती हैं अतः उनके द्वारा ज्ञात अनुमान यथोचित रूप से ही परिशुद्ध होते हैं। परन्तु यह ध्यान रखना चाहिए कि वे अनुमान मात्र हैं अतः वे वास्तविक समंकों की भाँति परिशुद्ध नहीं हो सकते। यदि आधारभूत मान्यताएँ पूरी नहीं होतीं तो आन्तरगणन व बाह्यगणन द्वारा प्राप्त सम्भाव्य अनुमान भी भ्रमात्मक और अशुद्ध होते हैं।

डा० बाउले[1] के अनुसार आन्तरगणन की परिशुद्धता निम्न दो बातों पर निर्भर है—

(i) **समंकों के सम्भाव्य उच्चावचनों का ज्ञान**—दिए हुए समंकों से होने वाले उतार-चढ़ाव के सम्बन्ध में *जितनी अधिक जानकारी होगी, आन्तरगणित मूल्यों* उतना अधिक यथार्थता व विश्वसनीयता का अंश होगा। यदि ज्ञात समंकों में लगभग निय[illegible]रूप से उच्चावचन होते हैं तो अज्ञात मूल्य का अनुमान भी यथासम्भव परिशुद्ध होता है।

(ii) **समंकों से सम्बन्धित घटनाओं का ज्ञान**—यदि सांख्यिक[illegible] उपलब्ध समंकों पर प्रभाव डालने वाली महत्त्वपूर्ण घटनाओं का भी यथेष्ट ज्ञान है, तो वह सभी तथ्यों को ध्यान में

[1] The accuracy of interpolation depends '(i) *on knowledge of the possible fluctuations of the figures* to be obtained by a general inspection of the fluctuations at dates for which they are given; (ii) *on knowledge of the course of the events* with which the figures are connected.'—Dr. Bowley, *Elements of Statistics.*

रखते हुए आन्तरगणित मूल्यों में आवश्यक संशोधन करके उन्हें अधिक शुद्ध बना सकता है। उदाहरणार्थ, 1947 मे भारत की जनसंख्या का आन्तरगणन करते समय देश के विभाजन के कारण उत्पन्न घटनाओं (जैसे शरणार्थियों का भारी संख्या में आना, साम्प्रदायिक दंगे आदि) के आधार पर अनुमानित संख्या मे आवश्यक संशोधन कर देने से उसकी शुद्धता अधिक हो जाएगी।

उपर्युक्त दो बातों के अतिरिक्त आन्तरगणित मूल्यों की यथार्थता बहुत कुछ उपयुक्त रीति के प्रयोग पर भी निर्भर करती है। अतः उपयुक्त रीति का चुनाव बहुत महत्त्वपूर्ण है।

आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की रीतियाँ
(Methods of Interpolation and Extrapolation)

आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की रीतियो को दो श्रेणियों में बाँटा जा सकता है—

(क) बिन्दुरेखीय रीति (Graphic Method), और

(ख) बीजगणितीय रीतियाँ (Algebraic Methods)।

(क) बिन्दुरेखीय रीति (Graphic Method)—यह आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की सबसे सरल रीति है। इस रीति के अनुसार स्वतन्त्र चर-मूल्यों (जैसे समय-बिन्दु या वर्ग-सीमाएँ) को क्षैतिज मापदण्ड (Horizontal scale or *X*-axis) पर तथा आश्रित मूल्यों (जैसे समय से सम्बद्ध मूल्य या आवृत्तियाँ) को उदग्र मापदण्ड (Vertical scale or *Y*-axis) पर अंकित करके रेखाचित्र पर विभिन्न बिन्दु प्राप्त कर लिए जाते हैं। इन बिन्दुओं को मिला देने से वक्र उपलब्ध हो जाता है। जिस समय (या वर्ग-सीमा) के लिए मूल्य का आन्तरगणन करना हो *X*-axis पर उस समय-बिन्दु से वक्र पर लम्ब (Perpendicular) खींचा जाता है तथा इस लम्ब के वक्र पर स्पर्श-बिन्दु से *Y*-axis पर लम्ब खींच दिया जाता है। अन्त मे कोटि-अक्ष पर दूसरे लम्ब के स्पर्श-स्थान के मूल्य का माप पढ़ लिया जाता है। यही आन्तरगणित मूल्य है।

बाह्यगणन करने के लिए उपर्युक्त विधि द्वारा वक्र की रचना कर ली जाती है। फिर उस वक्र के उच्चावचन व गति का अध्ययन करके उसे पूर्व-क्रम के अनुसार आगे बढ़ा दिया जाता है और लम्ब डालकर सम्भावित मूल्य का पूर्वानुमान ज्ञात कर लिया जाता है। अगले उदाहरण में बिन्दुरेखीय रीति द्वारा आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की क्रियाएँ प्रदर्शित की गई है।

यदि ज्ञात समंकों के उतार-चढ़ाव का यथेष्ट ध्यान रखा जाय या गणितीय-पद्धति द्वारा वक्र-अन्वायोजन (curve-fitting by mathematical method) किया जाय तो अनुमान अधिक शुद्ध होते हैं। परन्तु गणितीय रीति द्वारा वक्र-रचना कठिन होती है अतः उपर्युक्त मुक्त-हस्त रीति द्वारा वक्र बनाकर ही अधिकतर आन्तरगणन एवं बाह्यगणन किया जाता है।

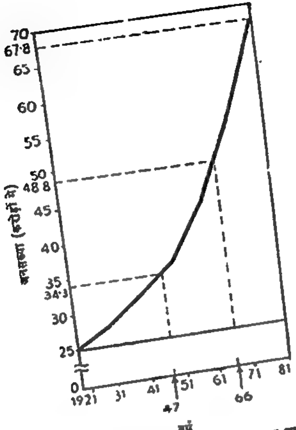
उदाहरण (Illustration) 1 :

पिछली छः जनगणनाओं से प्राप्त भारत की जनसंख्या के समंकों से बिन्दुरेखीय रीति द्वारा 1947, 1966 और 1981 मे सम्भाव्य जनसंख्या का अनुमान लगाइये—

वर्ष :	1921	1931	1941	1951	1961	1971
जनसंख्या (करोड़ रु०)	25·1	27·9	31·9	36·1	43·9	54·8

हल (Solution) :

1947 में भारत की अनुमानित जनसंख्या 34·3 करोड़, 1966 में 48·8 करोड़ तथा 1981 में भारतीय जनसंख्या का पूर्वानुमान 67·8 करोड़ है। (चित्र अगले पृष्ठ पर देखिए)



चित्र 1—बिन्दुरेखीय विधि से अन्तरगणन व बाह्यगणन

(ख) बीजगणितीय रीतियाँ (Algebraic Methods)—अन्तरगणन एवं बाह्यगणन की निम्नलिखित प्रमुख बीजगणितीय रीतियाँ हैं—

(1) प्रत्यक्ष द्विपद-विस्तार रीति (Direct Binomial Expansion Method) ;
(2) न्यूटन की प्रगामी-अन्तर विधि (Newton's Method of Advancing Differences) ;
(3) लाग्रंज की रीति (Lagrange's Method) ;
(4) परवलयिक वक्र-विधि (Parabolic Curve Method) ;
(5) अन्य रीतियाँ (Other Methods) ।

प्रत्यक्ष द्विपद-विस्तार रीति
(Direct Binomial Expansion Method)

प्रयोग—यह रीति द्विपद-प्रमेय (Binomial Theorem) पर आधारित है। इसका प्रयोग तब किया जाता है जब निम्न दो शर्तें पूरी होती हैं—(i) स्वतन्त्र चर (X) के पद बराबर अन्तर से बढ़ते हैं, जैसे 1965, 1967, 1969, 1971, 1973 या 1941, 1951, 1961, 1971... (ii) इन बराबर अन्तर वाले (equidistant) पदों में से ही किसी एक X मूल्य के आश्रित पद Y का मूल्य अनुमानित करना होता है। उदाहरणार्थ; यदि 1941, 1951, 1961 और 1971 जनगणना वर्षों में से किसी नगर की 1941, 1951 और 1971 की जनसंख्या ज्ञात हो और 1961 की जनसंख्या अनुमानित करनी हो तो द्विपद-विस्तार विधि द्वारा अन्तरगणन किया जाएगा क्योंकि 1941, 1951, 1961 और 1971 के अन्तर समान (10) हैं। इसी प्रकार यदि 1941, 1951, 1961 और 1971 के भारत की जनसंख्या के आँकड़े ज्ञात हैं और उनकी सहायता से 1981 के लिए जनसंख्या का बाह्यगणन करना हो तो भी यही रीति अपनायी जाएगी।

प्रक्रिया—इस रीति की निम्नांकित प्रक्रियाएँ हैं—

(i) स्वतन्त्र चर-मूल्य (X) के पदों को क्रमानुसार $x_0, x_1, x_2, x_3...$ आदि संकेताक्षरों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। इसी प्रकार, आश्रित श्रेणी (Y) के तत्संवादी मूल्यों के लिए y_0, y_1, y_2, y_3 आदि संकेतों का प्रयोग किया जाता है। इन्ही संकेताक्षरों में से एक अज्ञात होता है।

(ii) y के जितने ज्ञात मूल्य होते हैं उतने क्रम के प्रमुख-अन्तर* (Leading Difference) को शून्य (0) माना जाता है। अर्थात् यदि 4 पद ज्ञात हैं तो चौथा प्रमुखान्तर (Fourth Leading Difference) शून्य होगा। सूत्रानुसार—

$$\Delta^n_0 = 0$$

'n' y के ज्ञात मूल्यों की संख्या है (the number of known values of y)।

(iii) ज्ञात मूल्यों की संख्या के अनुरूप प्रमुखान्तर को शून्य मानते हुए, उसका द्विपद-विस्तार निम्न सूत्र द्वारा लिखा जाएगा—

$$\Delta^n_0 = (y-1)^n$$

$$= y^n - ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} y^{n-3} + ... = 0$$

यदि y के ज्ञात मूल्यों की संख्या (n) 4 है तो—

$$\Delta^4_0 = (y-1)^4 = y^4 - 4y^{4-1} + \frac{4(4-1)}{1\times2} y^{4-2}$$

$$- \frac{4(4-1)(4-2)}{1\times2\times3} y^{4-3} + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1\times2\times3\times4} y^{4-4} = 0.$$

$$= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$$

इस सूत्र का प्रयोग करते समय घातों (powers) का प्रयोग उपसंकेत (subscript) के रूप में करते हैं।

(iv) द्विपद-विस्तार का उपर्युक्त सामान्य स्वरूप जरा बड़ा और जटिल है। अतः निम्न सरल नियमों द्वारा द्विपद-विस्तार ज्ञात कर लेना चाहिए—

(क) जिस प्रमुख-अन्तर के लिए द्विपद-विस्तार करना हो पहले उस क्रम के y को लिखा जाएगा फिर अवरोही क्रम में y का घात एक-एक कम करते जायेंगे जिससे अन्त में y_0 आ जाये। जैसे (यदि 5 मूल्य ज्ञात हों)—

$$y_5 \quad y_4 \quad y_3 \quad y_2 \quad y_1 \quad y_0$$

(ख) प्रथम y धनात्मक होगा, अगला y ऋणात्मक फिर उससे अगला y धनात्मक और इसी प्रकार अन्त तक चिह्न लिखे जाएँगे। जैसे—

$$+y_5 - y_4 + y_3 - y_2 + y_1 - y_0$$

(ग) विभिन्न y's के अंकात्मक गुणांक (numerical coefficients) निकालने की विधि इस प्रकार होगी। पहले लिखे जाने वाले y का गुणांक 1 होगा। इससे आगे के y's के अंकात्मक गुणांक निम्न सूत्रानुसार प्राप्त होंगे—

$$\frac{\text{पिछले } y \text{ का गुणांक} \times \text{पिछले } y \text{ का उपसंकेत}}{\text{पिछले } y \text{ की क्रम-स्थिति}}$$

उक्त उदाहरण में

$$1y_5 - \frac{1\times5}{1} y_4 + \frac{5\times4}{2} y_3 - \frac{10\times3}{3} y_2 + \frac{10\times2}{4} y_1 - \frac{5\times1}{5} y_0$$

$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

* 'प्रमुख-अन्तर' का अर्थ आगे चलकर न्यूटन की प्रगामी विधि के संदर्भ में स्पष्ट किया जाएगा।

सूत्र द्विपद-विस्तार—

ज्ञात मूल्यों की संख्या	मूल सूत्र	द्विपद-विस्तार
2	$(y-1)^2=0$	$y_2-2y_1+y_0=0$
3	$(y-1)^3=0$	$y_3-3y_2+3y_1-y_0=0$
4	$(y-1)^4=0$	$y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_0=0$
5	$(y-1)^5=0$	$y_5-5y_4+10y_3-10y_2+5y_1-y_0=0$
6	$(y-1)^6=0$	$y_6-6y_5+15y_4-20y_3+15y_2-6y_1+y_0=0$

उदाहरण (Illustration) 2 :

निम्न सारणी में, उपयुक्त सूत्र की सहायता से अज्ञात मूल्य का आन्तरगणन कीजिए—

वर्ष :	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945
मूल्य :	1331	1728	2197	?	3375	4096	4913

[B. A. II. Raj., 1969 ; P. C. S., 1969, 1962 ; M. A., Delhi, 1967 ; Vikram, 1961]

हल (Solution) :

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
वर्ष (x's) :	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945
मूल्य (y's) :	1331	1728	2197	?	3375	4096	4913
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

वर्षों के अन्तर समान हैं और इन्हीं में से एक वर्ष (1942) के आश्रित मूल्य का आन्तरगणन करना है ; अतः द्विपद-विस्तार विधि का प्रयोग किया जाएगा। ज्ञात मूल्यों की संख्या 6 है इसलिए छठा प्रमुख अन्तर (sixth leading difference or $\Delta^6_0=0$) शून्य मानकर उसका प्रत्यक्ष द्विपद-विस्तार लिखा जाएगा—

$$\Delta^6_0=y_6-6y_5+15y_4-20y_3+15y_2-6y_1+y_0=0$$

ज्ञात मूल्यों को उक्त समीकरण में आदिष्ट करने पर—

$$4913-6\times4096+15\times3375-20y_3+15\times2197-6\times1728+1331=0$$

$$4913-24576+50625-20y_3+32955-10368+1331=0$$

$$-20y_3=-89824+34944$$

$$\therefore\ y_3=\frac{-54880}{-20} \text{ या } 2744$$

1942 के लिए अनुमानित मूल्य 2744 है।

उदाहरण (Illustration) 3 :

निम्न सारणी में माताओं की आयु तथा प्रति माता औसत जन्मे बच्चों की संख्या दी है। अज्ञात मूल्य बतलाइए—

माता की आयु (वर्ष) :	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44
जन्मे बच्चों की संख्या :	0·7	2·1	3·5	?	5·7	5·8

[B. Com., Alld., 1973, 1970, 1967, 1961 ; M. Com., Agra, 1968 ; B. A. II Econ., Raj., 1973 ; B. Com. (S), Punjab, 1965]

हल (Solution) :

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x's	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44
y's	0·7	2·1	3·5	?	5·7	5·8
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

आयु वर्गान्तर (x's) समान हैं इसलिए प्रत्यक्ष द्विपद-विस्तार रीति का प्रयोग किया जायगा। आश्रित श्रेणी (y) के 5 मूल्य ज्ञात हैं इसलिए $-\Delta^5{}_0=0$

$$\Delta^5{}_0=y_5-5y_4+10y_3-10y_2+5y_1-y_0=0$$

ज्ञात मूल्य को उक्त सूत्र मे आदिष्ट करने पर—

$$5{\cdot}8-5\times5{\cdot}7+10y_3-10\times3{\cdot}5+5\times2{\cdot}1-0{\cdot}7=0$$
$$5{\cdot}8-28{\cdot}5+10y_3-35{\cdot}0+10{\cdot}5-0{\cdot}7=0$$
$$10y_3+16{\cdot}3-64{\cdot}2=0$$
$$\therefore\quad y_3=4{\cdot}79$$

अतः 30–34 वर्ष के आयु वर्ग की माता के बच्चों की औसत संख्या 4·79 या 4·8 है।

दो अज्ञात मूल्य (Two Missing Values)—जब स्वतन्त्र चर-मूल्यों (x's) के अन्तर समान हों और दो अज्ञात मूल्यों (y's) का आन्तरगणन करना हो तो दो समीकरणों की आवश्यकता होती है। प्रथम, ज्ञात मूल्यो की संख्या के बराबर प्रमुख अन्तर को शून्य मानकर द्विपद-विस्तार लिखा जाता है। दूसरे, उक्त द्विपद-विस्तार को फिर से लिखकर प्रत्येक y के उपसंकेत (subscript) में 1 की वृद्धि कर देते हैं जिससे, अन्त में y_0 के स्थान पर y_1 प्राप्त हो जाता है। तत्पश्चात्, ज्ञात मूल्यो को दोनो समीकरणों में आदिष्ट करके अज्ञात मूल्य अनुमानित कर लिए जाते हैं। उदाहरणार्थ, यदि 7 मूल्य ज्ञात हों और 2 अज्ञात मूल्यों का आन्तरगणन करना हो, तो निम्न दो समीकरण बनाये जायेंगे—

$$\Delta^7{}_0=y_7-7y_6+21y_5-35y_4+35y_3-21y_2+7y_1-y_0=0 \quad ...(I)$$
$$\Delta^7{}_1=y_8-7y_7+21y_6-35y_5+35y_4-21y_3+7y_2-y_1=0 \quad ...(II)$$

इन दोनो द्विपद समीकरणो की सहायता से दो अज्ञात मूल्यों के सम्भाव्य अनुमान लगा लिए जायेंगे।

उदाहरण (Illustration) 4 :

निम्न सारणी की सहायता से 1945 और 1955 के लिए उत्पादन का अनुमान लगाइए—

वर्ष :	1930	1935	1940	1945	1950	1955	1960
उत्पादन (000,000 टनों में) :	200	220	260	?	350	?	430

[M. Com., Agra, 1964]

हल (Solution) :

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
वर्ष (x) :	1930	1935	1940	1945	1950	1955	1960
उत्पादन (y) :	200	220	260	?	350	?	430
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

x's का अन्तर समान होने के कारण प्रत्यक्ष द्विपद-विस्तार रीति प्रयुक्त की जायगी। y के 5 मूल्य ज्ञात हैं और 2 अज्ञात ; इसलिए पाँचवें प्रमुख-अन्तर से सम्बन्धित द्विपद-विस्तार का प्रयोग दो बार निम्न प्रकार किया जायगा—

$$y_5-5y_4+10y_3-10y_2+5y_1-y_0=0 \quad ...(I)$$
$$y_6-5y_5+10y_4-10y_3+5y_2-y_1=0 \quad ...(II)$$

ज्ञात मूल्य आदिष्ट करने पर—

$$y_5-5\times350+10y_3-10\times260+5\times220-200=0$$
$$430-5y_5+10\times350-10y_3+5\times260-220=0$$
$$\therefore\quad y_5+10y_3=+3450$$
$$-5y_5-10y_3=-5010$$

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर निम्न समीकरण उपलब्ध होता है—

$$-4y_5=-1560$$

$$\therefore\ y_5=390$$

y_5 के मूल्य को समीकरण तीन में आदिष्ट करने पर y_3 का मूल्य निम्न प्रकार निकाला जाएगा—

$$390+10y_3=3450$$

$$\therefore\ y_3=\frac{3450-390}{10}=306$$

1945 और 1955 में उत्पादन की अनुमानित मात्रा के समक क्रमशः 306 और 390 मिलियन टन हैं।

न्यूटन की प्रगामी-अन्तर विधि

(Newton's Method of Advancing Differences)

प्रयोग—न्यूटन की प्रगामी-अन्तर (Advancing Differences) विधि भी द्विपद-प्रमेय पर आधारित है। इस रीति का प्रयोग उस परिस्थिति में करना चाहिए जिसमें स्वतन्त्र-श्रेणी (x) के दिए हुए पदों के अन्तर समान हों परन्तु जिस पद (x) के लिए आश्रित चल के पद (y_x) का आन्तरगणन करना हो वह दिए हुए स्वतन्त्र चर मूल्यों से सर्वथा भिन्न हो अर्थात् वह समान अन्तर वाले x's के बाहर का कोई मूल्य हो। उदाहरणार्थ, यदि किसी नगर की 1941, 1951, 1961 और 1971 की जनसंख्या ज्ञात हो और 1958 की या 1965 की जनसंख्या का आन्तरगणन करना हो तो न्यूटन की विधि प्रयुक्त की जाएगी। इस रीति का प्रयोग बाह्यगणन के लिए भी किया जा सकता है परन्तु यह समंकमाला के पूर्वार्द्ध में किसी 'x' के आश्रित मूल्य (y_x) का आन्तरगणन करने के लिए अधिक उपयुक्त होती है।

क्रियाविधि—न्यूटन विधि में निम्न क्रियाएँ की जाती हैं—

(i) संकेताक्षर—स्वतन्त्र चर-मूल्यों को क्रमानुसार x_0, x_1, x_2, x_3 आदि संकेतों द्वारा तथा उन पर आश्रित ज्ञात मूल्यों को क्रमशः y_0, y_1, y_2, y_3 आदि चिन्हों द्वारा व्यक्त किया जाता है। स्वतन्त्र चर के उस पद को जिस पर आश्रित मूल्य का आन्तरगणन करना होता है, आन्तरगणन पद (item of interpolation) कहते हैं तथा उसे x संकेताक्षर दिया जाता है। आन्तरगणित किये जाने वाले आश्रित मूल्य के पद को 'y_x' द्वारा प्रकट किया जाता है।

(ii) अन्तर सारणी—y के प्रमुखान्तरों को ज्ञात करने के लिए परिमितान्तरों की सारणी (Table of Finite Differences) बनायी जाती है जिसमें स्वतन्त्र व आश्रित चरों के अतिरिक्त y के ज्ञात मूल्यों की संख्या से एक कम संख्या में अन्तरों के खाने (columns) होते हैं। अन्तर निकालने के लिए y के प्रत्येक मूल्य में से पिछला मूल्य घटाया जाता है, जैसे प्रथम अन्तरों के खाने में $y_1-y_0=\Delta^1_0;\ y_2-y_1=\Delta^1_1;\ y_3-y_2=\Delta^1_2$ आदि। दूसरे खाने के अन्तरों को पहले खाने के अन्तरों की सहायता से इसी प्रकार निकाला जाएगा अर्थात् $\Delta^1_1-\Delta^1_0=\Delta^2_0;\ \Delta^1_2-\Delta^1_1=\Delta^2_1;\ \Delta^1_3-\Delta^1_2=\Delta^2_2$...... इसी प्रकार अन्त तक अन्तर निकाले जाएँगे। अन्तरों की संख्या कम होती जाएगी और अन्तिम खाने में एकमात्र अन्तर रहेगा।

अगली सारणी से परिमितान्तर निकालने की विधि स्पष्ट हो जाएगी—

अन्तर-सारणी

स्वतन्त्र चर	आश्रित चर	अन्तर: प्रथम		द्वितीय		तृतीय		चतुर्थ	
x_0	y_0								
		y_1-y_0	Δ^1_0						
x_1	y_1			$\Delta^1_1-\Delta^1_0$	Δ^2_0				
		y_2-y_1	Δ^1_1			$\Delta^2_1-\Delta^2_0$	Δ^3_0		
x_2	y_2			$\Delta^1_2-\Delta^1_1$	Δ^2_1			$\Delta^3_1-\Delta^3_0$	Δ^4_0
		y_3-y_2	Δ^1_2			$\Delta^2_2-\Delta^2_1$	Δ^3_1		
x_3	y_3			$\Delta^1_3-\Delta^1_2$	Δ^2_2				
		y_4-y_3	Δ^1_3						
x_4	y_4								

अन्तरों के प्रत्येक खाने में सबसे पहला अन्तर प्रमुखान्तर (leading difference) कहलाता है। Δ^1_0, Δ^2_0, Δ^3_0...... क्रमशः प्रथम, द्वितीय व तृतीय प्रमुखान्तर हैं। उपर्युक्त सारणी को देखने से यह स्पष्ट हो जाएगा कि यदि सभी प्रमुखान्तर ज्ञात हों तो उनकी सहायता से बाकी सभी अन्तर और y के मूल्य ज्ञात किये जा सकते हैं—

सूत्रानुसार—

$$y_1=y_0+\Delta^1_0$$

$$y_2=y_1+\Delta^1_1=y_0+\Delta^1_0+\Delta^2_0+\Delta^1_0=y_0+2\Delta^1_0+\Delta^2_0$$

$$y_3=y_2+\Delta^1_2=(y_0+2\Delta^1_0+\Delta^2_0)+(\Delta^1_1+\Delta^2_1)$$

$$=y_0+2\Delta^1_0+\Delta^2_0+(\Delta^2_0+\Delta^1_0)+(\Delta^2_0+\Delta^3_0)$$

$$=y_0+3\Delta^1_0+3\Delta^2_0+\Delta^3_0$$

परिमितान्तर और द्विपद-विस्तार—प्रमुखान्तरों को यदि ज्ञात y's के रूप में व्यक्त किया जाय तो द्विपद-विस्तार प्राप्त हो जाते हैं, उदाहरणार्थ—

$$\Delta^1_0=y_1-y_0$$

$$\Delta^2_0=(y_2-y_1)-(y_1-y_0)=y_2-2y_1+y_0$$

$$\Delta^3_0=\Delta^2_1-\Delta^2_0=(\Delta^1_2-\Delta^1_1)-\Delta^2_0=(y_3-y_2)-(y_2-y_1)-(y_2-2y_1+y_0)$$

$$=y_3-3y_2+3y_1-y_0$$

$$\Delta^4_0=\Delta^3_1-\Delta^3_0=(\Delta^2_2-\Delta^2_1)-\Delta^3_0=(\Delta^1_3-\Delta^1_2)-(y_3-y_2-y_2+y_1)$$
$$-(y_3-3y_2+3y_1-y_0)$$

$$=y_4-y_3-y_3+y_2-y_3+2y_2-y_1-y_3+3y_2-3y_1+y_0$$

$$=y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_0$$

अन्तर-सारणी में विभिन्न अन्तर ज्ञात करते समय बीजगणितीय चिह्नों (+ व −) का विशेष ध्यान रखना चाहिए क्योंकि एक अन्तर अशुद्ध होने पर अन्तरों की पूरी शृंखला ही अशुद्ध हो जाती है।

(iii) **स्वतन्त्र चर-मूल्यों के अन्तर**—प्रमुखान्तर [illegible] x_0 के अन्तर का x's के समान अन्तरों पर अनुपात [illegible]—

$$x=\frac{\text{आन्तरगणन-पद}-\text{[illegible]}}{\text{आसन्न पदों का अन्तर}}=\frac{[illegible]}{[illegible]}$$

(iv) अन्त में, न्यूटन का सूत्र[1], [illegible] विभिन्न मूल्यों को आदिष्ट करके y_x का [illegible]—

$$y_x=y_0+x\Delta^1_0+\frac{x(x-1)}{1\times2}\Delta^2_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\Delta^3_0+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots}{1\times2\times3\ldots}\ldots$$

[1] इसे न्यूटन ग्रेगोरी सूत्र (Newton-Gregory Formula) भी कहते

उदाहरण (Illustration) 5 :

निम्न समंकों के आधार पर 22 वर्ष की आयु पर जीवन-प्रत्याशा अनुमानित कीजिए—

आयु (वर्ष) :	15	20	25	30	35
जीवन-प्रत्याशा (वर्ष) :	32·2	29·1	26·0	23·1	20·4

[*M. A., Agra, 1964*]

हल (Solution) :

अन्तर-सारणी

आयु (वर्ष)		जीवन प्रत्याशा (वर्ष)		अन्तर: प्रथम		द्वितीय		तृतीय		चतुर्थ	
15	x_0	32·2	y_0	29·1−32·2	Δ^1_0 −3·1	−3·1−(−3·1)	Δ^2_0 0	0·2−0	Δ^3_0 0·2	0−0·2	Δ^4_0 −0·2
20	x_1	29·1	y_1	26·0−29·1	−3·1	−2·9−(−3·1)	0·2	0·2−0·2	0		
25	x_2	26·0	y_2	23·1−26·0	−2·9	−2·7−(−2·9)	0·2				
30	x_3	23·1	y_3	20·4−23·1	−2·7						
35	x_4	20·4	y_4								
22	x_n	?	y_n								

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन वर्ष} - \text{मूल-वर्ष}}{\text{आसन्न वर्षों का अन्तर}} = \frac{22-15}{20-15} = 1{\cdot}4$$

ज्ञात मूल्यों की संख्या 5 है अतएव न्यूटन का सूत्र चौथे प्रमुखान्तर (Δ^4_0) तक लिखा जाएगा—

$$y_n = y_0 + x\Delta^1_0 + \frac{x(x-1)}{1\times 2}\Delta^2_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times 2\times 3}\Delta^3_0 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\Delta^4_0$$

$$y_n = 32{\cdot}2 + 1{\cdot}4\times -3{\cdot}1 + \frac{1{\cdot}4\times 0{\cdot}4}{2}\times 0 + \frac{1{\cdot}4\times 0{\cdot}4\times -0{\cdot}6}{2\times 3}\times 0{\cdot}2$$
$$+\frac{1{\cdot}4\times 0{\cdot}4\times -0{\cdot}6\times -1{\cdot}4}{2\times 3\times 4}\times -0{\cdot}2$$

$$y_n = 32{\cdot}2 - 4{\cdot}34 + 0 - {\cdot}0112 - {\cdot}00448 = 32{\cdot}2 - 4{\cdot}356 = 27{\cdot}84$$

अतः 22 वर्ष की आयु के लिए जीवन-प्रत्याशा 27·84 वर्ष है।

आवृत्ति-श्रेणी में आन्तरगणन (Interpolation in Frequency Series)—आवृत्ति-श्रेणी में न्यूटन की प्रगामी रीति द्वारा आन्तरगणन करने से पहले आवृत्तियों को संचयी आवृत्तियों (cumulative frequencies) में बदल लेना आवश्यक है। वर्गान्तरों की अपर-सीमाओं (upper limits) को स्वतन्त्र चर (x) तथा संचयी आवृत्तियों को आश्रित-श्रेणी (y) मानकर x_n का आन्तरगणन करना चाहिए। शेष क्रियाविधि में कोई अन्तर नहीं होगा—

उदाहरण (Illustration) 6 :

अगली सारणी से 45 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या आन्तरगणित कीजिए।

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
30-40	31
40-50	42
50-60	51
60-70	35
70-80	31

[B. Com., Punjab, 1971, Banaras, 1956, Nagpur, 1968; M. Com., Raj., 1964, Jodhpur, 1963, Agra, 1961 and 1957; M. A., Meerut, 1972, Punjab, 1969, Jabalpur, 1965, Rajasthan, 1960; I.C.W.A., 1965]

हल (Solution) :

पहले, संचयी आवृत्ति वितरण के रूप में बदलकर अन्तर-सारणी बनाई जाएगी—

अन्तर-सारणी

अंक		विद्यार्थियों की संख्या		अन्तर							
				प्रथम		द्वितीय		तृतीय		चतुर्थ	
40 से कम	x_0	31	y_0	+42	Δ^1_0	+ 9	Δ^2_0	−25	Δ^3_0	+37	Δ^4_0
50 „	x_1	73	y_1	51		−16		12			
60 „	x_2	124	y_2	35		− 4					
70 „	x_3	159	y_3	31							
80 „	x_4	190	y_4								
45 „	x_x	?	y_x								

$$x=\frac{x_x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{45-40}{50-40}=0{\cdot}5$$

चौथे प्रमुखान्तर तक न्यूटन का अग्रगामी-अन्तर सूत्र लिखकर उसमें ज्ञात मूल्यों को आदिष्ट किया जाएगा—

$$y_x=y_0+x\Delta^1_0+\frac{x(x-1)}{1\times2}\Delta^2_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\Delta^3_0+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times2\times3\times4}\Delta^4_0$$

$$y_x=31+({\cdot}5\times42)+\left(\frac{{\cdot}5\times-{\cdot}5}{2}\times9\right)+\left(\frac{{\cdot}5\times-{\cdot}5\times-1{\cdot}5}{2\times3}\times-25\right)$$
$$+\left(\frac{{\cdot}5\times-{\cdot}5\times-1{\cdot}5\times-2{\cdot}5}{2\times3\times4}\times37\right)$$

$=31+21-1{\cdot}125-1{\cdot}5625-1{\cdot}4453$ या $52-4{\cdot}1328=47{\cdot}8672$ या 48

अतः 45 से कम प्राप्तांक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या 48 है।

उदाहरण (*Illustration*) 7 :

निम्न सारणी एक संस्था में कार्यरत मजदूरों की साप्ताहिक आय से सम्बन्धित है—

आय (रु० में)	मजदूरों की संख्या
10 रु० तक	50
20 „	150
30 „	300
40 „	500
50 „	700
60 „	800

25 रु० से 35 रु० के बीच की आय वाले मजदूरों की संख्या का आन्तरगणन कीजिए। *[M. A. Agra, 1972; M. Com., Agra, 1970, 66]*

उदाहरण (Illustration) 5 :

निम्न समंकों के आधार पर 22 वर्ष की आयु पर जीवन-प्रत्याशा अनुमानित कीजिए—

आयु (वर्ष) :	15	20	25	30	35
जीवन-प्रत्याशा (वर्ष) :	32·2	29·1	26·0	23·1	20·4

[M. A., Agra, 1964]

हल (Solution) :

अन्तर-सारणी

आयु (वर्ष)		जीवन प्रत्याशा (वर्ष)		अन्तर: प्रथम		द्वितीय		तृतीय		चतुर्थ	
15	x_0	32·2	y_0	29·1—32·2	Δ^1_0 —3·1	—3·1—(—3·1)	Δ^2_0 0	0·2—0	Δ^3_0 0·2	0—0·2	Δ^4_0 —0·2
20	x_1	29·1	y_1	26·0—29·1	—3·1	—2·9—(—3·1)	0·2	0·2—0·2	0		
25	x_2	26·0	y_2	23·1—26·0	—2·9	—2·7—(—2·9)	0·2				
30	x_3	23·1	y_3	20·4—23·1	—2·7						
35	x_4	20·4	y_4								
22	x_x	?	y_x								

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन वर्ष — मूल-वर्ष}}{\text{आसन्न वर्षों का अन्तर}} = \frac{22-15}{20-15} = 1·4$$

ज्ञात मूल्यों की संख्या 5 है अतएव न्यूटन का सूत्र चौथे प्रमुखान्तर (Δ^4_0) तक लिखा जाएगा—

$$y_x = y_0 + x\Delta^1_0 + \frac{x(x-1)}{1\times2}\Delta^2_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\Delta^3_0 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times2\times3\times4}\Delta^4_0$$

$$y_x = 32·2 + 1·4\times-3·1 + \frac{1·4\times0·4}{2}\times0 + \frac{1·4\times0·4\times-0·6}{2\times3}\times0·2 + \frac{1·4\times0·4\times-0·6\times-1·4}{2\times3\times4}\times-0·2$$

$y_x = 32·2 - 4·34 + 0 - ·0112 - ·00448 = 32·2 - 4·356 = 27$·[illegible]4

अतः 22 वर्ष की आयु के लिए जीवन-प्रत्याशा 27·84 वर्ष है।

आवृत्ति-श्रेणी में आन्तरगणन (Interpolation in Frequency Series)—आवृत्ति-श्रेणी में न्यूटन की प्रगामी रीति द्वारा आन्तरगणन करने से पहले आवृत्तियों को संचयी आवृत्तियों (cumulative frequencies) में बदल लेना आवश्यक है। वर्गान्तरों की अपर-सीमाओं (upper limits) को स्वतन्त्र चर (x) तथा संचयी आवृत्तियों को आश्रित-श्रेणी (y) मानकर x_x का आन्तरगणन करना चाहिए। शेष क्रियाविधि में कोई अन्तर नहीं होगा—

उदाहरण (Illustration) 6 :

अगली सारणी से 45 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या आन्तरगणित कीजिए।

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
30–40	31
40–50	42
50–60	51
60–70	35
70–80	31

[*B. Com., Punjab, 1971, Banaras, 1966, Nagpur, 1968; M. Com., Raj., 1964, Jodhpur, 1963, Agra, 1961 and 1957; M. A., Meerut, 1972, Punjab, 1969, Jabalpur, 1965, Rajasthan, 1960; I.C.W.A., 1965*]

हल (Solution) :

पहले, संचयी आवृत्ति वितरण के रूप में बदलकर अन्तर-सारणी बनाई जाएगी—

अन्तर-सारणी

अंक		विद्यार्थियों की संख्या		अन्तर: प्रथम		द्वितीय		तृतीय		चतुर्थ	
40 से कम	x_0	31	y_0	+42	Δ^1_0	+ 9	Δ^2_0	−25	Δ^3_0	+37	Δ^4_0
50 ,,	x_1	73	y_1	51		−16		12			
60 ,,	x_2	124	y_2	35		− 4					
70 ,,	x_3	159	y_3	31							
80 ,,	x_4	190	y_4								
45 ,,	x_x	?	y_x								

$$x=\frac{x_x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{45-40}{50-40}=0{\cdot}5$$

चौथे प्रमुखान्तर तक न्यूटन का प्रगामी-अन्तर सूत्र लिखकर उसमें ज्ञात मूल्यों को आदिष्ट किया जाएगा—

$$y_x=y_0+x\Delta^1_0+\frac{x(x-1)}{1\times2}\Delta^2_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\Delta^3_0+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times2\times3\times4}\Delta^4_0$$

$$y_x=31+({\cdot}5\times42)+\left(\frac{{\cdot}5\times-{\cdot}5}{2}\times9\right)+\left(\frac{{\cdot}5\times-{\cdot}5\times-1{\cdot}5}{2\times3}\times-25\right)$$
$$+\left(\frac{{\cdot}5\times-{\cdot}5\times-1{\cdot}5\times-2{\cdot}5}{2\times3\times4}\times37\right)$$

$=31+21-1{\cdot}125-1{\cdot}5625-1{\cdot}4453$ या $52-4{\cdot}1328=47{\cdot}8672$ या 48

अतः 45 से कम प्राप्तांक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या 48 है।

उदाहरण (Illustration) 7 :

निम्न सारणी एक संस्था में कार्यरत मजदूरों की साप्ताहिक आय से सम्बन्धित है—

आय (रु० में)	मजदूरों की संख्या
10 रु० तक	50
20 ,,	150
30 ,,	300
40 ,,	500
50 ,,	700
60 ,,	800

25 रु० से 35 रु० के बीच की आय वाले मजदूरों की संख्या का आन्तरगणन कीजिए। [*M. A. Agra, 1972; M. Com., Agra, 1970, 66*]

हल (Solution) :

अन्तर-सारणी

आय (रु०) (x)		मजदूरों की संख्या (y)		अन्तर									
				प्रथम		द्वितीय		तृतीय		चतुर्थ		पंचम	
10 रु० तक	x_0	50	y_0	100	Δ^1_0	50	Δ^2_0	0	Δ^3_0	–50	Δ^4_0	0	Δ^5_0
20 ,, ,,	x_1	150	y_1	150		50		– 50		–50			
30 ,, ,,	x_2	300	y_2	200		0		–100					
40 ,, ,,	x_3	500	y_3	200		–100							
50 ,, ,,	x_4	700	y_4	100									
60 ,, ,,	x_5	800	y_5										

$x_{25}=\frac{25-10}{20-10}=1{\cdot}5$ $\qquad$ $x_{35}=\frac{35-10}{20-10}=2{\cdot}5$

ज्ञात मूल्यों की संख्या 6 है इसलिए न्यूटन के अग्रगामी अन्तर वाला सूत्र पाँचवें प्रमुखान्तर (Δ^5_0) तक लिखा जाएगा—

$$y_x=y_0+x\Delta^1_0+\frac{x(x-1)}{1\times2}\Delta^2_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\Delta^3_0+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times2\times3\times4}\Delta^4_0$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\times2\times3\times4\times5}\Delta^5_0$$

विभिन्न मूल्यों को उपर्युक्त सूत्र में आदिष्ट करने पर क्रमशः 25 रु० और 35 रु० तक आय प्राप्त करने वाले श्रमिकों की संख्या निकाली जाएगी—

$$y_{25}=50+100\times1{\cdot}5+\frac{1{\cdot}5\times{\cdot}5}{2}\times50+\frac{1{\cdot}5\times{\cdot}5\times-{\cdot}5}{2\times3}\times0$$
$$+\frac{1{\cdot}5\times{\cdot}5\times-{\cdot}5\times-1{\cdot}5}{2\times3\times4}\times-50+\frac{1{\cdot}5\times{\cdot}5\times-{\cdot}5\times-1{\cdot}5\times-2{\cdot}5}{2\times3\times4\times5}\times0$$
$$=50+150+18{\cdot}75+0-1{\cdot}1719+0$$
$$=217{\cdot}58 \text{ या } 218$$

$$y_{35}=50+100\times2{\cdot}5+\frac{2{\cdot}5\times1{\cdot}5}{2}\times50+\frac{2{\cdot}5\times1{\cdot}5\times{\cdot}5}{2\times3}\times0$$
$$+\frac{2{\cdot}5\times1{\cdot}5\times{\cdot}5\times-{\cdot}5}{2\times3\times4}\times-50+\frac{2{\cdot}5\times1{\cdot}5\times{\cdot}5\times-{\cdot}5\times-1{\cdot}5}{2\times3\times4\times5}\times0$$
$$=50+250+93{\cdot}75+0+1{\cdot}953+0$$
$$=395{\cdot}703 \text{ या } 396$$

35 रु० तक आय पाने वाले मजदूरों की संख्या = 396

25 रु० तक आय पाने वाले मजदूरों की संख्या = 218

अतः 25 रु० और 35 रु० के बीच की

आय वाले मजदूरों की संख्या = 396 – 218 = 178

उदाहरण (Illustration) 8 :

किसी परीक्षा में 492 छात्रों ने निम्नलिखित अंक प्राप्त किए :

अंक	छात्रों की संख्या
40 अंक से अधिक नहीं (not more than)	212
45 „ „	296
50 „ „	368
55 „ „	429
60 „ „	460
65 „ „	481
70 „ „	490
75 „ „	492

उन छात्रों की संख्या बताइए जिन्होंने 42 से अधिक लेकिन 45 तक अंक प्राप्त किये हों।

[M. A., Meerut, 1973, M., Com., Agra, 1963, I.C.W.A. 1968]

हल (Solution) :

अन्तर-सारणी

अंक तक (x)		छात्रों की संख्या (y)		अन्तर Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7
40	x_0	212	y_0							
				$+84\ \Delta^1_0$						
45	x_1	296	y_1		$-12\ \Delta^2_0$					
				72		$+1\ \Delta^3_0$				
50	x_2	368	y_2		-11		$-20\ \Delta^4_0$			
				61		-19		$+59\ \Delta^5_0$		
55	x_3	429	y_3		-30		$+39$		$-120\ \Delta^6_0$	
				31		$+20$		-61		$+210\ \Delta^7_0$
60	x_4	460	y_4		-10		-22		$+90$	
				21		-2		$+29$		
65	x_5	481	y_5		-12		$+7$			
				9		$+5$				
70	x_6	490	y_6		-7					
				2						
75	x_7	492	y_7							
42	x	?	y_x							

$$x_{42}=\frac{42-40}{45-40}=\cdot 4$$

ज्ञात मूल्यों की संख्या 8 है अतः न्यूटन-सूत्र सातवें प्रमुख अन्तर (Δ^7_0) तक लिखा जाए :—

$$y_x=y_0+x\Delta^1_0+\frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3_0+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}\Delta^4_0$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5}\Delta^5_0+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1.2.3.4.5.6}\Delta^6_0$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{1.2.3.4.5.6.7}\Delta^7_0$$

प्रदत्त मूल्यों को सूत्र में आदिष्ट करते पर—

$$y_{42}=212+(\cdot4\times84)+\left(\frac{\cdot4\times-\cdot6\times-12}{2}\right)+\left(\frac{\cdot4\times-\cdot6\times-1\cdot6\times1}{2\times3}\right)$$
$$+\left(\frac{\cdot4\times-\cdot6\times-1\cdot6\times-2\cdot6\times-20}{2\times3\times4}\right)+\left(\frac{\cdot4\times-\cdot6\times-1\cdot6\times-2\cdot6\times-3\cdot6\times59}{2\times3\times4\times5}\right)$$
$$+\left(\frac{\cdot4\times-\cdot6\times-1\cdot6\times-2\cdot6\times-3\cdot6\times-4\cdot6\times-120}{2\times3\times4\times5\times6}\right)$$
$$+\frac{\cdot4\times-\cdot6\times-1\cdot6\times-2\cdot6\times-3\cdot6\times-4\cdot6\times-5\cdot6\times210}{2\times3\times4\times5\times6\times7}$$

$$y_{42}=212+33\cdot6+1\cdot44+\cdot064+\cdot832+1\cdot76717+2\cdot755584+3\cdot8578176$$
$$=256\cdot317 \text{ या } 256$$

42 अंक तक प्राप्त करने वाले छात्रों की सख्या $=256$

45 अंक तक प्राप्त करने वाले छात्रो की सख्या (प्रदत्त) $=296$

∴ उन छात्रों को संख्या जिन्होने 42 से अधिक लेकिन 45 तक अंक प्राप्त किये हैं $=296-256=40$

उदाहरण (Illustration) 9 :

उपयुक्त आन्तरगणन सूत्र का प्रयोग करते हुए, sin 52° का मान ज्ञात कीजिए, यदि—

sin 45°=0·7071, sin 55°=0·8192

sin 50°=0·7660, sin 60°=0·8660

[P.C.S. 1972, 69, 62, I.A.S. 1955]

हल (Solution) :

अन्तर-सारणी

Sin (x)		मान (y)		अन्तर Δ^1	Δ^2	Δ^3
45°	x_0	0·7071	y_0	+·0589 Δ^1_0	−·0057 Δ^2_0	−·0007 Δ^3_0
50°	x_1	0·7660	y_1	+·0582	−·0064	
55°	x_2	0·8192	y_2	+·0468		
60°	x_3	0·8660	y_3			
52°	x	?	y_x			

$$x_{52}=\frac{52-45}{50-45}=1\cdot4$$

$$y_x=y_0+x\Delta^1_0+\frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3.}\Delta^3_0;$$

प्रदत्त मूल्यो को आदिष्ट करने पर—

$$y_x=0\cdot7071+(1\cdot4\times0\cdot589)+\left(\frac{1\cdot4\times\cdot4\times-\cdot0057}{2}\right)+\frac{1\cdot4\times\cdot4\times-\cdot6\times-\cdot0007}{2\times3}$$
$$=0\cdot7071+0\cdot08246-0\cdot001596+0\cdot0000392=0\cdot7880032$$

अतः sin 52°=0·7880

लाग्रेंज की रीति
(Lagrange's Method)

प्रयोग—फ्रांस के प्रसिद्ध गणितज्ञ लाग्रेंज (Lagrange) द्वारा प्रतिपादित रीति आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की सार्वभौमिक रीति (universal method) है। सैद्धान्तिक दृष्टि से लाग्रेंज के सूत्र द्वारा किसी भी प्रकार की परिस्थिति में (चाहे स्वतन्त्र चर मूल्यों के अन्तर समान हों या असमान हों) आन्तरगणन व बाह्यगणन किया जा सकता है। परन्तु व्यवहार में इस रीति का प्रयोग वहाँ किया जाता है जहाँ द्विपद-विस्तार रीति तथा न्यूटन की प्रगामी अन्तर-विधि प्रयुक्त न की जा सके अर्थात् जहाँ x's के अन्तर अनियमित या असमान (irregular or unequal intervals) हों। उदाहरणार्थ, यदि किसी नगर की 1961, 1965, 1970, 1971 और 1973 की जनसंख्या ज्ञात हो और 1969 की जनसंख्या का आन्तरगणन करना हो या 1980 की जनसंख्या का बाह्यगणन करना हो तो लाग्रेंज विधि ही अपनायी जाएगी क्योंकि इस स्थिति में द्विपद-विस्तार या न्यूटन-विधि प्रयोग नहीं की जा सकती।

क्रिया—लाग्रेंज रीति निम्न प्रकार है—

(i) संकेत-चिह्न न्यूटन की प्रणाली अन्तर विधि की भांति ही दिए जाते हैं।

(ii) लाग्रेंज समीकरण का दाहिना पक्ष (right hand side) उतने भागों में विभाजित होता है जितने y's ज्ञात हैं। प्रत्येक भाग में अंश (numerator) और हर (denominator) में स्वतन्त्र चर मूल्यों (x's) के अन्तर होते है और y का ज्ञात मूल्य गुणक (multiplier) होता है। पहले भाग मे y_0 से, दूसरे भाग y_1 से और इसी प्रकार अन्तिम भाग में अन्तिम ज्ञात y से गुणा की जाती है।

(iii) प्रत्येक भाग में x's के अन्तर इस प्रकार होंगे। अंश (numerator) में सभी अन्तर आन्तरगणन पद अर्थात् x से ही ज्ञात किये जाते है। हर (denominator) में अन्तर उस ज्ञात x से निकाले जाते हैं जिसके तत्संवादी y से उस भाग को गुणा करते हैं अर्थात् पहले भाग में y_0 गुणक है तो हर में x_0 मे बाकी दिए हुए x's के अन्तर निकाले जाएँगे। दूसरे भाग में y_1 गुणक है तो हर में x_1 से अन्तर प्राप्त किये जाएँगे। अन्तर निकालते समय यह ध्यान रखना है कि कोई अन्तर शून्य (zero) न हो जाए। यही कारण है कि न तो कभी x को घटाया जाएगा और न ही उस ज्ञात x को जो उस भाग के ज्ञात y का तत्संवादी है अर्थात् पहले भाग में y_0 गुणक है तो हर में x_0 में से x_1 फिर x_2, x_3 और इसी प्रकार बाकी x's घटाकर अन्तर निकाले जाएँगे। दूसरे भाग में y_1 होने के कारण हर में x_1 में से x_0 फिर x_2, x_3 आदि घटाए जायेंगे। यदि ऐसा न किया जाए तो x_0 मे से x_0 और x_1 मे से x_1 घटाने पर परिणाम शून्य आए। प्रत्येक भाग में अंश व हर में घटने वाले x के मूल्य समान होते हैं।

(iv) लाग्रेंज का सूत्र इस प्रकार है—

$$y_x = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} \ldots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

उदाहरण (Illustration) 10 :

स्वतन्त्र चर के चार मूल्यों 3, 7, 9 और 10 पर एक फलन के अवलोकित मूल्य क्रमशः 168, 120, 72 और 63 हैं। स्वतन्त्र चर के मूल्य 6 के तत्संवादी फलन का सर्वोत्तम अनुमान ज्ञात कीजिए।

[M. Com., Vikram, 1972; B. Com., Raj., 1967; M. A., Kanpur, 1970, Raj., 1963]

हल (Solution) :

स्वतन्त्र चर	फलन के मूल्य
3 x_0	168 y_0
7 x_1	120 y_1
9 x_2	72 y_2
10 x_3	63 y_3
6 x	? y_x

x's के असमान अन्तर हैं इसलिये लाग्रेंज सूत्र का प्रयोग किया जाएगा—

$$y_x=y_0\times\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\times\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+y_2\times\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\times\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$y_x=168\times\frac{(6-7)(6-9)(6-10)}{(3-7)(3-9)(3-10)}+120\times\frac{(6-3)(6-9)(6-10)}{(7-3)(7-9)(7-10)}$$

$$+72\times\frac{(6-3)(6-7)(6-10)}{(9-3)(9-7)(9-10)}+63\times\frac{(6-3)(6-7)(6-9)}{(10-3)(10-7)(10-9)}$$

$$y_x=168\times\frac{-1\times-3\times-4}{-4\times-6\times-7}+120\times\frac{3\times-3\times-4}{4\times-2\times-3}$$

$$+72\times\frac{3\times-1\times-4}{6\times2\times-1}+63\times\frac{3\times-1\times-3}{7\times3\times1}$$

$$=12+180-72+27=147$$

अतः स्वतन्त्र चर-मूल्य 6 होने पर तत्संवादी फलन (function) का सर्वोत्तम अनुमान 147 है।

उदाहरण (Illustration) 11 :

निम्न समंकों से 70 रु० और 80 रु० मासिक के बीच कमाने वाले श्रमिकों की सम्भाव्य संख्या अनुमानित कीजिए—

मासिक आय (रु०)	श्रमिकों की संख्या
55– 60	73
60– 70	97
70– 85	110
85– 95	180
95–110	140

हल (Solution) :

वर्गान्तर असमान है इसलिए लाग्रेंज की रीति द्वारा 80 रु० से कम मासिक आय वाले श्रमिकों की संख्या आन्तरगणित की जाएगी—

मासिक आय (रु०)		श्रमिकों की संख्या
60 से कम	x_0	73 y_0
70 ,,	x_1	170 y_1
85 ,,	x_2	280 y_2
95 ,,	x_3	460 y_3
110 ,,	x_4	600 y_4
80 ,,	x	? y_x

$$y_x=y_0\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}+y_1\,\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$+y_2\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}+y_3\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$

$$+y_4\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$y_x=73\times\frac{(80-70)(80-85)(80-95)(80-110)}{(60-70)(60-85)(60-95)(60-110)}+170\times\frac{(80-60)(80-85)(80-95)(80-110)}{(70-60)(70-85)(70-95)(70-110)}+280\times\frac{(80-60)(80-70)(80-95)(80-110)}{(85-60)(85-70)(85-95)(85-110)}+460\times\frac{(80-60)(80-70)(60-85)(80-110)}{(95-60)(95-70)(95-85)(95-110)}+600\times\frac{(80-60)(80-70)(80-85)(80-95)}{(110-60)(110-70)(110-85)(110-95)}$$

$$y_x=\frac{73\times10\times-5\times-15\times-30}{-10\times-25\times-35\times-50}+\frac{170\times20\times-5\times-15\times-30.}{10\times-15\times-25\times-40}+\frac{280\times20\times10\times-15\times-30}{25\times15\times-10\times-25}+\frac{460\times20\times10\times-5\times-30}{35\times25\times10\times-15}+\frac{600\times20\times10\times-5\times-15}{50\times40\times25\times15}$$

$$y_x=-3{\cdot}754+51+268{\cdot}8-105{\cdot}143+12$$
$$=222{\cdot}903 \text{ या } 223 \text{ व्यक्ति}$$

80 रुपये से कम मासिक आय पाने वाले श्रमिकों की संख्या 223 है

70 रु० „ „ „ „ „ „ 170 है

इसलिए 70 रु० और 80 रु० के बीच की मासिक आय वाले श्रमिकों की सम्भावित संख्या

$$=223-170=53$$

परवलयिक वक्र रीति
(Parabolic Curve Method)

प्रयोग—लाग्रेज की रीति की भाँति परवलय-वक्र विधि की सहायता से भी किसी प्रकार की आन्तरगणन व बाह्यगणन की समस्या का हल किया जा सकता है परन्तु गणन-क्रिया जटिल होने के कारण व्यवहार में इसका प्रयोग तब किया जाता है जबकि पदों की संख्या कम (3 या 4) हो और स्वतन्त्र चल-मूल्यों में अधिकतर समान व थोड़ा अन्तर हो।

आधार—यह रीति इस मान्यता पर आधारित है कि दो समंक-श्रेणियों में परस्पर गणितीय सम्बन्ध होता है जिसके आधार पर परवलय-वक्र का आसंजन करके (Fitting a Parabolic Curve) x के किसी मूल्य पर आश्रित y का मूल्य अनुमानित किया जा सकता है। 'n'वें घात के परवलयिक वक्र का समीकरण (Equation of the Parabola of nth order) इस प्रकार है—

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\ldots\ldots nx^n.$$

उक्त समीकरण में a, b, c, d, e आदि अचर पद (constant) हैं जिनकी सहायता से y का मूल्य आन्तरगणित किया जा सकता है।

क्रियाविधि—परवलय-वक्र रीति की निम्नलिखित प्रक्रियाएँ हैं—

(*i*) **उपयुक्त घात वाले परवलय-वक्र का चुनाव**—सर्वप्रथम यह निश्चित करना होता है कि किस घात का परवलय-वक्र प्रयोग किया जाय। इस सम्बन्ध में यह नियम है कि की संख्या से एक कम ($n-1$) घात के परवलय-वक्र के समीकरण का प्रयोग किया यदि 4 मूल्य ज्ञात हों तो तीसरे घात का परवलय-वक्र सूत्र प्रयुक्त होता है। यथाप्ति इस नियम का स्पष्टीकरण हो जाता है—

परवलय-वक्र समीकरण

ज्ञात मूल्यों की संख्या (n)	परवलय-वक्र का घात ($n-1$)	समीकरण
2	1	$y=a+bx$ सरल रेखा समीकरण
3	2	$y=a+bx+cx^2$
4	3	$y=a+bx+cx^2+dx^3$
5	4	$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$
n	$n-1$	$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+...nx^n$

(ii) स्वतन्त्र चर-मूल्यों के विचलन (x)—आन्तरगणन-पद को शून्य (*origin*) मानकर प्रत्येक स्वतन्त्र-पद का उससे विचलन निकाला जायगा। सरलता के लिए विचलनों में से उभयनिष्ठ गुणक (common factor) भी निकाल लिया जाता है। इस प्रकार जो विचलन प्राप्त होते हैं उन्हीं को x संकेताक्षर द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(iii) युगपत् समीकरणों की रचना—इसके बाद, पूर्व-निश्चित परवलय-वक्र समीकरण में और तत्सम्बन्धी x (विचलन) के मूल्य क्रमानुसार आदिष्ट करके अनेक युगपत् या द्विपद समीकरण (simultaneous equations) बनाये जाते हैं। इन्हीं समीकरणों में से एक समीकरण $y=a$ आता है अतः सामान्य बीजगणितीय क्रियाओं द्वारा युगपत् समीकरणों की सहायता से a का मूल्य आगणित कर लिया जाता है। यही y का वांछित मूल्य है। इस रीति को युगपत् समीकरण रीति (simultaneous equations method) भी कहते हैं।

उदाहरण (*Illustration*) 12 :

निम्न सारणी किसी फर्म की गत वर्षों की बिक्री प्रस्तुत करती है। परवलयक-वक्र रीति द्वारा उसकी 1967 की बिक्री आन्तरगणित कीजिए—

वर्ष :	1961	1965	1969	1973
बिक्री (लाख रु०) :	100	112	136	180

हल (*Solution*) :

वर्ष	1961	1965	1967	1969	1973
विचलन x's	−6 −3	−2 −1	0 0	+2 +1	+6 +3
बिक्री : y's	100	112	y	136	180

ज्ञात मूल्यों की संख्या 4 है इसलिए तीसरे घात के परवलय-वक्र का समीकरण प्रयुक्त किया जायगा—

$$y=a+bx+cx^2+dx^3$$

उक्त समीकरण में ज्ञात मूल्य आदिष्ट करने पर निम्न 5 युगपत् समीकरणों की रचना की जायगी—

$$100=a+(b\times-3)+(c\times-3^2)+(d\times-3^3)$$

$$100=a-3b+9c-27d \quad ...(i)$$

$$112=a-b+c-d \quad ...(ii)$$

$$y=a \quad ...(iii)$$

$$136=a+b+c+d \quad ...(iv)$$

$$180=a+3b+9c+27d \quad ...(v)$$

समीकरण (iii) के अनुसार y का मूल्य a के बराबर है इसलिए बाकी समीकरणों की सहायता से a का मूल्य निकाला जायगा—

(ii) व (iv) को जोड़ने पर निम्न परिणाम प्राप्त होता है—

$$112=a-b+c-d$$
$$136=a+b+c+d$$
$$248=2a+2c \qquad \ldots(vi)$$

इसी प्रकार (i) व (v) समीकरणों को जोड़ देने से निम्न समीकरण प्राप्त होता है—

$$100=a-3b+9c-27d$$
$$180=a+3b+9c+27d$$
$$280=2a+18c \qquad \ldots(vii)$$

(vi) को 9 से गुणा करके उसमे से (vii) घटाकर निम्नलिखित परिणाम निकलता है—

$$2232=18a+18c$$
$$280=2a+18c$$
$$1952=16a$$
$$\therefore \quad a=\frac{1952}{16}=122$$

क्योंकि a का मूल्य y के बराबर है इसलिए $y=122$

1967 में उस संस्था की बिक्री का मूल्य 122 लाख रुपये हैं।

इस प्रश्न को न्यूटन की प्रगामी अन्तर रीति द्वारा हल करने पर भी उत्तर 122 लाख रु० ही आएगा। यदि प्रश्न में परवलय-वक्र रीति द्वारा आन्तरगणन करने का निर्देश न हो तो इसे न्यूटन की रीति द्वारा करना ही उपयुक्त होगा।

अन्य रीतियाँ
(Other Methods)

आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की चार प्रमुख रीतियों के अतिरिक्त अन्य रीतियों का भी विशिष्ट परिस्थितियों मे प्रयोग किया जा सकता है। इन रीतियों में से अधिकाश न्यूटन के प्रगामी अन्तर सूत्र के ही रूपान्तर हैं। यहाँ पर निम्न चार अन्य रीतियों का संक्षिप्त वर्णन किया जायगा—

(1) न्यूटन-गॉस अग्रगामी विधि (Newton-Gauss Forward Method)—

प्रयोग—यह न्यूटन की प्रगामी अन्तर विधि पर आधारित है। इसका प्रयोग उस स्थिति मे उपयुक्त होता है जब स्वतन्त्र चर-मूल्य समान अन्तर वाले हों और उन मूल्यों के अतिरिक्त किसी ऐसे x के लिए y_x का आन्तरगणन करना हो जो श्रेणी के मध्य मे हो। इस रीति द्वारा आन्तरगणित मूल्य न्यूटन की प्रगामी अन्तर विधि के परिणाम के बराबर आता है।

क्रिया-विधि—(i) संकेताक्षर—x के आन्तरगणन-पद से तुरन्त पिछले पद को x_0, उससे पिछले पदो को क्रमानुसार x_{-1}, x_{-2}, x_{-3} आदि तथा x_0 से बाद के पदों को x_1, x_2, x_3 आदि संकेताक्षरो द्वारा प्रकट किया जाता है तथा इनके तत्सवादी y के मूल्यों के लिए $y_0, y_{-1}, y_{-2}, y_{-3}, y_1, y_2$ आदि चिह्नो का प्रयोग किया जाता है। दूसरे शब्दो में, इस रीति में मूल बिन्दु (origin) मध्य में होता है इसीलिए यह श्रेणी के मध्यवर्ती मूल्य के आन्तरगणन के लिए उपयुक्त है।

(ii) अन्तर-सारणी—न्यूटन को प्रगामी रीति की भाँति इसमें भी अन्तर-सारणी की रचना की जाती है। अन्तरों के संकेत चिह्न y's के चिह्नों के अनुकूल होते हैं—जैसे $\Delta^1{}_{y0}, \Delta^2{}_{y-1}, \Delta^3{}_{y-1}, \Delta^4{}_{y-2}$ आदि—

(iii) x के अन्तर का निर्धारण निम्न सूत्र से किया जाता है—

$$x=\frac{\text{आन्तरगणन पद—पिछला पद}}{\text{आसन्न पदों का अन्तर}}$$

(iv) न्यूटन-गॉस (अग्रगामी) सूत्र—

$$y_x=y_0+x\Delta^1_{y0}+\frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2_{y-1}+\frac{(x+1)\,x(x-1)}{1.2.3}\Delta^3_{y-1}+\frac{(x+1)\,x(x-2)\,(x-1)}{1.2.3.4}\Delta^4_{y-1}$$

उदाहरण (Illustration) 13 :

निम्न आँकड़ों की सहायता से न्यूटन गॉस विधि द्वारा $x=25$ के तत्संवादी y का मूल्य आन्तरगणित कीजिए।

स्वतन्त्र चर (x) :	10	20	30	40
आश्रित चर (y) :	25	28	34	45.

हल (Solution) :

अन्तर-सारणी (न्यूटन-गॉस विधि)

x's		y's		अन्तर					
				प्रथम		द्वितीय		तृतीय	
10	x_{-1}	25	y_{-1}						
				3	Δ^1_{y-1}				
20	x_0	28	y_0			3	Δ^2_{y-1}		
				6	Δ^1_{y0}			2	Δ^3_{y-1}
30	x_1	34	y_1			5	Δ^2_{y0}		
				11	Δ^1_{y1}				
40	x_2	45	y_2						
25	x	?	y_x						

$$x=\frac{\text{आन्तरगणन पद—पिछला पद}}{\text{आसन्न पदों का अन्तर}}=\frac{25-20}{30-20}=\cdot5$$

$$y_x=y_0+x\Delta^1_{y0}+\frac{x\,(x-1)}{2}\Delta^2_{y-1}+\frac{(x+1)\,x(x-1)}{2.3}\Delta^3_{y-1}$$

$$y_x=28+\cdot5\times6+\frac{\cdot5\times-\cdot5\times3}{2}+\frac{1\cdot5\times\cdot5\times-\cdot5\times2}{2\times3}$$

$$=28+3-\cdot375-\cdot125 \quad \text{or} \quad 31-\cdot5=30\cdot5$$

न्यूटन की अग्रगामी अन्तर-रीति द्वारा भी यही उत्तर आता है।

(2) न्यूटन-गॉस पृष्ठगामी रीति (Newton-Gauss Backward-Method)—

प्रयोग—यह रीति भी न्यूटन की अग्रगामी अन्तर-रीति का ही परिवर्तित रूप है और श्रेणी के अन्तिम भाग के किसी स्वतन्त्र-पद के तत्संवादी आश्रित पद के आन्तरगणन में इसका प्रयोग किया जाता है।

प्रक्रिया—इस रीति में आन्तरगणन-पद (x) से अगले पद को x_0, उससे पिछले को x_{-1}, x_{-2} आदि और x_0 के बाद वाले पदों को x_1, x_2 आदि संकेतों द्वारा प्रकट किया जाता है। इसके बाद अन्तर-सारणी द्वारा अन्तर ज्ञात कर लिए जाते हैं। फिर निम्न सूत्र द्वारा x निकाला जाता है—

$$x=\frac{\text{आन्तरगणन पद से अगला पद—आन्तरगणन पद}}{\text{आसन्न पदों का अन्तर}}$$

अन्त में निम्नलिखित सूत्र द्वारा आन्तरगणन किया जाता है—

$$y_x=y_0-x\Delta^1_{y-1}+\frac{(x+1)\,x}{1.2}\Delta^2_{y-1}-\frac{(x+1)\,x(x-1)}{1.2.3}\Delta^3_{y-2}+\frac{(x+1)\,x(x-1)\,(x-2)}{1.2.3.4}\Delta^4_{y-2}$$

(3) **स्टर्लिंग का सूत्र (Stirling's formula)**—यह सूत्र न्यूटन-गॉस अग्रगामी व पृष्ठगामी—दोनों सूत्रों का समान्तर माध्य है और श्रेणी के मध्यवर्ती पद के आश्रित मूल्य का आन्तरगणन करने के लिए उपयुक्त है। अग्रगामी विधि की भाँति इस रीति में भी आन्तरगणन पद से पहले के पद को ही मूल-बिन्दु (x_0, y_0) माना जाता है। सूत्र इस प्रकार है—

$$y_x=y_0+x\left[\frac{\Delta^1_{y_0}+\Delta^1_{y-1}}{2}\right]+\frac{x^2}{2}\Delta^2_{y-1}+\frac{x\,(x^2-1)}{2.3}\left[\frac{\Delta^3_{y-1}+\Delta^3_{y-2}}{2}\right]+\ldots$$

उदाहरण 13 को स्टर्लिंग सूत्र के प्रयोग द्वारा भी हल किया जा सकता है—

$$y_x=28+\cdot5\left[\frac{6+3}{2}\right]+\frac{(\cdot5)^2}{2}\times3+\frac{\cdot5(\cdot5^2-1)}{2\times3}\left[\frac{2+0^*}{2}\right]$$

$$=28+\cdot5\times4\cdot5+\cdot375+\frac{\cdot5\times-\cdot75\times2}{2\times3}$$

$$=28+2\cdot25+\cdot375-\cdot125=30\cdot5$$

(4) **न्यूटन की विभाजित अन्तर-रीति –(Newton's Method for Divided Differences)**—इस रीति का प्रयोग तब किया जाता है जबकि स्वतन्त्र श्रेणी के पदों के अन्तर असमान (Unequal Intervals) हों।

विधि—इस रीति के अनुसार पहले विभाजित अन्तर-सारणी (Table of Divided Differences) बनाई जाती है जिसमें निकटवर्ती y's के अन्तरों को तत्सवादी x's के अन्तरों से भाग देकर विभाजित अन्तर निकाले जाते हैं। यदि y के चार मूल्य ज्ञात हों तो तीन प्रमुख विभाजित अन्तरों (Leading Divided Differences) का प्रयोग किया जायगा। अन्तर के प्रथम *खाने से तीन विभाजित अन्तर उपलब्ध होंगे जिनमें से पहला, प्रथम प्रमुख विभाजित अन्तर होगा।* प्रत्येक y में से पिछले y को घटाकर उनके तत्संवादी x's के अन्तर से भाग कर दिया जायगा। यही सम्बद्ध विभाजित अन्तर होगा। दूसरे खाने में प्रथम खाने के तीन विभाजितान्तरों की सहायता से इसी प्रकार दो विभाजित अन्तर निकाल लिए जायेंगे जिनमें से पहला, द्वितीय प्रमुख विभाजित अन्तर कहलायेगा। तीसरे खाने में दूसरे कॉलम के दो अन्तरों के आधार पर एकमात्र विभाजित अन्तर प्राप्त किया जायगा जो तृतीय प्रमुख विभाजितान्तर कहलायेगा। विभाजित अन्तर निकालने की यह प्रक्रिया निम्नांकित सारणी में स्पष्ट की गई है—

विभाजितान्तर-सारणी

x's	y's	विभाजित-अन्तर					
		प्रथम		द्वितीय		तृतीय	
x_0	y_0						
		$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$	Δ^1_0				
x_1	y_1			$\frac{\Delta^1_1-\Delta^1_0}{x_2-x_0}$	Δ^2_0		
		$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	Δ^1_1			$\frac{\Delta^2_1-\Delta^2_0}{x_3-x_0}$	Δ^3_0
x_2	y_2			$\frac{\Delta^1_2-\Delta^1_1}{x_3-x_1}$	Δ^2_1		
		$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$	Δ^1_2				
x_3	y_3						
x	y						

* उक्त उदाहरण में Δ^3_{y-2} ज्ञात नहीं किया जा सकता, अतः ।

इस विधि द्वारा आन्तरगणन करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जायगा—

$$y_x = y_0 + (x - x_0)\,\Delta^1_0 + (x - x_0)(x - x_1)\,\Delta^2_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,\Delta^3_0 + \ldots\ldots$$

$\Delta^1_0, \Delta^2_0, \Delta^3_0$ क्रमशः प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय प्रमुख विभाजितान्तर (first, second and third leading divided differences respectively) हैं।

उदाहरण (Illustrations) 14 :

उदाहरण 10 को विभाजितान्तर विधि द्वारा हल कीजिए।

हल (Solution) :

विभाजितान्तर-सारणी

x's		y's		विभाजित-अन्तर: प्रथम		द्वितीय		तृतीय	
3	x_0	168	y_0						
				$\frac{120-168}{7-3}$	Δ^1_0 −12				
7	x_1	120	y_1			$\frac{-24-(-12)}{9-3}$	Δ^2_0 −2		
				$\frac{72-120}{9-7}$	−24			$\frac{5-(-2)}{10-3}$	Δ^3_0 1
9	x_2	72	y_2			$\frac{-9-(-24)}{10-7}$	5		
				$\frac{63-72}{10-9}$	−9				
10	x_3	63	y_3						
6	x	?	y						

$$y_x = y_0 + (x - x_0)\Delta^1_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta^2_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta^3_0$$

$$= 168 + (6-3) \times -12 + (6-3)(6-7) \times -2 + (6-3)(6-7)(6-9) \times 1$$

$$= 168 - 36 + 6 + 9 \text{ or } 183 - 36$$

$$= 147$$

स्पष्ट है कि लाग्रेन्ज की रीति द्वारा भी y का यही मूल्य आन्तरगणित किया गया है।

व्यवहार मे, आन्तरगणन व बाह्यगणन के लिए द्विपद-विस्तार विधि, न्यूटन की प्रगामी-अन्तर-विधि तथा लाग्रेन्ज की विधि का ही सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है।

महत्त्वपूर्ण सूत्रों की सूची

विधि व प्रयोग	सूत्र
1. प्रत्यक्ष द्विपद-विस्तार : [जब x's में समान अन्तर हो और आन्तरगणन पद भी उनमें से एक हो]	$\Delta^n_0=(y-1)^n=0$ $y_n-ny_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}y_{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}y_{n-3}+\ldots\ldots=0$
2. न्यूटन की अग्रगामी अन्तर विधि : [जब प्रदत्त x's समान अन्तर वाले हों और आन्तरगणन-पद उनमें से एक न हो]	$y_x=y_0+x\Delta^1_0+\frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3_0+\ldots$ जबकि $x=\frac{x_x-x_0}{x_1-x_0}$
3. लाग्रंज का नियम : [सार्वभौमिक परन्तु असमान अन्तरों मे प्रयुक्त]	$y_x=y_0\times\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}+y_1\times\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\ldots+y_n\times\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}$
4. परवलयिक वक्र विधि : [सार्वभौमिक]	$y=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots nx^n$

प्रश्न

1. 'आन्तरगणन' एवं 'बाह्यगणन' में अन्तर स्पष्ट कीजिए। सांख्यिकीय अध्ययन में उनकी आवश्यकता और उपयोगिता का संक्षिप्त विवेचन कीजिए।
Explain clearly the difference between 'Interpolation' and 'Extrapolation'. Discuss briefly their necessity and usefulness in statistical studies.

2. एक व्यापारी के लिए आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की उपयोगिता का वर्णन कीजिए। आन्तरगणन की जो विभिन्न रीतियाँ आप को ज्ञात हैं उनको बताइये।
Discuss the utility of interpolation and extrapolation to a businessman. What are the different methods known to you for interpolation. *[B. Com., IIyr Raj., 1977]*

3. आन्तरगणन की आवश्यकता एवं उपयोगिता की समीक्षा कीजिए। आन्तरगणन की बिन्दुरेखीय रीति का वर्णन कीजिए।
Comment on the necessity and usefulness of interpolation. Describe the graphic method of interpolation. *[I.C.W.A., Jan., 1970]*

4. आन्तरगणन तथा बाह्यगणन करते समय किन मान्यताओं का ध्यान रखना पड़ता है? उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए।
What are the assumptions underlying interpolation and extrapolation? Explain with examples. *[M. Com., Banaras, 1974 ; Vikram, 1972]*

5. आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की विविध रीतियों को बतलाइये। प्रत्येक विधि की उपयुक्तता को समझाइये।
Briefly give an account of the various methods of interpolation and extrapolation. State the suitability of each method. *[M. Com., I/III Sem., Raj., Apr. 1977]*

6. एक श्रेणी में अज्ञात समंक को अनुमानित करने की किन्हीं तीन रीतियों का संक्षिप्त वर्णन कीजिए और उन परिस्थितियों व मान्यताओं का भी उल्लेख कीजिए जिनमें प्रत्येक रीति उचित रूप से प्रयुक्त की जा सकती है।
Describe briefly any three methods of estimating a missing figure in a series giving the circumstances in which each of them can be most suitably used and the assumptions made therein.

7. बिन्दुरेखीय विधि द्वारा अज्ञात संख्या का आन्तरगणन कीजिए—
Interpolate the missing figure by graphic method—

Year :	1929-30	30-31	31-32	32-33	33-34	34-35	35-36	36-37	37-38
No. of sugar mills :	27	29	32	57	112	130	?	140	146

[135]

8. निम्न सारणी एक व्यापारिक संस्था के 1971 से 1976 तक के लाभ को प्रस्तुत करती है। 1975 के लाभ की राशि अज्ञात है। बिन्दुरेखीय रीति द्वारा उसका आन्तरगणन कीजिए—
The following table presents the profits of a trading concern from 1971 to 1976. The profit for 1975 is unknown. Interpolate the same graphically—

Year :	1971	1972	1973	1974	1975	1976
Profit (Lakhs of Rs.) :	108	113	111	110	?	114

[Rs. 112 lakhs] *[B. Com., Osmania, 1967]*

9. नीचे दी हुई सामग्री से 'नहीं दिये गए' मूल्य को ज्ञात कीजिए—
Find the missing value in the following data—

X	0	3	6	9
Y	30	?	80	120

[50] *[B. Com., Raj., 1972]*

10. निम्न श्रेणी में आन्तरगणन द्वारा अज्ञात मूल्य अनुमानित कीजिए—
In the following series, estimate the missing value by interpolation—

Year :	1961	1962	1963	1964	1965
Population (000) :	100	107	?	157	212

[124] *[B. Com., Madras, 1971; Allahabad, 1963]*

11. निम्न समंकों से 1942 के लिए कनाडा की राष्ट्रीय आय का अनुमान लगाइए—
From the following data estimate the national income of Canada for 1942—

Year :	1940	1941	1943	1944
National Income (mln. dollars) :	5112	6514	9069	9685

[7922.5] *[U.P.C.S., 1964]*

12. किसी स्थान के कुछ वर्षों के कर्मचारी वर्ग जीवन निर्वाह सूचकाक नीचे दिये गए है। अज्ञात सूचकाक का आन्तरगणन कीजिए—
Working Class cost of living indices of a certain place for some years are given below. Interpolate the missing index number—

Year :	1964	1965	1966	1967	1968	1969
Index No. :	320	300	?	280	278	250

[284] [B. Com., Mysore, 1969]

13. निम्न श्रेणी में अज्ञात पद ज्ञात कीजिए—
Find the missing term in the following series—

X:	1	2	3	4	5	6	7
Y:	2	4	8	?	32	64	128

किसी भी बीजगणितीय रीति का प्रयोग करें।
Use any algebraic method.
[16] [M. Com., Garhwal, 1971]

14. निम्नलिखित समक किसी गाँव की छः जनगणनाओं के समय की जनसंख्या प्रदर्शित करते हैं। अज्ञात संख्या अनुमानित कीजिए—
The following data relate to population of a village for the last six censuses Interpolate the missing figure—

Year :	1911	1921	1931	1941	1951	1961
Population (000) :	281	279	295	?	303	315

[B. Com., Allahabad, 1968]
[Assumptions underlying interpolation do not hold true, hence population for 1921 will have to be interpolated afresh 1921—291, 1941—298]

15. निम्न सारणी एक नगर की जनसंख्या के आँकड़े प्रस्तुत करती है—
The following table presents population figures of a town—

1921	1931	1941	1951	1961	1971
75,401	82,984	86,686	44,947	93,091	1,27,327

1981 के लिए नगर की जनसंख्या का पूर्वानुमान कीजिए।
Extrapolate the population of the town for 1981.
[Extrapolate the population for 1981 after replacing the 1951 given figure by an interpolated estimate (86,547) The estimate for 1981 *i.e.* 2,20,250 does not seem to be reliable]

16. निम्न आँकड़ो से 1971 और 1973 के अंको की अन्तर्गणना कीजिए—
Interpolate the values of 1971 and 1973 from the data given below—

Year :	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
Sale of Jute (Bales in lakhs) :	15	18	20	?	25	?	30

[22·2 & 28] [M. Com., I/III Sem., Raj., Dec , 1976]

17. निम्नलिखित सारणी के अज्ञात मूल्यो का आन्तरगणन कीजिए—
Interpolate the missing values in the following table :

X:	20	21	22	23	24	25	26
Y:	135	?	111	100	?	82	74

[123 & 90 4] [M. Com., Raj , I/III Sem., Dec. 1976 ; I Sem., May, 1976]

18. निम्न सारणी मे अज्ञात मूल्य ज्ञात कीजिए—
From the following table, interpolate the missing value—

Year :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Value :	76 6	78 7	?	77·7	78·7	?	80·6	77 6	78·7

[78 35 & 80 6] [M. A , Kanpur, 1975]

19. यदि l_x जीवन-सारणी मे x आयु पर रहने वाले व्यक्तियो को प्रदर्शित करता है, तो x=35, 42 व 47 के लिए l_x के सर्वोत्तम अनुमान ज्ञात कीजिए—
If l_x denotes the number of persons living at age x in a life table, find the best estimates for l_x when x=35, 42 and 47—

$$l_{20}=512 \; ; \; l_{30}=439, \; l_{40}=346, \; l_{50}=243$$

[l_{35}=394; l_{42}=326; l_{47}=274] [M. A., Punjab, 1970 ; Alld., 1969]

20. निम्नांकित विवरण से वर्ष 1974 के लिए मूल्य निकालिए—
Estimate the value for 1974 from the following data :

Year :	1956	1961	1966	1971	1976
Value :	20	22	27	36	45

[41 9 or 42] [*M Com., Rohilkhand, 1977 ; B. Com., Kurukshetra, 1975*]

21. निम्नलिखित सारणी एक उत्पाद से सम्बन्धित उत्पादन तथा लागत बतलाती है। उत्पादन=42 से सम्बन्धित लागत का अन्तर्वेशन कीजिए—
The following table shows the output and input related to a certain product. Interpolate the input for output at 42—

Output :	40	50	60	70
Input :	6·2	7·2	9 1	12 0

[6·33] [*M. Com., Meerut, 1977*]

22. न्यूटन के आन्तरगणन-सूत्र की व्याख्या कीजिये। निम्न सारणी से $x=8$ के तत्सवादी y का मूल्य ज्ञात कीजिये—
Define Newton's interpolation formula. From the following table find the value of y when $x=8$—

X :	1	3	5	7	9
Y :	20	30	42	58	72

[66] [*U.P.C.S., 1974*]

23. न्यूटन-सूत्र का प्रयोग करके, विभिन्न आयु पर देय जीवन बीमा-शुल्क के निम्नांकित समंकों से 28 वर्ष की आयु पर देय बीमा शुल्क ज्ञात कीजिये—
Using Newton's formula, find out the premium payable at 28 years of age for a life insurance policy from the following data about the premium payable at different ages—

Age (years) :	25	30	35	40	45	50
Premium (Rs.) :	23	26	30	35	42	51

[24 6 or 25] [*M. A., Punjab, 1977*]

24. निम्न समंकों से 16 वर्ष, 22 वर्ष और 24 वर्ष की आयु पर जीवन प्रत्याशा अनुमानित कीजिये—
From the following data, estimate the expectation of life at ages 16, 22 and 24 years—

Age (years) :	10	15	20	25	30	35
Expectation of Life (in years) :	35·4	32·2	29 1	26 0	23 1	20·4

[31·58, 27 [illegible] and 26·61 years]

25. नीचे दी हुई सारणी से, न्यूटन रीति द्वारा, 25 वर्ष की अवस्था पर प्रीमियम निकालिए—
From the following table, interpolate the premium payable at age 25 years by Newton's method—

Age (years) :	20	24	28	32
Premium :	·01427	·01581	·01772	·01996

[0167:] [*M. A., Raj., 1973*]

26. निम्न सारणी से 2650 किलोमीटर दूरी की यात्रा के लिए रेल-भाड़ा दर आन्तरगणित कीजिए—
From the following table, interpolate the railway freight rate for a distance of 2650 Kilometres—

Distance (Kilometres) :	500	1000	1500	2000	2500	3000
Rly. Freight (Rs.) :	50 5	90·5	123·5	160	190	220

[Rs 199·24] [*M. A., Meerut, 1971*]

27. निम्न समंकों से 24 रु० या अधिक किन्तु 25 रु० से कम आय वाले श्रमिकों की संख्या ज्ञात कीजिए—
From the following data, find the number of workers getting between Rs. 24 and Rs. 25—

Income less than (Rs.) :	20	25	30	35	40
No. of Workers :	296	599	804	918	966

[53]

28. निम्न सारणी से मालूम कीजिए—(अ) उन विद्यार्थियों की संख्या जिनके अंक 48 से कम आये हों; (ब) 48 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की प्रतिशत—
From the following table find out—
(a) the number of students who secured less than 48 marks;
(b) the percentage of students getting less than 48 marks—

Marks :	0—20	20—40	40—60	60—80	80—100
No. of Students :	5	26	85	54	30

[(a) 65; (b) 32·5%] *[M. Com., Raj., 1972]*

29. निम्न आंकड़ों से 60 से 70 रु० के बीच वेतन पाने वालों की संख्या ज्ञात कीजिए—
From the following data, estimate the number of persons earning between 60 and 70 Rupees—

Wages (Rs.) :	Below 40	40—60	60—80	80—100	100—120
No of Workers (in 000's) :	250	120	100	70	50

[B. Com., T.D C. II Yr., Raj., 1976; Punjab, 1972; Nagpur, 1970; M. A., Kanpur, 1974; Vikram, 1975; Jiwaji, 1970]
[53·6 thousand]

30. निम्न सारणी से 45 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए—
From the following table find the number of students who obtain less than 45 marks—

Marks :	30—40	30—50	30—60	30—70	30—80
No. of Students :	31	73	124	159	190

[B. Com., Kurukshetra, 1976; Punjab, 1971; Banaras, 1969; Nagpur, 1968; M. A., Meerut, 1972; Punjab, 1969; M. Com., Gorakhpur, 1976]
[48]

31. निम्न सारणी में एक महाविद्यालय के द्वितीय वर्ष वाणिज्य के विद्यार्थियों के सांख्यिकी विषय में (100 में से) प्राप्तांक दिये गए हैं। आन्तरगणन के किसी उपयुक्त सूत्र का प्रयोग करके 60 प्रतिशत या अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए—
The following table gives the marks obtained by second year T D.C. Commerce students of a college in Statistics (out of 100). Find the number of students who secured 60 per cent or more marks, by using some appropriate formula of interpolation—

Marks :	35—45	45—55	55—65	65—75	75—85
No. of Students :	31	42	51	35	31

[90] *[B Com., II Yr. T.D.C., Rajasthan, 1977]*

32. निम्नलिखित सामग्री की सहायता से ऐसे व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनकी आय (i) 40 और 50 रु० के बीच हो, (ii) 50 और 60 रु० के बीच हो; (iii) 50 रु० से कम हो, तथा (iv) 50 रु० से अधिक हो—
With the help of the following data, find the number of persons whose income is (i) between Rs. 40 and 50, (ii) between Rs. 50 and 60, (iii) less than Rs. 50 and (iv) above Rs. 50—

Income (Rs.) :	Below 20	20—40	40—60	60—80	80—100
No. of Persons :	120	145	200	250	150

[M. Com., Agra, 1977; Vikram, 1972, M. A., Kanpur, 1976; B Com, Banaras, 1972; Punjab, 1970]
[(i) 90, (ii) 110, (iii) 355, (iv) 510]

33. निम्न बारम्बारता-श्रेणी को वर्गान्तरों को आधा करते हुए पुनर्गठित करने हेतु आन्तरगणन की किसी समुचित विधि का प्रयोग करिए—
Use some appropriate interpolation method and reconstruct the following frequency table with the intervals halved—

X :	0—2	2—4	4—6
f :	35	52	84

[0—1 1—2 2—3 3—4 4—5 5—6
21 14 22 30 38 46] *[M. Com., Kanpur, 1975]*

34. निम्न सारणी जीवन के प्रथम 6 महीनों में बच्चे के सामान्य भार को प्रदर्शित करती है। 4 महीने के बच्चे का भार अनुमानित कीजिए—
The following table shows the mean weight of babies during the first six months of life. Estimate the likely weight of a 4-month baby—

Age (months) :	0	2	3	5	6
Weight (in lbs.) :	5	7	8	10	12

[8 89 lbs] *[I. C W. A., 1970 B Com, Punjab, 1972]*

18
प्रतीपगमन विश्लेषण
(REGRESSION ANALYSIS)

सह-सम्बन्ध का सिद्धान्त यह स्पष्ट करता है कि दो सम्बन्धित श्रेणियों में कितना और किस प्रकार का सम्बन्ध है। लेकिन एक श्रेणी के निश्चित मूल्य के आधार पर दूसरी आश्रित श्रेणी के तत्सवादी मूल्य का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाने के लिए प्रतीपगमन-विश्लेषण[1] (regression analysis) करना आवश्यक होता है। उदाहरणार्थ, मुद्रा की पूर्ति के सूचकांकों तथा सामान्य मूल्य-स्तर सूचकांकों के सहसम्बन्ध-गुणांक की सहायता से हमें यह पता चल जाता है कि मुद्रा की मात्रा और मूल्य-स्तर में किस दिशा का और कितना सम्बन्ध है, परन्तु दोनों श्रेणियों के प्रतीपगमन-विश्लेषण द्वारा यह भी अनुमान लगाया जा सकता है कि मुद्रा की निश्चित मात्रा हो जाने पर सामान्य मूल्य-स्तर कितना हो जाएगा। इसी प्रकार किसी वस्तु की कीमत और माँग के पारस्परिक सम्बन्ध के आधार पर प्रतीपगमन द्वारा किसी निश्चित मूल्य के लिए माँग का अनुमान लगाया जा सकता है। प्रतीपगमन सांख्यकीय विश्लेषण की वह विधि है जिसके द्वारा एक चर के किसी ज्ञात मूल्य से सम्बन्धित दूसरे चर का सम्भाव्य मूल्य अनुमानित किया जा सकता है।

अर्थ और उपयोगिता (Meaning and Utility)—प्रतीपगमन (regression) शब्द का अर्थ है, वापिस लौटना या पीछे हटना (going back or returning)। सांख्यिकी में इस शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम उन्नीसवीं शताब्दी में सर फ्रांसिस गाल्टन (Sir Francis Galton) नामक प्रसिद्ध वैज्ञानिक ने अपने शोध लेख—'पैतृक ऊँचाई में मध्यमता की ओर प्रतीपगमन' (Regression towards Mediocrity in Hereditary Stature) में किया था। उक्त शोध-लेख में लगभग एक हजार पिताओं तथा उनके पुत्रों के कद के अध्ययन के आधार पर उन्होंने यह महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाला कि यद्यपि पिता-पुत्रों की ऊँचाई में परस्पर घनिष्ठ सह-सम्बन्ध था फिर भी सामान्य माध्य से दोनों के विचलनों में काफी अन्तर पाया जाता था। समस्त जाति की माध्य ऊँचाई से पिताओं की ऊँचाई के विचलनों की अपेक्षा पुत्रों की ऊँचाई के विचलन कम थे।[2] यदि पिताओं की माध्य ऊँचाई समग्र की माध्य ऊँचाई से 1 से० मी० अधिक थी तो उनके पुत्रों की माध्य ऊँचाई समग्र की माध्य ऊँचाई से केवल 0·8 से० मी० (अर्थात् 1 से० मी० से कम) ही अधिक थी। दूसरे शब्दों में, पिताओं की ऊँचाई समग्र की सामान्य ऊँचाई से कम या अधिक होती थी परन्तु पुत्रों की ऊँचाई समग्र की ऊँचाई के काफी निकट होती जाती थी। पुत्रों की ऊँचाई के सामान्य माध्य के निकट वापिस जाने की इस प्रवृत्ति को ही फ्रांसिस गाल्टन ने 'मध्यमता की ओर प्रतीपगमन' कहा था। इस प्रवृत्ति के अनुसार ही यह देखने में आता है कि सामान्यतः ऊँचे पिताओं के पुत्र कम ऊँचे और ठिगने पिताओं के पुत्र कम ठिगने होते हैं।

[1] 'प्रतीपगमन' को 'समाश्रयण' भी कहा जाता है।

[2] 'Sons deviated less, on the average, from the mean height of the race than their fathers. Whether the fathers were above or below the average, sons tended to go back or *regress* towards the mean' —Frederick C. Mills : *Statistical Methods*, p. 284.

आधुनिक सांख्यिकी में प्रतीपगमन की धारणा केवल पितृागत विशेषताओं के अध्ययन तक ही सीमित नहीं है अपितु इसका प्रयोग उन सभी क्षेत्रों में किया जाता है जिनमें दो या अधिक सम्बन्धित श्रेणियों में विभिन्न पद-मूल्यों की सामान्य माध्य की ओर वापिस जाने की प्रवृत्ति पाई जाती है। प्रतीपगमन के आधार पर सामाजिक, आर्थिक व व्यावसायिक क्षेत्रों में विभिन्न घटनाओं के माध्य सम्बन्धों का विश्लेषण करके एक पद-मूल्य से सम्बन्धित दूसरा आश्रित मूल्य अनुमानित किया जा सकता है। वालिस तथा रोबर्टस ने ठीक ही कहा है, 'अक्सर यह ज्ञात करना अधिक महत्त्वपूर्ण होता है कि (दो या अधिक घटनाओं में) वास्तविक सम्बन्ध क्या है जिससे एक चर-मूल्य (स्वतन्त्र चर-मूल्य) के ज्ञान के आधार पर दूसरे चर-मूल्य (आश्रित चर-मूल्य) का पूर्वानुमान लगाया जा सके; और इस प्रकार की स्थिति में प्रयोग की जाने वाली उपयुक्त तान्त्रिक विधि ही प्रतीपगमन विश्लेषण कहलाती है।'[1] ब्लेयर के अनुसार 'मूल इकाइयों के रूप में, दो या दो से अधिक चरों के पारस्परिक औसत सम्बन्ध का माप ही प्रतीपगमन कहलाता है।'[2]

आर्थिक व व्यावसायिक जगत में प्रतीपगमन की अत्यधिक व्यावहारिक उपयोगिता है। प्रबन्ध-अधिकारियों द्वारा व्यवसाय के नियन्त्रण-उपकरण (control tool) के रूप में प्रतीपगमन-विश्लेषण का प्रयोग किया जाता है। इस प्रविधि के आधार पर उचित व्यावसायिक निर्णय लेना सरल हो जाता है तथा उस निर्णय को व्यावहारिकता की कसौटी पर परखा जा सकता है। उदाहरणार्थ, इसके द्वारा यह अनुमान लगाया जा सकता है कि यदि किसी वस्तु के उत्पादन या उसकी पूर्ति में निश्चित मात्रा में वृद्धि या कमी हो जाए तो उसके मूल्य में सम्भावित परिवर्तन कितनी मात्रा में होगा। इसी प्रकार यह भी ज्ञात किया जा सकता है कि सामान्य मूल्य-स्तर में निश्चित वृद्धि होने पर जीवन-निर्वाह व्यय कितना बढ़ जाएगा। मूल्यों के आधार पर माँग का; वर्षा की मात्रा, बीज, खाद आदि के आधार पर कृषि उपज का तथा पूँजी के आधार पर लाभ आदि का अनुमान लगाने में प्रतीपगमन विश्लेषण बहुत सहायक सिद्ध होता है। व्यवसाय की सफलता के लिए इस प्रकार के अनुमान अनिवार्य होते हैं। परन्तु ये अनुमान तभी अधिक यथार्थ होते हैं जब दोनों श्रेणियों में परस्पर घनिष्ठ सह-सम्बन्ध हो। प्रतीपगमन विश्लेषण की सहायता से चर-मूल्यों में सह-सम्बन्ध की मात्रा व दिशा का माप भी किया जा सकता है।

सह-सम्बन्ध एवं प्रतीपगमन में अन्तर (Difference between Correlation and Regression)—सह-सम्बन्ध और प्रतीपगमन में निम्नलिखित अन्तर हैं—

(i) **सम्बन्ध की मात्रा व प्रकृति**—सह-सम्बन्ध से दो या अधिक चरों में परस्पर औसत सम्बन्ध की मात्रा (degree) का पता चलता है जबकि प्रतीपगमन इस सम्बन्ध की प्रकृति (nature) स्पष्ट करता है और यह बतलाता है कि एक चर के औसत मूल्य के तत्सम्वादी दूसरे चर का सम्भाव्य औसत मूल्य क्या होगा। वर्नर हर्श के शब्दों में 'जबकि सह-सम्बन्ध विश्लेषण दो या अधिक घटनाओं के सह-परिवर्तन की घनिष्टता की जाँच करता है, प्रतीपगमन विश्लेषण इस सम्बन्ध की प्रकृति व मात्रा का माप करके हमें भावी अनुमान की क्षमता प्रदान करता है।'[3]

(ii) **कारण-परिणाम सम्बन्ध**—सह-सम्बन्ध विश्लेषण चर-मूल्यों में कारण-परिणाम सम्बन्ध को अधिक स्पष्ट रूप से व्यक्त करता है। दो चरों में अत्यधिक मात्रा का सह-सम्बन्ध होने से यह प्रामाणिक रूप से नहीं कहा जा सकता कि एक कारण है और दूसरा परिणाम परन्तु प्रतीपगमन विश्लेषण में एक चर-स्वतन्त्र माना जाता है जिसके लिए मूल्य प्रदत्त होता है और दूसरा आश्रित

[1] 'It is often more important to find out what the relation actually is, in order to estimate or predict one variable (the dependent variable); and the statistical technique appropriate to such a case is called *regression analysis*.' —Wallis and Roberts : *Statistics : A New Approach*, p. 524.

[2] 'Regression is the measure of the average relationship between two or more variables in terms of the original units of the data.'—Morris Myers Blair—*Elementary Statistics*, p. 23[illegible]

[3] 'While correlation analysis tests the closeness with which two or more phenomena co-vary, regression analysis measures the nature and extent of the relation, thus enabling us to make predictions.' —Werner Z. Hirsch.

चर-मूल्य होता है जिसका अनुमान लगाया जाता है। स्वतन्त्र चर कारण और आश्रित चर परिणाम होता है।

रेखीय प्रतीपगमन
(Linear Regression)

दो सम्बन्धित समक-श्रेणियों मे प्रतीपगमन का विश्लेषण अधिकतर बिन्दुरेखीय रीति द्वारा किया जाता है। X तथा Y श्रेणी के चर-मूल्यों को बिन्दुरेख पर अंकित करने से एक विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र[1] (Scatter Diagram or Dot Diagram) बन जाता है। इस चित्र पर अंकित विभिन्न बिन्दुओं के बीच से गुजरती हुई दो सर्वोपयुक्त रेखाएँ (lines of best fit) खींची जाती हैं। ये रेखाएँ ही प्रतीपगमन रेखाएँ कहलाती है। जब ये रेखाएँ सरल (straight) होती हैं तो प्रतीपगमन रेखाएँ (linear) कहलाती है। इन सरल प्रतीपगमन रेखाओ के समीकरण एक-घातीय (equations of the first degree) होते हैं। Y की X पर प्रतीपगमन रेखा का समीकरण $Y=a+bX$ तथा X की Y पर प्रतीपगमन रेखा का समीकरण $X=a+bY$ होता है। यदि बिन्दु-चित्र पर खींची जाने वाली ये सर्वोपयुक्त रेखाएँ सरलित वक्र (smooth curve) के रूप मे होती हैं तो उन वक्रों द्वारा प्रस्तुत प्रतीपगमन वक्र-रेखीय (curvilinear) कहलाता है। इस अध्याय मे हम रेखीय प्रतीपगमन का ही अध्ययन करेंगे।

सरल रेखीय प्रतीपगमन (Simple Linear Regression)—दो चर-मूल्यों X और Y के बीच रेखीय प्रतीपगमन का अध्ययन सरल (simple) रेखीय प्रतीपगमन कहलाता है। दोनों चरों मे से उस चर को स्वतन्त्र माना जाता है जो अनुमान का आधार होता है और वह चर आश्रित कहलाता है जिसके मूल्य का अनुमान लगाना होता है। प्रतीपगमन की विधि का प्रयोग दो से अधिक चरों के परस्परिक सम्बन्ध का विश्लेषण करने मे भी किया जा सकता है। तीन या तीन से अधिक चरों के लिए प्रयुक्त रेखीय प्रतीपगमन, बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन (multiple linear regression) कहलाता है। प्रस्तुत अध्याय मे दोनों प्रकार के प्रतीपगमन विश्लेषण का अध्ययन किया जाएगा।

प्रतीपगमन रेखाएँ
(Regression Lines)

अर्थ—दो श्रेणियों के पारस्परिक माध्य सम्बन्ध (average relationship) को प्रकट करने वाली सर्वोपयुक्त रेखाओ (lines of the best fit) को प्रतीपगमन रेखाएँ (regression lines) कहा जाता है। ये रेखाएँ एक श्रेणी के मध्यक मूल्यों से सम्बन्धित दूसरी श्रेणी के सर्वोत्तम माध्य मूल्यों (best mean values) को व्यक्त करती है।

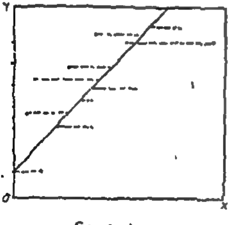
प्रतीपगमन की दो रेखाएँ क्यों ?—दो सम्बन्धित श्रेणियों के लिए दो प्रतीपगमन रेखाएँ होती है। एक रेखा Y का X पर प्रतीपगमन (regression of Y on X) प्रकट करती है। इसकी रचना X को स्वतन्त्र चर-मूल्य (independent variable) और Y को आश्रित चर-मूल्य (dependent variable) मानकर की जाती है तथा इसकी सहायता से X के दिए हुए औसत मूल्य के समकक्ष Y का सर्वोत्तम माध्य मूल्य अनुमानित किया जा सकता है। दूसरी रेखा X का Y पर प्रतीपगमन (regression of X on Y) व्यक्त करती है। इसकी रचना मे Y को स्वतन्त्र चर-मूल्य और X को आश्रित चर-मूल्य माना जाता है तथा इस रेखा के आधार पर Y के दिए हुए निश्चित माध्य-मूल्य से सम्बन्धित X का सर्वोपयुक्त मध्यक-मूल्य ज्ञात किया जा सकता है।

[1] देखिए अध्याय 11, पृ० 314।

इन रेखाओं को खींचते समय अन्थित श्रेणी के मूल्यों को उनके माध्य के अधिक से अधिक निकट रखा जाता है। अतः दो श्रेणियों के लिए दो प्रतीपगमन रेखाएँ होना आवश्यक है।

दो प्रतीपगमन रेखाएँ होने का एक और कारण भी है। प्रतीपगमन रेखाएँ वे सर्वोपयुक्त रेखाएँ होती हैं जिनकी रचना न्यूनतम वर्ग की मान्यता (least squares assumption) के आधार पर की जाती है। न्यूनतम वर्ग रीति के अनुसार खींची जाने वाली रेखा ऐसी होनी चाहिए जिसमें विभिन्न बिन्दुओं के विचलनों के वर्गों का जोड़ न्यूनतम हो। बिन्दुओं से रेखा तक के विचलनों का माप दो प्रकार से किया जा सकता है—एक तो क्षैतिज रूप से (horizontally) अर्थात् भुजाक्ष के समानान्तर (parallel to X-axis) तथा दूसरे लम्बवत् (vertically) अर्थात् कोटि-अक्ष के समानान्तर (parallel to Y-axis)। दोनों प्रकार के विचलनों के वर्गों के अलग-अलग जोड़ न्यूनतम करने के लिए दो रेखाओं का होना अनिवार्य है। X की Y पर प्रतीपगमन रेखा इस प्रकार खींची जाती है कि विभिन्न बिन्दुओं से उस रेखा तक के क्षैतिज विचलनों (horizontal deviations) के वर्गों का जोड़ न्यूनतम हो जाए (चित्र 1–A)। इसी प्रकार Y की X पर रेखा की रचना इस ढंग से की जाती है कि इन बिन्दुओं से उस रेखा तक के लम्बवत् विचलनों (vertical deviations) के वर्गों का जोड़ न्यूनतम हो जाए (चित्र 1-B)। इस प्रकार न्यूनतम वर्ग पद्धति के आधार पर भी प्रतीपगमन रेखाएँ दो होती हैं। निम्न चित्र से यह बात स्पष्ट हो जाती है—

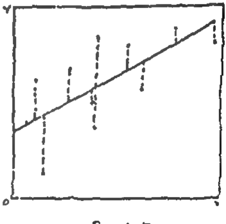
X की Y पर प्रतीपगमन रेखा



चित्र 1–A

$\Sigma (X-X_c)^2$ = न्यूनतम

Y की X पर प्रतीपगमन रेखा



चित्र 1–B

$\Sigma (Y-Y_c)^2$ = न्यूनतम

एक रेखा—उपर्युक्त नियम का केवल एक अपवाद है। जब दो श्रेणियों में पूर्ण सहसम्बन्ध (perfect correlation) होता है तो X और Y के मध्य एक ही प्रतीपगमन रेखा होती है, क्योंकि X और Y के पद-युग्मों के आधार पर प्रांकित सभी बिन्दु एक ही रेखा के रूप में होते हैं।

प्रतीपगमन रेखाओं के कार्य (Functions of Regression Lines)—प्रतीपगमन रेखाओं के दो महत्त्वपूर्ण कार्य होते हैं—

(1) **सर्वोपयुक्त अनुमान**—जैसा कि स्पष्ट किया जा चुका है इन रेखाओं की सहायता से एक श्रेणी के दिये हुए मूल्य के आधार पर दूसरी श्रेणी के तत्सवादी सर्वोपयुक्त औसत मूल्य का सांख्यिकीय अनुमान लगाया जा सकता है। X की Y पर (of X on Y) प्रतीपगमन रेखा से X का तथा Y की X पर (of Y on X) प्रतीपगमन रेखा द्वारा Y का सर्वोत्तम अनुमान लग जाता है।

(2) **सहसम्बन्ध की मात्रा व दिशा का ज्ञान**—प्रतीपगमन रेखाओं की सहायता से अग्र-लिखित नियमों के आधार पर यह भी ज्ञात किया जा सकता है कि दोनों श्रेणियों में सहसम्बन्ध कितना और कैसा है—

(i) धनात्मक—जब दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ रेखाचित्र पर बाएँ निचले कोने से दाहिने ऊपर के कोने की ओर (ऊर्ध्वगामी) बढ़ती हैं तो X और Y में धनात्मक सहसम्बन्ध होता है।

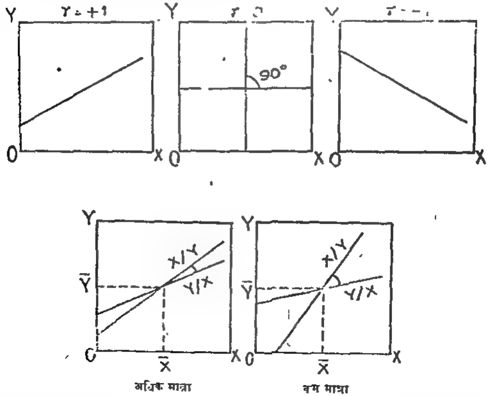
(ii) ऋणात्मक—इसके विपरीत जब ये रेखाएँ ऊपर से नीचे की ओर (अधोगामी) जाती हैं तो सहसम्बन्ध ऋणात्मक होता है।

(iii) पूर्ण सहसम्बन्ध, एक रेखा—जब विक्षेप-चित्र पर प्रांकित विभिन्न बिन्दु एक ही सीधी रेखा के रूप में हों तो दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को पूरी तरह से ढक लेती हैं। ऐसी स्थिति में श्रेणियों में पूर्ण सहसम्बन्ध होता है। दूसरे शब्दों में, X और Y में पूर्ण सहसम्बन्ध होने पर एक ही प्रतीपगमन रेखा बनती है।

(iv) सहसम्बन्ध का अभाव—यदि दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को समकोण (right angle) अर्थात् 90° के कोण पर काटती हों तो X और Y में बिल्कुल सहसम्बन्ध नहीं पाया जाता। इस स्थिति में विक्षेप-चित्र पर विभिन्न बिन्दु चारों ओर बिखरे होते हैं तथा उनमें कोई सुनिश्चित प्रवृत्ति स्पष्ट नहीं होती।

(v) सीमित सहसम्बन्ध—दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ एक-दूसरे के जितनी निकट होंगी, X और Y में उतना ही अधिक सहसम्बन्ध होगा। इसके विपरीत ये रेखाएँ एक-दूसरे से जितनी दूर होती जायेंगी सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही कम होती जाएगी। ये रेखाएँ दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य के संयोग से प्रांकित बिन्दु पर एक-दूसरे को काटती है। अतः इनके सर्वनिष्ठ-बिन्दु (point of intersection) से दोनों अक्षों पर डाले जाने वाले लम्ब (perpendicular) X तथा Y के समान्तर माध्य मूल्यों को व्यक्त करते हैं।

निम्न चित्र से प्रतीपगमन रेखाओं से सम्बन्धित उपर्युक्त नियम स्पष्ट हो जाते हैं।



चित्र 2—प्रतीपगमन रेखाएँ और सहसम्बन्ध

प्रतीपगमन रेखाओं की रचना दो रीतियों द्वारा की जा सकती है—(क) मुक्त-हस्त रीति द्वारा (by freehand method); तथा (ख) प्रतीपगमन समीकरणों द्वारा (by regression equations)।

प्रथम रीति का प्रयोग सामान्यतः नहीं किया जाता, क्योंकि इसके आधार पर विभिन्न व्यक्तियों द्वारा रेखा भिन्न-भिन्न प्रकार से खींची जा सकती है। अतः प्रतीपगमन समीकरण के आधार पर ही इन रेखाओं की रचना की जाती है।

प्रतीपगमन समीकरण
(Regression Equations)

प्रतीपगमन समीकरण, प्रतीपगमन रेखाओं के बीजगणितीय स्वरूप हैं। रेखाओं की भाँति ये समीकरण भी दो होते हैं—

(i) X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression equation of X upon Y)—इसकी सहायता से Y (स्वतन्त्र चर-मूल्य) के दिये हुए मूल्य के तत्संवादी X (आश्रित चर-मूल्य) का सर्वोत्तम मध्यक मूल्य ज्ञात किया जाता है तथा रेखाचित्र पर इस समीकरण के मूल्यों को अंकित करने से X की Y पर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त हो जाती है।

(ii) Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression equation of Y upon X)—इसके आधार पर X (स्वतन्त्र चर-मूल्य) के तत्सम्बद्ध Y (आश्रित मूल्य) के सर्वोपयुक्त मूल्य का अनुमान लगाया जाता है और Y की X पर प्रतीपगमन रेखा खींची जाती है।

रेखीय प्रतीपगमन के समीकरण, सरल रेखा के समीकरण (equation of the straight line) पर आधारित है। मूल रूप में ये निम्न प्रकार हैं—

(i) X का Y पर— $X=a+bY$

(ii) Y का X पर— $Y=a+bX$

'a' व 'b' का निर्धारण—इन समीकरणों में 'a' और 'b' अचर-मूल्य (constants) कहलाते है। प्रथम अचर-मूल्य 'a' अन्तःखण्ड (intercept) है अर्थात् यह वह बिन्दु है जिस पर प्रतीपगमन रेखा कोटि-अक्ष (Y-axis) को स्पर्श करती है। दूसरे शब्दों में, रेखाचित्र पर मूल-बिन्दु (point of origin) से कोटि-अक्ष (Y-axis) पर प्रतीपगमन रेखा के स्पर्श-बिन्दु का अन्तर ही अन्तःखण्ड कहलाता है। जब 'a' का मूल्य धनात्मक (+) होता है तो रेखा Y-axis को मूल-बिन्दु '0' से ऊपर की ओर स्पर्श करती है तथा 'a' ऋणात्मक (—) होने पर रेखा का कोटि-अक्ष पर स्पर्श बिन्दु '0' से नीचे की ओर होता है। यदि 'a' का मूल्य शून्य हो तो रेखा मूल-बिन्दु से ही आरम्भ होती है।

अन्तःखण्ड का बीजगणितीय माप—

प्रथम समीकरण $(X=a+bY)$ में $a=\bar{X}-b\bar{Y}$

द्वितीय समीकरण $(Y=a+bX)$ में $a=\bar{Y}-b\bar{X}$

$\bar{X}$ तथा $\bar{Y}$ समान्तर माध्यों के लिए प्रयुक्त किये गये हैं।

दूसरा अचर-मूल्य—'b' प्रतीपगमन रेखा का ढाल (slope of the line) प्रदर्शित करता है। इसे प्रतीपगमन-गुणाक (regression coefficient) भी कहते है। इससे यह ज्ञात होता है कि X में इकाई का परिवर्तन (unit change) होने से Y मे कितना परिवर्तन होगा। यदि 'b' का मूल्य धनात्मक हो तो रेखा का ढलान बाएँ से दाएँ ऊपर की ओर होगा। b के ऋणात्मक होने पर रेखा का ढलान नीचे की ओर होगा। बीजगणितीय दृष्टि से 'b' के मूल्य को सहसम्बन्ध-गुणाक, प्रमाप-विचलन व समान्तर माध्यो के रूप मे इस प्रकार प्रकट किया जा सकता है—

प्रथम समीकरण में $b_{XY}=r\frac{\sigma X}{\sigma Y}$ द्वितीय समीकरण मे $b_{YX}=r\frac{\sigma Y}{\sigma X}$

[1] देखिए अध्याय 15 चित्र 5, पृ॰ 488।

σ_x व σ_y क्रमशः X और Y श्रेणियों के प्रमाप विचलन (standard deviations) हैं तथा r दोनों वितरणों का सहसम्बन्ध गुणांक है। इस विश्लेषण के आधार पर प्रतीपगमन रेखाओं को निम्न रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है—

(i) X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण	(ii) Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण
$X=a+bY$	$Y=a+bX$
$X=(\bar{X}-b\bar{Y})+bY$	$Y=(\bar{Y}-b\bar{X})+bX$
$X-\bar{X}=bY-b\bar{Y}$	$Y-\bar{Y}=bX-b\bar{X}$
$\therefore\ X-\bar{X}=b_1(Y-\bar{Y})$	$\therefore\ (Y-\bar{Y})=b_2(X-\bar{X})$
$X-\bar{X}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\bar{Y})$	$Y-\bar{Y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\bar{X})$

प्रयोग—Y से सम्बद्ध X का सर्वोपयुक्त मूल्य अनुमानित करने के लिए प्रथम समीकरण (of X upon Y) और X से सम्बन्धित Y का सर्वोत्तम मूल्य ज्ञात करने के लिए द्वितीय समीकरण (of Y upon X) का प्रयोग किया जाता है। उपर्युक्त रूप में समीकरणों का प्रयोग तभी करना चाहिए जब प्रश्न में $\bar{X}$ और $\bar{Y}$, σ_x और σ_y तथा r के मान दिये हों।

उदाहरण (Illustration) 1 :

निम्न आँकड़ों से, किसी वस्तु की बम्बई में सम्भाव्य कीमत (X) ज्ञात कीजिए जबकि कलकत्ता में उसी वस्तु की कीमत (Y) 70 रु० हो :

कलकत्ता में माध्य कीमत = 65 रु० ; कलकत्ता में प्रमाप विचलन = 2·5

बम्बई में माध्य कीमत = 67 रु० ; बम्बई में प्रमाप विचलन = 3·5

दोनों कीमतों में सहसम्बन्ध गुणांक (r_{xy}) = +0·8

[M. Com., Agra, 1970, 1967, Jabalpur, 1968, Vikram, 1965 ; M. A., Lucknow, 1967, Agra, 1973, Jiwaji, 1965 ; B. Com., Mysore, 1969, Raj., 1968]

हल (Solution) :

मान लिया बम्बई में कीमत X और कलकत्ता में Y है।

$$\bar{X}=67\ ;\ \bar{Y}=65\ ;\ \sigma_x=3{\cdot}5\ ;\ \sigma_y=2{\cdot}5\ ;\ r_{xy}={\cdot}8$$

Y के प्रदत्त मूल्य (70) के अनुरूप X का सर्वोत्तम अनुमान ज्ञात करने के लिए X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण प्रयोग किया जायगा—

$$X-\bar{X}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\bar{Y})$$

मूल्यों को आदिष्ट करने पर—

$$X-67={\cdot}8\times\frac{3{\cdot}5}{2{\cdot}5}(Y-65)$$

$$X-67=1{\cdot}12(Y-65) \text{ अर्थात् } X-67=1{\cdot}12Y-72{\cdot}8$$

$$\therefore\quad X=1{\cdot}12Y-5{\cdot}8$$

$Y=70$ के लिए $X=1{\cdot}12(70)-5{\cdot}8=72{\cdot}6$ रु०

अतः कलकत्ता में 70 रु० कीमत होने पर उस वस्तु की बम्बई में सम्भाव्य कीमत 72·60 रु० है।

उदाहरण (Illustration) 2 :

मद्रास के भृत्ति-जीवियो (working class) की साप्ताहिक औसत

दिल्ली की 18 रु० है, उनका प्रमाप विचलन क्रमश: 2 रु० तथा 3 रु० है; और उनका सह-सम्बन्ध गुणांक +0·67 है।

यदि मद्रास में भृत्ति (मजदूरी) 20 रु० हो तो उसके अनुरूप दिल्ली की अधिक से अधिक सभावित भृत्ति (most likely wage) मालूम कीजिए।

[M. Com., Allahabad, 1970]

हल (Solution) :

मद्रास मे मजदूरी को X और दिल्ली में मजदूरी को Y मानते हुए प्रदत्त समंकों को निम्न सकेताक्षरों में प्रस्तुत किया जायगा—

$$\bar{X}=12\ ;\ \bar{Y}=18\ ;\ \sigma_x=2\ ;\ \sigma_y=3\ ;\ r_{xy}=0{\cdot}67$$

यदि $X=20$ तो $Y=?$

Y का सम्भाव्य अनुमान लगाने के लिए Y का X पर प्रतीपगमन प्रयोग किया जायगा—

$$Y-\bar{Y}=r\ \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\bar{X})$$

$Y-18={\cdot}67\times\frac{3}{2}\ (X-12)$ अथवा $Y-18=1{\cdot}005\ (X-12)$

$$Y=1{\cdot}005\ X+5{\cdot}94$$

मद्रास मे भृत्ति 20 रु० ($X=20$) होने पर

$$Y=1{\cdot}005\ (20)+5{\cdot}94=26{\cdot}04$$

अत: जब मद्रास मे मजदूरी 20 रु० है तो दिल्ली में सम्भाव्य मजदूरी 26·04 रु० होगी।

उदाहरण (Illustration) 3 :

उत्तर प्रदेश की पुलिस के 1000 सिपाहियों की लम्बाई (X) और भार (Y) के आंकड़ो से निम्न परिणाम प्राप्त है—

$$\bar{X}=68''\ ;\ \bar{Y}=150\text{ lbs.}\ ;\ \sigma_x=2{\cdot}5''\ ;\ \sigma_y=20\text{ lbs.}\ ;\ r=+{\cdot}60$$

उपरिलिखित प्रदत्त परिणामों से उस सिपाही की लम्बाई का अनुमान कीजिए जिसका भार 200 पौंड है और उस सिपाही का भार अनुमानित कीजिए जिसकी लम्बाई 5 फुट है।

[M. Com., Meerut, 1972 (S), Jabalpur, 1962 ; M. A., Jiwaji, 1968 ; B. Com., Mysore, 1968, U. P. C. S.]

(Solution) :

लम्बाई (X) का अनुमान

$$X-\bar{X}=r\ \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\ (Y-\bar{Y})$$

$$X-68={\cdot}6\times\frac{2{\cdot}5}{20}\ (Y-150)$$

$$X-68={\cdot}075Y-11{\cdot}25$$

$$X={\cdot}075Y+56{\cdot}75$$

यदि $Y=200$ lbs., तो—

$$X={\cdot}075\ (200)+56{\cdot}75$$
$$=71{\cdot}75''$$

अत: 200 पौंड भार वाले सिपाही की लम्बाई 71·75 इंच होगी।

भार (Y) का अनुमान

$$Y-\bar{Y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\ (X-\bar{X})$$

$$Y-150={\cdot}6\times\frac{20}{2{\cdot}5}\ (X-68)$$

$$Y-150=4{\cdot}8X-326{\cdot}4$$

$$Y=4{\cdot}8X-176{\cdot}4$$

यदि $X=60''$ तो—

$$Y=4{\cdot}8\ (60)-176{\cdot}4$$
$$=111{\cdot}60\text{ lbs.}$$

60" लम्बाई वाले सिपाही का भार 111·6 पौंड होगा।

उदाहरण (Illustration) 4 :

किसी परीक्षा में 450 परीक्षार्थियों के सांख्यिकी और अर्थशास्त्र के प्राप्तांक निम्नांकित हैं—

	सांख्यिकी	अर्थशास्त्र
माध्य प्राप्तांक	40	48
प्रमाप विचलन	12	16

माध्यों से निकाले गये प्राप्तांकों के विचलनों की गुणाओं का जोड़ =42075

प्रतीपगमन की दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए और यह भी स्पष्ट कीजिए कि प्रतीपगमन रेखाएँ दो क्यों होती हैं।

सांख्यिकी मे 50 अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी के अर्थशास्त्र में प्राप्तांक भी अनुमानित कीजिए। *(M. A. Gorakhpur, 1965, M. Com. Raj, 1962*

हल (Solution) :

सांख्यिकी में प्राप्तांकों को X और अर्थशास्त्र में प्राप्तांकों को Y मानकर दिये हुए मूल्यों को निम्न चिह्नों मे प्रस्तुत किया जायगा—

$$\bar{X}=40;\quad \sigma_x=12;\quad \Sigma dxdy=42075$$
$$\bar{Y}=48;\quad \sigma_y=16;\quad N=450$$

प्रतीपगमन समीकरण बनाने के लिए कार्ल पियर्सन का r ज्ञात करना आवश्यक है—

$$r=\frac{\Sigma dxdy}{N\sigma_x\sigma_y}=\frac{42075}{450\times12\times16}=+0{\cdot}49$$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण

$$X-\bar{X}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\bar{Y})$$
$$X-40={\cdot}49\times\tfrac{12}{16}(Y-48)$$
$$X-40={\cdot}3675\,(Y-48)$$
$$X-40={\cdot}3675Y-17{\cdot}64$$
$$X={\cdot}3675Y+40-17{\cdot}64$$
$$X={\cdot}3675Y+22{\cdot}36$$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण

$$Y-\bar{Y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\bar{X})$$
$$Y-48={\cdot}49\times\tfrac{16}{12}(X-40)$$
$$Y-48={\cdot}653\,(X-40)$$
$$Y-48={\cdot}653X-26{\cdot}12$$
$$Y={\cdot}653X+48-26{\cdot}12$$
$$Y={\cdot}653X+21{\cdot}88$$

$X=50$ के तत्सवादी Y का मूल्य अनुमानित करने के लिए Y के X पर प्रतीपगमन समीकरण (of Y upon X) का प्रयोग किया जाएगा—

$$Y={\cdot}653X+21{\cdot}88 \text{ या } Y={\cdot}653\times50+21{\cdot}88,\ Y=32{\cdot}65+21{\cdot}88$$
$$\therefore\ Y=54{\cdot}53$$

अतएव साख्यिकी मे 50 अंक प्राप्त करने वाले परीक्षार्थी के अर्थशास्त्र मे अनुमानित औसत प्राप्तांक 54·53 या 55 हैं।

प्रतीपगमन गुणांक
(Regression Coefficients)

दो सम्बद्ध श्रेणियों का प्रतीपगमन विश्लेषण करते समय उनके दो प्रतीपगमन गुणांक (regression coefficients) भी निकाले जाते हैं।

प्रतीपगमन गुणांक वह अनुपात है जो यह बतलाता है कि एक श्रेणी के चर-मूल्यों मे 1 का परिवर्तन (unit change) होने से दूसरी श्रेणी के चर-मूल्यों मे औसतन कितना परिवर्तन होगा। वास्तव मे, यह प्रतीपगमन रेखा के ढलान (slope of the regression

बीजगणितीय माप है।

प्रतीपगमन रेखाओं और समीकरणों की भाँति, प्रतीपगमन गुणांक भी दो होते हैं—

(1) X **का** Y **पर प्रतीपगमन गुणांक** (Regression Coefficient of X on Y)—यह गुणाक X की Y पर प्रतीपगमन रेखा के ढाल का माप है जो यह बतलाता है कि Y में 1 इकाई का परिवर्तन होने पर X में कितना परिवर्तन होगा। इसके लिए b_{xy} संकेत चिह्न का प्रयोग किया जाता है। इसका माप निम्न सूत्र द्वारा किया जाता है—

$$b_{xy}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

इस गुणाक के रूप में X के Y पर प्रतीपगमन समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है—

$$X-\overline{X}=b_{xy}(Y-\overline{Y}) \quad \text{क्योंकि} \quad r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=b_{xy}$$

उपर्युक्त उदाहरण (Illus. 4) में $r=\cdot49$; $\sigma_x=12$; $\sigma_y=16$

अतः $$b_{xy}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=\cdot49\times\frac{12}{16}=\cdot3675$$

इससे यह ज्ञात होता है कि यदि Y (अर्थशास्त्र में प्राप्तांक) में 1 का परिवर्तन होता है तो X (सांख्यिकी में प्राप्तांक) में औसतन ·3675 का परिवर्तन होगा। प्रस्तुत उदाहरण में X का Y पर समीकरण $X=\cdot3675Y+22\cdot36$ है जिसमें ·3675 सम्बन्धित प्रतीपगमन रेखा का ढलान 'b' है अर्थात् प्रतीपगमन गुणाक है और 22·36 अन्त:खण्ड (intercept) या 'a' का मूल्य है।

(2) Y **का** X **पर प्रतीपगमन गुणांक** (Regression Coefficient of Y on X)—यह प्रदर्शित करता है कि X श्रेणी में 1 का परिवर्तन होने से Y में कितना सम्भावित परिवर्तन होगा। यह Y की X पर प्रतीपगमन रेखा के ढलान का माप है। इसे b_{yx} चिह्न द्वारा प्रस्तुत किया जाता है तथा इसका निम्नलिखित सूत्र है—

$$b_{yx}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Y के X पर प्रतीपगमन समीकरण को उक्त गुणाक के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है—

$$Y-\overline{Y}=b_{yx}(X-\overline{X}) \qquad \left[r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=b_{yx}\right]$$

पिछले उदाहरण में $b_{yx}=\cdot49\times\frac{16}{12}=\cdot653$

यह गुणांक हमे बतलाता है कि X (सांख्यिकी में प्राप्तांक) में 1 का परिवर्तन होने पर Y (अर्थशास्त्र में प्राप्तांक) में औसत रूप में ·653 का परिवर्तन होगा। उक्त उदाहरण में Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण $Y=\cdot653X+21\cdot88$ है जिसमें ·653 सम्बन्धित प्रतीपगमन रेखा का ढाल (b_{yx}) प्रदर्शित करता है अर्थात् यह प्रतीपगमन गुणाक है और 21·88 अन्त:खण्ड (y-intercept) का मूल्य है जिसके लिए 'a' चिह्न का प्रयोग किया जाता है।

प्रतीपगमन गुणाकों से सह-सम्बन्ध गुणांक का निर्धारण—दोनों प्रतीपगमन गुणांकों की सहायता से X और Y का सह-सम्बन्ध गुणाक निकाला जा सकता है। वास्तव में, सह-सम्बन्ध गुणाक दोनों प्रतीपगमन गुणाकों का गुणोत्तर माध्य होता है। दूसरे शब्दों में, सह-सम्बन्ध गुणाक, प्रतीपगमन गुणाकों के गुणनफल का वर्गमूल है।[1]

$$\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}=\sqrt{r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\times r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}=\sqrt{r^2}=r$$

[1] Coefficient of correlation is the geometric mean of two coefficients of regression. In other words, correlation coefficient is the square root of products of both regression coefficients.

$$\therefore \quad r=\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}$$

पिछले उदाहरण में— $r=\sqrt{.3675\times .653}=.49$

उपर्युक्त नियम से दो महत्वपूर्ण परिणाम निकलते हैं—प्रथम, दोनों प्रतीपगमन गुणाक अलग-अलग 1 से अधिक मूल्य के नहीं हो सकते। यदि b_{xy} और b_{yx} दोनों का मूल्य 1 से अधिक है तो दोनों का गुणनफल (r^2) भी 1 से अधिक होगा और इस प्रकार इसका वर्गमूल (r) भी 1 से अधिक होगा जो असम्भव है। अतः दोनों गुणाकों का गुणनफल कभी 1 से अधिक नहीं हो सकता, हाँ दोनों में से किसी एक गुणाक (b_{xy} या b_{yx}) का मूल्य 1 से अधिक हो सकता है परन्तु दूसरे गुणाक का मूल्य इतना कम होना चाहिए कि दोनों को आपस में गुणा करने से परिणाम 1 से अधिक न हो। दूसरे, यदि दोनो प्रतीपगमन गुणांकों के मान धनात्मक हैं तो सह-सम्बन्ध गुणाक भी धनात्मक (+) होगा। इसके विपरीत यदि उन दोनों के मूल्य ऋणात्मक हैं तो X और Y का सह-सम्बन्ध गुणाक भी ऋणात्मक (—) होगा।

उदाहरण (Illustration) 5 :

(i) यदि दोनों प्रतीपगमन गुणाको (regression coefficients) के मूल्य 0·9 और 0·5 हों तो सह-सम्बन्ध गुणाक का मान बताइए।

[B. Com., Marathwada, April, 1968]

(ii) निम्न आंकड़ों से (अ) Y का प्रमाप विचलन (σ_y) और (ब) सह-सम्बन्ध गुणाक (r) ज्ञात कीजिए—

$$X=\cdot 85Y;\quad Y=\cdot 89X;\quad \sigma_x=3$$

[M. Com. Raj., 1970., Vikram, 1964, Alld., 1961]

(iii) एक विद्यार्थी ने Y के X पर (Y on X) और X के Y पर (X on Y) प्रतीपगमन गुणांकों के मान क्रमशः 1·2 और 0·9 ज्ञात किए। कारण सहित बतलाइए कि क्या उसके द्वारा किया गया परिगणन सही है ?

(iv) निम्न प्रदत्त सूचना से 'r' का मूल्य ज्ञात कीजिए—

X का प्रसरण (variance of X)$=2\cdot25$; $\sigma_y=4$;

$$X=-0\cdot3Y+1\cdot8$$

हल (Solution) :

(i) $r=\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}=\sqrt{\cdot9\times\cdot5}=\sqrt{\cdot45}=+0\cdot67$

(ii)

X का Y पर प्रतीपगमन	Y का X पर प्रतीपगमन
$X=\cdot85Y$	$Y=\cdot89X$
यदि Y का मूल्य 1 है तो X ·85 होगा	यदि $X=1$ तो Y का मूल्य ·89 होगा
अतः $b_{xy}=0\cdot85$	$\therefore\ b_{yx}=0\cdot89$

$$r=\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}=\sqrt{\cdot85\times\cdot89}=0\cdot87$$

$b_{xy}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ प्रदत्त मूल्यों को आदिष्ट करने पर—

$$0\cdot85=\cdot87\times\frac{3}{\sigma_y};\ \cdot85\sigma_y=2\cdot61$$

$$\therefore\ \sigma_y=\frac{2\cdot61}{\cdot85}=3\cdot07 \qquad \therefore\ r=\cdot87;\ \sigma_y=3\cdot07$$

(iii) विद्यार्थी द्वारा प्राप्त परिणाम इस प्रकार हैं—

$b_{yx}=1\cdot2$, $b_{xy}=0\cdot9$ इन दोनो गुणाकों की गुणा (r^2) $1\cdot2\times\cdot9=1\cdot08$ है जो 1 से अधिक है; इसका वर्गमूल (r) भी 1 से अधिक होगा, परन्तु यह सह-सम्बन्ध गुणांक है जो कि 1 से अधिक नहीं हो सकता अतः विद्यार्थी ने प्रतीपगमन गुणांकों की गणना में गलती

(iv) X का प्रसरण— $\sigma_x^2=2{\cdot}25$

$$\therefore \quad \sigma_x=\sqrt{2{\cdot}25}=1{\cdot}5,\ \sigma_y=4$$

$$X=-0{\cdot}3Y+1{\cdot}8$$

उक्त समीकरण X का Y पर प्रतीपगमन प्रकट करता है। इसमें अन्त.खण्ड (a) 1·8 है और X की Y पर सर्वोपयुक्त रेखा का ढाल (b) −0·3 है; यही प्रतीपगमन गुणांक है अर्थात् $b_{xy}=-0{\cdot}3$

$$b_{xy}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \text{ या } -0{\cdot}3=r\times\frac{1{\cdot}5}{4} \text{ या } -1{\cdot}2=1{\cdot}5\times r$$

$$\therefore \quad r=\frac{-1{\cdot}2}{1{\cdot}5}=-0{\cdot}8$$

प्रतीपगमन गुणांकों का परिगणन
(Calculation of Regression Coefficients)

प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात करने की विधियाँ—यदि दो सम्बद्ध श्रेणियों के अलग-अलग चर-मूल्य दिए हों तो उनके आधार पर पीछे बताए गए सूत्रों द्वारा प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात करना अत्यन्त कठिन होता है, क्योंकि r, σ_x व σ_y का निर्धारण करने में गणन-क्रिया बहुत बढ़ जाती है। अतएव समय व श्रम की बचत करने के लिए प्रतीपगमन गुणांकों के निम्न सूत्रों का प्रयोग सुविधाजनक रहता है—

(क) जब वास्तविक समान्तर माध्य से विचलन लिए जाएँ (When deviations are taken from actual arithmetic means)—

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{xy}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=\frac{\Sigma dx\,dy}{n\sigma_x\sigma_y}\times\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=\frac{\Sigma dx\,dy}{n\sigma^2_y}=\frac{\Sigma dx\,dy}{n\times\frac{\Sigma d^2_y}{n}}$$

$$\therefore \quad b_{xy}=\frac{\Sigma dx\,dy}{\Sigma d^2_y}$$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{yx}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\Sigma dx\,dy}{n\sigma_x\sigma_y}\times\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\Sigma dx\,dy}{n\sigma^2_x}=\frac{\Sigma dx\,dy}{n\times\frac{\Sigma d^2_x}{n}}$$

$$\therefore \quad b_{yx}=\frac{\Sigma dx\,dy}{\Sigma d^2_x}$$

$\Sigma dxdy$ संकेताक्षर X और Y के वास्तविक समान्तर माध्यों से निकाले गए विचलनों की गुणाओं का योग (sum of the products of deviations of X and Y from their respective actual means) है।

Σd^2_x व Σd^2_y सकेत क्रमशः दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्यों से चर-मूल्यों के विचलन वर्गों के जोड़ (totals of squares of such deviations from actual means of X and Y series respectively) है।

जब दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य पूर्णांकों में नहीं होते तो किसी सुविधाजनक कल्पित माध्य से विचलन लेकर, लघुरीति (short cut method) द्वारा इन गुणांकों का निर्धारण करना चाहिए। लघु रीति में अग्रांकित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है।

(ख) जब कल्पित माध्य से विचलन लिए जाएँ (When deviations are taken from assumed averages)—

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{xy}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$=\frac{\Sigma dxdy-\frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{N\sigma_x\sigma_y}\times\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$=\frac{\Sigma dxdy-\frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{N\times\left[\frac{\Sigma d^2_y}{N}-\left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)^2\right]}$$

$$\therefore\ b_{xy}=\frac{\Sigma dxdy-\frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{\Sigma d^2_y-\frac{(\Sigma dy)^2}{N}}$$

या $$b_{xy}=\frac{N\,\Sigma dxdy-\Sigma dx.\Sigma dy}{N.\Sigma d^2_y-(\Sigma dy)^2}$$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{yx}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$=\frac{\Sigma dxdy-\frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{N\sigma_x\sigma_y}\times\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$=\frac{\Sigma dxdy-\frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{N\times\left[\frac{\Sigma d^2_x}{N}-\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2\right]}$$

$$\therefore\ b_{yx}=\frac{\Sigma dxdy-\frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{\Sigma d^2_x-\frac{(\Sigma dx)^2}{N}}$$

या $$b_{yx}=\frac{N\,\Sigma dxdy-\Sigma dx.\Sigma dy}{N\Sigma d^2_x-(\Sigma dx)^2}$$

$\Sigma dxdy$ संकेत X व Y श्रेणी के कल्पित माध्यों से विभिन्न चर-मूल्यों के तत्संवादी विचलनों की गुणाओं का जोड़ (summation of the products of corresponding deviations of X and Y from their respective assumed means) है।

Σdx व Σdy संकेत क्रमश: X व Y के मूल्यों के कल्पित माध्यों से ज्ञात विचलनों के जोड़ (totals of squared deviations of X and Y values from assumed means) हैं।

Σd^2_x व Σd^2_y संकेत X व Y के मूल्यों के कल्पित माध्यों से ज्ञात किए गए विचलन-वर्गों के जोड़ (totals of squared deviations of X and Y series from assumed means) हैं।

जब दोनों श्रेणियों के वास्तविक चर-मूल्य ज्ञात हों तो दोनों प्रतीपगमन समीकरणों का निर्धारण करने के लिए पहले उपर्युक्त विधि द्वारा प्रतीपगमन गुणांक निकाल लिए जाते हैं। फिर निम्न सूत्रों की सहायता से समीकरण निश्चित कर लिए जाते हैं—

प्रतीपगमन समीकरण

X का Y पर	Y का X पर
$X-\bar{X}=b_{xy}(Y-\bar{Y})$	$Y-\bar{Y}=b_{yx}(X-\bar{X})$

उदाहरण (Illustration) 6 :

आठ पिताओं और उनके पुत्रों की ऊँचाई के आँकड़े निम्न प्रकार हैं—

पिता की ऊँचाई (इन्चों में) :	65	66	67	67	68	69	71	73
पुत्र की ऊँचाई (इन्चों में) :	67	68	64	68	72	70	69	70

दोनों प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात करके प्रतीपगमन समीकरणों का रचना कीजिए। पुत्र की औसत सम्भावित ऊँचाई ज्ञात कीजिए जबकि पिता की ऊँचाई 67·5 इंच हो। दोनों प्रतीपगमन रेखाओं को ग्राफ पर प्रदर्शित कीजिए।

[M. A., Kanpur, 1972, Gorakhpur, 1967; M. Com., Alld., 1966; B. Com., Raj., 1966]

हल (Solution)

प्रतीपगमन गुणांकों का परिकलन (लघु रीति)

पिता की ऊँचाई-X			पुत्रों की ऊँचाई-Y			X व Y के विचलनों की गुणा
ऊँचाई (इंचों में)	विचलन 67 से	विचलन-वर्ग	ऊँचाई (इंचों में)	विचलन 68 से	विचलन-वर्ग	
X	dx	d^2_x	Y	dy	d^2_y	$dxdy$
65	−2	4	67	−1	1	2
66	−1	1	68	0	0	0
67	0	0	64	−4	16	0
67	0	0	68	0	0	0
68	+1	1	72	+4	16	4
69	+2	4	70	+2	4	4
71	+4	16	69	+1	1	4
73	+6	36	70	+2	4	12
	−3+13 =+10	62		−5+9 =+4	42	26
$N=8$	Σdx	Σd^2_x		Σdy	Σd^2_y	$\Sigma dxdy$

प्रतीपगमन गुणांक

X का Y पर—

$$b_{xy}=\frac{\Sigma dxdy-\frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{\Sigma d^2_y-\frac{(\Sigma dy)^2}{N}}=\frac{26-\frac{10\times4}{8}}{42-\frac{(4)^2}{8}}$$

$$b_{xy}=\frac{21}{40}=\cdot525$$

Y का X पर—

$$b_{yx}=\frac{\Sigma dydy-\frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{\Sigma d^2_x-\frac{(\Sigma dx)^2}{N}}=\frac{26-\frac{10\times4}{8}}{62-\frac{(10)^2}{8}}$$

$$b_{yx}=\frac{21}{49\cdot5}=\cdot424$$

समान्तर माध्य

$$\bar{X}=A_x+\frac{\Sigma dx}{N}=67+\frac{10}{8}$$

$$\bar{X}=68\cdot25$$

$$\bar{Y}=A_y+\frac{\Sigma dy}{N}=68+\frac{4}{8}$$

$$\bar{Y}=68\cdot50$$

समीकरण

$$X-\bar{X}=b_{xy}\ (Y-\bar{Y})$$
$$X-68\cdot25=\cdot525\ (Y-68\cdot5)$$
$$X-68\cdot25=\cdot525Y-35\cdot9625$$
$$\therefore\ X=\cdot525Y+32\cdot29$$

$$Y-\bar{Y}=b_{yx}\ (X-\bar{X})$$
$$Y-68\cdot5=\cdot424\ (X-68\cdot25)$$
$$Y-68\cdot5=\cdot424X-28\cdot938$$
$$\therefore\ Y=\cdot424X+39\cdot56$$

यदि पिता की ऊँचाई (X) 67·5 इंच है तो तत्संवादी पुत्र की औसत ऊँचाई Y का सर्वोत्तम अनुमान लगाने के लिए Y के X पर प्रतीपगमन समीकरण का प्रयोग किया जाएगा—

$$Y=\cdot424X+39\cdot56 \text{ या } Y=\cdot424\times67\cdot5+39\ 56$$
$$Y=28\cdot62+39\ 56=68\cdot18$$

अत: पुत्र की ऊँचाई 68 2 इंच है।

प्रतीपगमन रेखाओं की रचना (Drawing of Regression Lines)—प्रतीपगमन समीकरणों की सहायता से सम्बन्धित रेखाओं की रचना निम्न विधि द्वारा की जा सकती है—

(i) **X की Y पर प्रतीपगमन रेखा**—X के Y पर समीकरण में Y के दिए हुए मूल्यों (given values of Y) को बारी-बारी से प्रादिष्ट करके X के सर्वोत्तम सगणित मूल्य (computed

values of X or X_c) निकाल लिए जाते हैं। फिर X के सर्वोत्तम मूल्य और Y के दिए हुए तत्संवादी मूल्यों को रेखाचित्र पर अंकित करके विभिन्न बिन्दुओं को मिला दिया जाता है; इस प्रकार X की Y पर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त हो जाती है। इस रेखा की सहायता से Y के किसी दिए हुए मूल्य से सम्बद्ध X का मूल्य अनुमानित किया जा सकता है। इसके लिए Y-axis पर, दिए हुए मूल्य के बिन्दु से प्रतीपगमन रेखा पर लम्ब (perpendicular) खींचा जाता है तथा इस लम्ब की रेखा पर स्पर्श-बिन्दु से X-axis पर लम्ब डाला जाता है और दूसरे लम्ब के X-axis पर स्पर्श-बिन्दु का मूल्य पढ़ लिया जाता है। यही X का सर्वोत्तम औसत मूल्य है।

(ii) Y की X पर प्रतीपगमन रेखा—Y के X पर समीकरण में X के दिए हुए मूल्यों (given values of X) को आदिष्ट करके Y के सर्वोत्तम मूल्य (computed values of Y or Y_c) ज्ञात किये जाते हैं तथा इन पद-युग्मों को रेखापत्र पर अंकित करके Y की X पर प्रतीपगमन रेखा खींच ली जाती है। उपर्युक्त विधि के अनुसार इस रेखा से X के तत्संवादी Y का सर्वोत्तम मूल्य अनुमानित कर लिया जाता है। यहाँ, पहले X-axis पर दिये हुए मूल्य के बिन्दु से रेखा पर लम्ब खींचा जाता है। फिर, लम्ब के स्पर्श-बिन्दु से Y-axis पर लम्ब खींचकर Y का मूल्य ज्ञात कर लिया जाता है।

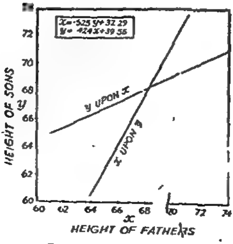
दोनों रेखाएँ जहाँ एक दूसरे को काटती हैं वह दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्यों ($\bar{X}, \bar{Y}$) से प्राप्त बिन्दु है।

प्रस्तुत उदाहरण में दोनों रेखाओं की रचना करने के लिए हमें उपर्युक्त समीकरणों के आधार पर X और Y के अलग-अलग पद-युग्मों को निम्न प्रकार ज्ञात करना होगा—

X का Y पर प्रतीपगमन $X = \cdot525Y + 32\cdot29$		Y का X पर प्रतीपगमन $Y = \cdot424X + 39\cdot56$	
प्रदत्त Y	सगणित X	प्रदत्त X	सगणित Y
67,	·525×67+32·29=67·465	65,	·424×65+39·56=67·120
68,	·525×68+32·29=67 990	66,	·424×66+39·56=67 544
64,	·525×64+32·29=65 890	67,	·424×67+39·56=67 968
68,	·525×68+32·29=67 990	67,	·424×67+39 56=67 968
72,	·525×72+32·29=70·090	68,	·424×68+39 56=68·392
70,	·525×70+32 29=69 040	69,	·424×69+39 56=68 816
69,	·525×69+32·29=68·515	71,	·424×71+39·56=69 664
70,	·525×70+32·29=69 040	73,	·424×73+39 56=70 512

वास्तव में, सरल रेखा खींचने के लिए केवल दो बिन्दुओं की आवश्यकता होती है, परन्तु उक्त उदाहरण में सभी बिन्दु ज्ञात कर लिए गए हैं। इन बिन्दुओं को अंकित करने से निम्नांकित प्रतीपगमन रेखाएँ प्राप्त की जाएँगी—

प्रतीपगमन रेखाएँ



चित्र 3—प्रतीपगमन रेखाएँ

द्विचर वर्गित आवृत्ति बंटन (Bivariate Grouped frequency distribution) में प्रतीपगमन गुणाक ज्ञात करने के लिए, पहले सहसम्बन्ध-सारणी की रचना करके पद विचलन रीति द्वारा $\Sigma fdxdy$, Σfdx, Σfdy, Σfd^2x व Σfd^2y परिगणित कर लिए जाएँगे (देखिए अध्याय 11, पृ० 328)। तत्पश्चात् दोनों प्रतीपगमन गुणाक निम्न प्रकार निकाले जाएँगे—

X का Y पर प्रतीपगमन

$$b_{xy}=\frac{i_x}{i_y}\frac{\left[\Sigma fdxdy-\frac{\Sigma fdx\,.\,\Sigma fdy}{N}\right]}{\left[\Sigma fd^2y-\frac{(\Sigma fdy)^2}{N}\right]}$$

$$\overline{X}=Ax+\frac{\Sigma fdx}{N}\times i_x$$

$$X-\overline{X}=b_{xy}\,(Y-\overline{Y})$$

Y का X पर प्रतीपगमन

$$b_{yx}=\frac{i_y}{i_x}\frac{\left[\Sigma fdxdy-\frac{\Sigma fdx\,.\,\Sigma fdy}{N}\right]}{\left[\Sigma fd^2x-\frac{(\Sigma fdx)^2}{N}\right]}$$

$$\overline{Y}=Ay+\frac{\Sigma fdy}{N}\times i_y$$

$$Y-\overline{Y}=b_{yx}\,(X-\overline{X})$$

उदाहरण (Illustration) 7 :

निम्न सारणी में A-समूह अर्थशास्त्र के प्राप्तांकों के वर्ग 4–8, 8–12, 12–16, व 16–20 का तथा B-समूह सांख्यिकी के प्राप्तांकों के वर्ग 8–14, 14–20, 20–26 का प्रतिनिधित्व करते हैं। दोनों समाश्रयण (regression) रेखाओं के समीकरण निकालिए।

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	11	6	2	1
B_2	5	12	15	8
B_3	—	2	3	15

[*M. A., Meerut, 1969*]

हल (Solution) :

प्रतीपगमन समीकरण (पद-विचलन रीति)

सांख्यिकी में प्राप्तांक Y	अर्थशास्त्र में प्राप्तांक-X				योग fy	dy	fdy	fd^2y	$fdxdy$
	4–8	8–12	12–16	16–20					
8–14	2 11 +72	1 6 +6	2 0	−1 1 −1	20	−1	−20	20	27
14–20	5 0	12 0	15 0	8 0	40	0	0	0	0
20–26	—	−1 2 −2	3 0	1 15 15	20	+1	+20	20	13
योग fx	16	20	20	24	80 N		0	40	40
dx	−2	−1	0	+1			Σfdy	Σfd^2y	$\Sigma fdxdy$
fdx	−32	−20	0	+24	−80	Σfdx			
fd^2x	64	20	0	24	108	Σfd^2x	$i_x=4$		
$fdxdy$	22	4	0	14	40	$\Sigma fdxdy$	$i_y=6$		

X का Y पर प्रतीपगमन

$$\bar{X}=A_x+\frac{\Sigma fdx}{N}\times i_x$$

$$=14+\frac{-28}{80}\times 4=14-1\cdot4=12\cdot6$$

$$b_{xy}=\frac{i_x}{i_y}\frac{\left[\Sigma fdxdy-\frac{\Sigma fdx\,.\,\Sigma fdy}{N}\right]}{\left[\Sigma fd^2y-\frac{(\Sigma fdy)^2}{N}\right]}$$

$$=\frac{4}{6}\frac{\left[40-\frac{-28\times 0}{80}\right]}{\left[40-\frac{(0)^2}{80}\right]}$$

$$=\frac{160}{240}=\frac{2}{3}=0\cdot67$$

$$(X-\bar{X})=b_{xy}\,(Y-\bar{Y})$$

$$X-12\cdot6=\tfrac{2}{3}\,(Y-17)$$

$$X=0\,67Y-11\cdot33+12\,60$$

$$\therefore\quad X=0\cdot67Y+1\cdot27$$

Y का X पर प्रतीपगमन

$$\bar{Y}=A_Y+\frac{\Sigma fdy}{N}\times i_y$$

$$=17+\frac{0}{80}\times 6=17$$

$$b_{yx}=\frac{i_y}{i_x}\frac{\left[\Sigma fdxdy-\frac{\Sigma fdx\,.\,\Sigma fdy}{N}\right]}{\left[\Sigma fd^2x-\frac{(\Sigma fdx)^2}{N}\right]}$$

$$=\frac{6}{4}\frac{\left[40-\frac{-28\times 0}{80}\right]}{\left[108-\frac{(-28)^2}{80}\right]}$$

$$=\frac{240}{392\,8}=0\cdot611$$

$$(Y-\bar{Y})=b_{yx}\,(X-\bar{X})$$

$$Y-17=0\cdot611\,(X-12\cdot6)$$

$$Y=0\,611X-7\cdot70+17$$

$$\therefore\quad Y=0\cdot611X+9\cdot3$$

न्यूनतम-वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन समीकरण
(Regression Equations by Least Squares)

यह पहले बतलाया जा चुका है कि रेखीय प्रतीपगमन के समीकरण उन सर्वोपयुक्त रेखाओं के समीकरण होते है जिन्हे न्यूनतम-वर्ग पद्धति (Least Sqares Method) के आधार पर खींचा जाता है। इस रीति के अनुसार *'a'* और *'b'* की गणना प्रसामान्य समीकरणों (normal equations) द्वारा निम्न विधि से की जाती है—

X का Y पर	Y का X पर
$X=a+bY$	$Y=a+bX$
$\Sigma X=Na+b\Sigma Y$	$\Sigma Y=Na+b\Sigma X$
$\Sigma XY=a\Sigma Y+b\Sigma Y^2$	$\Sigma XY=a\Sigma X+b\Sigma X^2$

निम्नलिखित उदाहरण में दोनो प्रतीपगमन समीकरण न्यूनतम-वर्ग रीति द्वारा तथा प्रतीपगमन गुणाक रीति द्वारा निकाले गए हैं—

उदाहरण (Illustration) 8 :

निम्न समको से न्यूनतम-वर्ग रीति द्वारा दोनो प्रतीपगमन समीकरणों का परिकलन कीजिए और प्रतीपगमन-गुणाक विधि द्वारा परिणाम की जांच कीजिए :

X	1	2	3	4	5
Y	2	5	3	8	7

हल (Solution) :

न्यूनतम-वर्ग रीति द्वारा

X	Y	X^2	Y^2	XY
1 2 3 4 5	2 5 3 8 7	1 4 9 16 25	4 25 9 64 49	2 10 9 32 35
15	[redacted]	55	151	88
ΣX	ΣY	ΣX^2	ΣY^2	ΣXY

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण

$\Sigma X = Na + b\Sigma Y$

$\Sigma XY = a\Sigma Y + b\Sigma Y^2$

या $15 = 5a + 25b$ ...(i)

$88 = 25a + 151b$ ...(ii)

(i) को 5 से गुणा कर उसे (ii) में से घटाने पर

$88 = 25a + 151b$

$\underline{75 = 25a + 115b}$

$13 = \quad 26b$

$\therefore \quad b = 0{\cdot}5$

b को (1) में आदिष्ट करने पर—

$15 = 5a + 25 \times {\cdot}5$

$\therefore \quad 2{\cdot}5 = 5a$ या $a = 0{\cdot}5$

$X = a + bY$

$X = 0{\cdot}5 + 0{\cdot}5Y$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण

$\Sigma Y = Na + b\Sigma X$

$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$

या $25 = 5a + 15b$ ...(i)

$88 = 15a + 55b$ ...(ii)

(i) को 3 से गुणा कर उसे (ii) में से घटाने पर

$88 = 15a + 55b$

$\underline{75 = 15a + 45b}$

$13 = \quad 10b$

$\therefore \quad b = 1{\cdot}3$

b को (1) में आदिष्ट करने पर—

$25 = 5a + 15 \times 1{\cdot}3$

$25 - 19{\cdot}5 = 5a$ या $a = 1{\cdot}1$

$Y = a + bX$

$Y = 1{\cdot}1 + 1{\cdot}3X$

प्रतीपगमन-गुणांक रीति द्वारा

X			Y			dx व dy की गुणा $dxdy$
X	3 से विचलन dx	विचलन-वर्ग d^2x	Y	5 से विचलन dy	विचलन-वर्ग d^2y	
1 2 3 4 5	−2 −1 0 +1 +2	4 1 0 1 4	2 5 3 8 7	−3 0 −2 +3 +2	9 0 4 9 4	6 0 0 3 4
$\Sigma X = 15$		10	$\Sigma Y = 25$		26	13
$\bar{X} = 3$		Σd^2_x	$\bar{Y} = 5$		Σd^2_y	$\Sigma dxdy$

प्रतीपगमन-गुणांक (प्रत्यक्ष रीति)

X का Y पर

$$b_{xy}=\frac{\Sigma dxdy}{\Sigma d^2_y}=\frac{13}{26}=0\cdot5$$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण

$$(X-\bar{X})=b_{xy}(Y-\bar{Y})$$
$$X-3=0\cdot5\,(Y-5)$$
$$X-3=0\cdot5Y-2\cdot5$$
$$X=0\cdot5Y+0\cdot5$$

Y का X पर

$$b_{yx}=\frac{\Sigma dxdy}{\Sigma d^2_x}=\frac{13}{10}=1\cdot3$$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण

$$(Y-\bar{Y})=b_{yx}(X-\bar{X})$$
$$(Y-5)=1\cdot3\,(X-3)$$
$$Y-5=1\cdot3X-3\cdot9$$
$$Y=1\cdot3X+1\cdot1$$

वैकल्पिक प्रक्रिया—यदि X व Y के मूल्यों का मान अधिक हो तो ΣX^2, ΣY^2, ΣXY आदि ज्ञात करने में कठिनाई होगी। अतः गणन-क्रिया को सरल बनाने के उद्देश्य से X और Y में अलग-अलग कल्पित मूल-विन्दु मानकर उनसे चर-मूल्यों के विचलन लिए जाते हैं। शेष क्रियाएँ पूर्ववत् रहती हैं। अन्त में, समीकरण में आदिष्ट करते समय मूलविन्दु का समायोजन कर लिया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 9 :

उदाहरण 6 में प्रदत्त समंकों से, न्यूनतमवर्ग रीति द्वारा दोनों प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए। X व Y श्रेणी में क्रमशः 67 और 68 को कल्पित माध्य मानिए।

हल (Solution) :

$$x=X-67\,;\quad y=Y-68$$

पृष्ठ 576 पर दी गई सारणी में X और Y के विचलन क्रमशः 67 व 68 कल्पित मूल-विन्दुओं से ही लिए गए हैं। अतः—

$$\Sigma x=10,\ \Sigma y=4,\ \Sigma xy=26,\ \Sigma x^2=62;\ \Sigma y^2=42,\ N=8$$

X का Y पर

$$X=a+bY$$
$$\Sigma x=Na+b\Sigma y$$
$$\Sigma xy=a\Sigma y+b\Sigma y^2$$
$$10=8a+4b \quad \ldots(i)$$
$$26=4a+42b \quad \ldots(ii)$$

(ii) को 2 से गुणा करके उसमें से (i) घटाकर—

$$52=8a+84b$$
$$10=8a+4b$$
$$42=\quad 80b$$
$$\therefore\ b=\frac{42}{80}=0\cdot525$$

(i) में b का मूल्य आदिष्ट करने पर—

$$10=8a+4\times\cdot525$$
$$10-2\cdot100=8a$$
$$\therefore\ a=\frac{7\cdot9}{8}=0\cdot9875$$
$$x=a+by$$
$$X-67=0\cdot9875+\cdot525\,(Y-68)$$
$$X=67\cdot9875+\cdot525y-35\cdot7$$
$$\therefore\ X=\cdot525Y+23\cdot2875$$
$$X=\cdot525Y+32\cdot29$$

Y का X पर

$$Y=a+bX$$
$$\Sigma y=Na+b\Sigma x$$
$$\Sigma xy=a\Sigma x+b\Sigma x^2$$
$$4=8a+10b \quad \ldots(i)$$
$$26=10a+62b \quad \ldots(ii)$$

(i) को 5 से और (ii) को 4 से गुणाकर घटाने पर—

$$104=40a+248b$$
$$20=40a+50b$$
$$84=\quad 198b$$
$$\therefore\ b=\frac{84}{198}=0\cdot424$$

(i) में b का मूल्य आदिष्ट करने पर—

$$4=8a+10\times\cdot424$$
$$4-4\cdot24=8a$$

∴ a = [illegible]

y = a + bx

Y − 68 = [illegible]

Y = [illegible]

∴ Y = ·424X + [illegible]

अनुमान की प्रमाप त्रुटि (Standard Error of the Estimate)—प्रतीपगमन रेखाओं में एक श्रेणी के दिए हुए चर-मूल्य से सम्बद्ध दूसरी आश्रित श्रेणी के चर-मूल्य का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाया जाता है। यह ज्ञात करने के लिए कि हमारा अनुमान यथार्थता के कितना निकट है, अनुमान की प्रमाप त्रुटि निकालनी आवश्यक होती है।

विक्षेप-चित्र पर अंकित विभिन्न बिन्दुओं के प्रतीपगमन रेखा से निकाले गए अन्तरों का प्रमाप विचलन, अनुमान का प्रमाप विभ्रम (standard error of the estimate) कहलाता है। दूसरे शब्दों में, आश्रित श्रेणी के वास्तविक मूल्यों (actual values) और संगणित या प्रवृत्ति-मूल्यों (computed values or trend values) के विचलनों का औसत माप ही अनुमान की प्रमाप त्रुटि है। यह अस्पष्ट या व्याख्या-रहित विचरणमापांक का वर्गमूल* (square root of unexplained variance) होता है। इसकी गणना प्रमाप विचलन की भाँति की जाती है। अन्तर केवल इतना है कि इसमें वास्तविक मूल्यों के संगणित प्रवृत्ति-मूल्यों से विचलन लिए जाते हैं, समान्तर माध्य से नहीं।

दोनों प्रतीपगमन रेखाओं के अनुमान की प्रमाप त्रुटियाँ निम्नलिखित सूत्रों द्वारा निकाली जाएँगी—

X का Y पर

$$S_{xy}=\sqrt{\frac{\Sigma(X-X_c)^2}{N}}$$

Y का X पर

$$S_{yx}=\sqrt{\frac{\Sigma(Y-Y_c)^2}{N}}$$

X_c और Y_c क्रमशः X व Y के संगणित मूल्य (computed values of X and Y respectively) हैं।

यदि X_c व Y_c की गणना न की जाए, परन्तु r, σ_x व σ_y ज्ञात हों तो प्रमाप त्रुटि निकालने में निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जा सकता है—

वैकल्पिक सूत्र—

$$S_{xy}=\sigma_x\sqrt{1-r^2} \qquad S_{yx}=\sigma_y\sqrt{1-r^2}\dagger$$

परिकलन की दृष्टि से उपर्युक्त सूत्र सरल नहीं है क्योंकि उनके लिए X और Y के संगणित मूल्य (computed values—X_c and Y_c) या σ_x व σ_y ज्ञात करने पड़ते हैं। अनुमान के प्रमाप विभ्रम निम्न सूत्रों से भी प्रत्यक्ष रूप से परिगणित किये जा सकते है—

X का Y पर

$$S_{xy}=\sqrt{\frac{\Sigma X^2-a\Sigma X-b\Sigma XY}{N}}$$

Y का X पर

$$S_{yx}=\sqrt{\frac{\Sigma Y^2-a\Sigma Y-b\Sigma XY}{N}}$$

अनुमान के प्रमाप विभ्रम का प्रतीपगमन रेखा से वही सम्बन्ध है जो प्रमाप विचलन का समान्तर माध्य से है। उसका निर्वचन भी प्रमाप विचलन के निर्वचन के समान ही किया जाता है। वास्तविक मूल्यों के कुल बिन्दुओं में से 68·27% बिन्दु Y की प्रतीपगमन रेखा के $\pm 1S_{yx}$ के बराबर दोनों ओर वाले क्षेत्र में बिखरे होंगे। इसी प्रकार रेखा के दोनों ओर $\pm 2S_{yx}$ और $\pm 3S_{yx}$ के अन्तर में क्रमशः 95·45% तथा 99·73% मूल्य फैले हुए होंगे। इसका यह अर्थ हुआ कि यदि प्रतीपगमन विश्लेषण के आधार पर लगाए गए सर्वोपयुक्त अनुमान में एक बार 3 *S. E.* जोड़ दें और एक बार घटा दें तो वे दो सीमाएँ प्राप्त हो जाएँगी जिनमें वास्तविक मूल्य

* देखिए अध्याय 11, पृ० 344।

† सहसम्बन्ध ज्ञात करने की न्यूनतम वर्ग रीति के अनुसार $r=\sqrt{1-\frac{S^2_y}{\sigma^2_y}}$

$$\therefore r^2=1-\frac{S^2_y}{\sigma^2_y} \text{ या } \frac{S^2_y}{\sigma^2_y}=1-r^2, \quad S^2_y=\sigma^2_y(1-r^2)$$

अर्थात् $S_{yx}=\sigma_y\sqrt{1-r^2}$

इसी प्रकार, $S_{xy}=\sigma_x\sqrt{1-r^2}$

के पाए जाने की 99·73%, (अर्थात् लगभग पूरी) सम्भावना है। परन्तु ऐसा तभी होगा जब वितरण प्रसामान्य (normal) हो और विश्लेषण यादृच्छिक प्रतिचयन पर आधारित हो। यदि प्रतीपगमन रेखा के दोनों ओर मूल्यों का विकिरण या विखराव कम होगा तो प्रमाप त्रुटि की मात्रा भी कम होगी।

उदाहरण (Illustration) 10 :

उदाहरण 8 में प्रदत्त आँकड़ों से दोनों रीतियों द्वारा प्रतीपगमन रेखाओं के अनुमान की प्रमाप त्रुटियाँ (standard errors of the estimate) ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

Y के दिए हुए मूल्यों को X के Y पर समीकरण में तथा X के मूल्यों को Y के X पर समीकरण में आदिष्ट करने पर क्रमशः X के और Y के संगणित मूल्य (X_c व Y_c) निकाल लिए जाएँगे। फिर निम्नलिखित सारणी बनाई जाएँगी—

अनुमान-प्रमाप त्रुटि (न्यूनतम वर्ग द्वारा)

प्रदत्त मूल्य	संगणित मूल्य (0·5+0·5y) द्वारा	विचलन	विचलन वर्ग	प्रदत्त मूल्य	संगणित मूल्य 1·1+1·3x द्वारा	विचलन	विचलन वर्ग
X	X_c	$X-X_c$	$(X-X_c)^2$	Y	Y_c	$(Y-Y_c)$	$(Y-Y_c)^2$
1	1·5	−0·5	0·25	2	2·4	−0·4	0·16
2	3·0	−1·0	1·00	5	3·7	+1·3	1·69
3	2·0	+1·0	1·00	3	5·0	−2·0	4·00
4	4·5	−0·5	0·25	8	6·3	+1·7	2·89
5	4·0	+1·0	1·00	7	7·6	−0·6	0·36

$\Sigma(X-X_c)^2=3{\cdot}50$ $\qquad$ $\Sigma(Y-Y_c)^2=9{\cdot}10$

$S_{xy}=\sqrt{\frac{\Sigma(X-X_c)^2}{N}}$ या $\sqrt{\frac{3{\cdot}50}{5}}$, $\qquad$ $S_{yx}=\sqrt{\frac{\Sigma(Y-Y_c)^2}{N}}=\sqrt{\frac{9{\cdot}10}{5}}$

$\therefore\ S_{xy}=\sqrt{0{\cdot}70}={\cdot}84$ $\qquad$ $\therefore\ S_{yx}=\sqrt{1{\cdot}82}=1{\cdot}35$

वैकल्पिक सूत्र द्वारा—पिछले उदाहरण में दूसरी सारणी के अनुसार—

$$\Sigma d^2_x=10,\ \Sigma d^2_y=26,\ b_{xy}=0{\cdot}5,\ b_{yx}=1{\cdot}3$$

$$\therefore\ r^2=b_{xy}\times b_{yx} \text{ या } 0{\cdot}5\times1{\cdot}3=0{\cdot}65$$

$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma d^2_x}{N}}=\sqrt{\frac{10}{5}}=\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma d^2_y}{N}}=\sqrt{\frac{26}{5}}=\sqrt{5{\cdot}2}$

$S_{xy}=\sigma_x\sqrt{1-r^2}$ $\qquad$ $S_{yx}=\sigma_y\sqrt{1-r^2}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{1-{\cdot}65}=\sqrt{0{\cdot}70}$ $\qquad$ $=\sqrt{5{\cdot}2}\times\sqrt{1-{\cdot}65}=\sqrt{1{\cdot}82}$

$\therefore\ S_{xy}=0{\cdot}84$ $\qquad$ $\therefore\ S_{xy}=1{\cdot}35$

उक्त उदाहरण के मूल-सारणी के आधार पर निम्न सूत्रों द्वारा प्रत्यक्ष रूप से भी अनुमान-प्रमाप त्रुटियाँ परिकलित की जा सकती हैं—

$S_{xy}=\sqrt{\frac{\Sigma X^2-a\Sigma X-b\Sigma XY}{N}}$ $\qquad$ $S_{yx}=\sqrt{\frac{\Sigma Y^2-a\Sigma Y-b\Sigma XY}{N}}$

$= \sqrt{\frac{55-0{\cdot}5\times15-0{\cdot}5\times88}{5}}$ $= \sqrt{\frac{151-1{\cdot}1\times25-1{\cdot}3\times88}{5}}$

$= \sqrt{\frac{55-7{\cdot}5-44{\cdot}0}{5}} = \sqrt{\frac{3{\cdot}5}{5}}$ $= \sqrt{\frac{151-27{\cdot}5-114{\cdot}4}{5}} = \sqrt{\frac{9{\cdot}1}{5}}$

$= \sqrt{0{\cdot}70} = 0{\cdot}84$ $= \sqrt{1{\cdot}82} = 1{\cdot}35$

प्रदत्त समीकरणों से माध्य-मूल्य व प्रतीपगमन-गुणांकों का परिगणन (Calculation of Mean Values and Regression Coefficients from given Equations)—यदि दोनों प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात हों तो उनको हल करके X और Y के माध्य मूल्य ($\overline{X}$ व $\overline{Y}$) निकाले जा सकते हैं। X के Y पर समीकरण से b_{xy} और Y के X पर समीकरण से b_{yx} भी ज्ञात किये जा सकते है। परन्तु कभी-कभी समीकरण इस प्रकार दिए जाते है कि उनके निरीक्षण से ही यह निश्चित नहीं किया जा सकता कि उनमें से कौन-सा X का Y पर और कौन-सा Y का X पर प्रतीपगमन प्रस्तुत करता है। ऐसी स्थिति में किसी एक को X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण मानकर b_{xy} ज्ञात कर लिया जाता है और इसी प्रकार दूसरे समीकरण की सहायता से b_{yx} निकाल लिया जाता है। यदि b_{xy} और b_{yx} का गुणनफल 1 से अधिक होता है तो यह परिणाम निकलता है कि हमारी मान्यता गलत है क्योंकि $r^2 > 1$। यदि ऐसा हो तो प्रश्न को फिर से हल करना पड़ता है। इस बार उस समीकरण को Y का X पर समीकरण मानना होगा जिसे पहले X का Y पर माना था। इस प्रकार b_{yx} और b_{xy} की गुणा 1 से अधिक नहीं होगी और परिणाम शुद्ध होंगे।

उदाहरण (Illustration) 11 :

एक आंशिक रूप से नष्ट प्रयोगशाला के सह-सम्बन्ध सामग्री के विश्लेषण अभिलेख (record) में से केवल निम्न परिणाम ही स्पष्ट हैं—

X का प्रसरण (variance) $=9$

प्रतीपगमन समीकरण $8X-10Y+66=0$ और

$40X-18Y=214$

इस सूचना से निम्न मूल्य ज्ञात कीजिए—

(i) X और Y के माध्य-मूल्य; (ii) X और Y के बीच सह-सम्बन्ध गुणांक; (iii) Y का प्रमाप विचलन।

[M. Com., Raj., 1971, Vikram, 1969, Alld., 1964, 60; M. A., Kanpur, 1969]

हल (Solution) :

(i) X व Y के माध्य-मूल्य—

$$8X-10Y=-66 \quad \text{...(i)}$$
$$40X-18Y=214 \quad \text{...(ii)}$$

प्रथम समीकरण को 5 से गुणा करने तथा उसमें से दूसरे समीकरण को घटाने पर—

$$\begin{array}{r} 40X-50Y=-330 \\ 40X-18Y=+214 \\ -\quad\;\; +\quad\;\; - \\ \hline -32Y=-544 \end{array}$$

$\therefore \quad \overline{Y}=17$

Y के माध्य मूल्य को (i) में आदिष्ट करने पर—

$8X-10\times17=-66$ या $8X=170-66$ $\therefore$ $X=\frac{104}{8}$ या 13

$\therefore \quad \overline{X}=13;\ \overline{Y}=17$.

(ii) **सहसम्बन्ध-गुणांक**—सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए दोनों प्रतीपगमन गुणांक निकालने होंगे। समीकरण स्पष्ट रूप से नहीं दिये हैं, अतः पहले को Y का X पर और दूसरे को

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण मानकर दोनों गुणांक निकाले जा रहे हैं—

X का Y पर	Y का X पर
$40X = 18Y + 214$	$-10Y = -8X - 66$
or $X = \frac{18}{40} Y + 214$	$Y = \frac{-8}{-10} X - 66$
$\therefore \ b_{xy} = \cdot45$	$\therefore \ b_{yx} = \cdot80$

[X के Y पर समीकरण मे $+214$ और Y के X पर समीकरण में -66 दोनों रेखाओं के अन्तःखण्ड (intercept) के माप (a) हैं अतः इन्हें छोड़ दिया जायगा। हमें केवल रेखाओं के ढाल (slopes or 'b') ज्ञात करने हैं। वस्तुतः इन ढालों के माप ही प्रतीपगमन गुणांक हैं।]

$$r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} = \sqrt{\cdot45 \times \cdot80} \text{ या } \sqrt{(\cdot3600)} \quad \therefore \ r = \cdot6$$

नोट—यदि प्रथम समीकरण को X का Y पर समीकरण माना जाता तो b_{xy} 1·25 होता और दूसरे समीकरण के आधार पर b_{yx} 2·22 होता। स्पष्ट है कि इन दोनों का गुणनफल r^2 1 से कहीं अधिक होता जो असम्भव है। अतः हमने जो क्रम माना है वह ठीक है।

(iii) y का प्रमाप विचलन—

X का प्रसरण $= 9$ $\qquad \therefore \ \sigma_x = 3$

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad \cdot8 = \cdot6 \times \frac{\sigma_y}{3} \quad \text{या} \quad \sigma_y = \frac{\cdot8 \times 3}{\cdot6} = 4$$

$\therefore$ Y का प्रमाप विचलन $= 4$

उदाहरण (Illustration) 12 :

(i) निम्नलिखित मूल्यों से उस सर्वोत्तम रैखिक सम्बन्ध (best linear relation) को ज्ञात कीजिये जिसमे Y को X के फलन (function) $a + bY$ के रूप में प्रदर्शित किया जाय—

X :	0	100	200	300	400
Y :	50	40	25	15	0

Y के औसत मूल्यों का अनुमान कीजिये जबकि $X = 240$, 320।

[M. Com., Meerut, 1971]

(ii) दो चर-मूल्य X और Y से सम्बन्धित प्रतीपगमन समीकरण निम्न प्रकार हैं—

$$3X + 2Y = 26$$
$$6X + Y = 31$$

ज्ञात कीजिये—

(क) X और Y के मध्यक-मूल्य (mean values) ;

(ख) X और Y मे सहसम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Correlation) ;

(ग) Y का प्रमाप विचलन (σ_y) यदि X का प्रसरण (σ_x^2) $= 25$।

[M. Com., Raj., 1973, Delhi, 1969 ; M. A., Meerut, 1973 ; U.P.C.S. 1965]

हल (Solution) :

$Y = a + bX$ प्रसामान्य समीकरण— $\Sigma Y = Na + b\Sigma X$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन विश्लेषण

X	Y	X^2	XY
0	50	0	0
100	40	10000	4000
200	25	40000	5000
300	15	90000	4500
400	0	160000	0
1000	130	300000	13500
ΣX	ΣY	ΣX^2	ΣXY

$$130=5a+1000b \quad ...(i)$$
$$13500=1000a+300000 \quad ...(ii)$$

(*ii*) को 200 से भाग देकर उसे (*i*) में से घटाने पर

$$130=5a+1000b$$
$$67{\cdot}5=5a\pm1500b$$
$$62{\cdot}5=-\quad 500b$$

$$\therefore \quad b=-\frac{62{\cdot}5}{500}=-{\cdot}125$$

b का मूल्य (*i*) में आदिष्ट करने पर

$$130=5a-125$$
$$255=5a \quad \therefore \quad a=51$$

$$\therefore \quad Y=51-0{\cdot}125X$$

Y के औसत मूल्यों का अनुमान—

जबकि $X=240$, $\quad Y=51-{\cdot}125\times240=51-30=21$

जबकि $X=320$, $\quad Y=51-{\cdot}125\times320=51-40=11$

अतः X के मूल्य 240 व 320 होने पर Y के अनुमानित मूल्य क्रमशः 21 व 11 हैं।

(ii) (क) X और Y के मध्यक-मूल्य—

$$3X+2Y=26 \quad ...(i)$$
$$6X+Y=31 \quad ..(ii)$$

(*i*) को 2 से गुणा करके उसमें से (*ii*) घटाने पर

$$6X+4Y=52$$
$$6X+Y=31$$
$$3Y=21$$
$$\therefore \quad Y=7$$

समीकरण (*ii*) में Y का मान आदिष्ट करने पर—

$$6X+7=31\ ;\quad 6X=24 \quad \therefore \quad X=4$$

अतः $\quad \bar{X}=4 \ : \quad \bar{Y}=7$

(ख) सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए दोनों प्रतीपगमन-गुणांकों का मूल्य जानना आवश्यक है—

समीकरण (i) को Y का X पर समीकरण मानने पर—

$2Y=-3X+26\ ;\quad 2Y=-3X\ ;\quad \therefore\ Y=-1{\cdot}5X$ अतः $b_{yx}=-1{\cdot}5$

समीकरण (ii) को X का Y पर समीकरण मानकर—

$$6X=-Y+31\ ;\quad 6X=-Y\ ;\quad X=-\tfrac{1}{6}Y\ ;\quad \therefore\ b_{xy}=-{\cdot}167$$

$$r=\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}=\sqrt{-{\cdot}167\times-1{\cdot}5}=-\sqrt{\tfrac{1}{6}\times\tfrac{3}{2}}=-{\cdot}50$$

(ग) Y का प्रमाप विचलन— σ_y

$$\sigma_x^2=25\ ;\quad \sigma_x=5\ ;\quad b_{yx}=-1{\cdot}5\ ;\quad b_{yx}=r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\ ;$$

ज्ञात मूल्य आदिष्ट करने पर—

$$-1{\cdot}5=-{\cdot}5\times\frac{\sigma_y}{5}\ :\quad \left(\frac{-1{\cdot}5}{-{\cdot}5}\right)5=\sigma_y=15$$

विचरण का अनुपात
(Ratio of Variation)

दो सम्बन्धित श्रेणियों में आनुपातिक परिवर्तन सदा एक ही अनुपात मे नहीं होते। यदि किसी वस्तु की पूर्ति दोगुनी हो जाये तो उसका मूल्य आधा नहीं हो जायगा। अतः यह ज्ञात करना आवश्यक हो जाता है कि दोनों सम्बद्ध श्रेणियों मे होने वाले प्रतिशत परिवर्तन या विचरण का अनुपात (ratio of variation) क्या है।

प्रधान श्रेणी की तुलना में आश्रित श्रेणी मे समान्तर माध्य से होने वाले आनुपातिक (या प्रतिशत) विचलनों का औसत अनुपात ही विचरण का अनुपात कहलाता है।[1] इससे हमें यह पता चलता है कि यदि प्रधान श्रेणी (subject series) में माध्य से 1% का विचरण होता है तो इसके परिणामस्वरूप आश्रित श्रेणी (relative series) में माध्य से कितना प्रतिशत परिवर्तन होगा। विचरण का अनुपात सहसम्बन्ध सिद्धान्त का उपप्रमेय (corollary) है।

विचरण-अनुपात की गणना—विचरण-अनुपात के निर्धारण में उस श्रेणी को प्रधान श्रेणी माना जाता है जिसके चर-मूल्यों में औसत प्रतिशत विचलन अपेक्षाकृत अधिक हों ताकि यह अनुपात 1 से कम आये। कम परिवर्तनों वाली श्रेणी को आश्रित श्रेणी माना जाता है। इसकी गणना निम्न दो विधियों द्वारा की जा सकती है—

(1) बीजगणितीय रीति द्वारा (By Algebraic Method), तथा

(2) बिन्दुरेखीय रीति या 'गाल्टन बिन्दुरेख' द्वारा (By Graphical Method or Galton's Graph)।

(1) बीजगणितीय रीति—प्रक्रिया—

(i) दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य निकाले जाते हैं।

(ii) समान्तर माध्य को आधार (base) अर्थात् 100 मानकर प्रत्येक मूल्य को प्रतिशत में बदला जाता है। इसके लिए प्रत्येक मूल्य को माध्य से भाग देकर 100 से गुणा किया जाता। इस प्रकार X व Y की सूचकांक-श्रेणियाँ (Index Number Series) प्राप्त कर ली जाती हैं।

(iii) दोनों श्रेणियों के सूचकांक-मूल्यों में से 100 घटाकर प्रतिशत उपलब्ध किये जाते हैं ($d_x\%$, $d_y\%$)

(iv) Y श्रेणी के प्रतिशत विचलनों को उनके तत्संवादी X श्रेणी के प्रतिशत विचलनों से भाग देकर प्रत्येक पद-युग्म का विचरण-अनुपात निकाला जायगा।

(v) अन्त मे, सब व्यक्तिगत विचरण-अनुपातों का समान्तर माध्य प्राप्त किया जायगा। यही विचरण का अनुपात है।

सूत्रानुसार— $$\text{R. of V.} = \frac{\Sigma\left[\frac{dy\%}{dx\%}\right]}{N}$$

यह रीति नियमित परिवर्तन वाली श्रेणियों के लिए उपयुक्त है। परन्तु आर्थिक व सामाजिक घटनाओं में इस रीति का प्रयोग उचित नहीं है क्योंकि ये श्रेणी के अधिकतर [illegible] अनियमित प्रकृति के होते है।

उदाहरण (Illustration) 13 :

निम्न समंकों से बीजगणितीय रीति द्वारा विचरण-अनुपात (ratio of variation) [illegible] कीजिए और उसका निर्वचन कीजिए—

X	35	41	45	[illegible]	65
Y	19	23	23	[illegible]	[illegible]

[1] 'Average ratio of the proportional deviations from the type [illegible] of the relative as compared with those of the subject.—W. I. King, Elements [illegible] Method, p. 218.

हल (Solution) :

विचरण अनुपात का परिकलन

X—श्रेणी			Y—श्रेणी			अनुपात
X	सूचकांक (आधार 50=100)	प्रतिशत विचलन dx%	Y	सूचकांक (आधार 25=100)	प्रतिशत विचलन dy%	$\frac{dy\%}{dx\%}$
35	70	−30	19	76	−24	·80
41	82	−18	23	92	− 8	·44
45	90	−10	23	92	− 8	·80
64	128	+28	29	116	+16	·57
65	130	+30	31	124	+24	·80
250 $\bar{X}=50$			125 $\bar{Y}=25$			3·41 $\Sigma\left[\frac{dy\%}{dx\%}\right]$

$$\text{विचरण-अनुपात} = \frac{\Sigma\left\{\frac{dy\%}{dx\%}\right\}}{N} = \frac{3{\cdot}41}{5} \text{ या } 0{\cdot}682$$

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि यदि प्रधान श्रेणी (X-series) में 1% का परिवर्तन होता है तो फलस्वरूप आश्रित श्रेणी (Y-series) में ·682% का विचलन होता है।

(2) गाल्टन बिन्दुरेखा चित्र (Galton's Graph)—अनियमित समंक-श्रेणियों में विचरण-अनुपात का माप करने के लिए बिन्दुरेखीय रीति सर्वोत्तम होती है। इस रीति का सूत्रपात सर फ्रान्सिस गाल्टन (Sir Francis Galton) ने किया था अतः इसे गाल्टन बिन्दुरेख (Galton's graph) भी कहते हैं। इस विधि में निम्न क्रियाएँ की जाती हैं—

(i) सर्वप्रथम प्रत्येक श्रेणी के समान्तर माध्य को आधार (100) मानकर उसके वास्तविक पद-मूल्यों को सूचकांक श्रेणी में बदला जायगा—

$$\text{सूचकांक} = \frac{\text{पद-मूल्य}}{\text{श्रेणी का समान्तर माध्य}} \times 100$$

(ii) प्रधान श्रेणी (X) के सूचकांकों को कोटि-अक्ष (Y-axis) या उदग्र मापदण्ड (vertical scale) पर तथा आश्रित श्रेणी (Y) को भुजाक्ष (X-axis) या क्षैतिज मापदण्ड (horizontal scale) पर प्रदर्शित करके रेखाचित्र पर विभिन्न सूचकांक-युग्म (pairs of indices) प्रांकित किये जाते हैं।

(iii) तत्पश्चात्, इन प्रांकित बिन्दुओं के आधार पर एक सर्वोपयुक्त रेखा (line of best fit) इस प्रकार खींची जाती है कि (क) वह दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्यों (100, 100) के मिलन-बिन्दु से होकर गुजरे, (ख) उसके दोनों ओर लगभग बराबर संख्या में बिन्दु हों, तथा (ग) दोनों ओर के बिन्दु, इस रेखा से लगभग बराबर अन्तर (equidistant) पर हों। यह रेखा वस्तुतः प्रतीपगमन रेखा (line of regression) ही है।

(iv) सर्वोत्तम-रेखा की सहायता से विचरणानुपात का माप इस प्रकार किया जाता है—कोटि अक्ष पर किसी बिन्दु (B) से भुजाक्ष के समानान्तर (लम्ब) रेखा खींची जाती है जो सर्वोपयुक्त रेखा को C पर काटती है; इस रेखा का माप 'BC' है। फिर B से उस बिन्दु (A) तक का माप ज्ञात कर लिया जाता है जिस पर यह रेखा Y-axis पर मिलती है (BA); अन्त में

निम्न सूत्र द्वारा इस रेखा के झुकाव या ढाल (slope) को नाप लिया जाता है। यही विचरणानुपात है—

$$\text{विचरण-अनुपात R. of V.} = \frac{BC}{BA} = \frac{\text{क्षैतिज अन्तर (Vertical Distance)}}{\text{उदग्र अन्तर (Horizontal Distance)}}$$

प्रतीपगमन अनुपात (Ratio of Regression)—विचरण अनुपात को 1 में से घटाने पर जो राशि ज्ञात होती है वह प्रतीपगमन का अनुपात कहलाती है।

उदाहरण (Illustration) 14 :

निम्न समंकों से गाल्टन बिन्दुरेख की रचना करके विचरण-अनुपात ज्ञात कीजिए—

वर्ष	1	2	3	4	5	6	7	8	माध्य
X	79	52	33	55	46	62	31	34	49
Y	49	40	25	35	35	34	34	28	35

हल (Solution) :

दोनो श्रेणियो के समान्तर माध्यों को 100 मानकर उनके चर-मूल्यों को सूचकांक में बदला जायगा—

सूचकांकों का परिगणन

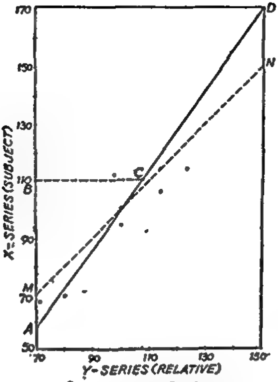
वर्ष	X		Y	
	मूल्य	सूचकांक (आधार : 49=100)	मूल्य	सूचकांक (आधार : 35=100)
1	79	161	49	140
2	52	106	40	114
3	33	67	25	71
4	55	112	35	100
5	46	94	35	100
6	62	127	34	97
7	31	63	34	97
8	34	69	28	80

उपर्युक्त सारणी से प्राप्त सूचकांक श्रेणियों को रेखाचित्र पर प्रांकित करके गाल्टन बिन्दुरेख बनाया जायगा—

$$\text{R. of V.} = \frac{BC}{BA} = \frac{37}{52} = 0{\cdot}71$$

अतः X श्रेणी में 1% का परिवर्तन होने से Y श्रेणी में औसत रूप से लगभग 0·71% का विचलन होता है। [प्रतीपगमन का अनुपात 1 − 0·71 या ·29 है।]

विचरणानुपात



चित्र 4—गाल्टन बिन्दुरेख

गाल्टन बिन्दुरेख का निर्वचन (Interpretation)—गाल्टन बिन्दुरेख से निष्कर्ष निकालते समय निम्नलिखित नियमों का ध्यान रखना चाहिए—

(i) **आनुपातिक परिवर्तन**—यदि दोनों श्रेणियो मे परिवर्तन एक ही अनुपात या समान प्रतिशत दर से होते हैं तो सर्वोपयुक्त रेखा क्षैतिज माप पर अर्द्ध-समकोण (45° angle) बनाती है। इस रेखा को समान आनुपातिक परिवर्तन की रेखा (line of equal proportional variation) कहते है। [चित्र 4—*MN*] स्पष्ट है कि ऐसी स्थिति मे विचरणानुपात 1 होगा। यदि प्रधान श्रेणी में प्रतिशत परिवर्तन अधिक दर से होते है तो यह रेखा भुजाक्ष से 45° से अधिक का कोण बनाती है। इसके विपरीत आश्रित श्रेणी में अपेक्षाकृत अधिक आनुपातिक परिवर्तन होने की दशा मे रेखा क्षैतिज माप-दण्ड पर 45° से कम का कोण बनायेगी। हमारे उदाहरण मे प्रतीपगमन रेखा (*AD*) 45° से अधिक का कोण बनाती है तभी आश्रित श्रेणी (0·71%) की तुलना में प्रधान श्रेणी (1%) में अधिक दर से विचरण होते हैं।

(ii) **सहसम्बन्ध की मात्रा**—गाल्टन बिन्दुरेख पर यदि सभी बिन्दु एक सरल रेखा के रूप मे अंकित हों तो श्रेणियो में पूर्ण सहसम्बन्ध होता है। समानुपातिक परिवर्तन रेखा से यह प्रतीपगमन रेखा जितनी दूरी पर होगी सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही कम होगी।

(iii) **दिशा**—यदि यह रेखा बायी से दाहिनी ओर ऊपर को जाती है (चित्र 4—*AD*) तो सहसम्बन्ध धनात्मक होता है। विपरीत स्थिति मे ऋणात्मक सहसम्बन्ध होगा।

इस प्रकार, गाल्टन बिन्दुरेख से न केवल विचरणानुपात की मात्रा ही ज्ञात होती है वरन् सहसम्बन्ध की मात्रा व प्रकृति आदि का भी आभास हो जाता है।

बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन
(Multiple Linear Regression)

अध्याय 11 में स्पष्ट किया जा चुका है कि दो चर-मूल्यों के सम्बन्ध का अध्ययन सरल सहसम्बन्ध (simple correlation) या द्वि-चर सहसम्बन्ध विश्लेषण (bivariate correlation

analysis) कहलाता है। व्यवहार में, आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्र में ऐसी अनेक परिस्थितियाँ हमारे सामने आती हैं जब दो से अधिक चर-मूल्यों में पाये जाने वाले सम्बन्ध का गणितीय विश्लेषण करना पड़ता है। इन चर-मूल्यों में से एक आश्रित चर-मूल्य (dependent variable) होता है जिस पर शेष अनेक स्वतन्त्र चर-मूल्यों (independent variables) का प्रभाव पड़ता है। उदाहरणार्थ, गन्ने की उपज (आश्रित चर-मूल्य), वर्षा की मात्रा, तापक्रम, बीज की किस्म, खाद, खेत का आकार आदि अनेक कारकों (स्वतन्त्र चर-मूल्यों) द्वारा प्रभावित होती है; व्यक्ति का भार (आश्रि‌त) उसके कद, आय, खान-पान आदि (स्वतन्त्र) से प्रभावित होता है; परिवारों में बच्चों की संख्या पर पारिवारिक आयु, विवाह के समय आयु आदि का प्रभाव पड़ता है; अपराधों की संख्या निरक्षरता, बढ़ती हुई जनसंख्या, आर्थिक स्थिति, सामाजिक वातावरण आदि से सम्बन्धित होती है।

बहुगुणी एवं आंशिक सहसम्बन्ध (Multiple and Partial Correlation)—दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चर-मूल्यों के एक आश्रित चर-मूल्य पर सामूहिक प्रभाव का गणितीय अध्ययन, बहुगुणी सहसम्बन्ध या बहु-सहसम्बन्ध (multiple correlation) कहलाता है। यदि वर्षा की मात्रा (X_2) और तापक्रम (X_3)—दोनों के गन्ने की उपज (X_1) पर सामूहिक प्रभाव का गणितीय अध्ययन किया जाए तो वह बहु-सहसम्बन्ध कहलायेगा और उसके लिए $R_{1\cdot 23}$ संकेत प्रयोग किया जायेगा—

संकेताक्षर $R_{1\cdot 23}$ का अर्थ है दो स्वतन्त्र चर-मूल्यों (X_2 व X_3) के एक आश्रित चर-मूल्य (X_1) पर पड़ने वाले सामूहिक प्रभाव से सम्बन्धित बहुसहसम्बन्ध-गुणांक (coefficient of multiple correlation)।

उपर्युक्त परिस्थिति में यदि एक स्थिर तापक्रम (X_3) में गन्ने की उपज (X_1) और वर्षा की मात्रा (X_2) का सम्बन्ध ज्ञात किया जाये तो वह आंशिक सहसम्बन्ध ($r_{12\cdot 3}$) होगा। इस प्रकार आंशिक सहसम्बन्ध (partial correlation) दो चरों में विद्यमान वह गणितीय सम्बन्ध है जो अन्य स्वतन्त्र चरों के प्रभाव को निरस्त (eliminate) करके ज्ञात किया जाये। जैसे, तापक्रम (X_3) के प्रभाव को निरस्त करके (अर्थात् एक समान स्थिर तापक्रम के अन्तर्गत) गन्ने की उपज (X_1) और वर्षा की मात्रा (X_2) का सहसम्बन्ध ($r_{12\cdot 3}$); आयु (X_3) व खानपान (X_4) के प्रभाव को स्थिर रखते हुए भार (X_1) व कद (X_2) का आंशिक सम्बन्ध ($r_{12\cdot 34}$) इत्यादि।

एक चर मूल्य (X_3) के प्रभाव को निरस्त करके दो चर-मूल्यों (X_1 व X_2) में ज्ञात आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक प्रथम कोटि का गुणांक (partial correlation coefficient of first order) कहलाता है और $r_{12\cdot 3}$ प्रतीक द्वारा व्यक्त किया जाता है। दो स्वतन्त्र चर-मूल्यों (X_3 व X_4) के प्रभाव को मुक्त करके X_1 व X_2 चर-मूल्यों में जो सहसम्बन्ध गुणांक निकाला जाता है वह द्वितीय कोटि का आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक (partial correlation coefficient of second order) कहलाता है जिसके लिए $r_{12\cdot 34}$ प्रतीक प्रयुक्त किया जाता है। इसी प्रकार, तीन स्वतन्त्र चर-मूल्यों के प्रभाव को निरस्त करके जो सहसम्बन्ध गुणांक उपलब्ध किया जाता है वह तृतीय कोटि का आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक (partial correlation coefficient of third order) कहलाता है ($r_{12\cdot 345}$)। दो चर-मूल्यों के सहसम्बन्ध को सहसम्बन्ध या शून्य कोटि का सहसम्बन्ध (correlation of zero order) कहा जाता है क्योंकि इसके परिगणन में किसी चर-मूल्य को स्थिर [illegible] जाता।

बहु-सहसम्बन्ध गुणांक व आंशिक सहसम्बन्ध गुणांकों का परिकलन
(Calculation of Multiple and Partial Correlation Coefficients)

बहु-सहसम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Multiple Correlation)—यदि दो चर-मूल्य (X_2 व X_3) और एक आश्रित चर-मूल्य (X_1) दिये हों तो बहु [illegible]

सूत्रानुसार परिगणित किया जायेगा—

$$R_{1\cdot23}=\sqrt{\frac{r^2_{12}+r^2_{13}-2r_{12}\cdot r_{13}\cdot r_{23}}{1-r^2_{23}}}$$

उक्त सूत्र में $R_{1\cdot23}$ अभीष्ट बहुसहसम्बन्ध-गुणांक (multiple correlation coefficient) है ;

संकेत r_{12}, r_{13}, r_{23} क्रमशः चर-मूल्य X_1 व X_2, X_1 व X_3 और X_2 व X_3 के मध्य सरल सहसम्बन्ध-गुणांक (simple correlation coefficients) को व्यक्त करते हैं।

इस गुणांक की सीमाएँ 0 और +1 हैं।

आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक (Partial Correlation Coefficients)—यदि तीन चर-मूल्य (X_1, X_2 व X_3) दिये हों तो विभिन्न आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक निम्न सूत्रों द्वारा ज्ञात किये जायेंगे—

(i) $$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-r_{13}\cdot r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{13}}\cdot\sqrt{1-r^2_{23}}}$$

$r_{12\cdot3}$ चर-मूल्य X_1 व X_2 के बीच ज्ञात आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक है जबकि उन्हें X_3 के प्रभाव से मुक्त कर दिया गया है।

(ii) $$r_{13\cdot2}=\frac{r_{13}-r_{12}\cdot r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{12}}\cdot\sqrt{1-r^2_{23}}}$$

(iii) $$r_{23\cdot1}=\frac{r_{23}-r_{12}\cdot r_{13}}{\sqrt{1-r^2_{12}}\cdot\sqrt{1-r^2_{13}}}$$

$r_{13\cdot2}$ और $r_{23\cdot1}$ क्रमशः X_1 व X_3 तथा X_2 व X_3 के मध्य आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक हैं जिन्हें क्रमशः X_2 व X_1 चर-मूल्यों के प्रभाव से मुक्त कर दिया गया है।

उदाहरण (Illustration) 15 :

भारतीय कपास के 25 प्रतिदर्शों (samples) के विश्लेषण के आधार पर (1) अधिकतम मानक बट (highest standard warp count), (2) रेशे की लम्बाई (fibre length), व (3) प्रति इंच रेशे के भार (fibre weight per inch) में निम्न सहसम्बन्ध गुणांक प्राप्त किये गये।

$$r_{12}=\cdot87\ ;\ r_{13}=-\cdot80\ ;\ r_{23}=-\cdot68$$

$r_{12\cdot3}$, $r_{13\cdot2}$ और $R_{1\cdot23}$ परिकलित (calculate) कीजिए और उनका निर्वचन (interpretation) भी कीजिए।

[M. Com., Delhi, 1963]

हल (Solution) :

प्रदत्त $r_{12}=\cdot87\ ;\ r_{13}=-\cdot80\ ;\ r_{23}=-\cdot68$

आंशिक सहसम्बन्ध (Partial Correlation Coefficients)—

$$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-r_{13}\cdot r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{13}}\cdot\sqrt{1-r^2_{23}}}=\frac{\cdot87-(-\cdot80\times-\cdot68)}{\sqrt{1-(-\cdot8)^2}\cdot\sqrt{1-(-\cdot68)^2}}$$

$$=\frac{\cdot87-\cdot544}{\cdot6\times\cdot733}=\frac{\cdot326}{\cdot440}=0\cdot74$$

तीसरे चर-मूल्य (fibre weight per inch) के प्रभाव को निरस्त (eliminate) करके पहले और दूसरे चर-मूल्यों (highest standard warp count and fibre length) में अधिक मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध है।

समीकरण का निम्नांकित रूप होगा—

$$X_{3\cdot12}=a_{3\cdot12}+b_{31\cdot2}\,X_1+b_{32\cdot1}\,X_2$$

आंशिक प्रतीपगमन गुणांक (Partial Regression Coefficients)

$$b_{31\cdot2}=\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\cdot\frac{r_{13}-r_{12}\cdot r_{23}}{1-r^2_{12}}$$
$$=\frac{4\cdot41}{2\cdot26}\cdot\frac{\cdot581-(\cdot578\times\cdot974)}{1-(\cdot578)^2}$$
$$=1\cdot95\times\frac{\cdot581-\cdot563}{1-\cdot334}$$
$$b_{31\cdot2}=1\cdot95\times\frac{\cdot018}{\cdot666}=\cdot053$$

$$b_{32\cdot1}=\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\cdot\frac{r_{23}-r_{12}\cdot r_{13}}{1-r^2_{12}}$$
$$=\frac{4\cdot41}{4\cdot39}\times\frac{\cdot974-(\cdot578\times\cdot581)}{1-(\cdot578)^2}$$
$$=1\cdot005\times\frac{\cdot974-\cdot336}{1-\cdot334}$$
$$b_{32\cdot1}=1\cdot005\times\frac{\cdot638}{\cdot666}=\cdot963$$

$$a_{3\cdot12}=\overline{X}_3-b_{31\cdot2}\,\overline{X}_1-b_{32\cdot1}\,\overline{X}_2$$
$$=56\cdot03-(\cdot053\times55\cdot95)-(\cdot963\times51\cdot48)$$
$$=56\cdot03-2\cdot965-49\cdot575=56\cdot03-52\cdot540=3\cdot49$$

अभीष्ट समीकरण—

$$X_3=3\cdot49+\cdot053X_1+\cdot963X_2$$

(ii) यदि $X_1=58$ और $X_2=52\cdot5$ तो तत्सम्बन्धी X_3 उक्त समीकरण द्वारा निम्न प्रकार अनुमानित किया जाएगा—

$$X_3=3\cdot49+\cdot053\times58-\cdot963\times52\cdot5$$
$$=3\cdot49+3\cdot074+50\cdot558$$
$$=57\cdot122 \text{ gms.}$$

(iii) लम्बाई के प्रभाव को निरस्त करके अण्डे के भार और आयतन के बीच आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक निम्न सूत्रानुसार आगणित किया जाएगा—

$$r_{23\cdot1}=\frac{r_{23}-r_{12}\cdot r_{13}}{\sqrt{1-r_{12}^2}\sqrt{1-r_{13}^2}}$$
$$=\frac{\cdot974-(\cdot578\times\cdot581)}{\sqrt{1-\cdot334}\sqrt{1-\cdot3376}}=\frac{\cdot638}{\sqrt{\cdot666}\times\sqrt{\cdot6624}}=\frac{\cdot638}{\cdot664}=0\cdot961$$

न्यूनतम वर्ग विधि (Least Squares Method)—सरल रेखीय प्रतीपगमन की भाँति बहुगुणी प्रतीपगमन समीकरणों का निर्धारण भी न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा किया जा सकता है। इस विधि के अनुसार, प्रसामान्य समीकरणो की रचना करके युगपत् समीकरण के आधार पर a और b स्थिरांकों का परिगणन किया जाता है। सरल प्रतीपगमन मे केवल दो स्थिरांक a और b आगणित किए जाते हैं जिनके लिए दो प्रसामान्य समीकरणों की आवश्यकता होती है परन्तु बहुगुणी प्रतीपगमन मे दो से अधिक स्थिरांको की गणना करनी होती है अतः उतने ही प्रसामान्य समीकरण अपेक्षित हैं। इन समीकरणों में निरसन रीति द्वारा स्थिरांको का परिकलन किया जाता है और उन्हे मूल समीकरण मे प्रतिस्थापित करके बहुगुणी प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त कर लिया जाता है। तीन चर-मूल्यों के प्रतीपगमन विश्लेषण मे स्थिरांको के आगणन के लिए तीन प्रसामान्य समीकरण उपलब्ध किये जाएँगे—

X_1 का X_2 व X_3 पर बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन—

मूल समीकरण—

$$X_{1\cdot23}=a_{1\cdot23}+b_{12\cdot3}\,X_2+b_{13\cdot2}\,X_3$$

प्रसामान्य समीकरण—

$$\Sigma X_1=Na_{1\cdot23}+b_{12\cdot3}\,\Sigma X_2+b_{13\cdot2}\,\Sigma X_3 \quad \ldots(i)$$
$$\Sigma X_1X_2=a_{1\cdot23}\,\Sigma X_2+b_{12\cdot3}\,\Sigma X_2^2+b_{13\cdot2}\,\Sigma X_2X_3 \quad \ldots(ii)$$
$$\Sigma X_1X_3=a_{1\cdot23}\,\Sigma X_3+b_{13\cdot2}\,\Sigma X_2X_3+b\ \Sigma X_3^2 \quad \ldots(iii)$$

[मूल समीकरण को क्रमशः 1, X_2 और X_3 से गुणा किया गया है।]

इस समीकरण मे $X_{1\cdot 23}$, X_2 व X_3 के प्रदत्त मूल्यों के आधार पर आकलित X_1 का सर्वोत्तम अनुमान है।

$a_{1\cdot 23}$ स्थिरांक है जिसको निम्न सूत्रानुसार परिगणित किया जाता है—

$$a_{1\cdot 23}=\bar{X}_1-b_{12\cdot 3}\,\bar{X}_2-b_{13\cdot 2}\,\bar{X}_3$$

यदि तीनों चर-मूल्यों का अपने-अपने समान्तर माध्य से मापन किया जाता है तो 'a' का मान शून्य ($a=0$) हो जाता है और प्रतीपगमन समीकरण का यह स्वरूप हो जाता है—

$$x_{1\cdot 23}=b_{12\cdot 3}\,x_2+b_{13\cdot 2}\,x_3$$

$b_{12\cdot 3}$ व $b_{13\cdot 2}$ आंशिक प्रतीपगमन गुणांक (partial regression coefficients) हैं जो क्रमशः X_3 व X_2 को स्थिर मानते हुए X_1 का X_2 पर तथा X_1 का X_3 पर प्रतीपगमन-गुणांक व्यक्त करते हैं। इनका परिकलन निम्न सूत्र द्वारा किया जाता है—

$$b_{12\cdot 3}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\times\frac{r_{12}-r_{13}\,r_{23}}{1-r^2_{23}} \qquad\qquad b_{13\cdot 2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\times\frac{r_{13}-r_{12}\,r_{23}}{1-r^2_{23}}$$

इस प्रकार परिगणित समीकरण मे X_2 व X_3 के प्रदत्त मूल्यों को आदिष्ट करके X_1 का सर्वोत्तम मूल्य आकलित कर लिया जाता है।

तीन चर-मूल्यों की सहायता से उपर्युक्त समीकरण के अतिरिक्त दो अन्य प्रतीपगमन समीकरणों का निर्धारण किया जा सकता है। एक—X_1 व X_3 को स्वतन्त्र मानते हुए X_2 का अनुमान लगाने के लिए और दूसरा—X_1 व X_2 को स्वतन्त्र मानकर X_3 का अनुमान ज्ञात करने के लिए।

X_2 का X_1 व X_3 पर प्रतीपगमन समीकरण—

$$X_{2\cdot 13}=a_{2\cdot 13}+b_{21\cdot 3}\,X_1+b_{23\cdot 1}\,X_3$$

समीकरण में स्थिरांकों का परिकलन निम्न सूत्रानुसार होगा—

$$a_{2\cdot 13}=\bar{X}_2-b_{21\cdot 3}\,\bar{X}_1-b_{23\cdot 1}\,\bar{X}_3$$

$$b_{21\cdot 3}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\frac{r_{12}-r_{13}\,.\,r_{23}}{1-r^2_{13}} \qquad\qquad b_{23\cdot 1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\cdot\frac{r_{23}-r_{12}\,.\,r_{13}}{1-r_{13}^2}$$

X_3 का X_1 व X_2 पर प्रतीपगमन समीकरण—

$$X_{3\cdot 12}=a_{3\cdot 12}+b_{31\cdot 2}\,X_1+b_{32\cdot 1}\,X_2$$

$$a_{3\cdot 12}=\bar{X}_3-b_{31\cdot 2}\,\bar{X}_1-b_{32\cdot 1}\,\bar{X}_2$$

$$b_{31\cdot 2}=\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\times\frac{r_{13}-r_{23}\,.\,r_{12}}{1-r_{12}^2} \qquad\qquad b_{32\cdot 1}=\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\times\frac{r_{23}-r_{13}\,.\,r_{12}}{1-r_{12}^2}$$

उदाहरण (Illustration) 17 :

300 अण्डों की लम्बाई (मिलीमीटर मे) X_1, आयतन (X_2) व भार (ग्राम मे) X_3 के मापन से निम्न मूल्य प्राप्त किये गये।

$\bar{X}_1=55.95$,	$\sigma_1=2.26$,	$r_{12}=0.578$
$\bar{X}_2=51.48$,	$\sigma_2=4.39$,	$r_{13}=0.581$
$\bar{X}_3=56.03$,	$\sigma_3=4.41$,	$r_{23}=0.974$

(i) लम्बाई व आयतन पर भार का रेखीय प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) उस अण्डे का भार अनुमानित कीजिए जिसकी लम्बाई 58 मि० मी० और आयतन 52·5 c.c. है।

(iii) लम्बाई का प्रभाव निरस्त करके भार व आयतन का आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए। *[M. A., Alld., 1959]*

हल (Solution) :

(i) अण्डे के भार (X_3) के अण्डे की लम्बाई (X_1) और आयतन (X_2) पर प्रतीपगमन-

समीकरण का निम्नांकित रूप होगा—

$$X_{3\cdot12}=a_{3\cdot12}+b_{31\cdot2}\,X_1+b_{32\cdot1}\,X_2$$

आंशिक प्रतीपगमन गुणांक (Partial Regression Coefficients)

$$b_{31\cdot2}=\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\cdot\frac{r_{13}-r_{12}\cdot r_{23}}{1-r^2_{12}}$$
$$=\frac{4\cdot41}{2\cdot26}\cdot\frac{\cdot581-(\cdot578\times\cdot974)}{1-(\cdot578)^2}$$
$$=1\cdot95\times\frac{\cdot581-\cdot563}{1-\cdot334}$$
$$b_{31\cdot2}=1\cdot95\times\frac{\cdot018}{\cdot666}=\cdot053$$

$$b_{32\cdot1}=\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\cdot\frac{r_{23}-r_{12}\cdot r_{13}}{1-r^2_{12}}$$
$$=\frac{4\cdot41}{4\cdot39}\times\frac{\cdot974-(\cdot578\times\cdot581)}{1-(\cdot578)^2}$$
$$=1\cdot005\times\frac{\cdot974-\cdot336}{1-\cdot334}$$
$$b_{32\cdot1}=1\cdot005\times\frac{\cdot638}{\cdot666}=\cdot963$$

$$a_{3\cdot12}=\bar{X}_3-b_{31\cdot2}\,\bar{X}_1-b_{32\cdot1}\,\bar{X}_2$$
$$=56\cdot03-(\cdot053\times55\cdot95)-(\cdot963\times51\cdot48)$$
$$=56\cdot03-2\cdot965-49\cdot575=56\cdot03-52\cdot540=3\cdot49$$

अभीष्ट समीकरण—

$$X_3=3\cdot49+\cdot053X_1+\cdot963X_2$$

(ii) यदि $X_1=58$ और $X_2=52\cdot5$ तो तत्सम्बन्धी X_3 उक्त समीकरण द्वारा निम्न प्रकार अनुमानित किया जाएगा—

$$X_3=3\cdot49+\cdot053\times58-\cdot963\times52\cdot5$$
$$=3\cdot49+3\cdot074+50\cdot558$$
$$=57\cdot122 \text{ gms.}$$

(iii) लम्बाई के प्रभाव को निरस्त करके अण्डे के भार और आयतन के बीच आंशिक सहगमन गुणांक निम्न सूत्रानुसार आगणित किया जाएगा—

$$r_{23\cdot1}=\frac{r_{23}-r_{12}\cdot r_{13}}{\sqrt{1-r_{12}^2}\sqrt{1-r_{13}^2}}$$
$$=\frac{\cdot974-(\cdot578\times\cdot581)}{\sqrt{1-\cdot334}\sqrt{1-\cdot3376}}=\frac{\cdot638}{\sqrt{\cdot666}\times\sqrt{\cdot6624}}=\frac{\cdot638}{\cdot664}=0\cdot961$$

न्यूनतम वर्ग विधि (Least Squares Method)—सरल रेखीय प्रतीपगमन की भाँति बहुगुणी प्रतीपगमन समीकरणों का निर्धारण भी न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा किया जा सकता है। इस विधि के अनुसार, प्रसामान्य समीकरणों की रचना करके युगपत् समीकरण के आधार पर a और b स्थिरांको का परिगणन किया जाता है। सरल प्रतीपगमन में केवल दो स्थिरांक a और b आगणित किए जाते हैं जिनके लिए दो प्रसामान्य समीकरणों की आवश्यकता होती है परन्तु बहुगुणी प्रतीपगमन में दो से अधिक स्थिरांको की गणना करनी होती है अतः उतने ही प्रसामान्य समीकरण अपेक्षित हैं। इन समीकरणो मे निरसन रीति द्वारा स्थिरांकों का परिकलन किया जाता है और उन्हे मूल समीकरण मे प्रतिस्थापित करके बहुगुणी प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त कर लिया जाता है। तीन चर-मूल्यों के प्रतीपगमन विश्लेषण में स्थिरांको के आगणन के लिए तीन प्रसामान्य समीकरण उपलब्ध किये जाएँगे—

X_1 का X_2 व X_3 पर बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन—

मूल समीकरण—

$$X_{1\cdot23}=a_{1\cdot23}+b_{12\cdot3}\,X_2+b_{13\cdot2}\,X_3$$

प्रसामान्य समीकरण—

$$\Sigma X_1=Na_{1\cdot23}+b_{12\cdot3}\,\Sigma X_2+b_{13\cdot2}\,\Sigma X_3 \quad \text{...(i)}$$
$$\Sigma X_1X_2=a_{1\cdot23}\,\Sigma X_2+b_{12\cdot3}\,\Sigma X_2^2+b_{13\cdot2}\,\Sigma X_2X_3 \quad \text{...(ii)}$$
$$\Sigma X_1X_3=a_{1\cdot23}\,\Sigma X_3+b_{12\cdot3}\,\Sigma X_2X_3+b_{13\cdot2}\,\Sigma X_3^2 \quad \text{...(iii)}$$

[मूल समीकरण को क्रमशः 1, X_2 और X_3 से गुणा किया गया है।]

इसी प्रकार अन्य बहुगुणी प्रतीपगमन समीकरण भी प्राप्त किए जा सकते हैं—

X_2 का X_1 व X_3 पर बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन

मूल समीकरण

$$X_{2\cdot13}=a_{2\cdot13}+b_{21\cdot3}\,X_1+b_{23\cdot1}\,X_3$$

प्रसामान्य समीकरण

$$\Sigma X_2=Na_{2\cdot13}+b_{21\cdot3}\,\Sigma X_1+b_{23\cdot1}\,\Sigma X_3$$
$$\Sigma X_1X_2=a_{2\cdot13}\,\Sigma X_1+b_{21\cdot3}\,\Sigma X^2_1+b_{23\cdot1}\,\Sigma X_1X_3$$
$$\Sigma X_2X_3=a_{2\cdot13}\,\Sigma X_3+b_{21\cdot3}\,\Sigma X_1X_3+b_{23\cdot1}\,\Sigma X^2_3$$

तीनों समीकरण, मूल समीकरण को क्रमानुसार 1, X_1 और X_3 से गुणा करके जोड़ द्वारा प्राप्त किए गए है।

X_3 का X_1 व X_2 पर बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन

मूल समीकरण

$$X_{3\cdot12}=a_{3\cdot12}+b_{31\cdot2}X_1+b_{32\cdot1}X_2$$

प्रसामान्य समीकरण

$$\Sigma X_3=Na_{3\cdot12}+b_{31\cdot2}\,\Sigma X_1+b_{32\cdot1}\,\Sigma X_2$$
$$\Sigma X_1X_3=a_{3\cdot12}\,\Sigma X_1+b_{31\cdot2}\,\Sigma X^2_1+b_{32\cdot1}\,\Sigma X_1X_2$$
$$\Sigma X_2X_3=a_{3\cdot12}\,\Sigma X_2+b_{31\cdot2}\,\Sigma X_1X_2+b_{32\cdot1}\,\Sigma X^2_2$$

मूल समीकरण को क्रमशः 1, X_1 व X_2 से गुणा करके योग द्वारा तीनों प्रसामान्य समीकरण निश्चित किए गए हैं।

अगले उदाहरण से न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा बहुगुणी प्रतीपगमन की प्रक्रिया स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण (Illustration) 18 :

X_1, X_2 व X_3 तीन चरों के तत्संवादी मूल्य नीचे दिए हैं—

X_1 :	3	5	6	8	12	14
X_2 :	16	10	7	4	3	2
X_3 :	90	72	54	42	36	12

(i) X_3 का X_1 व X_2 पर न्यूनतम वर्ग प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए तथा (ii) X_3 का अनुमान लगाइए जबकि $X_1=10$ और $X_2=6$। [*M. A., Gorakhpur, 1969*]

हल (Solution) :

(i) X_3 का X_1 व X_2 पर बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन—

मूल समीकरण—

$$X_{3\cdot12}=a_{3\cdot12}+b_{31\cdot2}\,X_1+b_{32\cdot1}\,X_2$$

स्थिरांकों—$a_{3\cdot12}$, $b_{31\cdot2}$ व $b_{32\cdot1}$ का परिगणन निम्न प्रसामान्य समीकरणों की सहायता से किया जाएगा—

$$\Sigma X_3=Na_{3\cdot12}+b_{31\cdot2}\,\Sigma X_1+b_{32\cdot1}\,\Sigma X_2$$
$$\Sigma X_1X_3=a_{3\cdot12}\,\Sigma X_1+b_{31\cdot2}\,\Sigma X^2_1+b_{32\cdot1}\,\Sigma X_1X_2$$
$$\Sigma X_2X_3=a_{3\cdot12}\,\Sigma X_2+b_{31\cdot2}\,\Sigma X_1X_2+b_{32\cdot1}\,\Sigma X^2_2$$

समीकरणों के लिए विभिन्न मूल्यों का परिकलन

X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2
3	16	90	48	270	144	9	256	8100
5	10	72	50	360	720	25	100	5184
6	7	54	42	324	378	36	49	2916
8	4	42	32	336	168	64	16	1764
12	3	30	36	360	90	144	9	900
14	2	12	[illegible]	168	24	196	4	144
48	42	300	236	1818	2820	474	434	19008
ΣX_1	ΣX_2	ΣX_3	ΣX_1X_2	ΣX_1X_3	ΣX_2X_3	ΣX_1^2	ΣX_2^2	ΣX_3^2

प्रसामान्य समीकरणों में विभिन्न मूल्यों को आदिष्ट करने पर—

$$300=6a_{3\cdot12}+48b_{31\cdot2}+42b_{32\cdot1} \quad \text{...(i)}$$
$$1818=48a_{3\cdot12}+474b_{31\cdot2}+236b_{32\cdot1} \quad \text{...(ii)}$$
$$2820=42a_{3\cdot12}+236b_{31\cdot2}+434b_{32\cdot1} \quad \text{...(iii)}$$

समीकरण (i) को 8 से गुणा करने और उसमें से समीकरण (ii) घटाने पर—

$$2400=48a_{3\cdot12}+384b_{31\cdot2}+336b_{32\cdot1}$$
$$1818=48a_{3\cdot12}+474b_{31\cdot2}+236b_{32\cdot1}$$
$$582=\quad -90b_{31\cdot2}+100b_{32\cdot1} \quad \text{...(iv)}$$

समीकरण (i) को 7 से गुणा करके उसे समीकरण (iii) में से घटाने पर—

$$2820=42a_{3\cdot12}+236b_{31\cdot2}+434b_{32\cdot1}$$
$$2100=42a_{3\cdot12}+336b_{31\cdot2}+294b_{32\cdot1}$$
$$720=\quad -100b_{31\cdot2}+140b_{32\cdot1} \quad \text{...(v)}$$

समीकरण (iv) को 10 और (v) को 9 से गुणा करके घटाने पर—

$$6480=-900b_{31\cdot2}+1260b_{32\cdot1}$$
$$5820=-900b_{31\cdot2}+1000b_{32\cdot1}$$
$$660=\quad 260b_{32\cdot1}$$

$$\therefore \quad b_{32\cdot1}=\frac{660}{260}=2\cdot5385$$

समीकरण (iv) मे $b_{32\cdot1}$ का मान रखने पर—

$$582=-90b_{31\cdot2}+\frac{3300}{13}$$
$$582-253\cdot85=-90b_{31\cdot2}$$
$$\therefore \quad b_{31\cdot2}=-\frac{328\cdot15}{90}=-3\cdot646$$

मूल्यों को समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करके $a_{3\cdot12}$ का मान ज्ञात कर लिया जाएगा

$$300=6a_{3\cdot12}+(48\times-3\cdot646)+(42\times2\cdot5385)$$
$$300=6a_{3\cdot12}-175\cdot008+106\cdot617$$
$$368\cdot39=6a_{3\cdot12}$$

$\therefore \quad a_{3\cdot12}=61\cdot4$

$a_{3\cdot12}=61\cdot4,\ b_{31\cdot2}=-3\cdot646,\ b_{32\cdot1}=2\cdot5383$

अभीष्ट समीकरण—

$$X_3=61\cdot4-3\cdot646X_1+2\cdot5385X_2$$

(ii) यदि $X_1=10$ और $X_2=6$ तो तत्सम्वादी X_3 का मूल्य उक्त समीकरण के आधार पर प्राप्त किया जाएगा—

$$X_3=61.4-3\cdot646\times10+2\cdot5385\times6$$
$$=61\cdot4-36\cdot46+15\cdot2310=40\cdot171 \text{ या } 40$$

अतः $X_1=10$ और $X_2=6$ होने पर X_3 का अनुमानित मूल्य 40 है।

उदाहरण (*Illustration*) *19* :

पिछले उदाहरण (18) में प्रदत्त समंकों से X_1 का X_2 व X_3 पर बहुगुणी प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए और X_1 का सर्वोत्तम अनुमान प्राप्त कीजिए जबकि $X_2=5$ और $X_3=50$।

हल (Solution) :

X_1 का X_2 व X_3 पर बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन—

मूल समीकरण—

$$X_{1\cdot23}=a_{1\cdot23}+b_{12\cdot3}X_2+b_{13\cdot2}X_3$$

प्रसामान्य समीकरण—

$\Sigma X_1=Na_{1\cdot23}+b_{12\cdot3}\,\Sigma X_2+b_{13\cdot2}\,\Sigma X_3$ ...(i)

$\Sigma X_1X_2=a_{1\cdot23}\,\Sigma X_2+b_{12\cdot3}\,\Sigma X_2^2+b_{13\cdot2}\,\Sigma X_2X_3$ ...(ii)

$\Sigma X_1X_3=a_{1\cdot23}\,\Sigma X_3+b_{12\cdot3}\,\Sigma X_2X_3+b_{13\cdot2}\,\Sigma X_3^2$ ...(iii)

$48=6a_{1\cdot23}+42b_{12\cdot3}+300b_{13\cdot2}$ ...(i)

$236=42a_{1\cdot23}+434b_{12\cdot3}+2820b_{13\cdot2}$ ...(ii)

$1818=300a_{1\cdot23}+2820b_{12\cdot3}+19008b_{13\cdot2}$ ...(iii)

समीकरण (i) को 7 से गुणा करके समीकरण (ii) में से घटाने पर—

$$236=42a_{1\cdot23}+434b_{12\cdot3}+2820b_{13\cdot2}$$
$$336=42a_{1\cdot23}+294b_{12\cdot3}+2100b_{13\cdot2}$$
$$-100=140b_{12\cdot3}+720b_{13\cdot2} \quad ...(iv)$$

समीकरण (i) को 50 से गुणा करके उसे समीकरण (iii) में से घटाने पर—

$$1818=300a_{1\cdot23}+2820b_{12\cdot3}+19008b_{13\cdot2}$$
$$2400=300a_{1\cdot23}+2100b_{12\cdot3}+15000b_{13\cdot2}$$
$$-582=720b_{12\cdot3}+4008b_{13\cdot2} \quad ...(v)$$

समीकरण (iv) को 36 से और समीकरण (v) को 7 से गुणा करके घटाने पर—

$$-3600=5040b_{12\cdot3}+25920b_{13\cdot2}$$
$$-4074=5040b_{12\cdot3}+28056b_{13\cdot2}$$
$$+\qquad\qquad -$$
$$474=-2136b_{13\cdot2}$$

$$\therefore\ b_{13\cdot2}=\frac{-474}{2136} \text{ या } -\cdot2219$$

समीकरण (iv) में $b_{13\cdot2}$ का मान रखने पर—

$$-100=140b_{12\cdot3}+(720\times-\cdot2219)$$
$$159\cdot77-100=140b_{12\cdot3}$$
$$b_{12\cdot3}=\frac{59\cdot77}{140}=\cdot4269$$

ज्ञात मूल्यों को समीकरण (i) मे प्रतिस्थापित करने पर—

$$6a_{1\cdot23}+(42\times\cdot4269)+(300\times-\cdot2219)=48$$
$$6a_{1\cdot23}+17\cdot9298-66\cdot57=48$$
$$6a_{1\cdot23}=96\cdot64$$
$$a_{1\cdot23}=16\cdot107$$
$$a_{1\cdot23}=16\cdot107\ ;\ b_{12\cdot3}=0\cdot4269\ ;\ b_{12\cdot2}=-0\cdot2219$$

अभीष्ट समीकरण—

$$X_{1\cdot23}=16\cdot107+0\cdot4269X_2-0\cdot2219X_3$$

यदि $X_2=5$; $X_3=50$ तो X_1 निम्नांकित होगा—

$$X_{1\cdot23}=16\cdot107+(\cdot4269\times5)-\cdot2219\times50$$
$$=16\cdot107+2\cdot1345-11\cdot095=7\cdot147 \quad \text{या} \quad 7$$

अतः $X_2=5$ व $X_3=50$ के तत्सम्वादी X_1 का अनुमानित मूल्य 7 है।

विचलन-विधि (Deviations Method)—जैसा कि पहले भी उल्लेख किया जा चुका है, यदि मूल-समंकों के स्थान पर प्रत्येक चर-श्रेणी मे समान्तर माध्य से विचलन लिए जायें तो गणना क्रिया सरल हो जाती है क्योंकि स्थिराक 'a' का मान शून्य हो जाता है। ऐसी स्थिति में X_1 के X_2 व X_3 पर प्रतीपगमन समीकरण का निम्न स्वरूप होगा—

$$x_1=b_{12\cdot3}x_2+b_{13\cdot2}x_3$$

जबकि $x_1=(X_1-\overline{X}_1)$; $x_2=(X_2-\overline{X}_2)$; $x_3=(X_3-\overline{X}_3)$

$b_{12\cdot3}$ और $b_{13\cdot2}$ के मान निम्न दो प्रसामान्य समीकरणों द्वारा परिगणित किए जा सकते हैं—

$$\Sigma x_1x_2=b_{12\cdot3}\ \Sigma x^2_2+b_{13\cdot2}\ \Sigma x_2x_3$$
$$\Sigma x_1x_3=b_{12\cdot3}\ \Sigma x_2x_3+b_{13\cdot2}\ \Sigma x^2_3$$

उदाहरण (Illustration) 20 :

उदाहरण 18 को वास्तविक माध्यो से विचलनों का प्रयोग करते हुए (x_1, x_2 व x_3) हल कीजिए।

हल (Solution) :

यदि $x_1=(X_1-\overline{X}_1)$; $x_2=(X_2-\overline{X}_2)$; $x_3=(X_3-\overline{X}_3)$ तो x_1 के x_2 व x_3 पर बहुगुणी प्रतीपगमन समीकरण का मूल रूप निम्न होगा—

$$x_1=b_{12\cdot3}x_2+b_{13\cdot2}x_3$$

$b_{12\cdot3}$ व $b_{13\cdot2}$ के मूल्य ज्ञात करने के लिए निम्न दो प्रसामान्य समीकरणों का प्रयोग होगा—

$$\Sigma x_1x_2=b_{12\cdot3}\ \Sigma x^2_2+b_{13\cdot2}\ \Sigma x_2x_3$$
$$\Sigma x_1x_3=b_{12\cdot3}\ \Sigma x_2x_3+b_{13\cdot2}\ \Sigma x^2_3$$

[$\Sigma x_1=\Sigma x_2=\Sigma x_3=0$ अतः मूल समंको पर आधारित तीन समीकरणों में इन संकेतो के स्थान पर शून्य हो जाएगा और केवल दो प्रसामान्य समीकरण ही उपलब्ध होंगे]

$$\therefore \quad a_{3\cdot 12}=61{\cdot}4$$
$$a_{3\cdot 12}=61{\cdot}4,\ b_{31\cdot 2}=-3{\cdot}646,\ b_{32\cdot 1}=2{\cdot}5383$$

अभीष्ट समीकरण—

$$X_3=61{\cdot}4-3{\cdot}646X_1+2{\cdot}5385X_2$$

(ii) यदि $X_1=10$ और $X_2=6$ तो तत्सम्वादी X_3 का मूल्य उक्त समीकरण के आधार पर प्राप्त किया जाएगा—

$$X_3=61.4-3{\cdot}646\times10+2{\cdot}5385\times6$$
$$=61{\cdot}4-36{\cdot}46+15{\cdot}2310=40{\cdot}171 \quad \text{या} \quad 40$$

अत: $X_1=10$ और $X_2=6$ होने पर X_3 का अनुमानित मूल्य 40 है।

उदाहरण (Illustration) 19 :

पिछले उदाहरण (18) में प्रदत्त समको से X_1 का X_2 व X_3 पर बहुगुणी प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए और X_1 का सर्वोत्तम अनुमान प्राप्त कीजिए जबकि $X_2=5$ और $X_3=50$।

हल (Solution) :

X_1 का X_2 व X_3 पर बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन—

मूल समीकरण—

$$X_{1\cdot 23}=a_{1\cdot 23}+b_{12\cdot 3}X_2+b_{13\cdot 2}X_3$$

प्रसामान्य समीकरण—

$$\Sigma X_1=Na_{1\cdot 23}+b_{12\cdot 3}\,\Sigma X_2+b_{13\cdot 2}\,\Sigma X_3 \quad \ldots(i)$$
$$\Sigma X_1X_2=a_{1\cdot 23}\,\Sigma X_2+b_{12\cdot 3}\,\Sigma X_2^2+b_{13\cdot 2}\,\Sigma X_2X_3 \quad \ldots(ii)$$
$$\Sigma X_1X_3=a_{1\cdot 23}\,\Sigma X_3+b_{12\cdot 3}\,\Sigma X_2X_3+b_{13\cdot 2}\,\Sigma X_3^2 \quad \ldots(iii)$$

$$48=6a_{1\cdot 23}+42b_{12\cdot 3}+300b_{13\cdot 2} \quad \ldots(i)$$
$$236=42a_{1\cdot 23}+434b_{12\cdot 3}+2820b_{13\cdot 2} \quad \ldots(ii)$$
$$1818=300a_{1\cdot 23}+2820b_{12\cdot 3}+19008b_{13\cdot 2} \quad \ldots(iii)$$

समीकरण (i) को 7 से गुणा करके समीकरण (ii) में से घटाने पर—

$$236=42a_{1\cdot 23}+434b_{12\cdot 3}+2820b_{13\cdot 2}$$
$$336=42a_{1\cdot 23}+294b_{12\cdot 3}+2100b_{13\cdot 2}$$
$$-100=140b_{12\cdot 3}+720b_{31\cdot 2} \quad \ldots(iv)$$

समीकरण (i) को 50 से गुणा करके उसे समीकरण (iii) में से घटाने पर—

$$1818=300a_{1\cdot 23}+2820b_{12\cdot 3}+19008b_{13\cdot 2}$$
$$2400=300a_{1\cdot 23}+2100b_{12\cdot 3}+15000b_{13\cdot 2}$$
$$-582=720b_{12\cdot 3}+4008b_{13\cdot 2} \quad \ldots(v)$$

समीकरण (iv) को 36 से और समीकरण (v) को 7 से गुणा करके घटाने पर—

$$-3600=5040b_{12\cdot 3}+25920b_{13\cdot 2}$$
$$-4074=5040b_{12\cdot 3}+28056b_{13\cdot 2}$$
$$+ \qquad - $$
$$474=-2136b_{13\cdot 2}$$

$$\therefore \quad b_{13\cdot 2}=\frac{-474}{2136} \quad \text{या} \quad -{\cdot}2219$$

समीकरण (iv) में $b_{13\cdot 2}$ का मान रखने पर—

$$-100=140b_{12\cdot 3}+(720\times-{\cdot}2219)$$
$$159{\cdot}77-100=140b_{12\cdot 3}$$
$$b_{12\cdot 3}=\frac{59{\cdot}77}{140}={\cdot}4269$$

ज्ञात मूल्यों को समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर—

$$6a_{1\cdot23}+(42\times{\cdot}4269)+(300\times-{\cdot}2219)=48$$
$$6a_{1\cdot23}+17{\cdot}9298-66{\cdot}57=48$$
$$6a_{1\cdot23}=96{\cdot}64$$
$$a_{1\cdot23}=16{\cdot}107$$
$$a_{1\cdot23}=16{\cdot}107\ ;\ b_{12\cdot3}=0{\cdot}4269\ ;\ b_{13\cdot2}=-0{\cdot}2219$$

अभीष्ट समीकरण—

$$X_{1\cdot23}=16{\cdot}107+0{\cdot}4269X_2-0{\cdot}2219X_3$$

यदि $X_2=5$; $X_3=50$ तो X_1 निम्नांकित होगा—

$$X_{1\cdot23}=16{\cdot}107+({\cdot}4269\times5)-{\cdot}2219\times50$$
$$=16{\cdot}107+2{\cdot}1345-11{\cdot}095=7{\cdot}147 \quad \text{या} \quad 7$$

अतः $X_2=5$ व $X_3=50$ के तत्सम्वादी X_1 का अनुमानित मूल्य 7 है।

विचलन-विधि (Deviations Method)—जैसा कि पहले भी उल्लेख किया जा चुका है, यदि मूल-समंकों के स्थान पर प्रत्येक चर-श्रेणी में समान्तर माध्य से विचलन लिए जायें तो गणना क्रिया सरल हो जाती है क्योंकि स्थिराक 'a' का मान शून्य हो जाता है। ऐसी स्थिति में X_1 के X_2 व X_3 पर प्रतीपगमन समीकरण का निम्न स्वरूप होगा—

$$x_1=b_{12\cdot3}x_2+b_{13\cdot2}x_3$$

जबकि $x_1=(X_1-\overline{X}_1)$; $x_2=(X_2-\overline{X}_2)$; $x_3=(X_3-\overline{X}_3)$

$b_{12\cdot3}$ और $b_{13\cdot2}$ के मान निम्न दो प्रसामान्य समीकरणों द्वारा परिगणित किए जा सकते हैं—

$$\Sigma x_1x_2=b_{12\cdot3}\ \Sigma x^2_2+b_{13\cdot2}\ \Sigma x_2x_3$$
$$\Sigma x_1x_3=b_{12\cdot3}\ \Sigma x_2x_3+b_{13\cdot2}\ \Sigma x^2_3$$

उदाहरण (Illustration) 20 :

उदाहरण 18 को वास्तविक माध्यो से विचलनों का प्रयोग करते हुए (x_1, x_2 व x_3) हल कीजिए।

हल (Solution) :

यदि $x_1=(X_1-\overline{X}_1)$; $x_2=(X_2-\overline{X}_2)$; $x_3=(X_3-\overline{X}_3)$ तो x_1 के x_2 व x_3 पर बहुगुणी प्रतीपगमन समीकरण का मूल रूप निम्न होगा—

$$x_1=b_{12\cdot3}x_2+b_{13\cdot2}x_3$$

$b_{12\cdot3}$ व $b_{13\cdot2}$ के मूल्य ज्ञात करने के लिए निम्न दो प्रसामान्य समीकरणो का प्रयोग होगा—

$$\Sigma x_1x_2=b_{12\cdot3}\ \Sigma x^2_2+b_{13\cdot2}\ \Sigma x_2x_3$$
$$\Sigma x_1x_3=b_{12\cdot3}\ \Sigma x_2x_3+b_{13\cdot2}\ \Sigma x^2_3$$

[$\Sigma x_1=\Sigma x_2=\Sigma x_3=0$ अतः मूल समंकों पर आधारित तीन समीकरणों मे इन संकेतो के स्थान पर शून्य हो जाएगा और केवल दो प्रसामान्य समीकरण ही उपलब्ध होंगे]

विचलनों का परिकलन

$x_1=X_1-\bar{X}_1$	$x_2=X_2-\bar{X}_2$	$x_3=X_3-\bar{X}_3$	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2
−5	9	40	−45	−200	360	25	81	1600
−3	3	22	−9	−66	66	9	9	484
−2	0	4	0	−8	0	4	0	16
0	−3	−8	0	0	24	0	9	64
4	−4	−20	−16	−80	80	16	16	400
6	−5	−38	−30	−228	190	36	25	1444
			−100	−582	720	90	140	4008
			Σx_1x_2	Σx_1x_3	Σx_2x_3	Σx_1^2	Σx_2^2	Σx_3^2

$$-100=140b_{12\cdot3}+720b_{13\cdot2} \qquad \text{...(i)}$$
$$-582=720b_{12\cdot3}+4008b_{13\cdot2} \qquad \text{...(ii)}$$

ये दोनों समीकरण पिछले उदाहरण की समीकरण (iv) व (v) के सर्वथा अनुरूप हैं अतः इन्हें हल करने पर—

$$b_{12\cdot3}=0{\cdot}4269\,;\; b_{13\cdot2}=-0{\cdot}2219$$

अतः विचलनों के रूप में x_1 का x_2 व x_3 पर समीकरण इस प्रकार है—

$$x_1=0{\cdot}4269x_2-0{\cdot}2219x_3$$

$X_2=5$; $X_3=50$ तो $x_2=(5-7)=-2$; $x_3=(50-50)=0$

$$x_1=X_1-8$$
$$X_1-8=({\cdot}4269\times-2)-{\cdot}2219\times0$$
$$X_1-8=-{\cdot}8538 \quad \therefore \quad X_1=7{\cdot}146 \text{ या } 7$$

उदाहरण (Illustration) 21 :

बहुविचर विश्लेषण से प्राप्त निम्न परिणामों के आधार पर x_2 का x_1 और x_3 पर बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन ज्ञात कीजिए जबकि x_1, x_2 व x_3 माध्यों से विचलनों को व्यक्त करते हैं—

$$\bar{X}_1=150;\quad \sigma_1=8,\quad r_{12}=0{\cdot}6$$
$$\bar{X}_2=25;\quad \sigma_2=2,\quad r_{13}=0{\cdot}8$$
$$\bar{X}_3=20;\quad \sigma_3=4,\quad r_{23}=0{\cdot}7$$

यदि $X_1=100$ और $X_3=10$ तो X_2 का सर्वोत्तम अनुमान बताइए।

हल (Solution) :

x_1, x_2 व x_3 क्रमशः तीनों चर-मूल्यों के समान्तर माध्य से विचलन को व्यक्त करते हैं अतः x_2 का x_1 व x_3 पर रेखीय प्रतीपगमन समीकरण निम्नांकित होगा—

$$x_2=b_{21\cdot3}x_1+b_{23\cdot1}x_3$$

$$b_{21\cdot3}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{1-r^2_{23}}=\frac{2}{8}\cdot\frac{{\cdot}6-({\cdot}8\times{\cdot}7)}{1-({\cdot}8)^2}=\frac{1}{4}\times\frac{{\cdot}04}{{\cdot}36}=0{\cdot}0278$$

$$b_{23\cdot1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\cdot\frac{r_{23}-r_{12}r_{13}}{1-r^2_{13}}=\frac{2}{4}\times\frac{{\cdot}7-({\cdot}6\times{\cdot}8)}{1-({\cdot}8)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{{\cdot}22}{{\cdot}36}=0{\cdot}3056$$

अभीष्ट समीकरण— $x_2=0{\cdot}0278x_1+0{\cdot}3056x_3$

$x_1 = X_1 - \bar{X}_1 = 100 - 150 = -50$; $x_3 = X_3 - \bar{X}_3 = 10 - 20 = -10$

$\therefore X_2 - 25 = (\cdot 0278 \times -50) + (\cdot 3056 \times -10)$

$X_2 - 25 = -1\cdot 39 - 3\cdot 056$; $X_2 = 25 - 4\cdot 446 = 20\cdot 554 = 21$

अतः $X_1 = 100$ व $X_3 = 10$ के तत्संवादी X_2 का अनुमानित मूल्य 21 है।

महत्त्वपूर्ण सूत्र

सरल रेखीय प्रतीपगमन विश्लेषण

रीति	X का Y पर	Y का X पर
1. प्रतीपगमन समीकरण		
(i) Using r, σ_x and σ_y	$X - \bar{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \bar{Y})$	$Y - \bar{Y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \bar{X})$
(ii) Using b_{xy} and b_{yx}	$X - \bar{X} = b_{xy}(Y - \bar{Y})$	$Y - \bar{Y} = b_{yx}(X - \bar{X})$
(iii) Using Least squares— Key Equation: Normal Equations:	$X = a + bY$ $\Sigma X = Na + b\Sigma Y$ $\Sigma XY = a\Sigma Y + b\Sigma Y^2$	$Y = a + bX$ $\Sigma Y = Na + b\Sigma X$ $\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$
2. प्रतीपगमन-गुणांक		
(i) Using r, σ_x and σ_y	$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$	$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$
(ii) Deviations from Actual mean	$b_{xy} = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma d^2y}$	$b_{yx} = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma d^2x}$
(iii) Deviations from Assumed mean	$b_{xy} = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx.\Sigma dy}{N}}{\Sigma d^2y - \frac{(\Sigma dy)^2}{N}}$	$b_{yx} = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx.\Sigma dy}{N}}{\Sigma d^2x - \frac{(\Sigma dx)^2}{N}}$
3. प्रतीप-गुणांकों द्वारा सह-सम्बन्ध	$r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$	
4. अनुमान का प्रमाप-विभ्रम	$S_{xy} = \sqrt{\frac{\Sigma(X - X_c)^2}{N}}$	$S_{yx} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y_c)^2}{N}}$
5. वैकल्पिक विधि	$S_{xy} = \sigma_x\sqrt{1 - r^2}$	$S_{yx} = \sigma_y\sqrt{1 - r^2}$

विचरणानुपात

1. बीजीय विधि	$\text{R. of V.} = \frac{\Sigma\left[\frac{dy\%}{dx\%}\right]}{N}$
2. गाल्टन बिन्दुरेख	$\text{R. of V.} = \frac{BC}{BA} = \frac{\text{Horizontal Distance}}{\text{Vertical Distance}}$

बहु-सहसम्बन्ध-गुणांक

$$R_{1\cdot 23}=\sqrt{\frac{r^2_{12}+r^2_{13}-2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r^2_{23}}}$$

आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक

$$r_{12\cdot 3}=\frac{r_{12}-r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{13}}\sqrt{1-r^2_{23}}}\ ;\ r_{13\cdot 2}=\frac{r_{13}-r_{12}.r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{12}}\sqrt{1-r^2_{23}}}\ ;$$

$$r_{23\cdot 1}=\frac{r_{23}-r_{12}.r_{13}}{\sqrt{1-r^2_{12}}\sqrt{1-r^2_{13}}}$$

बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन समीकरण

X_1 का X_2 व X_3 पर—

$$X_{1\cdot 23}=a_{1\cdot 23}+b_{12\cdot 3}X_2+b_{13\cdot 2}X_3$$

$$b_{12\cdot 3}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}.\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{1-r^2_{23}}\ ;\ b_{13\cdot 2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}.\frac{r_{13}-r_{12}r_{23}}{1-r^2_{23}}$$

$$a_{1\cdot 23}=\bar{X}_1-b_{12\cdot 3}\bar{X}_2-b_{13\cdot 2}\bar{X}_3$$

प्रसामान्य समीकरण—

$$\Sigma X_1=Na_{1\cdot 23}+b_{12\cdot 3}\Sigma X_2+b_{13\cdot 2}\Sigma X_3$$

$$\Sigma X_1X_2=a_{1\cdot 23}\Sigma X_2+b_{12\cdot 3}\Sigma X_2^2+b_{13\cdot 2}\Sigma X_2X_3$$

$$\Sigma X_1X_3=a_{1\cdot 23}\Sigma X_3+b_{12\cdot 3}\Sigma X_2X_3+b_{13\cdot 2}\Sigma X^2_3$$

विचलनों के आधार पर—

$$x_1=b_{12\cdot 3}x_2+b_{13\cdot 2}x_3$$

$$\Sigma x_1x_2=b_{12\cdot 3}\Sigma x^2_2+b_{13\cdot 2}\Sigma x_2x_3$$

$$\Sigma x_1x_3=b_{12\cdot 3}\Sigma x_2x_3+b_{13\cdot 2}\Sigma x^2_3$$

प्रश्न

1. (i) प्रतीपगमन अवधारणा की व्याख्या कीजिए। यह सहसम्बन्ध से किस प्रकार भिन्न है ?
Explain the concept of regression. How does it differ from correlation ?
[B.Com., Bombay, Oct, 1970; M. Com., Delhi, 1969]

(ii) 'प्रतीपगमन' की परिभाषा दीजिए। प्रतीपगमन रेखाएँ दो क्यों होती हैं ? किन परिस्थितियों में केवल एक ही प्रतीपगमन रेखा हो सकती है ?
Define 'regression'. Why are there two regression lines ? Under what conditions can there be only one regression line ?
[M. Com , Delhi, 1973, Rajasthan, 1970, Agra, 1969]

2. सहसम्बन्ध, प्रतीपगमन तथा विचरण-अनुपात की धारणाओं की व्याख्या कीजिए और आर्थिक अनुसन्धान के क्षेत्र में उनकी उपयोगिता स्पष्ट कीजिए।
Explain the concepts of Correlation, Regression and Ratio of Variation and state their utility in the field of economic inquiries. [M.A., Gorakhpur, 1966]

3. (i) सहसम्बन्ध गुणांक और प्रतीपगमन गुणांक का अर्थ समझाइए। प्रतीपगमन समीकरण दो क्यों होने चाहिएँ ?
Explain the terms (1) correlation coefficient, and (2) regression coefficients. Why should there be two equations ? *[M.A., Meerut, 1973]*
(ii) प्रतीपगमन धारणा को स्पष्ट कीजिए और उसकी उपयोगिता की विवेचना कीजिए।
Explain the concept of regression and comment on its utility.
[B. Com., Madras, 1970; M. Com., Delhi, 1968]

4. 'प्रतीपगमन' का क्या अर्थ है ? द्विचर बटन के लिए, सामान्यत. दो प्रतीपगमन रेखाओं का होना क्यों आवश्यक है ? आपके विचारानुसार दो चर-मूल्यों का सहसम्बन्ध गुणांक कितना होना चाहिए यदि दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ एक दूसरे को समकोण पर काटें तथा यदि वे दोनों एक दूसरे को ढक लें ?
What is meant by 'regression' ? Why should there be, in general, two lines of regression for each bivariate distribution ? What do you think the coefficient of correlation between the two variables would be if the two regression lines cut at right angles, and what if they coincide ? *[M.Com., Allahabad, 1961; Vikram, 1964]*

5. (i) यह सिद्ध कीजिए कि सहसम्बन्ध गुणांक प्रतीपगमन गुणांकों का गुणोत्तर माध्य है। यदि प्रतीपगमन गुणांक का बीजीय चिन्ह ज्ञात है तो आप सहसम्बन्ध गुणांक का चिन्ह किस प्रकार निर्धारित करेंगे ? यदि एक प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक है तो पद-युग्मों की मूल-श्रेणी में आप किस प्रकार के विचरण की प्रत्याशा करते हैं ?
Show that correlation coefficient is the geometric mean between regression coefficients. If the sign of a regression coefficient is known how would you find the sign of the coefficient of correlation ? If one of the regression coefficients is negative, what type of variation would you expect in the original series of pairs of observations ? *[I.C.W.A., 1966]*
(ii) यह सिद्ध कीजिए कि r^2 Y के X पर प्रतीपगमन तथा X के Y पर प्रतीपगमन में भी विचरण के स्पष्टीकृत अंश के बराबर होता है।
Show that r^2 equals the proportion of variation explained in a regression of Y on X and also in the regression of X on Y. *[M.A., Delhi, 1971]*

6. (i) 'आंशिक सहसम्बन्ध' क्या होता है ? किन परिस्थितियों में इसे कुल सहसम्बन्ध से प्रश्रय दिया जाता है ?
What is partial correlation ? Under what circumstances is it to be preferred to the total correlation ? *[M.Com , Delhi, 1970]*
(ii) बहुगुणी सहसम्बन्ध और आंशिक सहसम्बन्ध में तथा आंशिक सहसम्बन्ध और कुल सहसम्बन्ध, में अन्तर, उदाहरण सहित, स्पष्ट कीजिए।
Distinguish between multiple correlation and partial correlation, and total correlation and partial correlation by taking examples.
[M A., Allahabad, 1968]

7. 'बहुगुणी रेखीय प्रतीपगमन' का क्या अर्थ है ? सरल और बहुगुणी प्रतीपगमन का अन्तर स्पष्ट कीजिए। आर्थिक विश्लेषण में बहुगुणी प्रतीपगमन का क्या महत्त्व है ?
What ■ multiple linear regression ? Explain clearly the difference between simple linear and multiple linear regression. Indicate the importance of multiple linear regression in economic analysis.

8. निम्नलिखित शब्दों की स्पष्ट व्याख्या कीजिए—
Explain clearly the following terms—
(i) गाल्टन बिन्दुरेख (Galton's Graph)।
(ii) अनुमान का प्रमाप विभ्रम (Standard Error of Estimate)।
(iii) प्रतीपगमन का अनुपात (Ratio of Regression)।
(iv) प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय कोटि के आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक (Partial correlation coefficients of first, second and third order)।

सरल रेखीय प्रतीपगमन (Simple Linear Regression)—

9. निम्नलिखित समंकों से मद्रास के लिए सर्वाधिक सम्भाव्य मूल्य (most likely price) ज्ञात कीजिए जब

बंगलौर में मूल्य 75 रु० है—

मद्रास में औसत मूल्य 65 रु०; मद्रास में मूल्यों का प्रमाप विचलन 2·5 रु०

बंगलौर में औसत मूल्य 68 रु०; बंगलौर में मूल्यों का प्रमाप विचलन 3·5 रु०

दोनों नगरों में कीमतों के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक = +0·78।

Find the most likely price at Madras corresponding to a price of Rs 75 at Bangalore, *from the following data*—

Average price at Madras Rs. 65; S D. of Price at Madras Rs. 2·5
Average price at Bangalore Rs 68; S D. of Price at Banglore Rs. 3·5
Correlation coefficient between the two prices in two towns = +0·78.

[Rs 68·9]　　　　*[M. Com., Allahabad, 1968]*

10. किसी वस्तु की माँग और पूर्ति में सहसम्बन्ध गुणांक +0·8, और माँग व पूर्ति के माध्य क्रमश: 25 और 22 टन है। यदि उनके प्रमाप विचलन क्रमश 4 और 5 टन हो तो प्रत्याशित माँग ज्ञात कीजिए जबकि पूर्ति 12 टन हो।

The coefficient of correlation between the demand and the supply of a certain commodity is +0·8, and the mean values of the demand and the supply are respectively 25 tons and 22 tons. If their standard deviations are respectively 4 tons and 5 tons, find the most likely demand when supply is 12 tons.

[X=18·6]　　　　*[B A, T.D C (Final), Raj 1976; B Com, Bombay, 1971]*

11. निम्न समंकों से यह ज्ञात कीजिए कि सम्भाव्य उपज क्या होगी जबकि वर्षा की मात्रा 29" हो—

From the following data, find what will be the probable yield when the rainfall is 29 inches—

	Rainfall	*Production*
Mean	25"	40 units per acre
Standard Deviation	3"	6 „ „ „

Coefficient of Correlation = +0·8

[46·4 units]　　　　*[B. A, T.D.C. (F), Raj, 1976, M A., Vikram, 1973; Agra, 1971]*

12. अंग्रेजी और अर्थशास्त्र की परीक्षा में प्राप्तांकों से सम्बन्धित सूचना निम्न प्रकार है—

Given below is information relating to marks obtained in an examination in English and Economics—

	अंग्रेजी (English)	अर्थशास्त्र (Economics)
माध्य प्राप्तांक (Mean Marks)	18	100
प्रमाप विचलन (S D of Marks)	14	20

सहसम्बन्ध गुणांक (Correlation Coefficient) = +0·8

दोनों प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त कीजिए और (*i*) अंग्रेजी में 70 अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी के अर्थशास्त्र में अंक तथा, (*ii*) अर्थशास्त्र में 90 अंक प्राप्त करने वाले छात्र के अंग्रेजी में प्राप्तांक अनुमानित कीजिए।

Obtain the two regression equations and estimate (*i*) the expected marks in Economics of a student who has secured 70 marks in English, and (*ii*) expected marks in English if he has secured 90 marks in Economics

[M. Com, (Prev) Raj, 1976; M. A Kanpur, 1975]

[X=·56Y−38; Y=1·143X+79·43; (*i*) Y=159·44; (*ii*) X=12·4]

13. निम्नलिखित समंक किसी परीक्षा में विषय *A* तथा *B* में प्राप्त अंकों से सम्बन्धित हैं—

The following data are given for marks in subject A and B in a certain examination—

	A	*B*
Mean Marks	39·5	47·6
Standard Deviation	10·8	16·9

Coefficient of correlation between *A* and *B* = +0·42.

दोनों प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए और यह स्पष्ट कीजिए कि प्रतीपगमन रेखाएँ दो क्यों होती हैं। *A* में 50 अंक पाने वाले के *B* में अंक अनुमानित कीजिए।

Determine the two equations of regression and explain why there are two lines of regression. Also calculate the expected marks in B corresponding to 50 marks obtained in A.

[M. Com., Rohilkhand, 1976; M. A., Kanpur, 1974]

[X=0·268Y+26·74; Y=·657X+21·65; Y_{50}=54·5]

14. एक द्विचर बटन के लिए निम्न माप प्रदत्त हैं—

For a bivariate distribution the following measures are given—

Mean	X-53·2	Y-27·9
Regression Coefficient of X on Y=0·2,		Reg. Coeff. of Y on X=1·5

ज्ञात कीजिए (अ) $X=60$ के लिए Y का अनुमान; (ब) सहसम्बन्ध गुणांक।

Find (*a*) Most likely value of Y when $Y=60$.
(*b*) r, the correlation coefficient. [*B Com., Bombay, 1970*]

[$Y=38{\cdot}1$, $r=+{\cdot}548$]

15. एक अध्ययन से निम्नांकित परिणाम प्राप्त हुए—
A study revealed the following results—

	Series X	Series Y
Arithmetic Mean	2 463	2 797
Standard Deviation	0 326	0 207

r between X and $Y=+0\ 774$

ज्ञात कीजिए (अ) दोनों प्रतीपगमन समीकरण, (ब) X का अनुमानित मूल्य यदि $Y=2\ 334$ और (स) Y का अनुमानित मूल्य यदि $X=3\ 052$।

Find out (*a*) the two regression equations, (*b*) the estimated value of X when the value of Y is 2·334, and (*c*) the estimated value of Y when $X=3\ 052$

[$X=1{\cdot}219Y-{\cdot}9465$; $Y=0\ 49X+1\ 59$; $X=1{\cdot}90$; $Y=3\ 085$] [*M Com., Kanpur, 1974*]

16. सूचकांकों की दो मालाएँ—*P*-माला मूल्य-सूचकांक की और *O*-माला उत्पादन सूचकांक की—हमें दी हुई हैं। *P*-माला के समान्तर मध्यक और प्रसरण क्रमशः 124 और 64 है और *O*-माला के 136 और 16 हैं। दोनों सूचकांक-मालाओं के बीच सहसम्बन्ध गुणांक +0 6 है।

इन तथ्यों से—(अ) दो प्रतीपगमन समीकरण बनाइये जिसके द्वारा विभिन्न दिये हुए O के मूल्यों के आधार पर P के मूल्य तथा P के विभिन्न प्रदत्त मूल्यों के आधार पर O के मूल्यों को ज्ञात किया जा सके, (ब) O का मूल्य मालूम कीजिए अगर $P=100$ तथा P का मूल्य अगर $O=120$।

There are two series of index numbers—P for price index and O for output index The mean and variance of P are 124 and 64 respectively and of O-series are 136 and 16. The correlation coefficient between the two series is $+0\ 6$ With these data (*a*) work out two regression equations to read off values of P for various values of O and values of O for various given values of P; (*b*) find the value of O if $P=100$ and P if $O=120$. [*M Com., Raj., 1972*]

[(*a*) $P=1{\cdot}2O-39{\cdot}2$; $O=0{\cdot}3P+98{\cdot}8$; (*b*) $O=128\ 8$; $P=104\ 8$]

17. मूल्य (P) और पूर्ति (S) के 10 अवलोकनों के लिए निम्न समंक ज्ञात हैं—
The following data are given for 10 observations of Price (P) and Supply (S)—

$$\Sigma P=130,\ \Sigma S=220,\ \Sigma P^2=228[illegible],\ \Sigma S^2=5506,\ \Sigma PS=3467$$

S का P पर प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिये, मूल्य 16 होने पर पूर्ति का अनुमान लगाइए और अनुमान की प्रमाप त्रुटि भी ज्ञात कीजिए।

Find the regression equation of S on P, estimate S when $P=16$ and also calculate the standard error of the estimate. [*M. A Delhi, 1969; B. A., Hon., Delhi, 1969*]

[$S=8{\cdot}80435+1\ 015P$, $S_{16}=25\ 044$, $S_{SP}=2\ 236$]

18. (i) किसी दिन बम्बई स्टॉक एक्सचेंज पर 12 अंशों के मूल्यों (X) और उनकी बिक्री (Y) से निम्न गणनाएँ की गईं। इनसे प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए—

On a certain day the following measurements were made regarding price (X) of 12 shares and their sales (Y) on Bombay Stock Exchange Form regression equations from these calculations—

$$\Sigma X=580,\ \Sigma Y=370,\ \Sigma XY=11494,\ \Sigma X^2=14658,\ \Sigma Y^2=17206$$

[*B A., Hons., Delhi, 1971*]

(ii) एक द्विचर बटन से प्राप्त निम्न परिणामों की शुद्धता की विवेचना कीजिए—
Comment upon the accuracy of the following results obtained from a bi-variate distribution—

Regression Coefficients—Of Y on X, $b_1=0\ 9$, $r=-0\ 36$
Of X on Y, $b_2=0\ 4$ [*B Com., Bombay, 1973*]

[(*i*) $X=82{\cdot}31-1{\cdot}102Y$; $Y=53\ 5-0\ 47X$; (*ii*) r should be $+0\ 6$]

19. (i) r का मूल्य ज्ञात कीजिए जब दो प्रतीपगमन गुणांक 0 64 और 0 81 हैं।
(ii) किन्हीं समंकों के लिए प्रतीपगमन रेखाएँ—
$Y=1{\cdot}3X$, और $X=0\ 7Y$ हों तो सहसम्बन्ध गुणांक प्राप्त कीजिए।
(iii) एक विद्यार्थी ने एक द्विचर बटन के लिए Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक 1·2 और X का Y पर 0·9 प्राप्त किया। क्या वह सही है? कारण दीजिए।
(iv) यदि X की विचरणता (variance) $=2{\cdot}25$; Y का प्रमाप विचलन $=4$ और X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण $X=-0\ 3Y+1{\cdot}8$ हो, तो r ज्ञात कीजिए।

(i) Find r when two regression coefficients are 0 64 and 0·81.
(ii) If for some data, regression lines are $Y=1{\cdot}3X$ and $X=0{\cdot}7Y$, obtain the coefficient of correlation.
(iii) A student computed regression coefficient of Y on X as 1 2 and of X on Y as 0 9. Is he correct ? State reasons.
(iv) Find r if variance of $X=2{\cdot}25$, standard deviation of $Y=4$ and regression equation of X on Y is $X=-0{\cdot}3Y+1{\cdot}8$ *[M. A , Raj., 1972]*

[(i) $r=\cdot72$, (ii) $r=\cdot95$, (iii) No, as $r^2=1{\cdot}08$ which is impossible; (iv) $r=-0{\cdot}8$]

20. निम्नलिखित समकों से सहसम्बन्ध गुणाक (r) का परिकलन कीजिए और प्रतीपगमन रेखाएँ ज्ञात कीजिए। Y का अनुमान ज्ञात कीजिए जो औसत रूप से $X=6{\cdot}2$ का तत्सवादी हो।
From the following data, calculate the coefficient of correlation (r) and obtain the lines of regression Estimate Y corresponding to $X=6{\cdot}2$

X:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y:	9	8	10	12	11	13	14	16	15

[M A , Punjab, 1976, 1969, B Com , Gorakhpur, 1974 ; Punjab, 1973 ; Madras, 1970 ; U P. C. S , 1966]

[$r=\cdot95$, $X=\cdot95Y-6{\cdot}4$; $Y=\cdot95X+7{\cdot}25$; $Y=13{\cdot}14$]

21. निम्न आँकडो से दो प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए। X और Y के सर्वोत्तम अनुमान परिकलित कीजिए जो कि औसत रूप से $Y=9$ और $X=6$ के तत्सवादी हों—
Obtain two regression equations from the following data and estimate values of X and Y corresponding to $Y=9$ and $X=6$ respectively—

X:	6	2	10	4	8
Y:	9	11	5	8	7

[$X=16{\cdot}4-1{\cdot}3Y$, $Y=11{\cdot}9-0{\cdot}65X$; $X_9=4{\cdot}7$, $Y_6=8$] *[M. A., Agra, 1977; I C W A., 1957]*

22. निम्न समको से पिता और पुत्र की ऊँचाइयो के बीच सहसम्बन्ध गुणाक ज्ञात कीजिए। दोनो प्रतीपगमन रेखाएँ भी ज्ञात कीजिए और अनुमान लगाइए (i) पिता की ऊँचाई 74 इच होने पर पुत्र की ऊँचाई का, (ii) पुत्र की ऊँचाई 80 इच होने पर पिता की ऊँचाई का—
Find the coefficient of correlation between the heights of father and son from the following data Also find the two lines of regression and estimate (i) the height of the son when the father's height is 74 inches, and (ii) the height of the father when the son's height is 80 inches—

Height of Father (inches)-X:	65	66	67	67	68	69	70	72
Height of Son (inches)-Y:	67	68	65	68	72	72	69	71

[M. Com , Meerut, 1975]

[$r=+\cdot603$, $X=0{\cdot}545Y+30{\cdot}36$, $Y=0{\cdot}67X+23{\cdot}67$ $Y_{74}=83$; $X_{80}=74$]

23. दो चरों के सापेक्ष मान निम्न सारणी में दिखाए गए हैं। इन मानो से सम्बन्धित प्रतीपगमन समीकरण निर्धारित कीजिए और कार्ल पियरसन का सहसम्बन्ध गुणाक भी परिकलित कीजिए—
The following table gives the relative values of two variables Determine the ... associated with these values and calculate Karl

55	89	98	66
58	65	76	58

$r=\cdot904$] *[B Com , Delhi, 1971]*

24. निम्न आँकडो के आधार पर दोनो समाश्रयण रेखाएं—X की Y पर और Y की X पर—ज्ञात कीजिए। X और Y के बीच सहसम्बन्ध गुणाक भी परिकलित कीजिए। Y के मान 25 के सगत X के मान का आकलन कीजिए—
On the basis of following data obtain both regression equations—of X on Y and of Y on X. Find the correlation coefficient between X and Y Estimate the value of X corresponding to $Y=25$:

X:	15	27	27	30	34	38	46
Y:	12	15	15	18	18	22	26

[$X=2Y-5$; $Y=0{\cdot}4685X+3{\cdot}4755$; $r=\cdot94$; $X_{25}=45$] *[M Com., Meerut, 1973]*

25. दो निर्णायकों P व Q के एक दल ने सात नाटक-प्रदर्शनों पर स्वतन्त्र रूप से निम्नलिखित अक प्रदान किये। आठवें प्रदर्शन को P ने 37 अक दिए लेकिन Q उसमे उपस्थित न हो सका। यदि Q भी उपस्थित होता तो उसके द्वारा आठवें प्रदर्शन में कितने अक दिये जाने की प्रत्याशा थी ?
A panel of two judges P and Q graded seven dramatic performances by independently *awarding marks as follows* The eighth performance which Judge Q could not attend, was awarded 37 marks by Judge P If Judge Q had also been present, how

many marks would be expected to have been awarded by him to the eighth performance ?

Performance :	1	2	3	4	5	6	7
Marks by P :	46	42	44	40	43	41	45
Marks by Q :	40	38	36	35	39	37	41

[33·5 · $Y = 0\ 75X + 5·75$] [*B Com., Hons , Delhi, 1975*]

26. दोनों प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए तथा प्रतीपगमन गुणाकों की सहायता से सहसम्बन्ध गुणांक निकालिए—

Find both regression equations and with the help of regression coefficients, calculate the coefficient of correlation—

X :	17	18	19	19	20	20	21	21	22	23
Y :	12	16	14	11	15	19	22	16	15	20

[$X = 0\ 324Y + 14·81$; $Y = 1·167X - 7·33$; $r = +·614$] [*M. Com., Agra, 1977*]

27. निम्नलिखित मूल्यों से सम्बन्धित समाश्रयण समीकरण निकालिए—

Determine the regression equations associated with the following values—

X :	140	90	130	150	135	150	160	165	158	170
Y :	190	100	170	200	175	190	210	220	205	240

[$X = 0\ 607Y + 29\ 47$; $Y = 1\ 61X - 43·13$] [*M. Com., Allahabad, 1973*]

28 क्रय-विक्रय से सम्बन्धित समंक नीचे दिये गए हैं। न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा दो प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त कीजिए और क्रय 100 के बराबर होने पर विक्रय का अनुमान लगाइए—

You are given the data relating to purchases and sales. Obtain the two regression equations by the method of least squares and estimate the likely sales when the purchases are equal to 100—

Purchases :	62	72	98	76	81	56	76	92	88	49
Sales :	112	124	131	117	132	96	120	136	97	85

[$Y = 0\ 783X + 56·275$, $X = 0\ 652Y + ·02$, $Y_{100} = 134·575$] [*C. A , May, 1975*]

29 निम्न सारणी एक बुद्धि-परीक्षा मे विक्रेताओं द्वारा प्राप्तांक और उनके द्वारा की गई साप्ताहिक बिक्री प्रस्तुत करती है—इनसे दो प्रतीपगमन समीकरण बनाइए, विक्रेता द्वारा प्राप्तांक 70 होने पर बिक्री की सम्भाव्य मात्रा अनुमानित कीजिए तथा परीक्षांक और विक्रय-मात्रा मे सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—

The following table records the data showing the test-scores made by salesmen on an intelligence test and their weekly sales. Form two regression equations from them, estimate the most likely sales volume of salesman making a score of 70 and obtain the coefficient of correlation between test-scores and sales volume—

Salesman :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Test Scores :	40	70	50	60	80	50	90	40	60	60
Sales ('000s) :	2 5	6 0	4 5	5 0	4 5	2 0	5·5	3 0	4·5	3 0

[$Y = ·06X + ·45$, $X = 8\ 63Y + 25\ 05$, $Y_{70} = 4\ 65$, $r = +\ 72$]

30. गत सात वर्षों के लिए किसी वस्तु की पूर्ति और कीमत के समंक नीचे दिये हुए हैं। कीमत की पूर्ति पर प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए और उससे 1978 मे सम्भावित कीमत अनुमानित कीजिए जबकि पूर्ति 110 हो—

[illegible] nodity for the last seven years are given [illegible] price over supply and estimate the most [illegible]

	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1974	1975	1976	1977
Supply :	80	84	86	88	92	96	97
Price :	12	11	15	15	18	16	18

[$Y = 0·3656X - 17\ 533$; 22 68]

31. निम्नलिखित समंकों से सहसम्बन्ध और समाश्रयण गुणाकों को ज्ञात कीजिए। Y आश्रित चर है—

From the following data, calculate the correlation coefficient and regression coefficients. Y is the dependent variable—

X :	1	2	3	4	5
Y :	165	184	142	186	338

[$r = 0\ 71$, $b_{xy} = ·01447$, $b_{yx} = 34\ 8$] [*M. A., Raj., 1973*]

32. नीचे X और Y के कुछ अवलोकन दिए हुए हैं। Y का X पर रेखीय प्रतीपगमन प्रयोग करके, Y का X के कारण होने वाला स्पष्टीकृत प्रसरण का अनुपात अनुमानित कीजिए। Y के प्रसरण का वह अनुपात भी बताइए जो अस्पष्टीकृत रह जाता है—

The following are some observations of X and Y. Using linear regression of Y on X estimate the proportion of variance of Y due to X. Also find out the proportion of variance of Y which remains unexplained—

X:	0	1	3	6	8
Y:	1	3	2	5	4

[M. A., Delhi, 1970]

[Explained variance = 64%, Unexplained proportion of variance = 36%]

33. निम्नलिखित प्रदत्त सामग्री से Y की X पर प्रतीपगमन रेखा ज्ञात कीजिए और Y के औसत मूल्य का अनुमान कीजिए जबकि $X = 8, 16, 24$। आवश्यक अतिरिक्त गणना करके X का Y पर प्रतीपगमन ज्ञात कीजिए—

From the following data, find the line of regression of Y on X and estimate the average values of Y when $X = 8, 16, 24$. Making additional calculations obtain the regression of X on Y—

X:	2	6	8	11	13	13	13	14
Y:	8	6	10	12	12	14	14	20

[M. Com., Meerut, 1970]

[$Y = 0.8125X + 3.875$, $Y = 10.375$, 16.875, 23.375, $X = 0.8125Y + 0.25$]

34. निम्न तालिका में 18 वर्ष की आयु के विद्यार्थियों के समूह में से दैव निदर्शन के आधार पर लिए गए दस विद्यार्थियों की लम्बाई (X) और भार (Y) के समंक दिये गए हैं। उक्त सामग्री को प्रक्षेप चित्र के रूप में प्रदर्शित कीजिए और X और Y के बीच सहसम्बन्ध की प्रकृति व मात्रा का आकलन कीजिए। 69 इंच लम्बाई वाले विद्यार्थी का भार भी अनुमानित कीजिए—

The following table gives the data of height and weight of 10 students selected at random from a group of 18 year old students. Represent the data through a scatter diagram so as to estimate the nature and degree of correlation between X and Y. Also obtain an estimate of the weight of a student having a height of 69 inches—

X:	61	68	60	64	65	70	63	62	64	67
Y:	112	125	130	115	110	125	100	113	117	126

[$Y_{69} = 126.4$]   [I. A. S., 1960, M. Com., Agra, 1973]

35. निम्न सारणी 50 नवविवाहित युगलों (पति-पत्नी) की आयु के समंक प्रस्तुत करती है। दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ ज्ञात कीजिए तथा निम्न अनुमान भी लगाइए—(क) पति की आयु जबकि पत्नी की आयु 20 वर्ष हो, (ख) पत्नी की आयु जबकि पति की आयु 30 वर्ष हो—

The following table presents the statistics of age of 50 newly married couples Obtain both regression equations and estimate—(a) husband's age when wife's age is 20 years, (b) wife's age when husband's age is 30 years—

Wife's Age (.)	Husband's Age (X) 20—25	25—30	30—35	Total
16—20	9	14	—	23
20—24	6	11	3	20
24—28	—	—	7	7
Total	15	25	10	50

[$X = .72Y + 12.08$; $Y = 0.47X + 8.03$; (a) 26.48 ys; (b) 22.13 ys.] [M. Com., Agra, 1976]

36. एक कम्पनी के जीवन-काल के Xवें वर्ष में होने वाले लाभ निम्नांकित हैं। यह जाँच कीजिए कि Y का X पर प्रतीपगमन वास्तव में $Y = 1000 + 265X$ है—

The profits (Y) of a company in the Xth year of its life were observed to be as shown below. Examine whether the linear regression of Y on X is—$Y = 1000 + 265X$.

Year of Life (X):	1	2	3	4	5
Profit (Y) in lakhs of Rs.:	1250	1400	1650	1950	2300

इस प्रकार या अन्य रीति से अनुमान का प्रमाप विभ्रम भी परिकलित कीजिए।

Hence or otherwise, calculate the standard error of the estimate.

[$Y = 915 + 265X$; $S_{yx} = 54.3$]   [M. A., Rohilkhand, 1977, Agra 1956]

37. निम्न समंकों से न्यूनतम वर्ग पद्धति द्वारा दोनों प्रतीपगमन समीकरण परिकलित कीजिए। अनुमान के प्रमाप विभ्रमों का भी आगणन कीजिए—

Calculate both regression equations from the following data by least squares method Also find standard errors of the estimate—

X:	1	2	3	4	5
Y:	2	4	5	3	6

[$X = 0.7Y + 0.2$; $Y = 0.7X + 1.9$; $S_{xy} = 1.01$; $S_{yx} = 1.01$]

38. (i) निम्न आँकड़ों से अनुमान की प्रमाप त्रुटियाँ ज्ञात कीजिए—

Calculate the standard errors of the estimate from the data given below—

$N = 25$; $\Sigma d^2x = 9$; $\Sigma d^2y = 4$, $b_{xy} = .5$, $b_{yx} = 1.3$

[M. Com., I & III Sem., Raj., April 1977]

भारतीय समंक
(INDIAN STATISTICS)

भारतीय समंक-व्यवस्था
(Statistical System in India)

किसी देश के योजना-बद्ध आर्थिक विकास कार्यक्रम की रचना और उसकी प्रगति की समीक्षा यथेष्ट समंकों की निरन्तर उपलब्धता पर निर्भर होती है। राष्ट्रीय योजना आयोग (National Planning Commission) के शब्दों में 'आर्थिक विकास के लिए, विशेषकर नियोजन के उद्देश्यों की पूर्ति करने और नीति व प्रशासन सम्बन्धी निर्णय लेने के लिए निरन्तर अधिकाधिक मात्रा में (उपयुक्त) समंकों की आवश्यकता होती है।'[1] प्रोफेसर महालानोबिस के अनुसार, 'यथेष्ट समंकों के अभाव में आर्थिक विकास की कोई उत्तम योजना नहीं हो सकती तथा संग्रह की अच्छी योजना के बिना पर्याप्त समंक उपलब्ध नहीं किये जा सकते।'[2] सभी देशों में, मुख्यतः सरकार व अन्य राजकीय संस्थाओं द्वारा नियमित रूप से समंक-संकलन का कार्य सम्पन्न किया जाता है। भारत में, समंकों के संकलन एवं प्रकाशन के लिए केन्द्र और राज्य के स्तरों पर सुव्यवस्थित सांख्यिकीय संगठन का क्रमिक विकास हुआ है। सर्वप्रथम, केन्द्र तथा राज्यों के स्तर पर स्थापित प्रमुख सांख्यिकीय संगठनों का संक्षिप्त वर्णन किया जायेगा। आगे चलकर जनसंख्या, राष्ट्रीय आय, कृषि व औद्योगिक उत्पादन, व्यापार, श्रम, मूल्य आदि महत्त्वपूर्ण क्षेत्रों से सम्बद्ध समंकों की उपलब्धता, स्रोत, संगठन व संकलन-विधि का संक्षिप्त आलोचनात्मक विश्लेषण किया जायेगा।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि (Historical Background)—भारत में समंक-संकलन की परम्परा बहुत पुरानी है। अनेक प्राचीन एवं मध्यकालीन ग्रंथों में तत्कालीन अंक-संकलन व्यवस्था तथा जनसंख्या व भूमि-वितरण से सम्बन्धित उपलब्ध समंकों का विस्तृत विवरण मिलता है। कौटिल्य के 'अर्थशास्त्र' और 'आईन-ए-अकबरी' में भारत की तत्कालीन आर्थिक स्थिति-सम्बन्धी समंकों के संकलन के अनेक प्रसंग मिलते हैं। ईस्ट इण्डिया कम्पनी (East India Company) ने शासन-प्रबन्ध की सुविधा के लिए समय-समय पर कृषि तथा आयात-निर्यात के समंक संकलित कराये। उस समय अंक-संकलन के लिए कोई विशिष्ट संगठन नहीं था वरन् आवश्यकतानुसार प्रशासकीय क्रियाओं के उपोत्पाद[3] (by-product of administrative activities) के रूप में ही आँकड़े एकत्र किये जाते थे। 1862 में एक सांख्यिकीय समिति की स्थापना की गई जिसका उद्देश्य व्यापार, वित्त, शिक्षा, कृषि आदि के समंकों के संकलन हेतु उचित प्रारूप तैयार करना था। 1868 में 'ब्रिटिश भारत का समंक-सार' (Statistical Abstract of British India) नामक वार्षिक विवरण का प्रकाशन आरम्भ हुआ जो 1923 से भारत में प्रकाशित किया जाने लगा। 1872 में प्रथम बार भारतीय जनगणना आयोजित की गयी थी परन्तु अनेक त्रुटियों के कारण 1881 की जनगणना को ही वस्तुतः प्रथम नियमित दस-वर्षीय जनगणना माना जाता है। 1881 में ही देश

[1] 'Economic growth continuously calls for an increased volume of statistics for purposes of planning and for policy and administrative decisions.' —National Planning Commission.

[2] 'There cannot be a good plan for economic progress without adequate data and there cannot be adequate data without a good plan for collecting them.' —P. C.

[3] Report of Bowley-Robertson Committee.

के विभिन्न भागों के आर्थिक समंकों के आधार पर भारत के इम्पीरियल गेजेटियर (Imperial *Gazetteer of India)* का प्रथम बार प्रकाशन किया गया। इसी वर्ष अकाल आयोग की सिफारिशों के अनुसार देश के विभिन्न प्रान्तों में कृषि-विभाग स्थापित किये गये। इसी अवधि में अखिल भारतीय फसल-पूर्वानुमानों तथा पंचवर्षीय पशु-गणनाओं का आयोजन आरम्भ किया गया। कालान्तर में आर्थिक समंकों का अधिकाधिक संकलन एवं प्रकाशन किया जाने लगा।

1895 मे भारत सरकार ने वित्त, कृषि, विदेशी व्यापार एवं वाणिज्य-सम्बन्धी आँकड़ों के संकलन एवं समन्वय के उद्देश्य से सांख्यिकीय महानिदेशक *(Director-General of* Statistics—D. G. S.) की अध्यक्षता में एक सांख्यिकीय संस्थान (Statistical Bureau) की स्थापना की। भारत में केन्द्रीय स्तर पर एक सुव्यवस्थित सांख्यिकीय संगठन स्थापित करने की दिशा में यह सरकार का पहला ठोस कदम था। 1905 में सरकार और व्यवसायी-वर्ग में सम्पर्क स्थापित करने के लिए वाणिज्यिक संज्ञान (सूचना) के महानिदेशक (Director-General of Commercial Intelligence) की अध्यक्षता में एक कार्यालय स्थापित किया गया जिसने सांख्यिकीय-संस्थान का भी कार्यभार सँभाल लिया। *1906* में इस विभाग से Indian Trade *Journal* नामक पत्रिका का प्रकाशन आरम्भ हुआ। *1922* में इन दोनों कार्यालयों का विलय करके कलकत्ता में सांख्यिकीय एवं वाणिज्यिक सूचना के महानिदेशक के कार्यालय (Office of the Director-General of Commercial Intelligence and *Statistics—D. G. C. I. S.)* की स्थापना की गयी। 1925 में सर विश्वेश्वरैया की अध्यक्षता में गठित 'आर्थिक जाँच समिति' ने यह सिफारिश की कि भारतीय समंकों को सन्तोषजनक आधार पर संकलित करने औ व्यवस्थित रखने के लिए यह आवश्यक है कि एक केन्द्रीय सांख्यिकीय संस्थान तथा प्रत्येक प्रान्त सांख्यिकीय कार्यालय (Statistical Bureau) की स्थापना की जाये परन्तु अनेक कारणों से उ सुझाव स्वीकार नहीं किये गये। 1930 में शाही कृषि आयोग के सुझाव के परिणामस्वरूप भारती कृषि अनुसन्धान परिषद् [Imperial (now Indian) Council of Agricultural Research स्थापित की गई। आर्थिक समंकों के विश्लेषण हेतु *1933* में एक सांख्यिकीय शोध संस्था (Statistical Research Bureau) की संस्थापना हुई।

1934 में बाउले रॉबर्टसन समिति *(Bowley-Robertson Committee)* ने भारत मे एक आर्थिक संगणना की सम्भावना पर विचार किया। इस समिति ने भी एक स्थायी केन्द्रीय संगठन की स्थापना पर बल दिया। आर्थिक कठिनाइयों के कारण यह संगठन स्थापित नहीं किया जा सका। *1938* में एक आर्थिक सलाहकार (Economic Advisor) की नियुक्ति की गयी तथा सांख्यिकीय शोध-संस्थान को उसके अधीन कर दिया गया।

द्वितीय महायुद्ध के आरम्भ *(1939)* तक की अवधि में भारत मे समंकों की उपलब्धता की स्थिति का बाउले-रॉबर्टसन समिति ने निम्न शब्दों में उल्लेख किया है—

> *'भारत में समंकों का प्रादुर्भाव अधिकतर प्रशासनिक क्रियाओं के उपोत्पाद—जैसे भूमि-लगान की वसूली या आपात स्थितियों—अकाल आदि के राहत कार्यों—के रूप में हुआ। केवल जनगणना, और कुछ सीमा तक, विदेशी व्यापार समंकों के लिए ऐसा संगठन* कार्यरत है जिसका प्रमुख कार्य सूचनाओं का संकलन है। इसके परिणामस्वरूप समंकों में समन्वय की कमी है और वे अलग-अलग विभागों द्वारा विभिन्न स्वरूपों में प्रकाशित किये जाते हैं।'[1]

1942 में औद्योगिक समंक अधिनियम (Industrial Statistics Act, 1942) पारित किया गया जिसके फलस्वरूप 1946 से निर्माणी उद्योगों की वार्षिक संगणना (Census of

[1] 'The statistics in India have largely originated as a *by-product of administrative* ... ation relating to ... to some extent, ... s the collection of ... various forms by

Manufactures) का आयोजन किया जाने लगा।

स्वतन्त्रता-प्राप्ति के पश्चात् केन्द्र तथा राज्यों में समंक-संकलन व प्रकाशन का कार्य तीव्र गति से आरम्भ किया गया। देश के विभिन्न सचिवालयों के अधीन अनेक सांख्यिकीय इकाइयाँ स्थापित की गई हैं तथा सांख्यिकीय प्रविधियों में शोध-कार्य, अनुसन्धान व प्रशिक्षण के क्षेत्र में अनेक सुधार हुए हैं। समंक-संकलन की परम्परागत रीति के स्थान पर यादृच्छिक प्रतिचयन पर आधारित सर्वेक्षण किये जाने लगे हैं। कृषि संगणना और आर्थिक संगणना नियमित रूप से की जाने लगी हैं। इन सब क्रियाओं के परिणामस्वरूप, भारतीय समंकों की व्यापकता एवं यथार्थता के स्तर में अत्यधिक सुधार हुआ है। भारतीय समंकों के क्षेत्र में आधुनिक परिवर्तनों में से निम्न विशेष रूप से उल्लेखनीय हैं—

1947 से आर्थिक सलाहकार के थोक मूल्य सूचकांकों (Economic Advisor's Wholesale Price Index Numbers) का प्रकाशन, 1970–71 के आधार पर संशोधित शृंखला का निर्माण तथा जुलाई 1989 से वर्ष 1981–82 के आधार पर नवीन शृंखला के प्रकाशन का समारम्भ, 1949 में राष्ट्रीय आय समिति (National Income Committee) की नियुक्ति, परम्परागत श्रेणी, 1960–61 पर आधारित संशोधित श्रेणी, 1970–71 पर आधारित नवीन शृंखला और 1980–81 वर्ष पर आधारित नवीनतम् शृंखला के रूप में राष्ट्रीय लेखे व राष्ट्रीय आय के समंकों का नियमित प्रकाशन; एक स्थायी जनगणना अधिनियम (Permanent Census Act) की स्वीकृति व दसवर्षीय जनगणना का आयोजन, 1950 में राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण निदेशालय (Directorate of the National Sample Survey) की स्थापना तथा 1970 में उसका पुनर्गठन, 1951 में केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (Central Statistical Organisation or C.S. O.) की स्थापना तथा 1961 में नवस्थापित सांख्यिकी विभाग (Department of Statistics) के अधीन C.S.O. का हस्तान्तरण, 1953 में समंक-संकलन अधिनियम (Collection of Statistics Act) का पारित होना, अखिल भारतीय कृषि-श्रम जाँच (All-India Agricultural Labour Enquiry), ग्रामीण साख सर्वेक्षण (A. I. Rural Credit Survey), वार्षिक औद्योगिक सर्वेक्षण (Annual Survey of Industries), भारतीय कृषि अनुसन्धान परिषद् तथा भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (Indian Statistical Institute) द्वारा अंक-संकलन की नवीनतम विधियों का प्रयोग तथा शोध-कार्य एवं प्रशिक्षण की सुविधाएँ प्रदान करना, 1966 में सांख्यिकीय विभाग द्वारा अभिकलित्र केन्द्र (Computer Centre) की स्थापना, 1977 में आर्थिक संगणना कार्यक्रम का समारम्भ; वर्ष 1982 में राष्ट्रीय सांख्यिकीय सलाहकार मण्डल (National Advisory Board on Statistics—NABS) की स्थापना आदि।

वर्तमान सांख्यिकीय व्यवस्था
(Existing Statistical Set-up)

हमारे देश में सांख्यिकीय-संगठन बीसवीं शताब्दी के आरम्भ में संकेन्द्रित था जबकि सम्पूर्ण देश के लिए व्यावसायिक सूचना एवं सांख्यिकी के महानिदेशालय (D. G. C. I. S.) द्वारा ही समंक संकलित एवं प्रकाशित किये जाते थे। परन्तु अब प्रत्येक मन्त्रालय के अधीन एक या अधिक सांख्यिकीय इकाइयाँ स्थापित हैं जिनकी गतिविधियों में सामंजस्य लाने के लिए एक केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C. S. O.) विद्यमान है। इस प्रकार केन्द्र तथा राज्यों में वर्तमान सांख्यिकीय संगठन पूर्णरूपेण विकेन्द्रित (decentralised) हो चुका है। देश में इस समय समस्त सरकारी सांख्यिकीय इकाइयों की कुल संख्या 3,752 है जिनमें 57,950 सांख्यिकीय वर्ग के कर्मचारी काम करते हैं। अग्रांकित सारणी में 1 जुलाई 1988 को विभिन्न सरकारी स्तरों पर स्थापित सांख्यिकीय कार्यालयों व सांख्यिकीय वर्ग के कर्मचारियों की संख्या तथा 1986–87 के वास्तविक व्यय और 1988–89 में प्रस्तावित व्यय के समंक दिये गए हैं—

स्तर (Level)	कार्यालय (इकाइयों) की संख्या (No. of Statistical Offices)	कुल सांख्यिकीय कर्मचारी (Total Statistical Personnel)	1986-87 में वास्तविक व्यय (करोड़ रु०)	1988-89 में प्रस्तावित व्यय (करोड़ रु०)
(i) केन्द्रीय सरकार (Central Government)	340	16,666	[illegible]·88	95·99
(ii) राज्य सरकारें तथा सघ-शासित क्षेत्र (State Govts and Union Territories)	3,338	40,589	60·80	85·81
(iii) केन्द्रीय सरकार के अधीनस्थ सार्वजनिक क्षेत्र के उपक्रम (Public Sector Undertakings under Govt. of India)	74	695	0·89	1·16
योग (Total)	3,752	57,950	126·57	182 96

स्रोत : *Statistical System in India, 1989, pp 44–49.*

1952–53 की तुलना में 1987–88 में देश में स्थापित कुल सांख्यिकीय कार्यालयों की संख्या लगभग 21 गुनी (1952–53 में 174 से बढ़कर 1987–88 में 3752) तथा उनमें सेवारत सांख्यिकीय वर्ग के कर्मचारियों की संख्या लगभग 12 गुनी (1952–53 में 4,769 से बढ़कर 1987–88 में 57,950) हो गई है। केन्द्रीय स्तर पर सबसे अधिक सांख्यिकीय इकाइयाँ योजना मन्त्रालय (Ministry of Planning) में स्थापित हैं। उनकी संख्या 181 है जिनमें 5,387 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्य करते हैं।

राज्य स्तर पर उत्तर प्रदेश में सांख्यिकीय कार्यालयों की संख्या सबसे अधिक, 460 है जिनमें 3,933 सांख्यिकीय कर्मचारी लगे हुए हैं।

केन्द्र में सांख्यिकीय संगठन
(Statistical Organisation at the Centre)

सांविधानिक स्थिति—भारतीय संविधान की धारा 246 के अन्तर्गत शासन-प्रबन्ध के विभिन्न विषयों को तीन सूचियों में वर्गीकृत किया गया है—

(क) **संघ (केन्द्र) सूची (Union List)**—इसमें केन्द्रीय सरकार के अधीन आने वाले विषय सम्मिलित हैं जैसे प्रतिरक्षा, रेलवे, डाक व तार, मुद्रा, विनिमय एवं अधिकोषण, विदेशी व्यापार, जनगणना आदि। इन विषयों से सम्बन्धित अंक-संग्रह कराना केन्द्रीय सरकार का कार्य है।

(ख) **राज्य सूची (State List)**—इसमें उन विषयों का समावेश है जो विभिन्न राज्यों के कार्य-क्षेत्र की सीमा के अन्तर्गत आते हैं जैसे सार्वजनिक स्वास्थ्य, कृषि, पशुधन, वन-सम्पत्ति, सिंचाई, मत्स्यपालन आदि। इनसे सम्बद्ध समंकों के संकलन का प्राथमिक उत्तरदायित्व प्रादेशिक सरकारों का है।

(ग) **समवर्ती सूची (Concurrent List)**—इसमें उन विषयों का उल्लेख है जिन पर केन्द्र और राज्य सरकारें—दोनों ही—अधिनियम बना सकती हैं तथा आँकड़े एकत्रित करा सकती हैं। उदाहरणार्थ, जीवन-समंक, श्रम-कल्याण, सामाजिक बीमा, श्रम-संघ, मूल्य-नियन्त्रण, नियोजन आदि।

केन्द्रीय सरकार विभिन्न राज्य सरकारों को सांख्यिकीय विषयों पर तकनीकी परामर्श देती

रहती है और केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन के माध्यम से विभिन्न राज्यों और मन्त्रालयों की सांख्यिकीय क्रियाओं में समन्वय कायम करती है।

विभिन्न विभागीय सांख्यिकीय इकाइयों का वर्गीकरण—जैसा कि पहले स्पष्ट किया जा चुका है भारत में सांख्यिकीय संगठन की विकेन्द्रित व्यवस्था है। केन्द्र के विभिन्न मन्त्रालयों के अधीन अनेक सांख्यिकीय इकाइयाँ कार्यरत हैं जिनकी क्रियाओं में समन्वय स्थापित करने के लिए केन्द्रीय मन्त्रिमण्डल के सचिवालय (Cabinet Secretariat) के अधीन संस्थापित सांख्यिकीय विभाग (Department of Statistics) के अन्तर्गत एक केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C. S. O.) विद्यमान है।

केन्द्रीय सरकार के विभिन्न मन्त्रालयों से संलग्न सांख्यिकीय इकाइयों को सुविधा के लिए निम्न वर्गों में विभाजित किया जा सकता है—

(i) **समंक-संकलन हेतु स्थापित विशिष्ट संगठन** (Organisations specially set up for collection of data)—इनमें व्यावसायिक सूचना एवं सांख्यिकीय महानिदेशालय (D. G. C. I. S.), श्रम संस्थान (Labour Bureau), औद्योगिक समंक निदेशालय (Industrial Statistics Directorate), राष्ट्रीय आय एकांश (National Income Unit), महापंजीकार एवं जनगणना आयुक्त का कार्यालय (Office of the Registrar General and Census Commissioner), सेना-सांख्यिकीय संगठन (Army Statistical Organisation) आदि सम्मिलित हैं। इन इकाइयों का प्रधान उद्देश्य अपने विशिष्ट क्षेत्र में समंकों का संकलन एवं विश्लेषण करना है।

(ii) **प्रशासनिक दृष्टि से समंकों का संकलन व प्रक्रिया-सम्पादन करने वाले संगठन** (Units for processing of data available as by-products of administration)—इस श्रेणी में वे इकाइयाँ आती हैं जो प्रशासन के उपोत्पाद के रूप में स्वतः उपलब्ध समंकों का विधायन (processing of data) करती हैं जैसे केन्द्रीय प्रत्यक्ष कर मण्डल (Central Board of Direct Taxes), केन्द्रीय राजस्व मण्डल (Central Board of Revenue), रेलवे (Railways), डाक व तार विभाग (Post and Telegraph Department), आपूर्ति एवं विक्रय महानिदेशालय (Directorate General of Supplies and Disposals) आदि।

(iii) **उत्पादन एवं वितरण पर नियन्त्रण से सम्बद्ध संगठन** (Organisations set up for Control of Production and Distribution)—इस वर्ग में वस्त्र आयुक्त (Textile Commissioner), लोहा व इस्पात नियन्त्रक (Iron and Steel Controller), आयात व निर्यात नियन्त्रक (Controller of Imports and Exports), केन्द्रीय विद्युत् आयुक्त (Central Electricity Commissioner) के कार्यालयों से संलग्न सांख्यिकीय इकाइयों का समावेश होता है।

(iv) **शोध संगठन** (Research Organisations)—कुछ सांख्यिकीय संगठनों को मूल रूप से शोध-कार्य के लिए स्थापित किया गया है जैसे भारतीय कृषि अनुसन्धान परिषद् (I. C. A. R.) का शोध व सांख्यिकी विभाग जो 1970 से भारतीय कृषि सांख्यिकी शोध संस्थान (Indian Agricultural Statistics Research Institute) के नाम से स्वतन्त्र संस्था के रूप में कार्य कर रहा है तथा रिजर्व बैंक का शोध विभाग (Research Department of the Reserve Bank of India)।

(v) **राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन** (National Sample Survey Organisation)—योजना आयोग तथा विभिन्न मन्त्रालयों की ओर से समय-समय पर अनेक क्षेत्रों में दैव प्रतिदर्श सर्वेक्षण द्वारा आवश्यक समंक संकलित करने के उद्देश्य से 1950 में राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण निदेशालय (Directorate of the National Sample Survey) की स्थापना की गयी जिसे 1971 से सांख्यिकी विभाग के अधीन राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन (N. S. S. O.) के नाम से पुनर्गठित किया गया है।

(vi) **समन्वय एवं परामर्श देने वाले संगठन** (Coordinating and Advisory Organisations)—केन्द्रीय स्तर की विभिन्न सांख्यिकीय इकाइयों में समन्वय स्थापित करने के

लिए मई 1951 में मन्त्रिमण्डल-सचिवालय के अधीन केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C. S. O.) की स्थापना की गयी है। सांख्यिकीय विषयों पर सलाह देने और सांख्यिकीय व्यवस्था में सुधार लाने के उद्देश्य से 1982 में राष्ट्रीय सांख्यिकी सलाहकार मण्डल (National Advisory Board on Statistics : NABS) का गठन किया गया है।

केन्द्रीय मन्त्रालयों के अधीन प्रमुख सांख्यिकीय इकाइयाँ
(Main Statistical Units under Central Ministries)

विभिन्न केन्द्रीय मन्त्रालयों[1] से संलग्न 340 सांख्यिकीय इकाइयाँ हैं जिनमें 16,666 सांख्यिकीय वर्ग के कर्मचारी काम करते है।[2] इनमें से प्रमुख मन्त्रालयों की महत्त्वपूर्ण इकाइयों का विवरण निम्न प्रकार है—

कृषि मंत्रालय (Ministry of Agriculture)

कृषि मन्त्रालय में 36 सांख्यिकीय इकाइयाँ हैं जिनमें 1,219 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्यरत है। वर्ष 1986–87 में इन इकाइयों पर 4·6 करोड़ रु० का वास्तविक व्यय हुआ था और वर्ष 1988–89 के लिए प्रस्तावित व्यय 6·5 करोड़ रु० था। कृषि मन्त्रालय में कार्यरत मुख्य सांख्यिकीय इकाइयाँ निम्न प्रकार है—

1. **अर्थ एवं सांख्यिकी निदेशालय** (Directorate of Economics and Statistics—DES-Ag)—कृषि समंकों के संग्रहण, विश्लेषण, समन्वय एवं प्रकाशन के लिए कृषि मन्त्रालय के अन्तर्गत 1947 में अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय स्थापित किया गया जो आर्थिक एवं सांख्यिकीय सलाहकार के निर्देशन में कार्य कर रहा है। इसके निम्नलिखित प्रमुख कार्य हैं—

(i) मन्त्रालय को कृषि-अर्थ नीतियों (agro-economic policies) के निर्धारण के सम्बन्ध में सलाह देना;

(ii) कृषि-आर्थिक सूचना (agro-economic intelligence) के संकलन और आर्थिक विश्लेषण में मन्त्रालय की सहायता करना;

(iii) कृषि-आर्थिक समंकों के संग्रहण, संकलन और प्रकाशन की व्यवस्था करना;

(iv) कृषि पदार्थों, विशेषकर खाद्यान्नों, के मूल्य और विपणन-स्थितियों पर निगरानी रखना;

(v) मन्त्रालय को कृषि-क्षेत्र में योजना-निर्माण कार्य में सहायता प्रदान करना तथा योजनाधीन विकास कार्यक्रमों में समन्वय रखना, तथा

(vi) कृषि-अर्थ शोध-कार्य, फार्म-प्रबन्धन तथा उत्पादन लागत सम्बन्धी अध्ययनों में 'समन्वय' स्थापित करना।

अर्थ एवं सांख्यिकी निदेशालय के निम्नांकित प्रमुख प्रकाशन हैं—

वार्षिक (Annual) : (i) Indian Agricultural Statistics;
(ii) Estimates of Area and Production of Principal Crops in India;
(iii) Agricultural Prices in India;
(iv) *Agricultural Wages in India;*
(v) Indian Rubber Statistics.

मासिक (Monthly) : *Agricultural Situation in India.*

साप्ताहिक (Weekly) : (i) Bulletin of Agricultural Prices;
(ii) Wholesale Prices of Foodgrains.

[1] केन्द्र सरकार में अनेक मन्त्रालय/विभाग हैं जिनकी संख्या, स्वरूप व कार्यभार में समय-समय पर परिवर्तन होते रहते हैं। प्रस्तुत विवरण 6 दिसम्बर 1989 को निर्गत अधिसूचना के अनुसार निर्धारित केन्द्रीय मन्त्रालयों/विभागों पर आधारित है।

[2] *Statistical System in India, 1989, p. 46.*

अन्य (Others) : (i) Average Yield Per Acre of Principal Crops in India (पंचवर्षीय);
(ii) Livestock Census of India (पंचवर्षीय);
(iii) Bulletin on Commercial Crops Statistics (द्विवर्षीय);
(iv) Indian Agricultural Atlas (तदर्थ);
(v) Indian Crop Calendar (तदर्थ)

अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय (DES-Ag) में 301 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्यरत हैं। उसका वर्ष 1986–87 का वास्तविक व्यय 1·7 करोड़ रु० था तथा 1988–89 के लिए प्रस्तावित व्यय 2·5 करोड़ रु० था।

2. भारतीय कृषि समंक शोध संस्थान (Indian Agricultural Statistics Research Institute—IASRI)—1930 में भारतीय कृषि अनुसन्धान परिषद (ICAR) के सांख्यिकीय सम्भाग (Statistical Section) के रूप में इस संस्थान का समारम्भ हुआ। आरम्भ में, कृषि शोध की विभिन्न शाखाओं में प्रयोग आयोजित करना, परिणामों का विश्लेषण करना और समंक-निर्वचन में कृषि अधिकारियों की सहायता करना इसका मुख्य कार्य था। 1943 में इस सम्भाग द्वारा कृषि उपज के आकलन हेतु प्रतिदर्श-सर्वेक्षण की प्रविधि विकसित की गई जिसके प्रयोग से 1945–49 में सभी राज्यों में गेहूँ और चावल की उपज अनुमान के सर्वेक्षण सम्पन्न किये गये। इस प्रकार उक्त संस्थान के सांख्यिकी और शोध कार्यों में तेजी से वृद्धि हुई और 1959 में इसे भारतीय कृषि अनुसन्धान परिषद के सांख्यिकीय एकांश (Statistical Wing of ICAR) की संज्ञा दी गई। 1970 मे इस एकांश को परिषद के स्वतन्त्र संस्थान का रूप दिया गया और अब यह भारतीय कृषि समंक शोध संस्थान (Indian Agricultural Statistics Research Institute—IASRI) नाम से कार्य कर रहा है।

इस संस्थान के प्रमुख कार्य निम्न प्रकार हैं—

(i) कृषि तथा पशु-पालन के क्षेत्रों में प्रयुक्त सांख्यिकीय प्रविधियों में सैद्धान्तिक एवं व्यावहारिक शोध कार्य आयोजित करना;

(ii) कृषि-समंकों के संकलन में प्रयुक्त प्रतिदर्श सर्वेक्षण प्रविधियों को विकसित करना तथा उनके प्रयोग द्वारा उपज-आकलन सर्वेक्षण संचालित करना;

(iii) कृषि समंकों के क्षेत्र मे स्नातकोत्तर तथा शोध-उपाधियों के लिए पाठ्यक्रम चलाना;

(iv) कृषि-समंकों के संकलन, विश्लेषण तथा निर्वचन के लिए कृषि अधिकारियों को सेवा-कालीन प्रशिक्षण देना;

(v) कृषि, पशुपालन और जीव-विज्ञान क्षेत्रों में सांख्यिकीय विधियों के अनुप्रयोगों से सम्बद्ध समस्याओं के समाधान हेतु कृषि अनुसन्धान परिषद, राज्य सरकारों और विभिन्न विश्व-विद्यालय तथा शोध संस्थाओं को परामर्श देना, तथा

(vi) कृषि वैज्ञानिकों और कृषि संगठनों को कृषि शोध के लिए समंक-विधायन (data processing) और अभिकलित्र प्रयोगों (Computer applications) के सम्बन्ध में सलाह देना।

भारतीय कृषि समंक शोध संस्थान के कार्यकलापों की प्रगति का विवरण (Statistical Newsletter and Abstract) नामक त्रैमासिक पत्रिका में प्रकाशित किया जाता है। संस्थान में सांख्यिकीय वर्ग के 488 कर्मचारी (कृषि मन्त्रालय की सांख्यिकीय इकाइयों में सबसे अधिक) कार्यरत हैं तथा इसका वर्ष 1986–87 का वास्तविक व्यय 2·23 करोड़ रु० तथा 1988–89 में प्रस्तावित व्यय 3 करोड़ रु० था।

भारतीय कृषि अनुसन्धान परिषद के अधीन कृषि समंक शोध सस्थान के अतिरिक्त अन्य 22 शोध इकाइयाँ भी कार्यरत हैं जिनमे से प्रमुख हैं—भारतीय कृषि शोध संस्थान (Indian Agricultural Research Institute—IARI), भारतीय उद्यान-विज्ञान शोध संस्थान (Indian Institute of Horticultural Research), केन्द्रीय भेड़ व ऊन शोध संस्था (Central Sheep

and Wool Research Institute), केन्द्रीय शुष्क क्षेत्र शोध संस्था (Central Arid Zone Research Institute), भारतीय पशु चिकित्सा शोध संस्था (Indian Veterinary Research Institute) इत्यादि। इन संस्थानों के प्रमुख कार्य आवश्यक समंकों का संकलन, विश्लेषण व निर्वचन करना, शोध एवं प्रशिक्षण आयोजित करना, केन्द्र सरकार, राज्य सरकारों और अन्य संस्थाओं को सम्बन्धित विषयों पर सलाह देना तथा समंक-अधिकोष (data bank) स्थापित करना तथा अपने विषय से सम्बन्धित पत्रिकाएँ (bulletins) प्रकाशित करना।

3. कृषि-संगणना प्रभाग (Agricultural Census Division)—कृषि मन्त्रालय के अधीन कृषि संगणना प्रभाग की स्थापना 1969–70 में हुई। इस प्रभाग के अध्यक्ष कृषि-संगणना निदेशक हैं। इस प्रभाग का मुख्य कार्य राज्य कृषि-संगणना इकाइयों के सहयोग से आदान-सर्वेक्षण (input surveys) और पंचवर्षीय कृषि संगणनाओं (quinquennial agricultural census) का आयोजन करना है। 1970–71 में इस प्रभाग ने सभी राज्यों में प्रथम कृषि संगणना संयुक्त राष्ट्र के खाद्य एवं कृषि संगठन (F.A.O.) द्वारा आयोजित विश्व कृषि-संगणना के एक भाग के रूप में आयोजित की जिस पर लगभग 3 करोड़ रुपये खर्च हुआ। इसकी अन्तिम रिपोर्ट 1975 में प्रकाशित की गई। F. A. O. के तत्त्वावधान में दूसरी कृषि संगणना 1980–81 में आयोजित की गई। इनके अतिरिक्त सम्पूर्ण संगणना और प्रतिचयन के आधार पर 1976–77 और 1985–86 संदर्भ वर्षों के लिए भी कृषि गणनाएँ सम्पन्न की गई। उक्त सगणनाओं मे जिन तथ्यों पर व्यापक सूचना संग्रहीत की गई वे इस प्रकार हैं—भू-उपयोग समंक, कृषि जोतों की संख्या, विभिन्न फसलों के अन्तर्गत क्षेत्र, सिंचाई व्यवस्था, भू-स्वामित्व समंक, कृषि आदान, पशुधन समंक आदि।

4. पशु-पालन सांख्यिकी प्रभाग (Animal Husbandry Statistics Division)—1971 में स्थापित यह प्रभाग, यादृच्छिक प्रतिदर्श सर्वेक्षणों के माध्यम से पशु-पालन व पशु-चिकित्सा सेवाओं से सम्बन्धित समंकों के संग्रहण, संकलन व विश्लेषण का कार्य करता है।

5. अन्य सांख्यिकीय इकाइयाँ (Other Statistical Units)—उपर्युक्त प्रमुख सांख्यिकीय प्रभागों के अतिरिक्त कृषि मन्त्रालय में अन्य इकाइयाँ भी कार्यरत हैं जो अपने-अपने क्षेत्र में विशिष्ट समंको के संकलन, संग्रहण, विश्लेषण व प्रकाशन का कार्य कर रही हैं, जैसे 1958 में स्थापित सहकारिता समंक प्रभाग (Cooperation Statistics Section), 1975 मे गठित मत्स्य-पालन समंक प्रभाग (Fisheries Statistics Section), ग्रामीण विकास कार्यक्रमों के परीवीक्षण व मूल्यांकन के लिए 1952 मे स्थापित ग्रामीण विकास विभाग—प्रशासनिक संज्ञान (Department of Rural Development—Administrative Intelligence) तथा विपणन एवं निरीक्षण निदेशालय (Directorate of Marketing and Inspection) जिसके द्वारा विभिन्न कृषि पदार्थों के मूल्य व बाजार लेनदेन के सम्बन्ध में समय-समय पर सर्वेक्षण करके उनके प्रतिवेदन प्रकाशित किये जाते हैं।

वाणिज्य मन्त्रालय (Ministry of Commerce)

वाणिज्य मन्त्रालय की 8 सांख्यिकीय इकाइयों में 485 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्यरत हैं। इन इकाइयों का 1986–87 के लिए वास्तविक व्यय 2·33 करोड़ रु० और 1988–89 में प्रस्तावित व्यय 2·58 करोड़ रु० था। वाणिज्य मन्त्रालय की प्रमुख सांख्यिकीय इकाइयाँ निम्न प्रकार हैं—

1. वाणिज्यिक संज्ञान एवं सांख्यिकी महानिदेशालय (Directorate General of Commercial Intelligence and Statistics)—यह भारत का सबसे पुराना सांख्यिकीय विभाग है। सन् 1895 में सांख्यिकी महानिदेशालय (Directorate General of Statistics) नाम से इसकी स्थापना हुई। 1905 मे व्यवसायी वर्ग से सम्पर्क स्थापित करने के लिए केन्द्रीय सरकार ने वाणिज्यिक संज्ञान के महानिदेशक (Director General of Commercial Intelligence) की अध्यक्षता में एक सांख्यिकीय ब्यूरो का समारम्भ किया। 1922 में उक्त दोनों कार्यालयों का विलय करके कलकत्ता में 'वाणिज्यिक संज्ञान एवं सांख्यिकी महानिदेशालय'

(Directorate General of Commercial Intelligence and Statistics—DGCIS) की स्थापना की गई।

द्वितीय महायुद्ध के अन्त तक यह महानिदेशालय महत्वपूर्ण सांख्यिकीय श्रृंखलाओं के संकलन, संघटन, विश्लेषण और प्रकाशन का कार्य करता रहा। कालान्तर में मन्त्रालयों में विभिन्न सांख्यिकीय इकाइयाँ बन जाने पर इसके अनेक कार्य इन एकांशों में हस्तान्तरित कर दिये गये। आजकल वाणिज्यिक सूचना एवं सांख्यिकी महानिदेशालय के निम्न कार्य हैं—

(i) आन्तरिक तथा विदेशी व्यापार से सम्बन्धित समंकों का संग्रहण और प्रकाशन करना;

(ii) विभिन्न पदार्थों के आन्तरिक—रेलमार्गीय, नदीमार्गीय और तटीय—संचलन से सम्बद्ध समंकों का संकलन करना;

(iii) सीमा-शुल्क और उत्पाद-शुल्क (Customs and Excise) से प्राप्त आगम के समंक संकलित करना;

(iv) तटीय और विदेशी जहाजरानी (Coastal and Foreign shipping) से सम्बद्ध समंकों का संग्रहण व प्रकाशन करना; तथा

(v) व्यापार समंकों व सूचकांकों का प्रकाशन व प्रसारण करना।

महानिदेशालय के निम्नांकित मुख्य प्रकाशन हैं—

वार्षिक (Annual) : (i) Annual Statement of the Foreign Trade of India;
(ii) Statistics of Maritime Navigation of India;
(iii) Indian Customs and Central Excise Tariff.

त्रैमासिक (Quarterly) : Statistics of Coastal Trade in India.

मासिक (Monthly) : (i) Monthly Statistics of Foreign Trade of India by Countries and Currency Areas (MSFTI) Vol. I and Vol. II;
(ii) Accounts relating to the Inland (Rail and River-borne) Trade of India;
(iii) Accounts relating to Coastal Trade and Navigation of India.

साप्ताहिक (Weekly) : Indian Trade Journal.

वाणिज्यिक आसूचना एवं सांख्यिकी महानिदेशालय (DGCIS) में 255 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्य करते हैं। 1986–87 में इस पर कुल 2·24 करोड़ रु० वास्तविक व्यय हुआ जबकि 1988–89 मे प्रस्तावित व्यय 2·36 करोड़ रु० था।

2. आयात-निर्यात मुख्य नियन्त्रक का कार्यालय : सांख्यिकीय प्रभाग (Office of the Chief Controller of Imports and Exports : Statistical Division)—आयात-निर्यात प्रमुख नियन्त्रक के कार्यालय में सांख्यिकी निदेशक की अध्यक्षता में एक सांख्यिकीय प्रभाग 1949 में स्थापित किया गया। इस प्रभाग का मुख्य कार्य आयात और निर्यात लाइसेंसिंग के विभिन्न पहलुओं के सम्बन्ध में समंकों का संग्रह, संकलन और प्रकाशन करना है। इसके अतिरिक्त, इस कार्यालय के अधीन कार्यरत आयात-निर्यात व्यापार नियन्त्रण संगठनों की अभिकलित्र-परियोजनाओं (Computerisation projects) के नियोजन और क्रियान्वयन के लिए भी यह प्रभाग उत्तरदायी है। इसके निम्नलिखित प्रकाशन हैं—

वार्षिक (Annual) : (i) Annual Report of Import & Export Trade Organisation;
(ii) Annual Bulletin of Exports & Imports.

साप्ताहिक (Weekly) : Weekly Bulletins of Industrial Import and Export Licences.

3. आपूर्ति एवं निपटान महानिदेशालय—प्रबन्ध सूचना सेवा (Directorate General of Supplies and Disposals—Management Information Service)—यह कार्यालय निम्न कार्य सम्पन्न करता है—

(i) सरकारी क्रय से सम्बद्ध समंकों का संकलन एवं संग्रहण करना;

(ii) प्रत्येक क्रय के प्रकरण की समीक्षा करना, तथा

(iii) क्रय निर्देशिकाओं के लिए आगणन सम्बन्धी सहायता तथा आर्थिक व वाणिज्यिक सूचना प्रदान करना।

इस कार्यालय की गतिविधियों का प्रकाशन वार्षिक रिपोर्ट के रूप में किया जाता है। इसके द्वारा Directory of Government Purchases—Annual भी प्रकाशित की जाती है।

4. भारतीय विदेश व्यापार संस्थान (Indian Institute of Foreign Trade—IIFT)—भारतीय विदेश व्यापार संस्थान निम्न कार्यों को सम्पन्न करने के उद्देश्य से 1964 में संस्थापित किया गया था—

(i) कर्मचारियों को अन्तर्राष्ट्रीय व्यापार से सम्बद्ध उन्नत सांख्यिकीय तकनीकों का प्रशिक्षण देना;

(ii) विदेश व्यापार में आने वाली समस्याओं पर अनुसन्धान के लिए व्यवस्था करना;

(iii) विभिन्न अध्ययनों के लिए विदेश व्यापार तथा सम्बन्धित आर्थिक चर-मूल्यों पर समंकों का संकलन, संग्रहण व विश्लेषण करना;

(iv) विपणन अनुसन्धान, क्षेत्र सर्वेक्षण, वस्तु सर्वेक्षण तथा बाजार सर्वेक्षण का आयोजन करना, तथा

(v) अनुसन्धान तथा बाजार अध्ययन से सम्बन्धित इसकी गतिविधियों से प्राप्त सूचना का प्रचार-प्रसार करना।

संस्थान समय-समय पर विभिन्न वस्तुओं की निर्यात सम्भावनाओं का सर्वेक्षण करके प्रतिवेदन प्रकाशित करता रहता है तथा अपनी गतिविधियों की वार्षिक रिपोर्ट भी प्रसारित करता है।

5. अन्य सांख्यिकीय इकाइयाँ (Other Statistical Units)—सांख्यिकीय सामग्री की आवश्यकताओं की पूर्ति करने हेतु वाणिज्य मन्त्रालय के अधीन स्थापित कॉफी मण्डल (Coffee Board), रबर मण्डल (Rubber Board), चाय मण्डल (Tea Board) तथा मसाला मण्डल (Spices Board) में भी सांख्यिकीय इकाइयाँ कार्यरत हैं।

वित्त मन्त्रालय (Ministry of Finance)

वित्त मन्त्रालय में 5 सांख्यिकीय कार्यालय स्थापित हैं जिनमें 1016 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्यरत हैं। 1986–87 में इन इकाइयों पर कुल 5·34 करोड़ रु० का वास्तविक व्यय हुआ था जबकि 1988–89 में 7·92 करोड़ रु० का व्यय प्रस्तावित था। मन्त्रालय की प्रमुख सांख्यिकीय इकाइयाँ निम्नलिखित हैं—

1. रिजर्व बैंक आफ इण्डिया का शोध एवं सांख्यिकी विभाग* (Department of Research and Statistics, Reserve Bank of India)—भारतीय रिजर्व बैंक का शोध एवं सांख्यिकी विभाग राष्ट्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था का एक अत्यन्त महत्वपूर्ण प्रभाग है जिसकी स्थापना प्रमुख सलाहकार की अध्यक्षता में 1959 में हुई थी। अब इस विभाग को 'सांख्यिकीय विश्लेषण एवं अभिकलित्र सेवा विभाग' (Department of Statistical Analysis and Computer Services) कहा जाता है। इस विभाग के निम्नलिखित प्राथमिक कार्य हैं—

(i) राष्ट्रीय अर्थव्यवस्था के विभिन्न पक्षों, विशेषतया बैंकिंग क्षेत्र, निगम क्षेत्र (corporate sector) और भुगतान सन्तुलन क्षेत्र से सम्बन्धित समंकों का संग्रहण, विधायन (processing) एवं अनुरक्षण (maintenance);

(ii) रिजर्व बैंक के अन्य विभागों—बैंकिंग अनुसंधान, अन्तर्राष्ट्रीय वित्त, मौद्रिक अनुसन्धान, आर्थिक विश्लेषण एवं नीति विभाग आदि को आवश्यक सांख्यिकीय सहायता प्रदान करना;

(iii) बड़े पैमाने पर व्यापक प्रतिदर्श सर्वेक्षण आयोजित करना;

(iv) सरकार द्वारा गठित समितियों व कार्यकारी दलों में अपने अधिकारियों के प्रतिनिधित्व द्वारा व्यापक सर्वेक्षणों के नियोजन और क्रियान्वयन में सक्रिय भूमिका निभाना;

(v) महत्वपूर्ण आर्थिक प्राचलों और चरांकों (economic parameters and variables) के मापन सम्बन्धी अवधारणाओं का विकास करना, तथा

(vi) वित्तीय विषयों पर विभिन्न महत्वपूर्ण प्रकाशन निर्गत करना।

इस विभाग के निम्नांकित प्रमुख प्रकाशन हैं—

वार्षिक (Annual) : (i) Report on Currency and Finance;
(ii) Trend and Progress of Banking in India;
(iii) Report of the Central Board of Directors.

अर्द्ध-वार्षिक (Half Yearly) : Banking Statistics in India.

द्वि-मासिक (Bi-monthly) : Review of Cooperative Movement in India.

मासिक (Monthly) : Reserve Bank of India Bulletin.

साप्ताहिक (Weekly) : Statistical Supplement.

रिजर्व बैंक के इस प्रभाग में 612 सांख्यिकीय वर्ग के कर्मचारी कार्यरत हैं। इस पर 1986–87 में 3·9 करोड़ रु० खर्च हुआ था और 1988–89 में प्रस्तावित व्यय 6 करोड़ रु० था।

2. सांख्यिकी एवं आसूचना निदेशालय—केन्द्रीय उत्पाद-शुल्क एवं सीमा-शुल्क (Directorate of Statistics and Intelligence—Central Excise and Customs)—1946 में स्थापित यह निदेशालय मुख्य सांख्यिकीय अधिकारी की अध्यक्षता में कार्य कर रहा है। इसका मुख्य कार्य केन्द्रीय उत्पाद-शुल्क और महत्वपूर्ण सीमा-शुल्क समंकों का संकलन, संग्रहण और प्रस्तुतीकरण करना है। राजस्व नियन्त्रण की प्रशासनिक कुशलता और पर्याप्तता की समीक्षा करने के लिए उत्पाद-शुल्क एवं सीमा-शुल्क समंकों का विश्लेषण करना इस निदेशालय का प्रमुख उद्देश्य है। इसके द्वारा प्रति माह 'Statistical and Central Excise Bulletin' में सीमा-शुल्क व उत्पाद-शुल्क के समंक प्रकाशित किये जाते हैं।

3. आयकर निदेशालय—शोध एवं सांख्यिकीय शाखा (Directorate of Income Tax—Research & Statistics Wing)—मुख्य सांख्यिकीय सलाहकार की अध्यक्षता मे स्थापित इस सांख्यिकीय इकाई का प्रमुख कार्य सम्पूर्ण भारत के लिए तथा राज्यानुसार आयकर तथा अन्य प्रत्यक्ष करों के समंक संकलित, संग्रहित और प्रकाशित करना है। इसके द्वारा प्रत्यक्ष करों के सम्बन्ध में प्रासंगिक सांख्यिकीय अध्ययन सम्पन्न किये जाते हैं। यह इकाई प्रतिवर्ष प्रत्यक्ष करों के समंक अपने प्रतिवेदन 'All India Income Tax Reports and Returns' नामक पत्रिका में प्रकाशित करती है।

4. सांख्यिकीय शाखा—केन्द्रीय आर्थिक आसूचना ब्यूरो—राजस्व विभाग (Statistical Wing, Central Economic Intelligence Bureau, Department of Revenue)—यह सांख्यिकीय शाखा 1987 में स्थापित की गई और सहायक महानिदेशक (Assistant Director General) के अधीन कार्य कर रही है। इसका मुख्य कार्य प्रत्यक्ष और अप्रत्यक्ष करों तथा काले धन (Black Money) से सम्बन्धित विश्लेषणात्मक अध्ययन आयोजित करना है।

5. वेतन शोध एकांश—व्यय विभाग (Pay Research Unit—Department of Expenditure)—केन्द्रीय सरकार तथा केन्द्र शासित प्रदेशों के कर्मचारियों और विदेशों में कार्यरत भारतीय दूतावासों के कर्मचारियों के वेतन, परिलब्धियों और भत्तों पर होने वाले व्यय के समंको के संकलन, संग्रहण और विश्लेषण के लिए वित्त मन्त्रालय के व्यय विभाग में वेतन शोध एकांश की स्थापना की गई है। यह इकाई कर्मचारियों को अनुमन्य किये जाने वाले महँगाई भत्ते, बोनस आदि के सरकारी प्रस्तावों के वित्तीय भार का विश्लेषण करती है तथा राज्य सरकारो के कर्मचारियों की न्यूनतम और अधिकतम परिलब्धियों के सम्बन्ध में प्रासंगिक सूचना भी उपलब्ध

कराती है।

उद्योग मन्त्रालय (Ministry of Industry)

उद्योग मन्त्रालय की 7 सांख्यिकीय इकाइयों में 303 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्यरत हैं। इन इकाइयों पर 1986-87 में 24 लाख रु० वास्तविक व्यय हुआ जबकि 1988-89 में प्रस्तावित व्यय 33 लाख रु० था। प्रमुख इकाइयाँ निम्न प्रकार हैं—

1. आर्थिक सलाहकार का कार्यालय (Office of the Economic Advisor)—यह कार्यालय 1938 में स्थापित किया गया था। इसके निम्नलिखित कार्य हैं—

(i) भारत में थोक मूल्य सूचकांकों की नियमित साप्ताहिक आधार पर रचना करने के लिए आवश्यक मूल्य-समंक संकलित करना;

(ii) थोक मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों की समीक्षा करना;

(iii) औद्योगिक उत्पादन की प्रवृत्तियों का अध्ययन करना;

(iv) अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों से सम्बन्धित समंकों का विश्लेषण करना;

(v) थोक मूल्य सूचकांकों का नियमित रूप से प्रकाशन करना।

इस कार्यालय के द्वारा 'भारत में थोक मूल्यों का सूचकांक' (Index Number of Wholesale Price in India) नामक प्रकाशन नियमित रूप से निर्गत किया जाता है। देश की आर्थिक संरचना में होने वाले परिवर्तनों को दृष्टिगत रखते हुए इस शृंखला में अनेक बार संशोधन किये गये हैं। जुलाई 1989 से भारत में थोक मूल्य सूचकांकों की नवीन शृंखला आरम्भ की गई है जिसमें आधार वर्ष 1981-82 रखा गया है। इस नवीन शृंखला में 447 वस्तुओं के 2371 मूल्य उद्धरणों का प्रयोग किया जाता है। नवम्बर 1990 से इस प्रकाशन में हिन्दी और अंग्रेजी दोनों ही भाषाओं का प्रयोग किया जाने लगा है।

2. सांख्यिकीय एवं समंक अधिकोष प्रभाग—लघु उद्योग विकास आयुक्त कार्यालय (Statistics & Data Bank Division—Office of the Development Commissioner, Small Scale Industries)—इस प्रभाग की स्थापना 1954 में की गई थी। इसमें 175 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्यरत हैं। इस प्रभाग के निम्न कार्य हैं—

(i) लघु उद्योगों के समंकों का संग्रहण और प्रसारण करना;

(ii) लघु उद्योग क्षेत्र में उत्पादन के सूचकांक की रचना करना;

(iii) लघु उद्योग क्षेत्र में उत्पादन, रोजगार, विनियोग आदि के अनुमानों का आकलन करना;

(iv) अपने कार्यकलापों की सामयिक रिपोर्ट प्रकाशित करना।

3. सांख्यिकीय प्रकोष्ठ—तकनीकी विकास महानिदेशालय (Statistical Cell—Directorate General of Technical Development—DGTD)—तकनीकी विकास महानिदेशालय के अधीन आने वाले मध्यम और बृहत्-स्तर के उद्योगों के क्षमता उपयोग और उत्पादन के समंकों का अनुरक्षण, विवेचन और प्रकाशन करना इस प्रकोष्ठ का प्रमुख कार्य है। इसके निम्न दो मुख्य प्रकाशन हैं—

(i) Statistics relating to DGTD units.

(ii) Handbook of Industrial Data.

4. आर्थिक शोध निदेशालय—खादी व ग्रामोद्योग आयोग (Directorate of Economic Research—Khadi & Village Industries Commission)—इस निदेशालय की स्थापना 1957 में हुई थी। इसके अध्यक्ष उप-प्रमुख प्रभारी अधिकारी (Deputy Chief Executive Officer) हैं। निदेशालय के निम्नांकित उल्लेखनीय कार्य हैं—

(i) सामयिक और वार्षिक प्रतिवेदनों के लिए खादी और ग्रामोद्योग आयोग (KVIC) के समंकों का संकलन, संग्रहण और विश्लेषण करना;

(ii) विशेष अध्ययन एवं सर्वेक्षण आयोजित करना;

(iii) खादी एवं ग्रामोद्योगों की प्रगति का मूल्यांकन व अनुवीक्षण करना।

इसके द्वारा वार्षिक रिपोर्ट और अन्य सामयिक प्रकाशन निर्गमित किये जाते है।

5. अन्य इकाइयाँ (Other Units)—उद्योग मन्त्रालय के अधीन निम्नांकित सांख्यिकीय इकाइयाँ भी कार्यरत हैं जो अपने क्षेत्र में समंकों के संकलन, विश्लेषण और प्रकाशन का कार्य सम्पन्न करती है।

(i) औद्योगिक लागत एवं मूल्य संस्थान का आर्थिक प्रभाग (Economic Division—Bureau of Industrial Costs and Prices) जो उद्योगों के लागत-कीमत अध्ययनो के लिए तकनीकी आर्थिक व सांख्यिकीय सहायता प्रदान करता है;

(ii) नारियल जटा मण्डल (Coir Board), जिस पर नारियल जटा के निर्यात-समंकों के संकलन व विश्लेषण तथा नारियल-उत्पादक राज्यों में सांख्यिकीय सर्वेक्षण आयोजित करने का दायित्व है, तथा

(iii) शोध एवं सांख्यिकी प्रभाग—कम्पनी कार्य विभाग (Research & Statistics Division—Department of Company Affairs) जिस पर कम्पनियों के समंकों तथा एकाधिकार एवं अवरोधक व्यापारिक व्यवहार अधिनियम (MRTP Act) के अन्तर्गत वर्गीकृत वस्तुओं के उत्पादन समंकों के संकलन एवं विश्लेषण का दायित्व है।

श्रम मन्त्रालय (Ministry of Labour)

श्रम मन्त्रालय में 4 सांख्यिकीय इकाइयाँ हैं जिनमें 673 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्य करते है। 1986-87 में इन इकाइयों पर कुल 2·19 करोड़ रु० खर्च किया गया था जबकि 1988-89 में 3·32 करोड़ रु० के प्रस्तावित व्यय का प्रावधान था। इस मन्त्रालय की प्रमुख सांख्यिकीय इकाइयाँ निम्न है—

1. श्रम संस्थान (Labour Bureau)—यह श्रम मन्त्रालय का सबसे महत्वपूर्ण सांख्यिकीय संस्थान है जिसकी स्थापना 1946 में शिमला में हुई थी। वर्तमान में, इस संस्थान मे 535 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्यरत हैं और इस पर 3 करोड़ रु० से अधिक वार्षिक व्यय होता है। इसके मुख्य कार्यालय चण्डीगढ़ और शिमला में है तथा चार क्षेत्रीय कार्यालय अहमदाबाद, कलकत्ता, कानपुर और मद्रास में स्थित है। श्रम संस्थान देश के श्रम समंकों के सकलन, समन्वय और विश्लेषण के लिए स्थापित केन्द्रीय अधिकरण है। इसके निम्न कार्य उल्लेखनीय है—

(i) औद्योगिक सम्बन्ध, रोजगार, सामाजिक सुरक्षा, श्रमिको की मजदूरी, उत्पादकता, क्षतिपूर्ति आदि से सम्बन्धित समंकों का संग्रहण और विश्लेषण करना;

(ii) समय-समय पर श्रम-सर्वेक्षण और विशेष अध्ययन आयोजित करना;

(iii) कुछ विशिष्ट केन्द्रो के सांख्यिकीय सर्वेक्षणों के आधार पर कृषि और औद्योगिक मजदूरों के उपभोक्ता-मूल्य सूचकांकों (CPI) का निर्माण और प्रकाशन करना;

(iv) अन्य संस्थाओ द्वारा संकलित श्रम-समंकों मे समन्वय स्थापित करना;

(v) श्रम नीति निर्धारण के लिए आवश्यक शोध कार्य करना और सर्वेक्षण आयोजित करना, तथा

(vi) महत्वपूर्ण श्रम अधिनियमों के क्रियान्वयन के सम्बन्ध में समय-समय पर रिपोर्ट निर्गमित करना। श्रम संस्थान के महत्वपूर्ण प्रकाशन निम्नांकित हैं—

वार्षिक (Annual) : (i) Indian Labour Statistics;
(ii) Indian Labour Year book;
(iii) Pocket Book of Labour Statistics;
(iv) Statistics of Factories;
(v) Reports on the Working of Factories Act, Minimum Wages Act, Workmen's Compensation Act, Employees State Insurance Act etc.

द्विवार्षिक (Biennial) : **Trade Unions in India.**

मासिक (Monthly) : **Indian Labour Journal.**

2. रोजगार एवं प्रशिक्षण महानिदेशालय (Directorate General of Employment and Training—*DGET*)—इस महानिदेशालय के सांख्यिकीय प्रभाग में एक संयुक्त निदेशक की अध्यक्षता मे 92 कर्मचारी कार्यरत हैं। रोजगार कार्यालयों से सम्बन्धित समंकों तथा विभिन्न श्रमिक प्रशिक्षण योजनाओं के आँकड़ों का संकलन, विश्लेषण व प्रकाशन करना इसका प्रमुख दायित्व है। महानिदेशालय के सांख्यिकीय प्रभाग के निम्न कार्य हैं—

(i) रोजगार कार्यालयों (employment exchanges) से सम्बद्ध समंकों का संकलन व प्रकाशन करना;

(ii) रोजगार बाजार सूचना कार्यक्रम (employment market information programme) के तहत वैधानिक दायित्व का पालन करते हुए सार्वजनिक एवं निजी क्षेत्रों में रोजगार समंकों का संकलन व संग्रहण करना;

(iii) केन्द्रीय सरकार के कर्मचारियों की संगणना के समंक प्रकाशित करना;

(iv) सार्वजनिक और निजी क्षेत्रों तथा औद्योगिक प्रशिक्षण संस्थाओं में आयोजित विभिन्न श्रम प्रशिक्षण योजनाओं के सम्बन्ध में महत्वपूर्ण सांख्यिकीय सामग्री उपलब्ध कराना;

(v) रोजगार के लिए शिक्षा और व्यवसाय सम्बन्धी क्षेत्रों के समंक संकलित करना।

महानिदेशालय के महत्वपूर्ण प्रकाशन निम्नांकित है—

द्विवार्षिक (Biennial) : *Occupational Educational Pattern in India for Private Sector & Public Sector.*

वार्षिक (Annual) : (i) **Employment Review;**
(ii) Census of Central Govt. Employees.

त्रैमासिक (Quarterly) : **Quarterly Employment Review.**

मासिक (Monthly) : **Monthly Review.**

*3. सांख्यिकीय प्रभाग—खान सुरक्षा महानिदेशालय (Statistical Division—*Directorate General of Mines Safety)—यह प्रभाग खान अधिनियम 1952 के अधीन भारत की सभी खानों से सम्बन्धित सुरक्षा समंकों के संकलन, विश्लेषण और प्रस्तुतीकरण का कार्य करता है। *इसके वार्षिक प्रतिवेदन से देश में खान-सुरक्षा की स्थिति स्पष्ट होती है।*

4. कारखाना परामर्श सेवा एवं श्रम संस्था महानिदेशालय (Directorate General—Factory Advice Service & Labour Institute)—इस संस्था की स्थापना *वर्ष 1945 में हुई थी। इसके प्रबन्ध-सूचना सेवा प्रभाग (MIS Division) के निम्न कार्य हैं—*

(i) कारखाना क्षेत्र के सम्बन्ध में कारखानों के मुख्य निरीक्षकों से प्राप्त समंकों का संकलन, विश्लेषण और निर्वचन करना;

(ii) कारखानों में दुर्घटनाओं तथा रोजगार में होने वाले परिवर्तनों की प्रवृत्तियों का अध्ययन करना, तथा

(iii) औद्योगिक और व्यावसायिक स्वास्थ्य के क्षेत्रों में उपलब्ध समंकों का विश्लेषण करना।

यह प्रभाग अपने कार्यकलापों का विवरण वार्षिक प्रतिवेदन के रूप में प्रकाशित करता है।

गृह मंत्रालय
(Ministry of Home Affairs)

गृह मन्त्रालय की कुल 34 सांख्यिकीय इकाइयों में से 33 इकाइयाँ भारत के महापंजीकार और जनगणना आयुक्त के कार्यालय (Office of the Registrar General and Census Commissioner, India) तथा 25 राज्यों और 7 केन्द्र-शासित प्रदेशों में निदेशक, जनगणना कार्य (Director, Census Operations) के अधीन कार्य कर रही है और शेष 1 उत्तर-पूर्वी

परिषद (North Eastern Council) से सम्बद्ध है। इन इकाइयों में 4016 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्य कर रहे हैं। वर्ष 1986–87 में इन इकाइयों पर कुल 16 करोड़ रु० वास्तविक व्यय हुआ तथा 1988–89 में प्रस्तावित व्यय 27·53 करोड़ रु० था।

1. महापंजीकार और जनगणना आयुक्त का कार्यालय (Office of the Registrar General and Census Commissioner)—यह कार्यालय जनगणना अधिनियम, 1948 के तहत दस-वर्षीय जनगणना आयोजित करने तथा सम्बद्ध जनांकिकीय समंकों का संग्रहण, विश्लेषण और निर्वचन करके उनका प्रकाशन करने के लिए स्थायी रूप से स्थापित किया गया है। फरवरी 1970 से (1969 के जन्म-मृत्यु पंजीकरण अधिनियम के अधीन) जीवन समंकों के संग्रहण, विश्लेषण और प्रकाशन का कार्य भी इसी कार्यालय को सौंप दिया गया है। इस प्रकार इस कार्यालय के निम्न प्रमुख कार्य हैं—

(i) दस-वर्षीय जनगणना सम्पन्न कराना;
(ii) जनगणना समंकों का सारणीयन करके प्रकाशन करना;
(iii) जन्म-मृत्यु पंजीकरण कार्य का केन्द्रीय स्तर पर समन्वय;
(iv) प्रतिदर्श पंजीकरण (Sample Registration), आदर्श पंजीयन (Model Registration) जैसी विशेष परियोजनाओं द्वारा जनांकिकीय समंकों का संकलन व विश्लेषण करना।

महापंजीकार और जनगणना आयुक्त के कार्यालय के निम्न प्रमुख प्रभाग (divisions) हैं—

(i) प्रशासनिक प्रभाग (Administrative Division);
(ii) जनगणना प्रभाग (Census Division);
(iii) मानचित्र प्रभाग (Map Division);
(iv) सामाजिक अध्ययन प्रभाग (Social Studies Division);
(v) भाषा प्रभाग (Language Division);
(vi) जनांकिकी प्रभाग (Demography Division);
(vii) जीवन समंक प्रभाग (Vital Statistics Division);
(viii) समंक विधायन प्रभाग (Data Processing Division)।

प्रत्येक राज्य/केन्द्र-शासित प्रदेश में जनगणना कार्य निदेशक (Director, Census Operations—DCO) का कार्यालय स्थापित है जिसके कार्यों में अपने क्षेत्र में जनगणना क्रियाओं की देखभाल करने के अतिरिक्त जनसंख्या समंकों का सारणीयन करना तथा महापंजीकार कार्यालय के विभिन्न प्रभागों से सम्बन्धित कार्य का निष्पादन करना सम्मिलित है। इस कार्यालय के मुख्य प्रकाशन निम्नलिखित हैं—

(i) Census of India—Provisional Population Totals;
(ii) Census Reports;
(iii) District Hand-books;
(iv) Indian Population Bulletin;
(v) Vital Statistics of India;
(vi) Registrar General's Newsletter.

2. मूल्यांकन और अनुवीक्षण एकांश—उत्तर-पूर्वी परिषद सचिवालय (Evaluation & Monitoring Unit—North Eastern Council Secretariat)—1972 में स्थापित उत्तर-पूर्वी परिषद का यह मूल्यांकन एवं अनुवीक्षण एकांश एक निदेशक (Director, E & M) के अधीन कार्य कर रहा है। परिषद की परियोजनाओं का मूल्यांकन व अनुवीक्षण करना, उन योजनाओं की भौतिक और वित्तीय प्रगति का विश्लेषण करना तथा परिषद की गतिविधियों से सम्बन्धित प्रकाशन निर्गत करना इस इकाई के प्रमुख कार्य हैं।

रेल मन्त्रालय
(Ministry of Railways)

रेल मन्त्रालय की 11 सांख्यिकीय इकाइयों में कुल 2381 सांख्यिकीय वर्ग के कर्मचारी

कार्यरत है। इन इकाइयों पर 1986–87 में 3 करोड़ रु० का वास्तविक व्यय हुआ था और 1988–89 में प्रस्तावित व्यय 3·8 करोड़ रु० था।

रेल मन्त्रालय की निम्न प्रमुख सांख्यिकीय इकाइयाँ है—

1. अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय, रेलवे बोर्ड (Directorate of Economics & Statistics, Railway Board)—इस निर्देशालय के निम्न मुख्य कार्य हैं—

(i) रेल परिवहन की प्रगति से सम्बन्धित सभी प्रकार के समंकों का संकलन, संग्रहण, समन्वय, विश्लेषण और प्रसारण करना;

(ii) रेल-अर्थशास्त्र के विभिन्न पहलुओं पर शोध-सर्वेक्षण आयोजित करना, तथा

(iii) रेलवे सम्बन्धी प्रबन्ध-सूचना सेवाएँ उपलब्ध कराना। इसके निम्नांकित प्रमुख प्रकाशन हैं—

त्रिवार्षिक (Triennial) : History of Indian Railways.
वार्षिक (Annual) : Indian Railways.
त्रैमासिक (Quarterly) : Trimonthly Advance Statement of Gross Earnings of Indian Railways.
मासिक (Monthly) : (i) Monthly Railway Statistics;
(ii) Monthly Workshop Repair Statistics.

2. नौ रेलवे क्षेत्रीय कार्यालयों व इन्टीग्रल कोच फैक्टरी के सांख्यिकीय प्रकोष्ठ (Nucleus Statistical Cells attached to Integral Coach Factory and Nine Railway Zones)—भारतीय रेलों को नौ मण्डलों में बाँटा गया है जैसे उत्तर, दक्षिण, पूर्व, पश्चिम, मध्य, उत्तर-पूर्वी, उत्तर-पूर्वी सीमान्त, दक्षिण-मध्य तथा दक्षिण-पूर्वी रेलवे। प्रत्येक मण्डल में एक नाभिकीय सांख्यिकीय प्रकोष्ठ है जो उसके कार्यक्षेत्र में रेल परिवहन की प्रगति के समंक संकलित और विश्लेषित करता है। इसी प्रकार, पेराम्बूर के रेल-डिब्बे बनाने के कारखाने (Integral Coach Factory) में भी एक सांख्यिकीय प्रकोष्ठ कार्य कर रहा है।

रक्षा मन्त्रालय (Ministry of Defence)

रक्षा मन्त्रालय की निम्नांकित 4 सांख्यिकीय इकाइयों में 84 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्यरत हैं—

1. अतिरिक्त महानिदेशालय (प्रणाली)—सेना मुख्यालय (Additional Directorate General (Systems)—Army Headquarters—सैन्य सांख्यिकीय संगठन (Army Statistical Organisation) नाम से इस निदेशालय की स्थापना 1938 में हुई थी। नवम्बर 1982 से समंकों के अनुरक्षण और अनुप्रयोग से सम्बन्धित सभी कार्य इस संगठन को सौंपे गये और इसका नाम प्रबन्ध-सूचना प्रणाली निदेशालय (Directorate of Management Information Systems) रखा गया। आजकल यह संगठन अतिरिक्त महानिदेशालय—प्रणाली (Additional Directorate General—Systems) नाम से कार्यरत है। यह मेजर जनरल की अध्यक्षता में कार्य करता है और इसके सांख्यिकीय प्रकोष्ठ का अध्यक्ष उपमहानिदेशक सांख्यिकी (Deputy Director General—Statistics) होता है।

महानिदेशालय के निम्न तीन क्रियात्मक एकांश हैं—

(i) सांख्यिकीय प्रकोष्ठ (Statistical Cell) इसके निम्न कार्य हैं—

(क) सेना मुख्यालय में नीति-निर्णयों के मार्ग दर्शन हेतु अपेक्षित आसूचना से सम्बन्धित शोध-कार्य करना तथा आवश्यक समंकों का विश्लेषण करना;

(ख) भारतीय सेना के विभिन्न पहलुओं—जन-शक्ति, परिवहन, अस्त्र-शस्त्र, साज-सज्जा, आवास व स्वास्थ्य—पर सूचना का संकलन, अन्वेषण व प्रसारण करना;

(ग) सेना मुख्यालय की सभी शाखाओं के लिए उसके विभिन्न संगठनों से प्रतिवेदनों और प्रत्यायों की प्राप्ति करके एक समाशोधन-गृह का कार्य करना;

(घ) सैन्य रुचि के विषयों पर सांख्यिकीय सर्वेक्षण व अध्ययन करना, तथा

(च) सैनिक समंकों के सम्बन्ध में परामर्श देना।

(ii) प्रबन्ध-सूचना प्रणाली संगठन (Management Information System Organisation—MISO)—इसका कार्य अभिकलित्र-आधारित तथा हस्तचालित सूचना प्रणालियों का नियोजन और अनुरक्षण करना है।

(iii) सेना मुख्यालय अभिकलित्र केन्द्र (Army Headquarter Computer Centre) जिस पर सैन्य मुख्यालय के विभिन्न कक्षों में अभिकलित्र सहायता पहुँचाने का दायित्व है।

2. वायु सेना सांख्यिकीय संगठन—वायु सेना मुख्यालय (Air Force Statistical Organisation—Air H.Q.)—1958 में स्थापित इस संगठन के कार्यों मे मुख्य रूप से सैनिक वायुयान, वायु सेना कार्मिक और सम्बन्धित विषयों के सन्दर्भ में सूचना का अनुरक्षण, विश्लेषण और प्रसारण करना सम्मिलित है।

3. सांख्यिकीय प्रभाग, उड़ान सुरक्षा निदेशालय, वायु सेना मुख्यालय (Statistical Section, Directorate of Flight Safety, Air HQ.)—1963 में स्थापित इस प्रभाग पर भारतीय वायु सेना (IAF) में वायुयानों की दुर्घटनाओं से सम्बद्ध समंको के संकलन, अनुरक्षण और विश्लेषण का दायित्व है।

4. सांख्यिकी एवं अभिलेख निदेशालय—पुनर्वास महानिदेशालय (Directorate of Statistics & Records—Directorate General Resettlement)—1972 में स्थापित इस निदेशालय को सेवा-निवृत रक्षा कर्मचारियों पर विभिन्न अध्ययन व सर्वेक्षण आयोजित करने का कार्य सौंपा गया है।

रक्षा मन्त्रालय की सांख्यिकीय इकाइयों द्वारा अनेक प्रतिवेदन एवं पत्रिकाएँ प्रकाशित की जाती हैं जिनमे से Statistical Digest, Yellow Book, Annual Reports उल्लेखनीय है।

मानव संसाधन विकास मन्त्रालय
(Ministry of Human Resources Development)

इस मन्त्रालय में विभिन्न विभागों से सम्बन्धित 6 सांख्यिकीय इकाइयाँ हैं जिनमें सांख्यिकीय वर्ग के 95 कर्मचारी कार्यरत हैं। प्रमुख इकाइयाँ निम्न प्रकार हैं—

1. नियोजन, अनुवीक्षण और सांख्यिकीय प्रभाग—शिक्षा विभाग (Planning, Monitoring and Statistical Division—Department of Education)—उपशिक्षा सलाहकार की अध्यक्षता में स्थापित इस प्रभाग का सम्बन्ध मुख्यतया शैक्षिक समंको के संकलन, संग्रहण, विश्लेषण, निर्वचन और प्रकाशन से है। राज्य-शिक्षा विभागों की सहायता से देश की सभी मान्यता प्राप्त शिक्षा संस्थाओं, विश्वविद्यालयों और उच्च शिक्षा संस्थानो से समंक संकलित किये जाते हैं। इस प्रभाग द्वारा शिक्षा क्षेत्र में प्रतिदर्श सर्वेक्षण और विशिष्ट अध्ययन सम्पन्न किये जाते हैं तथा शैक्षिक समंकों मे प्रशिक्षण कार्यक्रम भी आयोजित किये जाते हैं।

इस प्रभाग के प्रमुख प्रकाशन निम्न प्रकार हैं—

वार्षिक (Annual) : (i) Education in India Vol. I & II;
(ii) Education in States;
(iii) Education in Universities in India;
(iv) University Development in India.

2. मापन, मूल्यांकन, सर्वेक्षण एवं समंक विभाग—शैक्षिक अनुसन्धान तथा प्रशिक्षण की राष्ट्रीय परिषद (Department of Measurement, Evaluation, Survey & Data—National Council for Educational Research & Training)—1961 में स्थापित यह विभाग एक प्रोफेसर की देख-रेख में कार्य कर रहा है। इसके निम्न कार्य हैं—

(i) अखिल भारतीय शैक्षिक सर्वेक्षण और शिक्षा मे अन्य प्रतिदर्श सर्वेक्षण आयोजित करना;

(ii) परीक्षा-पद्धति तथा मूल्यांकन प्रक्रियाओं में सुधार प्रस्तावित करना;

(iii) राष्ट्रीय प्रतिभा अनुसन्धान परीक्षा की व्यवस्था करना;

(iv) शोध कार्य, सर्वेक्षण तथा प्रशासनिक कार्यों के लिए समंक-विधायन सुविधाएँ उपलब्ध कराना।

3. सांस्कृतिक समंक एकांश—संस्कृति विभाग (Cultural Statistics Unit, Department of Culture)—इस एकांश की स्थापना 1986 में की गई। इसका महत्वपूर्ण कार्य राष्ट्रीय स्तर पर सांस्कृतिक गतिविधियों के समंकों का संकलन, संग्रहण और प्रकाशन करना है।

4. अन्य सांख्यिकीय इकाइयाँ (Other Statistical Units)—उपर्युक्त प्रमुख सांख्यिकीय प्रभागों के अतिरिक्त मानव संसाधन विकास मन्त्रालय में निम्न इकाइयाँ भी कार्यरत हैं—

(i) समंक अभिलेख, भारतीय सामाजिक विज्ञान अनुसन्धान परिषद (Data Archives, Indian Council of Social Science Research) *जिस पर सामाजिक विज्ञान शोध कार्य* के लिए आवश्यक समंकों का समन्वय करना, समंक संग्रहण संस्थाओं और समंक उपयोगकर्ताओं में सामंजस्य कड़ी का कार्य करने और शोध-कर्ताओं को अभिकलित्र प्रयोगों में सहायता प्रदान करने का दायित्व है।

(ii) शोध, मूल्यांकन एवं सांख्यिकीय प्रभाग तथा समंक अधिकोष—केन्द्रीय समाज कल्याण मण्डल (*Research, Evaluation & Statistics Division & Data Bank—Central* Social Welfare Board)—जिसके मुख्य कार्यों में कल्याण मण्डल से सहायता प्राप्त स्वैच्छिक संगठनों से सम्बद्ध समंकों का संकलन, संग्रहण और आकलन करना और मण्डल के विभिन्न कार्यक्रमों का मूल्यांकन व अनुवीक्षण सम्मिलित है।

योजना मन्त्रालय (Ministry of Planning)

योजना मन्त्रालय में 181 सांख्यिकीय इकाइयाँ कार्यरत है जो केन्द्र सरकार के मन्त्रालयों से संलग्न सांख्यिकीय इकाइयों की कुल संख्या के आधे से भी अधिक है। इन 181 इकाइयों में से 177 इकाइयाँ राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन (N.S.S.O.) के अधीन कार्य कर रही है। मन्त्रालय की सभी सांख्यिकीय इकाइयों में कुल 5387 सांख्यिकीय वर्ग के कर्मचारी कार्य करते हैं जिनमें से *4428—NSSO में नियुक्त हैं। योजना मन्त्रालय की सांख्यिकीय इकाइयों का 1986–*87 में वास्तविक व्यय 28·6 करोड़ रु० था तथा 1988–89 में प्रस्तावित व्यय 39·6 करोड़ रु० *था।*

योजना मन्त्रालय के अधीन निम्नलिखित प्रमुख सांख्यिकीय संगठन महत्वपूर्ण सांख्यिकीय कार्यों में संलग्न है—

1. सांख्यिकीय विभाग (Department of Statistics)—यह विभाग आर्थिक नियोजन के लिए प्रयोग में आने वाले व्यापक समंकों के विश्लेषण, समन्वय व विधायन के उद्देश्यों से 1961 में मन्त्रिमण्डल सचिवालय (Cabinet Secretariat) में स्थापित किया गया था। फरवरी 1973 में सांख्यिकीय विभाग को योजना मन्त्रालय के अधीन हस्तान्तरित कर दिया गया। इस विभाग के प्रमुख कार्य निम्नवत् हैं—

(क) समंकों के संकलन, संग्रहण एवं प्रस्तुतीकरण के लिए आवश्यक मानक अवधारणाओं, प्रतिमानों व प्रतिरूपों (standard concepts, norms and forms) की प्रस्थापना करना;

(ख) आर्थिक नियोजन, नीति-निर्धारण एवं योजना क्रियान्वयन के लिए अपेक्षित सांख्यिकीय सामग्री उपलब्ध करने हेतु सामान्य निर्देश देना;

(ग) केन्द्रीय मन्त्रालयों में स्थापित विभिन्न सांख्यिकीय इकाइयों में समन्वय स्थापित करना तथा समंकों के पुनरावर्तन को रोकना, तथा

(घ) केन्द्र एवं राज्यों के सांख्यिकीय क्रियाकलापों में उचित समन्वय स्थापित करना।

उपर्युक्त उद्देश्यों की पूर्ति के लिए सांख्यिकीय विभाग के तहत निम्नलिखित महत्वपूर्ण संगठन कार्य कर रहे हैं। *इन सभी संगठनों का आगे इसी खण्ड में विस्तृत वर्णन किया गया है—*

(i) केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (Central Statistical Organization—C.S.O.);

(ii) राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन (National Sample Survey Organisation—N.S.S.O.);

(iii) अभिकलित्र केन्द्र (Computer Centre)।

कलकत्ता में स्थित अन्तर्राष्ट्रीय-ख्याति प्राप्त भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (Indian Statistical Institute) भी योजना मन्त्रालय के तत्त्वावधान में एक स्वतन्त्र संस्था के रूप में कार्य कर रहा है।

2. योजना आयोग के सांख्यिकीय प्रकोष्ठ (Statistical Cells attached to Planning Commission)—योजना आयोग के कुछ संघटक संगठनों में निम्नांकित महत्वपूर्ण प्रकोष्ठ कार्य कर रहे हैं—

(i) कार्यक्रम मूल्यांकन संगठन का सांख्यिकीय प्रभाग (Statistical Division of the Programme Evaluation Organisation)—इस प्रभाग का मुख्य कार्य विभिन्न मन्त्रालयों के विकास कार्यक्रमों के मूल्यांकन अध्ययनों (evaluation studies) का निष्पादन करने में सहायता प्रदान करना है।

(ii) परिदृश्य नियोजन प्रभाग (Perspective Planning Division) पर मुख्य रूप से वैकल्पिक मान्यताओं के अन्तर्गत अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के विकास परिदृश्यों के लिए योजना प्रतिमानों की रचना का दायित्व है।* इस प्रभाग के कार्य क्षेत्र में पंचवर्षीय योजना की मध्यावधि समीक्षा और वार्षिक योजना की प्रगति का मूल्यांकन भी सम्मिलित है।

(iii) केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन का सांख्यिकी एवं सर्वेक्षण प्रभाग जो योजना आयोग में स्थित है (The Statistics & Survey Division of CSO, located in the Planning Commission)—इस प्रभाग के निम्न कार्य हैं—

(क) 'आर्थिक परामर्श एवं सांख्यिकी' (Economic Advice and Statistics) के तहत सांख्यिकीय योजनाओं का निर्माण करना;

(ख) सांख्यिकीय परियोजनाओं की प्रगति का मूल्यांकन करना;

(ग) विभिन्न महत्वपूर्ण प्रकाशन निर्गत करना जिनमें प्रमुख हैं—

(अ) Basic Statistics Relating to Indian Economy (Annual); तथा

(ब) India's Economy in Figures.

अन्य मन्त्रालय (Others Ministries)

उपर्युक्त मन्त्रालयों के अतिरिक्त अन्य मन्त्रालयों के अधीन भी समंक संकलन, विधायन, विश्लेषण तथा प्रकाशन हेतु अनेक महत्वपूर्ण सांख्यिकीय प्रभाग कार्य कर रहे हैं, जिनमें से कुछ अग्रांकित हैं—

* The Perspective Planning Division is mainly concerned with plan modelling exercises for providing growth profiles of various sectors of the economy under alternate assumptions—*Statistical System in India*, 1989, p. 27.

मन्त्रालय	सांख्यिकीय प्रभागों की संख्या	प्रमुख प्रभाग	प्रमुख कार्य
I. भूतल परिवहन (Surface Transport)	7	परिवहन शोध प्रभाग (Transport Research Division)	भूतल परिवहन सड़कें, सड़क यातायात, बन्दरगाह, जहाजरानी व आन्तरिक जल परिवहन से सम्बद्ध समंकों का संकलन, विश्लेषण व प्रसारण करना, नीति-नियोजन में सहायता करना
		पोर्ट ट्रस्ट के सांख्यिकीय प्रभाग—बम्बई, कोचीन, कांडला, मद्रास, मारमुगाओ तथा विशाखापटनम बन्दरगाह।	उक्त बन्दरगाह न्यासों के कार्यकलापों से संबद्ध समंकों का संकलन, विश्लेषण व प्रसारण करना
II. स्वास्थ्य तथा परिवार कल्याण (Health & Family Welfare)	7	स्वास्थ्य संज्ञान केन्द्रीय ब्यूरो (Central Bureau of Health Intelligence)	स्वास्थ्य सम्बन्धी कार्यक्रमों के समंकों का संकलन व प्रकाशन करना, प्रशिक्षण देना
		अखिल भारतीय स्वास्थ्य-विज्ञान एवं सार्वजनिक स्वास्थ्य संस्थान (All India Institute of Hygiene and Public Health)	अध्यापन, शोध कार्य व परामर्श सेवाएं आयोजित करना
		परिवार कल्याण विभाग का मूल्यांकन व संज्ञान प्रभाग (Evaluation & Intelligence Division, Dept. of Family Welfare)	कार्यक्रम मूल्यांकन व जनांकिकीय शोध कार्य का समन्वय करना
		जनसंख्या विज्ञान का अन्तर्राष्ट्रीय संस्थान (International Institute for Population Sciences)	जनसंख्या/जनांकिकीय क्षेत्र में प्रशिक्षण व शोध कार्य
		चिकित्सा समंक शोध संस्थान (Institute for Research in Medical Statistics)	चिकित्सा व स्वास्थ्य समंकों के संकलन में समन्वय, प्रमापीकरण; स्वास्थ्य-समंकों में प्रयुक्त विधियों में शोध, सांख्यिकीय विधियों में प्रशिक्षण तथा चिकित्सा व स्वास्थ्य समंकों-अधिकोषों की स्थापना करना
III. इस्पात तथा खान (Steel & Mines)	2	खनिज सांख्यिकी प्रभाग, भारतीय खान ब्यूरो (Mineral Statistics Division, Indian Bureau of Mines)	खनन उद्योग की प्रगति की समीक्षा, उत्खनन, मूल्य, आयात-निर्यात समंकों का संकलन व प्रकाशन करना
		लोहा व इस्पात विकास आयुक्त कार्यालय का सांख्यिकीय प्रभाग (Statistical Division, Office of Development Commissioner, Iron & Steel)	ग्यारह विभिन्न प्रकार के उद्योगों में लोहा-इस्पात पदार्थों के उत्पादन, उपभोग आदि के समंकों का संकलन व प्रसारण करना
IV. जल संसाधन (Water Resources)	4	सांख्यिकी निदेशालय—केन्द्रीय जल आयोग (Directorate of Statistics, Central Water Commission)	जल संसाधनों से सम्बद्ध समंकों का संकलन, संग्रहण व प्रकाशन, अध्ययन व सर्वेक्षण कराना, तकनीकी परामर्श देना
		नदी समंक निदेशालय सांख्यिकीय प्रभाग (Statistical Division, River Data Directorate)	राष्ट्रीय जल संसाधन समंकों के कम्प्यूटर-आधारित भण्डारण का आयोजन व विकास करना

V. खाद्य तथा नागरिक आपूर्ति (Food & Civil Supplies)	3	भारतीय मानक ब्यूरो का सांख्यिकीय विभाग (Statistics Department, Bureau of Indian Standards)	गुण-नियन्त्रण, प्रतिचयन, उत्पादकता व प्रबन्धकीय तकनीकों पर भारतीय मानक तैयार कराना; गुण नियन्त्रण सलाहकार सेवाएँ प्रदान करना तथा प्रशिक्षण कार्यक्रम आयोजित करना
		आर्थिक शोध व प्रबन्ध प्रभाग, नागरिक आपूर्ति विभाग (Economic Research & Management Division, Dept. of Civil Supplies)	आवश्यक पदार्थों के उत्पादन मूल्य, आवंटन व वितरण से सम्बन्धित समंकों का संकलन व विश्लेषण करना
		राष्ट्रीय शर्करा संस्थान सांख्यिकीय खण्ड (Statistical Section, National Sugar Institute)	केन्द्रीय चीनी मिलों से तकनीकी समंकों का संकलन व विश्लेषण, शोध कार्य में सहायता देना; विभिन्न डिप्लोमा पाठ्यक्रमों के लिए सांख्यिकीय प्रविधियों तथा सांख्यिकीय गुण-नियन्त्रण में प्रशिक्षण आयोजित करना

केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन
(Central Statistical Organisation)

स्वतन्त्रता प्राप्ति के बाद केन्द्रीय मन्त्रालयों तथा राज्यों व संघ-शासित क्षेत्रों में समंकों को संकलित व प्रकाशित करने के लिए अनेक सांख्यिकीय प्रभागों की स्थापना की गई।

इस विकेन्द्रित सांख्यिकीय व्यवस्था के अन्तर्गत केन्द्रीय सरकार की 340 तथा राज्य सरकार की 3245 सांख्यिकीय इकाइयों व संघशासित प्रदेशों के 93 सांख्यिकीय कार्यालयों की गतिविधियों में समन्वय कायम रखने तथा सरकार को सांख्यिकीय मामलों पर तकनीकी परामर्श देने के लिए मई 1951 में मन्त्रिमण्डल-सचिवालय (Cabinet Secretariat) के अधीन एक केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (Central Statistical Organisation—C. S. O.) की स्थापना की गयी। 1973 से यह संगठन तथा राष्ट्रीय प्रतिदर्श-सर्वेक्षण निदेशालय, योजना मन्त्रालय के अधीन स्थित सांख्यिकी विभाग (Department of Statistics) के तत्त्वावधान में कार्य कर रहे हैं।

1954 में वित्त मन्त्रालय से राष्ट्रीय आय आकलन का कार्य C. S. O. को हस्तान्तरित किया गया और 1957 में औद्योगिक समंक निदेशालय का कार्य वाणिज्य एवं उद्योग मन्त्रालय से इस केन्द्रीय संगठन के पास आ गया। सरकार के सांख्यिकीय संगठनों और नियोजन में प्रभावी समन्वय स्थापित करने के उद्देश्य से फरवरी 1973 में केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C. S. O.) का कार्य योजना मन्त्रालय के सांख्यिकी विभाग को हस्तान्तरित कर दिया गया।

संगठन (Organisation)—केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन का संचालन एक निदेशक द्वारा किया जाता है जो सांख्यिकीय विभाग का पदेन संयुक्त सचिव (Ex-Officio Joint Secretary) होता है। इस मुख्य निदेशक के अधीन 6 संयुक्त निदेशक, 7 विशेषाधिकारी तथा उनकी सहायतार्थ 30 उपनिदेशक, अनेक सहायक निदेशक एवं सांख्यिकी निरीक्षक, प्रगणक आदि इस संगठन की विभिन्न शाखाओं का कार्य-संचालन करते हैं।

प्रभाग (Divisions)—कार्य को सुचारू रूप से चलाने के लिए C. S. O. को 16 प्रभागों में बाँटा गया है जिनमें से कृषि, सांख्यिकी, औद्योगिक सांख्यिकी, राष्ट्रीय लेखा, आर्थिक संगठन, जनसंख्या, प्रशिक्षण, सर्वेक्षण, समन्वय प्रभाग महत्त्वपूर्ण है।

कार्य (Functions)—केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C. S. O.) के निम्न कार्य हैं—

(1) समन्वय (Coordination)—भारतीय समंकों में एकरूपता लाने तथा अनावश्यक दोहरेपन से होने वाले अपव्यय को रोकने के उद्देश्य से यह संगठन विभिन्न मन्त्रालयों की सांख्यिकीय

शाखाओं तथा विभिन्न राज्यों द्वारा संकलित समंकों का समन्वय करता है।

(2) परिभाषाओं एवं मानकों का निर्धारण (Determination of Definitions and Standards)—समंकों की राष्ट्रीय व अन्तर्राष्ट्रीय तुलनीयता में वृद्धि करने तथा उनके यथार्थता-स्तर में निरन्तर सुधार करने के लिए इस संगठन द्वारा आदर्श परिभाषाओं तथा मानकों का निर्धारण किया जाता है।

(3) अन्तर्राष्ट्रीय सम्पर्क (International Collaboration)—इस संगठन द्वारा अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाओं (जैसे संयुक्त राष्ट्र सांख्यिकीय संगठन, मुद्राकोष आदि) को देश की प्रगति से सम्बद्ध समंक प्रकाशनार्थ नियमित रूप से भेजे जाते हैं तथा विभिन्न देशों की सांख्यिकीय संस्थाओं से भी सम्पर्क रखा जाता है ताकि उनमें होने वाले तकनीकी एवं संगठनात्मक सुधारों का पूरा-पूरा लाभ उठाया जा सके।

(4) सांख्यिकीय सूचना उपलब्ध कराना (Supplying Statistical Data)—यह संगठन अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाओं, राज्य सरकारों व निजी संस्थाओं को आवश्यक सांख्यिकीय सामग्री नियमित रूप से उपलब्ध कराता है। उदाहरणार्थ, संयुक्त राष्ट्र संघ की Statistical Year Book, Demographic Year Book आदि के लिए यह सूचना भेजता है।

(5) परामर्श (Advice and Consultancy)—विभिन्न मन्त्रालयों तथा सांख्यिकीय विभागों को सांख्यिकीय विषयों पर सलाह देना तथा अन्तर-विभागीय विचार-गोष्ठियाँ आयोजित करना भी केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन के कार्यक्षेत्र में सम्मिलित हैं।

(6) राष्ट्रीय लेखा समंक (National Accounts Statistics)—C. S. O. की राष्ट्रीय आय शाखा (National Income Unit) द्वारा राष्ट्रीय लेखा समंकों के वार्षिक अनुमान लगाये जाते हैं। ये वार्षिक श्वेत-पत्र में प्रकाशित किये जाते हैं। इस इकाई द्वारा राष्ट्रीय लेखा समंक तथा राष्ट्रीय आय के त्वरित अनुमान (quick estimates) भी प्रसारित किये जाते हैं। यह एकांश राज्य की आय आकलित करने में भी राज्य सांख्यिकीय संस्थानों की सहायता करता है।

(7) योजना निर्माण व मूल्यांकन में सहायता (Help in Plan Formulation & Evaluation)—पंचवर्षीय योजनाओं के निर्माण व प्रगति के सम्बन्ध में यह संगठन आवश्यक समंक प्रस्तुत करता है जिससे भावी नीति-निर्धारण में सहायता मिले। यह मन्त्रिमण्डल को उत्पादन, व्यापार, मूल्य, मांग आदि के बारे में रिपोर्ट देता रहता है। समय-समय पर किये गये तकनीकी-आर्थिक सर्वेक्षणों के परिणाम भी केबिनेट व योजना आयोग को यह प्रस्तुत करता रहता है। यह योजना आयोग के 'सांख्यिकीय एवं सर्वेक्षण प्रभाग' के रूप में कार्य करता है।

(8) जनसंख्या समंकों का समन्वय (Coordination of Population Statistics)—इस संगठन द्वारा जनगणना एवं जीवन-समंकों के आधार पर जनसंख्या के वार्षिक अनुमान लगाये जाते हैं तथा विभिन्न जनांकिकीय समंकों में सामंजस्य किया जाता है।

(9) औद्योगिक समंकों का आयोजन (Compilation of Industrial Statistics)—केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन को 1957 में औद्योगिक समंक निदेशालय का कार्य भी हस्तान्तरित कर दिया गया। अतः औद्योगिक समंक निदेशालय द्वारा औद्योगिक समंकों का संकलन, विधियन, विश्लेषण और प्रकाशन का कार्य भी सम्पन्न किया जाता है।

(10) उपभोक्ता जीवन-निर्वाह लागत समंक संकलन (Collection of Consumer Price or Cost of Living Statistics)—लेबर ब्यूरो के सहयोग से C. S. O. द्वारा जीवन-निर्वाह लागत सर्वेक्षण करके उपभोक्ता मूल्य समंक संकलित व प्रकाशित किये जाते हैं। अक्टूबर 1988 में इन सूचनाओं का आधार वर्ष 1982=100 कर दिया गया है।

(11) अभिकलित्र सेवा (Computer Service)—1966 में स्थापित अभिकलित्र केन्द्र द्वारा समंकों के विश्लेषण व विधियन में प्रशिक्षण व परामर्श दिया जाता है।

(12) आर्थिक गणना का आयोजन (Organising Economic Censuses)—केन्द्रीय सरकार की अन्य इकाइयों और राज्य सरकारों के सहयोग से C. S. O. द्वारा 1977 से आर्थिक संगणनाओं और उत्तरवर्ती सर्वेक्षणों का नियमित रूप से आयोजन किया जाता है।

(13) प्रशिक्षण (Training)—इस संगठन द्वारा सांख्यिकी-अधिकारियों, विद्यार्थियों तथा विदेशी नागरिको के लिए अनेक अल्पकालीन सांख्यिकीय प्रशिक्षण कार्यक्रम आयोजित किये जाते है। ये प्रशिक्षण दिल्ली और कलकत्ता में दिये जाते है।

संगठन के प्रमुख प्रशिक्षण कार्यक्रम निम्नांकित है—

(i) सन्ध्याकालीन पाठ्क्रम (Evening Course);

(ii) विश्वविद्यालय छात्रों के लिए अल्पकालिक पाठ्यक्रम (Short-term Course for University Students);

(iii) वरिष्ठ सांख्यिकीय अधिकारियों के लिए प्रशिक्षण (Training Course for Senior Statistical Officers);

(iv) भारतीय सांख्यिकीय सेवा (I. S. S.) के प्रशिक्षणार्थियो के लिए दो-वर्षीय प्रशिक्षण कार्यक्रम, तथा

(v) विदेशियो के लिए प्रशिक्षण (Training for Nationals of other countries)।

(14) सम्मेलनों का आयोजन (Organising Conferences)—यह प्रतिवर्ष केन्द्रीय व राज्यीय स्तरों पर सांख्यिको की सभाएँ, तान्त्रिक सलाहकार समिति व कार्यकारी दलो के सम्मेलन भी संगठित करता है तथा अन्तर्राष्ट्रीय सम्मेलनो में देश का प्रतिनिधित्व करता है।

(15) राष्ट्रीय सांख्यिकीय सलाहकार मण्डल का सचिवालय (Secretariat of National Advisory Board on Statistics—NABS)—राष्ट्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था की समीक्षा हेतु गठित समिति की सिफारिशों के आधार पर 1982 में सांख्यिकीय विषयों में सरकार को परामर्श देने के उद्देश्य से 'राष्ट्रीय सांख्यिकी सलाहकार मण्डल' (NABS) की स्थापना की गई। केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (CSO) इस मण्डल के सचिवालय का भी कार्य करता है।

(16) चित्रों द्वारा प्रदर्शन (Display)—विभिन्न चित्रों व रेखाचित्रों द्वारा समको का प्रसार व प्रदर्शन करना भी इसका एक महत्वपूर्ण कार्य है। दो वर्षों मे एक बार केन्द्रीय व राज्य सरकारों के सांख्यिकीय संगठनों का सम्मेलन आयोजित किया जाता है।

(17) विशिष्ट कार्य (Special Assignments)—C. S. O., केन्द्रीय सरकार या राज्य सरकार के निर्देश पर समंको से सम्बद्ध अन्य विशिष्ट या तदर्थ (ad hoc) कार्य भी करता है।

(18) विविध कार्य (Miscellaneous Work)—C. S. O. समय-समय पर सामाजिक सर्वेक्षण, तकनीकी-आर्थिक सर्वेक्षण व अन्य अन्वेषणात्मक सर्वेक्षण भी आयोजित करके केन्द्रीय मन्त्रालयों, राज्य सरकारों व निजी संस्थानों की सहायता करता रहता है।

(19) प्रकाशन (Publications)—सांख्यिकीय आसूचना के केन्द्रीय समाशोधनगृह के रूप में (as a central clearing house of Statistical Intelligence), C. S. O. अनेक सामयिक प्रकाशन निर्गमित करता है। C. S. O. के प्रमुख नियमित प्रकाशन और उनका संक्षिप्त विवरण निम्नांकित है—

1. Statistical Abstract—India (Annual)—सांख्यिकीय सारांश 1950 से प्रतिवर्ष प्रकाशित किया जाता है। इसमें भारतीय अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रो से सम्बन्धित मौलिक सामग्री 39 शीर्षकों से सम्बद्ध 250 सारणियों व 17 चित्रो में प्रस्तुत की जाती है। नवीन सामग्री की उपलब्धि और समय-समय पर होने वाले परिवर्तनो के आधार पर इस सारांश के क्षेत्र और व्यापकता में वर्ष प्रतिवर्ष संशोधन किये जाते रहते है। यह प्रकाशन सम्पूर्ण देश मे तथा विभिन्न राज्यों में होने वाली आर्थिक व सामाजिक गतिविधियों का एक लघु सांख्यिकीय चित्र प्रस्तुत करता है। अभिकलित्र प्रणाली से मुद्रित होने के कारण इसका प्रस्तुतीकरण अत्यन्त प्रभावशाली हो गया है और प्रकाशन में विलम्बना नही रही है। उदाहरणार्थ 1991 में प्रकाशित समक सार का सन्दर्भ वर्ष 1990 है जिसमें मार्च 1990 तक के समंक प्रस्तुत हैं।

2. Statistical Pocket Book—India (Annual)—यह पुस्तिका C. S. O. द्वारा 1956 से प्रतिवर्ष प्रकाशित की जाती है। 1956 से 1962 तक इस प्रकाशन का नाम 'Statistical Handbook of India Union' था जिसमें 1948, 1951 और 1956 से प्रचलित

वर्ष तक के समंक दिये जाते थे। परन्तु 1963 से 'Statistical Pocket Book—India' में *1961, 1966, 1971* और नवीनतम दो वर्षों के राष्ट्रीय समंक प्रस्तुत किये जाते हैं। कुछ क्षेत्रों के आंकड़े राज्यानुसार दिये जाते हैं। पुस्तिका में प्रकाशित सारणियाँ भारतीय अर्थव्यवस्था के विभिन्न पहलुओं पर महत्वपूर्ण सूचना प्रदान करती हैं। सारणियों को 28 शीर्षकों में वर्गीकृत किया जाता है जिनमें से क्षेत्रफल, जनसंख्या, राष्ट्रीय आय, कृषि, खनन, उद्योग, व्यापार भुगतान सन्तुलन, यातायात, आयकर, राजस्व, श्रम, शिक्षा, जीवनांक, पंचवर्षीय योजनाएँ, चुनाव-समंक, अन्तर्राष्ट्रीय तुलना आदि महत्वपूर्ण हैं। 1989 से 'सांख्यिकीय पुस्तिका—भारत' नाम से इसका हिन्दी संस्करण भी प्रकाशित होने लगा है। उन्नत अभिकल्पित्र तकनीक का प्रयोग होने से अब प्रकाशन विलम्ब भी लगभग समाप्त हो गया है। 1990 की Statistical Pocket Book में वर्ष 1980–81, 1985–86 तथा 1987–88 व 1988–89 के समंक दिये गये हैं।

3. Basic Statistics Relating to Indian Economy (Annual)—यह प्रकाशन 1955–56 से प्रतिवर्ष विभिन्न पंचवर्षीय योजनाओं की अवधि में भारतीय अर्थव्यवस्था में होने वाले महत्वपूर्ण परिवर्तनों का सांख्यिकीय चित्र प्रस्तुत करता है। विकास के महत्वपूर्ण क्षेत्रों में होने वाली सापेक्ष प्रगति को विभिन्न सूचकांकों के माध्यम से प्रदर्शित किया जाता है। विभिन्न फसलों के अधीन क्षेत्रफल, आयात-निर्यात, थोक व उपभोक्ता मूल्यों के सूचकांकों का इस प्रकाशन में समावेश किया जाता है। सूचना निम्न महत्वपूर्ण शीर्षकों के अन्तर्गत प्रकाशित की जाती है—जनसंख्या, राष्ट्रीय उत्पाद, कृषि, सिंचाई, पशुधन व वनोद्योग, सहकारिता, खनिज उत्पादन, उद्योग व संयुक्त स्टॉक कम्पनियाँ, ऊर्जा व विद्युत् शक्ति, श्रम, रोजगार एवं मजदूरी, परिवहन, शिक्षा, स्वास्थ्य, आवास, विदेश व्यापार, बैंक व बीमा, राष्ट्रीय वित्त, मूल्य एवं पंचवर्षीय योजनाएँ।

4. National Accounts Statistics—Sources & Methods (Annual)—इस प्रकाशन में देश की राष्ट्रीय आय के समंक प्रस्तुत किये जाते हैं। सकल व शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद के समंक साधन लागत के आधार पर उद्योगों के अनुसार प्रचलित कीमतों तथा आधार वर्ष 1980–81 के मूल्यों पर दिये जाते हैं। इसके अतिरिक्त प्रति व्यक्ति उत्पाद, व्यक्तिगत आय, गैर सरकारी अन्तिम उपभोग, घरेलू बचत, घरेलू पूंजी-निर्माण आदि से सम्बन्धित महत्वपूर्ण सूचनाएँ भी उक्त पत्रिका में प्रकाशित की जाती हैं। इस प्रकाशन के पाँच खण्ड हैं—(i) विकास एवं अवधारणाएँ, (ii) घरेलू उत्पाद, (iii) उपभोग बचत, पूँजी निर्माण, पूँजी स्कन्ध, (iv) सार्वजनिक क्षेत्र, तथा (v) राष्ट्र के संगठित लेखे।

5. Annual Survey of Industries (ASI)—Census Sector Vol. I-X—यह प्रकाशन 1960 से C. S. O. द्वारा प्रस्तुत किया जा रहा है। इसके प्रथम खण्ड में कारखानों की संख्या, प्रबन्ध-स्वरूप, उनमें विनियोजित पूँजी, श्रमिकों की संख्या, श्रम-घण्टे, मजदूरी, आदान-प्रदान, विनिर्माण द्वारा मूल्य-वृद्धि इत्यादि के सम्बन्ध में विस्तृत विवरण प्रकाशित किया जाता है, तथा Vol. II से Vol. X में विभिन्न उद्योगों जैसे खाद्य संसाधन, तम्बाकू, वस्त्र, रसायन, विद्युत् मशीनरी, आदि के बारे में महत्वपूर्ण समंक प्रस्तुत किये जाते हैं।

6. Statistical Newsletter (Quarterly)—देश में होने वाली महत्वपूर्ण सांख्यिकीय गतिविधियों का संक्षिप्त विवरण केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन के इस त्रैमासिक प्रकाशन में प्रस्तुत किया जाता है।

7. DOCSTAT (Quarterly)—अर्थशास्त्र व सांख्यिकी के क्षेत्र में शोध-कार्य को प्रोत्साहन देने के लिए C. S. O. द्वारा त्रैमासिक आधार पर DOCSTAT नामक प्रकाशन निर्गमित किया जाता है जिसमें राष्ट्रीय व अन्तर्राष्ट्रीय पत्रिकाओं में प्रकाशित होने वाले महत्वपूर्ण आर्थिक व सांख्यिकीय शोध लेखों के सारांश प्रस्तुत किये जाते हैं।

8. Monthly Abstract of Statistics—यह मासिक समंक-सारांश 1951 से C. S. O. द्वारा प्रकाशित किया जा रहा है। इसमें देश की परिवर्तनशील आर्थिक स्थिति से सम्बन्धित सभी प्रधान क्षेत्रों के मासिक समंक प्रस्तुत किये जाते हैं। इसमें निम्न शीर्षकों के अन्तर्गत सारांश में

आवश्यक सामग्री दी गई है—जनसंख्या, राष्ट्रीय उत्पाद, रोजगार, ईंधन व शक्ति, खनिज, उद्योग, उपभोग व स्कन्ध, यातायात, दूरसंचार, पर्यटन, विदेश व्यापार, बैंक व्यवसाय व मुद्रा, वित्त, संयुक्त स्कन्ध कम्पनियाँ और मूल्य।

इनके अतिरिक्त अन्य सामाजिक विषयों पर भी विशेष सारणियाँ दी जाती हैं। महत्वपूर्ण आर्थिक सूचकों का बिन्दुरेखीय स्वरूप भी प्रस्तुत किया जाता है। समंकसार हिन्दी व अंग्रेजी दोनों भाषाओं में साथ-साथ प्रकाशित होता है।

9. Monthly Statistics of the Production of Selected Industries in India—केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन की औद्योगिक शाखा द्वारा प्रति माह कुछ विशिष्ट उद्योगों के समंक प्रकाशित किये जाते हैं। उक्त मासिक प्रकाशन में सूचना देने वाली औद्योगिक इकाइयों की संख्या, उत्पादन, संस्थापित क्षमता व उत्पाद का स्कन्ध आदि का विस्तृत विवरण दिया जाता है। राज्यानुसार उत्पादन के समंकों के अतिरिक्त, 1980–81 के आधार पर विभिन्न उत्पादों के औद्योगिक उत्पादन सूचकांक भी इसी प्रकाशन में दिये जाते है। खनन, विनिर्माण और विद्युत् उद्योगों की मदों का इस प्रकाशन में समावेश किया जाता है। इस पुस्तिका में मानक औद्योगिक वर्गीकरण का प्रयोग किया जाता है। इस प्रकाशन के प्रत्येक संस्करण में नवीनतम 5 वर्षों तथा 13 महीनों के आँकड़े दिये जाते हैं।

10. Monthly Production of Selected Industries in India—'Monthly Statistics of the Production of Selected Industries in India' के प्रकाशन में विलम्ब होने के कारण औद्योगिक समंकों की उपादेयता कम हो जाती है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए जून 1963 से C. S. O. द्वारा हर माह यह प्रकाशन जारी किया जाता है। इसमें नवीनतम दो महीनों के लिए 352 मदों के उत्पादन समंक और औद्योगिक उत्पादन सूचकांक प्रस्तुत किये जाते हैं। इसके प्रकाशन में 3 माह की काल विलम्बना (time lag) रहती है।

11. Statistical System in India (Ad hoc)—1951 से C. S. O. द्वारा समय-समय पर (आजकल पांच वर्षों में एक बार) भारत में सांख्यिकीय व्यवस्था के सम्बन्ध मे विस्तृत विवरण प्रस्तुत किया जाता है। इसमें केन्द्र में तथा विभिन्न राज्यों व संघ-शासित क्षेत्रों में सांख्यिकीय सामग्री के संकलन, विधियन व विश्लेषण में लगे हुए विभिन्न संगठनों व इकाइयों के बारे में जानकारी दी जाती है। इकाइयों में लगे सांख्यिकीय कर्मचारियों की संख्या, उनका वर्गीकरण और उन पर होने वाले व्यय के समंक भी दिये जाते है। सार्वजनिक उपक्रमों की सांख्यिकीय इकाइयों के सम्बन्ध में भी विवरण दिया जाता है। सांख्यिकीय व्यवस्था के सम्बन्ध मे नवीनतम प्रकाशन 1989 में निर्गत किया गया है जिसमे केन्द्रीय सरकार, राज्य सरकारों व संघ शासित प्रदेशों और केन्द्रीय सार्वजनिक प्रतिष्ठानों मे स्थापित विभिन्न (3752) सांख्यिकीय इकाइयों के कार्य व उनमें 1 जुलाई 1988 को कार्यरत सांख्यिकीय कर्मचारियों की संख्या व इन इकाइयों पर गत तीन वर्षों के व्यय से सम्बन्धित विस्तृत सूचना दी गई है।

राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन
(National Sample Survey Organization)

वित्त मन्त्रालय के अधीन केन्द्रीय स्तर पर दूसरा महत्वपूर्ण संगठन राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (N. S. S.) का निदेशालय था जिसकी स्थापना 1950 मे यादृच्छिक प्रतिचयन आधार पर योजनाओं, राष्ट्रीय आय, कृषि, उद्योग व अन्य अर्थ-सामाजिक विषयों के सम्बन्ध मे आवश्यक समंक एकत्रित करने के उद्देश्य से की गयी थी। 1957 में N. S. S. निदेशालय को केन्द्रीय मंत्रिमण्डल के सचिवालय के अधीन हस्तान्तरित कर दिया गया। समंक संकलन का कार्य निदेशालय द्वारा किया जाता है और सर्वेक्षणों का तकनीकी संचालन तथा समंक विधियन व विश्लेषण का कार्य कलकत्ता के भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (Indian Statistical Institute) द्वारा सम्पादित किया जाता है। अधिक समन्वय और प्रभावी नियोजन के उद्देश्य से जनवरी 1971 मे केन्द्रीय सरकार ने सांख्यिकीय विभाग के अधीन राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन (N. S. S. O.)

नामक संगठन स्थापित किया और N. S. S. को Field- Operations Division—F. O. D. का नाम देकर N. S. S. O. का एक अंग बना दिया है। फरवरी 1973 से यह संगठन योजना मन्त्रालय से स्थापित सांख्यिकीय विभाग के अधीन कार्य कर रहा है। देश भर में इसके 177 सांख्यिकीय कार्यालय हैं जिनमें लगभग 4500 सांख्यिकीय वर्ग के कर्मचारी कार्यरत हैं। भारत जैसे विशाल देश में विभिन्न विषयों पर यादृच्छिक प्रतिदर्शों का चयन करके गहन सर्वेक्षण करना लागत, समय व परिशुद्धता की दृष्टि से अत्यन्त उपयोगी है। वस्तुतः राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण एक निरन्तर चलने वाला बहुउद्देशीय सर्वेक्षण है जो प्रतिचयन के आधार पर चक्रों (rounds) के रूप में चल रहा है।

प्रबन्ध तथा प्रभाग—N. S. S. O. का प्रबन्ध एक स्वतन्त्र प्रशासकीय परिषद् (independent governing council) द्वारा किया जाता है जिसमें 15 सदस्य हैं—5 गैर सरकारी शिक्षाविद्, 5 केन्द्र व राज्य सरकारों के अधिकारी और 5 N. S. S. O. के पदाधिकारी हैं। इस संगठन का अध्यक्ष गैर-सरकारी सदस्यों में से ही नियुक्त किया जाता है और प्रमुख अधिशासी अधिकारी (Chief Executive Oflier) इसका सदस्य-सचिव (Member-Secretary) होता है।

वृहत् प्रतिदर्श सर्वेक्षणों की चार प्रमुख अवस्थाओं के अनुरूप राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण के चार प्रभाग हैं—

(i) *सर्वेक्षण, प्रतिरूप एवं शोध प्रभाग (Survey, Design and Research Division)—जिसका प्रमुख कार्य प्रतिदर्श प्रारूप व जाँच अनुसूचियाँ तैयार करना, शोध करना तथा आवश्यक अनुदेश निर्गत करना है।*

(ii) *क्षेत्र-क्रिया प्रभाग (Field-Operations Division—F.O.D.)*—प्रतिदर्श-सर्वेक्षण आयोजित करना इस प्रभाग का मुख्य कार्य है जिसके लिए यह कर्मचारियों को प्रशिक्षित करता है और अनुसूचियों की जाँच भी करता है;

(iii) समंक विधियन प्रभाग (Data Processing Division)—अनुसूचियों की जाँच करके सारणीयन व समंकों का विधियन करना इसका प्रमुख कार्य है; और

(iv) समंक विश्लेषण व प्रकाशन प्रभाग (Data Analysis and Publication Division)—प्राप्त परिणामों की गहन जाँच करके उन्हें प्रकाशित करना इसका मुख्य दायित्व है।

समंकों के संकलन और उनके विश्लेषण व विधियन में रहने वाले कालान्तर (time-lag) को न्यूनतम करने के लिए महत्वपूर्ण समंकों का सारणीकरण अनेक स्थानों पर स्थापित हस्त-सारणीयन केन्द्रों (manual tabulation centres) में सम्पन्न किया जाता है। 1985–86 में समंक विधायन व सारणीयन के लिए N. S. S. O. अभिकलित्र केन्द्र की सुविधाओं का प्रयोग कर रहा है।

कार्य (Functions)—राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन के निम्नांकित प्रमुख कार्य हैं—

1. मन्त्रालयों एवं अन्य संस्थानों के लिए आवश्यक समंकों का संकलन करना (To Collect Data for Ministries and other Institutions)—*केन्द्रीय सरकार के विभिन्न मन्त्रालयों, योजना आयोग, केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन, राज्य सरकारों व अन्य संस्थानों के लिए यह संगठन समय-समय पर सर्वेक्षण करके आवश्यक समंक उपलब्ध कराता है।*

2. बहुउद्देशीय सामाजिक-आर्थिक सर्वेक्षणों का आयोजन करना (To Conduct Multipurpose Socio-Economic Surveys)—यादृच्छिक प्रतिचयन के आधार पर विभिन्न अर्थ-सामाजिक विषयों पर वार्षिक चक्रों (annual rounds) में सर्वेक्षण आयोजित करना इस संगठन का मुख्य दायित्व है। इन सर्वेक्षणों का कार्यक्रम 10-वर्षीय परिचक्र में क्रियान्वित किया जाता है जिसके तहत निम्न तीन विषयों में से प्रत्येक पर दस वर्षों में एक बार सर्वेक्षण किया जाता है—

(क) जनांकिकी, स्वास्थ्य व परिवार कल्याण;

(ख) परिसम्पत्तियाँ, ऋण और पूँजी-विनियोजन, तथा

(ग) भूमि-जोत और पशुधन उपक्रम।

इनके अतिरिक्त निम्न विषयों में से प्रत्येक पर दस-वर्षीय कार्यक्रम के अन्तर्गत पाँच वर्षों में एक बार यादृच्छिक प्रतिदर्श सर्वेक्षण किया जाता है—

(अ) रोजगार, ग्रामीण श्रम और उपभोक्ता-व्यय, तथा

(ब) गैर कृषि उपक्रमों में स्व-रोजगार।

दस-वर्षीय अवधि में से सात वर्षों की अवधि उपर्युक्त पाँच विषय-समूहों पर कम से कम एक बार सर्वेक्षण करने के लिए सुनिश्चित है और शेष तीन वर्ष विशेष सर्वेक्षणों के लिए निर्धारित है।

3. **औद्योगिक समंकों का संग्रहण करना (Collection of Industrial Statistics)**—संगठित औद्योगिक क्षेत्र में दैव प्रतिदर्श सर्वेक्षणों द्वारा उद्योगों के वार्षिक सर्वेक्षण (Annual Survey of Industries) के लिए कार्यक्षेत्र (fieldwork) तैयार करना N. S. S. O. का दायित्व है।

4. **फसल पूर्वानुमान सर्वेक्षणों में राज्य सरकारों का तकनीकी मार्ग-दर्शन व निरीक्षण करना (To offer Technical Guidance and Supervision to State Govts. in Crop Estimation Surveys)**—कृषि समंकों को संग्रह करना पूर्ण रूप से राज्य सरकार का दायित्व है परन्तु यह संगठन फसल पूर्वानुमान सर्वेक्षणों में कार्यरत राज्य प्राथमिक कर्मचारियों को तकनीकी सलाह देता है और उनके कार्य की जाँच-पड़ताल करता है।

5. **आर्थिक संगणना के अनुवर्ती-सर्वेक्षणों का आयोजन करना (To Conduct Follow up Surveys of the Economic Census)**—अभी हाल ही में राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन (N. S. S. O.) को आर्थिक संगणना के अनुवर्ती सर्वेक्षणों को आयोजित करने का कार्य भी सौंपा गया है।

संक्षेप में, यह संगठन भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (Indian Statistical Institute) कलकत्ता के सहयोग से दैव प्रतिचयन आधार पर देश की विभिन्न आर्थिक, सामाजिक व जनांकिकीय समस्याओं से सम्बन्धित समंक एकत्रित करता है तथा सरकार को प्रविधि सम्बन्धी सलाह देता है।

गतिविधियाँ (Activities)—N. S. S. O. के सर्वेक्षण विभिन्न चक्रों या दौरों (rounds) में सम्पन्न किये जाते है। कुछ समय पहले इसका छियालिसवाँ दौर (46th round) पूरा हुआ है। पहला दौर अक्टूबर 1950 से मार्च 1951 तक भूतपूर्व N. S. S. द्वारा आरम्भ किया गया था जिसमें बहुस्तरीय यादृच्छिक प्रतिचयन विधि के अनुसार 1833 गाँवों का चयन किया गया। इन प्रतिदर्श-ग्रामों को दो वर्गों (1189 व 644) में बाँटकर चार प्रकार की ग्राम व परिवार अनुसूचियों का प्रयोग करके अनुसन्धान किया गया था जिसमें उपभोक्ता-व्यय, खाद्यान्न व पशुधन पर आधारित उत्पादों का मूल्य, खाद्यान्न के अधीनस्थ क्षेत्रफल आदि विषयों पर बहुमूल्य सामग्री उपलब्ध की गयी थी, सर्वेक्षण के अन्य दौरों में ग्रामीण और नगरीय परिवारों की आर्थिक क्रियाओं, उद्योगों, आवास-सुविधाओं, मध्य-वर्गीय जीवन-निर्वाह व्यय, मजदूरी, जनसंख्या-वृद्धि दर आदि अनेक आर्थिक, सामाजिक, औद्योगिक, कृषि-सम्बन्धी व जनांकिकीय विषयों पर समंक संकलित किये गये हैं। तेरहवें दौर तक अनुसन्धान-अवधि 3 से 8 माह की थी किन्तु चौदहवें चक्र (जुलाई 1958 से जून 1959 तक) से इसे बढ़ाकर 12 महीने कर दिया गया है। अट्ठारहवें दौर (फरवरी 1963 से जून 1964 तक) में कुल 8472 गाँव और 4572 नगरीय खण्ड चुने गये जिनमें सामाजिक-आर्थिक मामलों पर व्यापक सूचना एकत्र की गई। फसल-सर्वेक्षण के लिए 4236 गाँव चुने गये। इस दौर में मुख्यतः फसलों के क्षेत्रफल व उपज, जनसंख्या, जन्म-मरण, उपभोक्ता व्यय, परिवारों की आय, फुटकर मूल्य व नगरों में श्रम-शक्ति आदि पर समंक एकत्र किये गये। बीसवें दौर (जुलाई 1965 से जून 1966 तक) में सामाजिक-आर्थिक सर्वेक्षण के लिए 8520 प्रतिदर्श गाँव तथा फसल-सर्वेक्षण हेतु 2130 गाँव चुने गये। नगरीय खण्डों की संख्या 4596 थी। इसमें 16 अनुसूचियों का प्रयोग किया गया। गोआ, दमन, दीव व पांडिचेरी को प्रथम बार इस दौर में शामिल किया गया। आगे के सर्वेक्षण-चक्रों में प्रतिदर्श ग्रामों व नगरीय

खण्डो की संख्या, सर्वेक्षण के विषय व भौगोलिक व्याप्ति में निरन्तर वृद्धि की जा रही है।

1973–74 में फसल सम्बन्धी आँकड़ों मे सुधार के लिए एक कार्यक्रम लागू किया गया जिसके तहत राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन द्वारा हर कृषि वर्ष (जुलाई से जून तक) में करीब 5000 गाँवों में क्षेत्रीय गणना और नमूना जाँच की जाती है तथा लगभग 15000 गाँवों में N. S. S. O. की देखरेख में फसल कटाई परीक्षण (Crop-cutting Experiments) किये जाते हैं।

रोजगार, बेरोजगारी और उपभोक्ता व्यय के बारे मे N. S. S. O. का 43वां दौर (जुलाई 1987 से जून 1988) का सर्वेक्षण कार्य जून 1988 में सम्पन्न हो गया। इस दौर मे जम्मू-कश्मीर के लद्दाख व करगिल जिलों तथा नागालैण्ड के ग्रामीण इलाकों को छोड़कर समूचे भारत को शामिल किया गया था। जनजातीय लोगों की जीवन-स्थितियों, आवास व भवन-निर्माण सम्बन्धी गतिविधियों के बारे मे व्यापक सूचना N. S. S. O. के 44वें दौर में (जुलाई 1988 से जून 1989 तक) एकत्रित की गई। इसमें 7760 प्रतिदर्श गाँव, जनजाति बहुल क्षेत्रो के 1128 विशेष नमूना गाँव तथा देश भर के 4836 शहरी ब्लॉक शामिल किये गये। 1 जुलाई 1989 से 45वें दौर का सर्वेक्षण कार्य आरम्भ हुआ है जिसमें निजी खाता उद्योगों तथा ऐसे प्रतिष्ठानों को शामिल किया गया है जो उद्योगों की निर्देशिका में शामिल नहीं हैं। जून 1990 मे 45वें चक्र का सर्वेक्षण कार्यक्रम पूरा हुआ और 1 जुलाई 1990 से राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण का 46वां दौर आरम्भ हो गया है।

प्रत्येक दौर का कार्यक्रम सांख्यिकी विभाग द्वारा सम्बन्धित मन्त्रालय या राज्य सरकार के सहयोग से निश्चित किया जाता है। मार्गदर्शन, समंक सारणीयन व प्रकाशन का उत्तरदायित्व राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन की प्रबन्ध परिषद, समंक विधियन प्रभाग व समंक विश्लेषण व प्रकाशन विभाग तथा अभिकलित्र केन्द्र (Computer Centre) का है। सर्वेक्षणो के निष्कर्ष को रिपोर्ट के रूप में प्रकाशित किया जाता है। अब तक लगभग 350 प्रतिवेदन प्रसारित की जा चुकी है। रिपोर्टों के प्रकाशन में विलम्ब को दूर करने के लिए राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण सगठन ने जुलाई 1977 से 'सर्वेक्षण' नामक एक त्रैमासिक पत्रिका का प्रकाशन शुरू किया है जिसमें सर्वेक्षणों के निष्कर्षों को तत्काल प्रकाशित कर दिया जाता है।

उद्योगों के वार्षिक सर्वेक्षण (Annual Survey of Industries) के लिए हर वर्ष नियमित रूप से N. S. S. O. द्वारा अनेक सम्बद्ध विषयों पर ऑकड़े एकत्र किये जाते है जिनमे से प्रमुख विषय है—पूंजीगत संरचना, रोजगार और वेतन, ईंधन, कच्चा माल, उत्पादन, श्रम व आवास आदि। अभी हाल मे 1989–90 का उद्योगो का वार्षिक सर्वेक्षण आरम्भ हुआ है जिसमें 72000 कारखानों को शामिल किया जा रहा है।

1977 और 1980 की आर्थिक संगणनाओं तथा उनके अनुवर्ती सर्वेक्षणो का कार्य भी राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन द्वारा सम्पन्न किया गया है।

तदर्थ-सर्वेक्षण (Ad hoc Surveys)—केन्द्रीय मन्त्रालयो के अनुरोध पर समय-समय पर इस सगठन ने अनेक तदर्थ सर्वेक्षण किये है जिनमे से कुछ महत्वपूर्ण निम्नांकित हैं—

(i) पुनर्वास मन्त्रालय की जाँच समिति की ओर से पश्चिमी बंगाल व महाराष्ट्र के नगरीय क्षेत्रों में विस्थापितों के सम्बन्ध मे सर्वेक्षण।

(ii) सूचना एवं प्रसार मन्त्रालय की ओर से समाचार-पत्र पढने की आदत का अध्ययन।

(iii) वित्त मन्त्रालय के आग्रह पर पारिवारिक उपभोग-व्यय का सर्वेक्षण।

(iv) आवास मन्त्रालय के अनुरोध पर आवास-परिस्थितियो का अध्ययन।

(v) योजना आयोग की ओर से कलकत्ता में बेरोजगारी-सर्वेक्षण।

(vi) संयुक्त राष्ट्र संघ और स्वास्थ्य मन्त्रालय के तत्वावधान में मैसूर जनांकिकीय अध्ययन।

(vii) मध्यम वर्ग के व्यक्तियों का जीवन-निर्वाह सर्वेक्षण—45 केन्द्रो में 36000 परिवारों का अध्ययन—C. S. O. के अनुरोध पर।

(viii) श्रम मन्त्रालय के लिए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक निर्माण हेतु 50 संस्थानों में परिवार बजट सर्वेक्षण।

(ix) खाद्य व कृषि मन्त्रालय की ओर से कृषि जोत का अनुसन्धान।

(x) पशु संगणना का प्रतिदर्श-सर्वेक्षण।

(xi) योजना आयोग के आग्रह पर प्रस्तावित भू-संगणना के लिए प्रारम्भिक अनुसन्धान।

(xii) दिल्ली सेवा नियोजनालय में रोजगार के इच्छुक व्यक्तियों के सम्बन्ध मे सर्वेक्षण।

समीक्षा—उपर्युक्त संक्षिप्त विवरण से यह स्पष्ट है कि राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन (N. S. S. O.) आरम्भ से अनेक महत्वपूर्ण क्षेत्रों में प्रतिदर्श-अध्ययन करके बहुमूल्य समंक एकत्र कर रहा है। इस प्रकार यह निदेशालय भारतीय समकों की रिक्तियों को दूर करने मे तथा सांख्यिकीय व्यवस्था को सुदृढ बनाने में महत्वपूर्ण भूमिका निभा रहा है। परन्तु कुछ दिशाओं मे सुधार अपेक्षित है। सर्वेक्षण का क्षेत्र अधिक व्यापक और विस्तृत होना चाहिए। उसके कार्य में गति आनी चाहिए और विभिन्न प्रतिवेदनों के प्रकाशन में विलम्ब नहीं होना चाहिए। सर्वेक्षण मे प्रयुक्त अनुसूचियाँ अत्यन्त जटिल व भ्रामक है। अधिक व्यापक, स्पष्ट व सरल प्रश्नावली का प्रयोग किया जाना चाहिए तथा सर्वेक्षण कार्य से पहले प्रश्नावलियो का पूर्व परीक्षण किया जाना चाहिए। प्रतिदर्श प्रारूप को भी समय-समय पर जनगणनाओ के परिणामो के आधार पर संशोधित करते रहना चाहिए। विभिन्न चक्रों की अवधि भिन्न होने के कारण भी चक्रो के परिणामों की तुलना ठीक प्रकार नही हो पाती। हाल के वर्षों में इस संगठन के कार्यक्रमों में कुछ परिवर्तन करने पड़े है तथा 1977 और 1980 को आर्थिक संगणना और सामाजिक उपभोग सम्बन्धी सर्वेक्षण को भी इसमे शामिल कर लिया गया है। अतः 10 वर्षीय कार्यक्रम को फिर से परिभाषित किया जाना चाहिए। औद्योगिक समंक प्राप्त करने के लिए डाक द्वारा अनुसूचियाँ भेजी जाती है जिनके भरने में व्यक्तिगत सम्पर्क नही रह पाता और सूचना भी अपूर्ण और अविश्वसनीय रहती है। कभी-कभी सरकार द्वारा एकत्रित और N.S.S.O. द्वारा संकलित समंकों में बहुत अन्तर हो जाता है। कुछ क्षेत्रों में प्रतिचयन रीति उपयुक्त नही है। 1971 में N.S.S.O. एक स्वायत्त संस्था बन गयी है। प्रत्येक दौर की अवधि 12 महीने कर दी गयी है। प्रकाशन विलम्ब को दूर करने के लिए संगठन द्वारा अब एक त्रैमासिक पत्रिका 'सर्वेक्षण' प्रकाशित की जाती है। यह आशा की जाती है कि कालान्तर में विभिन्न क्षेत्रो मे पायी जाने वाली तथ्य-सम्बन्धी रिक्तियाँ और त्रुटियाँ दूर हो जायेंगी।

अभिकलित्र (कम्प्यूटर) केन्द्र
(Computer Centre)

आजकल बड़े पैमाने पर समंकों का विश्लेषण व समंक-विधियन (Data processing) का कार्य अभिकलित्रों (कम्प्यूटरों) की सहायता से तीव्र गति से सम्पन्न किया जाता है। भारत में पहला सामान्य उद्देश्य अकीय अभिकलित्र (general purpose digital computer) 1956 में भारतीय सांख्यिकीय संस्थान, कलकत्ता (Indian Statistical Institute, Calcutta) में स्थापित किया गया था।

प्रशासनिक कार्य में अभिकलित्र का अनुप्रयोग करने की दिशा में पहला महत्वपूर्ण कदम 1966 में उठाया गया जबकि भारत सरकार ने अपनी समक-विश्लेषण व समक-विधियन सम्बन्धी आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए 10 हनीवेल कम्प्यूटर (Honeywell Computer) प्राप्त किये। 1966 मे सांख्यिकीय विभाग के अधीन एक अभिकलित्र (कम्प्यूटर) केन्द्र (Computer Centre) की स्थापना की गई जिसमें आरम्भ में तीन हनीवेल कम्प्यूटर लगाये गये। शेष सात कम्प्यूटर अन्य सगठनों को सौंप दिये गये। कालान्तर में हनीवेल कम्प्यूटर के स्थान पर समंक विधियन और परिणाम-प्रसारण की काल-विलम्बना को दूर करने के लिए अभिकलित्र केन्द्र पर तृतीय चरण नवीन बरो 3845 कम्प्यूटर प्रणाली (New Third Generation Burrough 3845 Computer System) की स्थापना की गई। N. S. S. समंको के अति शीघ्र विधियन के

लिए राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन (N. S. S. O.) के समंक-विधियन केन्द्रों में प्रत्यक्ष प्रविष्टि-प्रणालियाँ तथा सूक्ष्म-प्रक्रमक (micro processors) संस्थापित किये गये हैं। N. S. S. O. के अतिरिक्त अन्य अनेक केन्द्रीय मन्त्रालयों व संगठनों में तथा राज्यों और संघ शासित प्रदेशों में समंक विश्लेषण व विधियन सम्बन्धी आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए अभिकलित्र प्रणालियाँ स्थापित कर दी गई हैं।

प्रबन्ध—कम्प्यूटर केन्द्र एक निदेशक की देखरेख में कार्य करता है जिसकी सहायता के लिए अनेक संवर्ग के प्रशासनिक और तकनीकी/सांख्यिकीय कर्मचारी—प्रणाली व प्रक्रमन-विशेषज्ञ, अभियन्ता आदि—कार्यरत हैं। कार्य संचालन हेतु सलाह देने, अभिकलित्र सेवाओं की प्राथमिकताएँ निर्धारित करने व कार्य-समीक्षा करने के उद्देश्य से एक प्रभारी समिति भी गठित की गई है।

कार्य—कम्प्यूटर केन्द्र के निम्नांकित प्रमुख कार्य हैं—

(i) अभिकलित्र सेवाएँ उपलब्ध कराना (Provision of Computer Facilities)—यह केन्द्र विभिन्न सांख्यिकीय संगठनों व प्रभागों को कम्प्यूटर यन्त्र की सेवाएँ उपलब्ध कराता है। इसकी सेवाओं का लाभ प्राप्त करने वालों में केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन, राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन, आपूर्ति व निपटान महानिदेशालय, तकनीकी विकास महानिदेशालय, केन्द्रीय राजस्व मण्डल, वित्त निगम, केन्द्रीय जाँच ब्यूरो आदि प्रमुख हैं।

(ii) छिद्रण-सुविधाएँ प्रदान करना (Provision of Punching Facilities)—इस केन्द्र द्वारा स्वचालित छिद्रण और सत्यापन यन्त्रों की सहायता से विभिन्न सांख्यिकीय इकाइयों के समंकों को छिद्र-कार्डों पर हस्तान्तरित करने की सुविधा भी प्रदान की जाती है।

(iii) प्रक्रमन तथा पद्धति-अनुपोषण सम्बन्धी सहायता प्रदान करना (Provision of Programming and System Support Facilities)—इस केन्द्र ने अनेक सांख्यिकीय संगठनों को कम्प्यूटर-प्रक्रमन और पद्धति विश्लेषण की सुविधाएँ प्रदान की हैं। इनमें राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन (N. S. S. O.), उद्योगों का वार्षिक सर्वेक्षण (A. S. I.), केन्द्रीय अनुसन्धान ब्यूरो (C. B. I.), दूर संचार विभाग आदि महत्वपूर्ण है।

(iv) तकनीकी सलाह देना (Technical Advice)—कम्प्यूटर केन्द्र सांख्यिकीय इकाइयों में अभिकलित्र व अन्य व्यावसायिक यन्त्रों की स्थापना और प्रयोग तथा समंक विधियन के सम्बन्ध में तकनीकी सलाह देने का कार्य भी करता है।

(v) प्रशिक्षण सुविधाएँ प्रदान करना (Provision of Training Facilities)—सांख्यिकी विभाग में संस्थापित कम्प्यूटर केन्द्र केन्द्रीय एवं राज्य सरकारों तथा सार्वजनिक क्षेत्र के उपक्रमों के नामित अधिकारियों और एशिया व सुदूर पूर्व के देशों के संगठन E. C. A. F. E. व E. S. C. A. P के अधीन संयुक्त राष्ट्र विकास कार्यक्रमों के प्रशिक्षार्थियों को प्रक्रमन, विधियन, प्रणाली विश्लेषण व अभिकलित्र सेवाओं के प्रयोग का सुनिश्चित पाठ्यक्रम के अनुसार प्रशिक्षण प्रदान करता है। केन्द्र 12 सप्ताह के प्रक्रमक-प्रशिक्षण कार्यक्रम नियमित रूप से आयोजित करता है। भारतीय सांख्यिकीय सेवा के प्रशिक्षणार्थियों के लिए भी यह कम्प्यूटर-प्रशिक्षण कार्यक्रम की व्यवस्था करता है। अभिकलित्र केन्द्र के अतिरिक्त कुछ अन्य संगठन जैसे भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (I. S. I.) कलकत्ता, भारतीय प्रविधि संस्थान (I. I. T. Delhi & Kanpur) तथा टाटा मौलिक शोध संस्थान (Tata Institute of Fundamental Research, Bombay) भी कम्प्यूटर-प्रक्रमन प्रणाली, प्रारूप व समंक विधियन के विभिन्न पाठ्यक्रमों में प्रशिक्षण आयोजित करते हैं।

राष्ट्रीय संज्ञान केन्द्र (National Informatics Centre—N. I. C.)—1975 में विद्युत्यान्त्रिकी विभाग (Department of Electronics) के अधीन एक राष्ट्रीय संज्ञान केन्द्र (N. I. C.) की स्थापना की गई। इसका मुख्य उद्देश्य कम्प्यूटर-आधारित उपयुक्त सूचना प्रणालियों को विकसित करने में प्रवर्तनीय भूमिका निभाना है। राष्ट्रीय संज्ञान केन्द्र अब योजना आयोग का महत्वपूर्ण एकांश है। इस केन्द्र ने निर्णय के प्रभावी उपकरण के रूप में अभिकलित्र आधारित सूचना प्रणालियों के प्रति सरकार के सांख्यिकीय प्रभागों में आवश्यक चेतना उत्पन्न

की है। इसके अतिरिक्त इस केन्द्र ने देश भर में राष्ट्रीय सूचना शृंखला (National Informatics Centre Network—NICNET) की स्थापना करके राज्य सरकारों और जिला प्रशासनो की अभूतपूर्व सहायता की है।

भारतीय सांख्यिकीय संस्थान
(Indian Statistical Institute)

भारतीय सांख्यिकीय संस्थान की स्थापना कलकत्ता मे अन्तर्राष्ट्रीय ख्यातिप्राप्त भारतीय सांख्यिकी विशेषज्ञ प्रोफेसर पी० सी० महालानोबिस द्वारा सांख्यिकी में शोध कार्य और उच्च-स्तरीय शिक्षण कार्य सम्पन्न करने के उद्देश्य से 1932 में की गई थी। कालान्तर मे शोध कार्य व उच्च प्रशिक्षण के केन्द्र के रूप में इस संस्थान का तेजी से विकास हुआ। 1950 में केन्द्रीय सरकार ने पूरे देश मे समंक संकलन व विश्लेषण के लिए राष्ट्रीय प्रतिदर्श (N. S. S.) सर्वेक्षण परियोजना आरम्भ की और भारतीय सांख्यिकीय संस्थान को सर्वेक्षण का प्रारूप तैयार करने, कर्मचारियों को तकनीकी प्रशिक्षण देने, समंक-विधियन और रिपोर्ट लिखने का कार्यभार सौंपा गया। यह संस्थान 1972 तक इन कार्यों को सम्पन्न करता रहा। 1972 में ये सभी कार्य सरकार ने सांख्यिकी विभाग के अधीन संस्थापित राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण सगठन (N. S. S. O.) को सौंप दिये। द्वितीय पंचवर्षीय योजना से पूर्व (1956 तक), भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (I. S. I.) द्वारा योजना से सम्बद्ध विषयो पर सर्वेक्षण आयोजित करने और पचवर्षीय योजना का प्रारूप तैयार करने का कार्य भी किया जाता था।

1959 मे संसद ने भारतीय सांख्यिकीय संस्थान अधिनियम (I. S. I. Act) पारित किया जिसके द्वारा अन्य महत्वपूर्ण कार्यों के अतिरिक्त, इस संस्थान को सांख्यिकी विषय में विश्वविद्यालयो की भाँति उपाधि व सनद (degrees and diplomas) प्रदान करने का अधिकार दिया गया है।

कार्य (Functions)—भारतीय सांख्यिकीय संस्थान के निम्नलिखित मुख्य कार्य है—

(i) **उच्चस्तरीय शिक्षण व शोध उपाधियाँ प्रदान करना**—संस्थान द्वारा नियमित रूप से सांख्यिकी विषय में स्नातक (Bachelor of Statistics—B. Stat.), स्नातकोत्तर (Master of Statistics—M. Stat.), तथा शोध कार्य के लिए पी-एच० डी० (Ph. D.) तथा डी० एस-सी० (D. Sc.) की उपाधियाँ प्रदान की जाती हैं।

(ii) **प्रशिक्षण कार्य**—केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C. S. O.) के सहयोग से भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (I. S. I.) समय-समय पर सांख्यिकी प्रशिक्षणार्थियो के लिए निम्न प्रशिक्षण पाठ्यक्रम आयोजित करता है—

(क) संस्थान (I. S. I.) केन्द्र सरकार तथा अन्तर्राष्ट्रीय सांख्यिकीय संस्थान (International Statistical Institute) के तत्त्वावधान में एशिया और अफ्रीका के देशों के सांख्यिकी-प्रशिक्षणार्थियों के लिए आयोजित दस माह का अन्तर्राष्ट्रीय सांख्यिकीय शिक्षा-केन्द्र (10-month International Statistical Educational Centre Course—I. S. E. C. C.) का पाठ्यक्रम; तथा

(ख) भारतीय सांख्यिकीय सेवा (Indian Statistical Service—I. S. S.) के परिवीक्षार्थियों (probationers) तथा अन्य राजकीय सांख्यिकीय कर्मचारियो के लिए विशिष्ट प्रशिक्षण पाठ्यक्रम।

(iii) **शोध कार्य**—यह संस्थान सैद्धान्तिक, गणितीय तथा आनुप्रयोगिक सांख्यिकी के क्षेत्र में उच्चस्तरीय शोध कार्य के लिये विश्वविख्यात है। सामाजिक, जैविक और भौतिक विज्ञानों के क्षेत्रों में भी संस्थान द्वारा शोध कार्य किया जाता है।

(iv) **सांख्यिकीय किस्म नियन्त्रण व क्रिया-शोधन** संस्थान द्वारा—सांख्यिकीय गुण-नियन्त्रण (SQC) तथा क्रियात्मक शोध (OR) के क्षेत्रों मे प्रशिक्षण, शोध, प्रवर्तन तथा सेवाएँ प्रदान करने के उद्देश्य से देश के मुख्य औद्योगिक केन्द्रों में SQC व OR इकाइयों की शृंखला स्थापित की गई है।

(v) परामर्श देना—भारतीय सांख्यिकीय संस्थान के सांख्यिकी विशेषज्ञ अनेक सरकारी समितियों व कार्यकारी दलों की गतिविधियों में सलाहकार के रूप में भाग लेते हैं।

(vi) प्रकाशन—भारतीय सांख्यिकीय संस्थान द्वारा 'संख्या' (Sankhya) नामक पत्रिका का नियमित प्रकाशन किया जाता है जो सैद्धान्तिक, व्यावहारिक व अनुप्रायोगिक साख्यिकी के क्षेत्र मे उच्चस्तरीय शोध-लेखों के लिए विश्वप्रसिद्ध है। इस पत्रिका के अलावा I.S.I. अपने कार्यकलापों पर प्रतिवेदन भी प्रकाशित करता रहता है।

सार्वजनिक क्षेत्र उपक्रमों में सांख्यिकीय इकाइयाँ
(Statistical Units In Public Sector Undertakings)

सार्वजनिक क्षेत्र के विभिन्न प्रतिष्ठानों की विविध सांख्यिकीय आवश्यकताओं की पूर्ति करने के लिए उनमें से अनेक उपक्रमों में सांख्यिकीय प्रकोष्ठ/एकांश स्थापित किये गये हैं। वर्तमान में ऐसे 74 सांख्यिकीय प्रकोष्ठ काम कर रहे हैं जिनमें सांख्यिकीय संवर्ग के 700 कर्मचारी कार्यरत हैं। इन सभी 74 इकाइयों पर 1986–87 में वास्तविक व्यय 89 लाख रु० हुआ था जबकि 1988–89 में प्रस्तावित व्यय 1·2 करोड़ रु० था। प्रमुख प्रतिष्ठानों में एक से अधिक सांख्यिकीय इकाइयों की संख्या निम्नवत् है—

प्रतिष्ठान	इकाइयों की संख्या
(i) Oil & Natural Gas Commission Corporate Management Service Group	8
(ii) Indian Drugs & Pharmaceuticals Ltd.	7
(iii) Hindustan Copper Ltd.	7
(iv) Fertilizer Corporation of India Ltd.	3
(v) Minerals & Metals Trading Corporation of India Ltd.	2
(vi) Trade Fair Authority of India	2

गैर-सरकारी सांख्यिकीय संगठन
(Non-Government Statistical Organizations)

उपर्युक्त राजकीय संगठनों के अतिरिक्त कुछ महत्वपूर्ण गैर-सरकारी संस्थाओं द्वारा भी भारतीय समकों के संकलन से सम्बद्ध सर्वेक्षण, शोध एवं प्रशिक्षण कार्य किया जाता है। इनमें निम्न विशेष रूप से उल्लेखनीय हैं—

1. गोखले संस्थान (Gokhale Institute of Politics and Economics, Poona),

2. व्यावहारिक अर्थ-शोध की राष्ट्रीय परिषद् (National Council of Applied Economic Research, *Delhi—N.C.A.E.R.*),

3. भारतीय आर्थिक विकास संस्थान (Indian Institute of Economic Growth),

4. भारतीय व्यावहारिक जन-शक्ति शोध संस्थान (Indian Institute of Applied Manpower Research),

5. सामाजिक विज्ञान शोध का टाटा संस्थान (Tata Institute of Social Sciences Research),

6. भारतीय वाणिज्य उद्योग संघ (Federation of Indian Chambers of Commerce & Industry—*F.I.C.C.I.*),

7. भारतीय प्रबन्ध संस्थान (Indian Institute of Management),

8. देश के विश्वविद्यालय (Universities of the country)।

राष्ट्रीय सांख्यिकी सलाहकार मण्डल
(National Advisory Board on Statistics)

आर्थिक नियोजन, नीति-निर्धारण और निर्णयन की बढ़ती हुई सांख्यिकीय आवश्यकताओं को दृष्टिगत रखते हुए और समंक-संकलन, विधियन, विश्लेषण व प्रसारण की व्यवस्था में सुधार लाने के लिए 1979 में सांख्यिकी विभाग के सचिव की अध्यक्षता में एक राष्ट्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था पुनरीक्षण समिति (National Statistical System Review Committee) का गठन किया गया। 30 जून 1980 को इस समिति ने अपनी रिपोर्ट प्रस्तुत की जिसमें यह मुख्य सिफारिश की गई कि सांख्यिकीय नीतिगत मामलो में तकनीकी सलाह देने के लिए एक राष्ट्रीय सांख्यिकी सलाहकार बोर्ड की स्थापना की जानी चाहिए।

गठन—पुनरीक्षण समिति के सुझाव पर केन्द्र सरकार ने 1982 में राष्ट्रीय सांख्यिकी सलाहकार मण्डल (National Advisory Board on Statistics—N.A.B.S.) की स्थापना की। योजना आयोग के सांख्यिकी प्रभारी सदस्य इस मण्डल के अध्यक्ष हैं तथा केन्द्रीय मन्त्रालयों, राज्य सरकारों, शोध-संस्थानों और समंक प्रयोग करने वाले संगठनों के प्रतिनिधि इसके सदस्य हैं। मण्डल के दो उपाध्यक्ष हैं—(1) सांख्यिकी विभाग के सचिव और (2) केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C.S.O.) के महानिदेशक। केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन इसे सचिवालय सुविधा प्रदान करता है।

कार्य—राष्ट्रीय सांख्यिकीय सलाहकार मण्डल (N.A.B.S.) के निम्न प्रमुख कार्य हैं—

(i) समंकों के विकास में निहित नीतिगत विषयों पर सरकार को आवश्यक तकनीकी सलाह देना;

(ii) भारत में सांख्यिकीय व्यवस्था के विकास के लिए व्यापक परिप्रेक्ष्य प्रदान करना;

(iii) नियोजन और नीति-निर्धारण की बढ़ती हुई सामयिक आवश्यकताओं को ध्यान में रखते हुए समंकों के संकलन व विधियन के लिए उचित प्राथमिकताएँ निर्धारित करना;

(iv) समंक संकलन, समंकों में रिक्तियों की पहचान करने तथा समंकों की गुणवत्ता और समयपालन सुनिश्चित करने के लिए सांख्यिकीय क्रियाओं का प्रभावी समन्वय स्थापित करना; तथा

(v) सांख्यिकीय सामग्री के संकलन, संग्रहण, भण्डारण, पुन: प्राप्ति में दोहरेपन की त्रुटि को दूर करना, तथा

(vi) सांख्यिकी के क्षेत्र में नवीनतम विकास-प्रवृत्तियों के लिए एक भण्डार गृह का कार्य करना।

सांख्यिकीय गतिविधियों में उचित समन्वय स्थापित करने और दोहरेपन की रोकथाम करने तथा उचित प्राथमिकताएँ निर्धारित करने के उद्देश्य से मण्डल ने सभी केन्द्रीय मन्त्रालयों व राज्य सरकारों के सांख्यिकीय प्रभागों को यह निर्देश दिया है कि वे महत्त्वपूर्ण सांख्यिकीय कार्यक्रमों का समारम्भ करने से पूर्व उन्हें समीक्षा के लिए मण्डल की अधिशासी समिति में अवश्य प्रस्तुत करें।

उपयुक्त मानकों के निर्धारण के लिए तथा संकलित किये जाने वाले समंकों की गुणवत्ता, समयपालन और विश्वसनीयता सुनिश्चित करने के लिए राष्ट्रीय सांख्यिकी सलाहकार मण्डल ने अनेक विषय नामिकाएँ (subject panels) गठित की हैं।

राष्ट्रीय सांख्यिकी सलाहकार मण्डल का गठन एक सराहनीय कदम है और आशा की जाती है कि सांख्यिकीय व्यवस्था के दोष यथाशीघ्र दूर हो जाएँगे।

दोष तथा सुझाव (Shortcomings and Suggestions)—केन्द्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था के संक्षिप्त विवरण से यह स्पष्ट है कि देश में स्वतन्त्रता-प्राप्ति के पश्चात् सांख्यिकीय संगठन, संकलन-विधि, समंक विधियन, सांख्यिकीय शोध-कार्य एवं प्रशिक्षण आदि में अनेक सुधार हुए हैं। केन्द्र में एक भारतीय सांख्यिकीय सेवा (Indian Statistical Service—I.S.S.) की भी स्थापना की गई है। सरकार को सांख्यिकीय मामलों पर सलाह देने के लिए राष्ट्रीय

सांख्यिकी सलाहकार मण्डल नामक एक शिखर संस्था की भी स्थापना की गई है। परन्तु अभी भी (i) मन्त्रालयों की समंक शाखाओं, प्रादेशिक संगठनों, राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन, अभिकलित्र केन्द्र तथा केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन में यथेष्ट समन्वय का अभाव है। (ii) एक ही समस्या पर अनेक संस्थाएँ अपने-अपने तरीके से समंक संकलित करती हैं जिनमें तुलनीयता का अभाव होता है। इससे वस्तु-स्थिति स्पष्ट नहीं हो पाती। आवश्यकता इस बात की है कि केन्द्रीय संगठन एवं सांख्यिकी विभाग का कार्यक्षेत्र बढ़ाया जाये तथा सलाहकार बोर्ड के मार्ग-दर्शन में सांख्यिकीय क्रियाएँ आयोजित की जाएँ। अधिकाधिक समन्वय की व्यवस्था की जाये तथा कार्य के दोहरेपन और प्रकाशन-विलम्ब को दूर किया जाये। देश में सांख्यिकीय प्रशिक्षण की सुविधाओं का भी विस्तार होना चाहिए। आशा है, अभी हाल ही में उठाए गए अनेक कदमों से भारतीय समंकों की कमियाँ दूर की जायेंगी और इस प्रकार केन्द्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था और भी अधिक प्रभावशाली ढंग से कार्य-निष्पादन करेगी।

राज्यों में सांख्यिकीय संगठन
(Statistical Organisation in the States)

केन्द्र की भाँति राज्यों में भी विकेन्द्रीकृत सांख्यिकीय व्यवस्था है। प्रत्येक राज्य में *संविधान की राज्य-सूची में वर्णित विषय पर आवश्यक समंक संकलित एवं विश्लेषित करने के* लिए राज्य मन्त्रालयों में सांख्यिकीय शाखाएँ स्थापित हैं तथा उनमें समन्वय करने के उद्देश्य से 1946 की ग्रेगोरी समिति (Gregory Committee) की सिफारिशों के अनुसार सभी राज्यों व संघ-शासित क्षेत्रों में राज्य सांख्यिकीय संस्थानों (State Statistical Bureaus) की स्थापना की गयी है।

आजकल देश के विभिन्न राज्यों तथा संघ-शासित क्षेत्रों में कुल मिलाकर 3338 (राज्यों व जिला केन्द्रों में 3245 तथा संघ-शासित क्षेत्रों में 93) सांख्यिकीय इकाइयाँ स्थापित हैं जिनमें कुल मिलाकर 40,589 सांख्यिकीय वर्ग के कर्मचारी कार्य करते हैं। इन इकाइयों पर वर्ष 1986–87 में वास्तविक व्यय 60·8 करोड़ रु० हुआ तथा 1988–89 के लिए प्रस्तावित व्यय 85·8 करोड़ रु० था। इस सम्बन्ध में विस्तृत विवरण पृष्ठ 35 पर प्रस्तुत सारणी में दिया गया है।

राज्यों में सांख्यिकीय संगठनों की स्थापना अधिकतर स्वतन्त्रता-प्राप्ति के पश्चात् ही सम्पन्न हुई है। भूतपूर्व ब्रिटिश प्रान्तों की सरकारें केन्द्र के लिए कृषि, शिक्षा आदि पर ही समंक एकत्रित किया करती थीं। *1947 तक, राज्य स्तर पर सांख्यिकीय इकाइयों की गतिविधियों में* समन्वय स्थापित करने के उद्देश्य से केवल तीन प्रान्तों—उत्तर प्रदेश, पश्चिमी बंगाल और भूतपूर्व बम्बई प्रान्त—में ही सांख्यिकीय ब्यूरो विद्यमान थे। द्वितीय पंचवर्षीय योजना काल (1956–61) में भारत में समन्वित सांख्यिकीय व्यवस्था का सूत्रपात किया गया जिसके अन्तर्गत सभी राज्यों और संघ-शासित प्रदेशों में राज्य सांख्यिकीय ब्यूरो (State Statistical Bureaus—S. S. B.) और जिला सांख्यिकीय कार्यालयों (District Statistical Offices—D. S. O.) की स्थापना की गई।

त्रि-स्तरीय व्यवस्था (*Three-tier Set-up*)—*आजकल सभी राज्यों में सांख्यिकीय संगठन* त्रि-स्तरीय व्यवस्था पर आधारित है—

(i) जिला-स्तर पर (At District Level)—प्रत्येक जिले में एक सांख्यिकी अधिकारी के अधीन जिला सांख्यिकीय कार्यालय (District Statistical Office—D. S. O.) स्थापित है जो जिले में विभिन्न अनुसन्धानकर्ताओं द्वारा किये जाने वाले सर्वेक्षणों का निरीक्षण एवं समन्वय करके उनके परिणामों को विभागीय कार्यालय में भेजने की व्यवस्था करता है। जिला सांख्यिकीय कार्यालय राज्य मुख्यालय पर स्थित शिखर-संस्थान—**अर्थ सांख्यिकी निदेशालय** (Directorate of Economics and Statistics *D.E.S.*)—*के निरीक्षण, निर्देशन और नियन्त्रण में कार्य करते हैं।* अनेक राज्यों में—D.E.S. राज्य के तत्वावधान में किये जाने वाले कृषि-संगणना व आर्थिक संगणना आदि के लिए क्षेत्र-सर्वेक्षण आयोजित करने का दायित्व भी जिला सांख्यिकीय कार्यालयों

राज्यों व संघ-शासित क्षेत्रों में सांख्यिकीय इकाइयाँ (1 जुलाई 1988 को)

राज्य	सांख्यिकीय कार्यालयों की संख्या	सांख्यिकीय कर्मचारियों की संख्या	राज्य	सांख्यिकीय कार्यालयों की संख्या	सांख्यिकीय कर्मचारियों की संख्या	संघ-शासित क्षेत्र	कार्यालय	कर्मचारी
आन्ध्र प्रदेश	52	2260	मेघालय	25	241	अण्डमान निकोबार	31	111
अरुणाचल प्रदेश	13	198	मिजोरम	21	204	चण्डीगढ़	7	37
असम	57	1536	नागालैण्ड	8	214	दादर, नागर हवेली	5	11
बिहार	96	3228	उड़ीसा	56	2910	दमन व दीव	[illegible]	[illegible]
गोआ	18	242	पंजाब	187	1365	दिल्ली	21	407
गुजरात	152	1977	राजस्थान	126	1998	लक्षद्वीप	9	17
हरियाणा	111	1127	सिक्किम	6	162	पाण्डिचेरी	14	140
हिमाचल प्रदेश	28	552	तमिलनाडु	113	2381			
जम्मू-कश्मीर	366	1189	त्रिपुरा	42	312			
कर्नाटक	107	1233	उत्तर प्रदेश	460	3933			
केरल	42	2399	पश्चिमी बंगाल	186	3745			
मध्य प्रदेश	438	3529				योग	93	732
महाराष्ट्र	122	2425						
मणिपुर	56	497	योग	3245	39857	कुल योग	3338	40589

Source: *Statistical System in India*, 1989, pp. 47–49.

को सौंपा गया है। सूक्ष्म-स्तर नियोजन (micro-level planning) के लिए समंक-आधार तैयार करना भी इस कार्यालय के कार्यक्षेत्र में सम्मिलित है। जिला सांख्यिकीय कार्यालयों द्वारा जिला सांख्यिकीय पुस्तिका (District Statistical Handbook/Abstract), जिला अर्थ-सामाजिक समीक्षाएँ (District Socio-Economic Reviews) तथा विकासखण्ड के स्तर पर आर्थिक माप-सूचकांकों (economic indicators) का प्रकाशन व प्रसारण भी किया जाता है।

अधिकतर राज्यों में जिला सांख्यिकीय अधिकारी के तकनीकी और प्रशासनिक नियन्त्रण व निरीक्षण में प्रत्येक विकासखण्ड के स्तर पर एक सांख्यिकीय सहायक (Statistical Assistant) होता है जो ग्रामीण स्तर पर सांख्यिकीय अभिलेख का अनुरक्षण करने, समय-समय पर जिला मुख्यालयों को योजना की प्रगति का विवरण भेजने व समंकों की गुणवत्ता व समयानुकूलता में सुधार करने का कार्य करता है। अधिकांश राज्यों में जिला/खण्ड स्तर पर समंक अधिकोषों (data banks) की स्थापना की जा रही है।

(ii) विभागीय स्तर पर (At Departmental Level)—अनेक राज्य-मन्त्रालयों से संलग्न सांख्यिकीय इकाइयाँ होती हैं जो अपने कार्य क्षेत्र के विषयों पर जिला अधिकारियों से उपलब्ध समंकों का विश्लेषण, संक्षिप्तीकरण एवं परितुलन (collation) करती हैं तथा उन्हें निदेशालयों (D.E.S.) को भेजती हैं।

(iii) सर्वोच्च स्तर पर शिखर संस्थान—अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय (At the Highest Level—Nodal Statistical Agency—Directorate of Economics and Statistics : D.E.S.)—प्रत्येक राज्य व संघ-शासित प्रदेश की राजधानी में एक शिखर सांख्यिकीय संस्थान कार्य करता है जो अलग-अलग राज्यों में राज्य सांख्यिकीय ब्यूरो (State Statistical Bureau); अर्थ सांख्यिकी विभाग (Department of Economics and Statistics), सांख्यिकी

देशालय (Directorate of Statistics and Evaluation), अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय (Directorate of Economics and Statistics) आदि अनेक नामों से पुकारा जाता था। 1980 में राष्ट्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था समीक्षा समिति ने यह सिफारिश की थी कि एकरूपता लाने के लिए शिखर-संस्थानों का एक समान नाम—*अर्थ सांख्यिकी निदेशालय (Directorate of Economics and Statistics—D.E.S.)* रखा जाना चाहिए। इसके बाद से लगभग सभी राज्यों के शिखर-संस्थानों को अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय नाम से ही जाना जाता है।

राज्य अर्थ-सांख्यिकी निदेशालयों (D.E.S.) के निम्न प्रमुख कार्य हैं—

(i) राज्य के विभिन्न विभागों की सांख्यिकीय गतिविधियों का समन्वय करना;

(ii) राज्य के अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय का केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C.S.O.) तथा अन्य राज्यों के शीर्षस्थ सांख्यिकीय निदेशालयों से निरन्तर सम्पर्क रखना;

(iii) राज्य के सभी क्षेत्रों के आवश्यक समंकों का संग्रहण व विश्लेषण करना जिनमें कृषि, राज्य की आय, कीमत समंक आदि सम्मिलित हैं;

(iv) राज्य के आर्थिक नियोजन तथा सूचकांकों की रचना से संबंधित कार्य सम्पन्न करना;

(v) विशेष अनुसन्धान एवं सर्वेक्षण आयोजित करना जिनमें राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन (N.S.S.O.) के कार्यक्रमों में भाग लेना भी शामिल है;

(vi) राज्य समंक सार (State Statistical Abstract), मूल समंक (Basic Statistics) तथा अन्य विशिष्ट प्रकाशनों के माध्यम से राज्य से सम्बन्धित मूल समंकों का प्रसारण करना;

(vii) सांख्यिकीय कर्मचारियों के लिए आवश्यक प्रशिक्षण का आयोजन करना।

अधिकांश राज्यों और संघ-शासित प्रदेशों में अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय के अतिरिक्त योजना-निर्माण, योजना-समन्वय तथा योजना अनुवीक्षण एवं मूल्यांकन कार्यों को निष्पादित करने के लिए पृथक् योजना एवं विकास विभाग स्थापित हैं। जनपद स्तर पर अनेक राज्यों में जिला योजना अधिकारी आर्थिक नियोजन सम्बन्धी कार्यकलापों का निष्पादन करते हैं।

पंचवर्षीय योजनाओं की अवधि में केन्द्रीय वित्तीय सहायता परियोजना के अधीन राज्य अर्थ सांख्यिकी निदेशालयों (D.E.S.) के कार्यों व गतिविधियों में महत्वपूर्ण विस्तार हुआ है। परन्तु समंक संकलन सम्बन्धी दायित्व के क्षेत्र में विभिन्न राज्य निदेशालयों के क्रियाकलापों में काफी अन्तर है। कुछ राज्यों में समंकों के संकलन का कार्य निदेशालय में ही केन्द्रित हैं जबकि कुछ अन्य राज्यों में कृषि, श्रम और जन्म-मरण सम्बन्धी समंकों का संग्रहण सांख्यिकीय निदेशालय के कार्यक्षेत्र के बाहर है। वह अन्य विभागों द्वारा सम्पन्न किया जाता है। बहुद्देशीय सर्वेक्षणों के संचालन में राज्य स्थायी आधार पर राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन (N.S.S.O.) से सहयोग करते हैं।

राष्ट्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था समीक्षा समिति (1979–80) ने राज्यों की सांख्यिकीय व्यवस्था में सुधार लाने के लिए यह महत्वपूर्ण सिफारिश की थी कि राज्यों में यथासम्भव प्रतिदर्श सर्वेक्षणों के क्षेत्र-कार्य का निरीक्षण करने तथा निर्धारित सांख्यिकीय प्रतिवेदनों और प्रत्यायों (prescribed statistical reports and returns) के प्रस्तुतीकरण में समन्वय बनाये रखने के उद्देश्य से अर्थ-सांख्यिकी निदेशालयों के मण्डलीय अथवा आंचलिक सांख्यिकीय कार्यालयों (Divisional/Regional Statistical Offices) की स्थापना की जानी चाहिए। इन सिफारिशों को कार्यान्वित करते हुए निम्न राज्यों ने आंचलिक सांख्यिकीय कार्यालय स्थापित किये हैं—

बिहार, जम्मू-कश्मीर, केरल, मध्य प्रदेश, महाराष्ट्र, उड़ीसा, राजस्थान, तमिलनाडु, उत्तर प्रदेश तथा पश्चिमी बंगाल।

कुछ प्रमुख राज्यों में सांख्यिकीय संगठन की रूपरेखा निम्न प्रकार है—

उत्तर प्रदेश

उत्तर प्रदेश (U. P.) में विभिन्न विभागों से सम्बन्धित 460 सांख्यिकीय इकाइयां हैं जिनमें 3933 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्य करते हैं। 1986–87 में इन समस्त इकाइयों पर

4·9 करोड़ रु० वास्तविक व्यय किया गया जबकि 1988–89 में प्रस्तावित व्यय 5·93 करोड़ रु० था। 1942 में इन इकाइयों में समन्वय लाने के लिए 'अर्थ एवं सांख्यिकी विभाग' (Department of Economics and Statistics) की स्थापना की गयी थी। 1961 में इस विभाग को अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय (Directorate of Economics & Statistics—D.E.S.–U.P.) का नाम दिया गया। यह राज्य की शीर्षस्थ सांख्यिकीय संस्था है जिसका मुख्यालय लखनऊ में स्थित है। इस निदेशालय का अध्यक्ष महानिदेशक होता है जिसके अधीन तीन उपनिदेशक, तीन सहायक निदेशक, तेरह सांख्यिकीय अधिकारी तथा अनेक अनुसन्धानकर्ता, संगणक व अन्य सांख्यिकी-संवर्ग के कर्मचारी कार्य करते हैं। इसके 12 प्रभाग है। हाल ही में इसके क्षेत्रीय कार्यालय (Regional Offices) स्थापित किये गये हैं। अर्थ एवं सांख्यिकी निदेशालय के निम्न कार्य है—

(i) प्रदेश के सांख्यिकीय संगठन का अन्य राज्यों के सांख्यिकीय निदेशालयों तथा केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन में समन्वय कायम करना;

(ii) प्रदेश की सांख्यिकीय नीति निर्धारित करना तथा तकनीकी सलाह देना;

(iii) कृषि-मूल्य, मजदूरी, उत्पादन, राष्ट्रीय आय आदि से सम्बद्ध समंकों का संकलन, विश्लेषण, विधियन एवं प्रकाशन करना;

(iv) राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन (N.S.S.O.) द्वारा किये जाने वाले बहु-उद्देशीय सर्वेक्षणों में सहायता एवं सहयोग प्रदान करना;

(v) विभिन्न प्रकार के सूचकांकों की रचना करना;

(vi) विभिन्न योजनाओं की प्रगति का मूल्यांकन करना;

(vii) राज्य की वार्षिक आय का आकलन करना;

(viii) औद्योगिक समंक निदेशालय द्वारा किये जाने वाले उद्योगों के वार्षिक सर्वेक्षण (A.S.I.) में सहयोग देना;

(ix) सांख्यिकीय कर्मचारियों के प्रशिक्षण की व्यवस्था करना, तथा

(x) राज्य से सम्बन्धित समंकों, प्रतिवेदनों व पत्रिकाओं का प्रकाशन करना।

निदेशालय के निम्न प्रमुख नियमित प्रकाशन है—

वार्षिक—1. Statistical Abstract of U. P.
2. संख्या-सारांश, उत्तर प्रदेश;
3. सांख्यिकीय डायरी, उत्तर प्रदेश;
4. अर्थ एवं सांख्यिकी निदेशालय का कार्य विवरण;
5. उत्तर प्रदेश के आय-व्यय का आर्थिक एवं कार्य सम्बन्धी विवरण;
6. राज्य आय अनुमान, उत्तर प्रदेश;
7. औद्योगिक उत्पादन की संगणना;

त्रैमासिक—1. सांख्यिकीय त्रैमासिक पत्रिका, उत्तर प्रदेश;
2. आधारभूत आंकड़ो की त्रैमासिक पत्रिका।

मासिक—1. Monthly Bulletin of Statistics.

उपर्युक्त विभाग के अतिरिक्त उत्तर प्रदेश में अन्य निम्नलिखित कार्यालयों द्वारा सावधिक विवरण एवं प्रतिवेदन प्रकाशित किये जाते हैं—

(क) रजिस्ट्रार, सहकारी समितियाँ (Registrar Cooperative Societies) :

वार्षिक—1. Annual Report on the Working of Co-operative Societies in U. P.
2. Cooperation in U. P.
3. Statistical Tables relating to the Co-operative Societies in U. P.
4. Important Statistics of Co-operative Movement in U. P.

(ख) श्रम आयुक्त का कार्यालय (Office of the Labour Commissioner) ।

मासिक—1. Labour Bulletin.

2. श्रमजीवी।

इसके अतिरिक्त श्रम आयुक्त कार्यालय से कानपुर के श्रमिकों के उपभोक्ता मूल्य सूचकांक भी प्रकाशित किये जाते हैं।

(ग) कृषि निदेशालय (Directorate of Agriculture)

वार्षिक —1. Bulletin of Agricultural Statistics for U. P.

पंचवर्षीय—2. Quinquennial Statement of Normal Yield of Principal Crops in U. P.

विभिन्न फसलों के सम्बन्ध में सामयिक प्रतिवेदन तथा गन्ना विकास पत्रिका आदि भी इस निदेशालय द्वारा प्रकाशित की जाती हैं।

(घ) नियोजन, शोध एवं कार्य संस्थान (Planning, Research and Action Institute)

वार्षिक—Annual Report.

मासिक—नवयुवक।

(ङ) अन्य कार्यालयों द्वारा उनकी गतिविधियों के वार्षिक प्रतिवेदन हिन्दी व अंग्रेजी में प्रकाशित किये जाते हैं जिनमें से प्रमुख कार्यालय हैं—यातायात आयुक्त, शिक्षा आयुक्त, वनों के प्रमुख संरक्षक, सिंचाई अभियन्ता तथा पशु चिकित्सा निदेशक का कार्यालय।

जिला स्तर पर जिला सांख्यिकीय अधिकारी सांख्यिकीय क्रियाओं का आयोजन व निरीक्षण करते हैं। विकासखण्ड स्तर पर सांख्यिकीय सहायक (Statistical Assistant) समंकों के संकलन, विधियन व विश्लेषण के कार्य करते हैं। इस प्रकार, उत्तर प्रदेश में भी सांख्यिकीय व्यवस्था विभिन्न शाखाओं एवं कार्यालयों में विकेन्द्रित है और समन्वय का कार्य अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय द्वारा सम्पन्न किया जाता है। राष्ट्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था समीक्षा समिति की सिफारिश के अनुसार निदेशालय के क्षेत्रीय कार्यालय भी खोले गये हैं।

समीक्षा—पिछले कुछ वर्षों में उत्तर प्रदेश की सांख्यिकीय व्यवस्था में अनेक सुधार किए गए हैं परन्तु फिर भी उसमें अनेक दोष हैं जिनमें से प्रमुख इस प्रकार हैं—समन्वय की कमी और समंक संकलन में दोहरापन, मानक अवधारणाओं व परिभाषाओं के प्रयोग में शिथिलता, अधिकतर द्वितीयक समंकों का प्रयोग होना, संसूचकों द्वारा सूचना देने में वैधानिक अनिवार्यता का अभाव होना तथा प्रकाशन में अत्यधिक विलम्ब होना।

सुझाव—प्रदेश में सांख्यिकीय व्यवस्था को सुदृढ़ बनाने के लिए अनेक सुधार किये जाने आवश्यक हैं। निरन्तर बढ़ते हुए सांख्यिकीय कार्य को देखते हुए प्रतिदर्श सर्वेक्षणों के क्षेत्रीय-कार्य का निरीक्षण करने और निर्धारित सांख्यिकीय प्रपत्रों व प्रतिवेदनों को यथाशीघ्र प्रस्तुत करने के उद्देश्य से प्रदेश में अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय के आंचलिक कार्यालय स्थापित किए गए हैं। यह सही दिशा में उठाया गया एक सराहनीय कदम है। आवश्यकता इस बात की है कि प्रदेश में विभिन्न स्तरों पर समंक अधिकोषों (data banks) की स्थापना की जानी चाहिए तथा शीघ्र प्रकाशन व प्रसारण हेतु अभिकलित्र-सेवाओं का अधिकाधिक प्रयोग किया जाना चाहिए। कुछ विषयों में सूचना देना संसूचकों के लिए वैधानिक रूप से अनिवार्य कर दिया जाना चाहिए। केन्द्र की भारतीय सांख्यिकीय सेवा (I.S.S.) की भाँति राज्य सांख्यिकीय सेवा संवर्ग का भी गठन किया जाना चाहिए तथा अधिकारियों और कर्मचारियों के सघन तकनीकी प्रशिक्षण की भी व्यवस्था की जानी चाहिए। प्रदेश में विभिन्न मन्त्रालयों व विभागों तथा शीर्षस्थ निदेशालय के उच्च सांख्यिकीय अधिकारियों की स्थायी समिति गठित की जानी चाहिए जो सांख्यिकीय क्रियाकलापों में दोहरेपन को दूर करके समुचित समन्वय की व्यवस्था कर सके। आशा है इन सुधारों का क्रियान्वयन करने पर प्रदेश में सांख्यिकीय व्यवस्था अधिक सशक्त और अधिक सक्षम हो जाएगी।

राजस्थान

भूतपूर्व राजपूताने की देशी रियासतों के पुनर्गठन और राजस्थान राज्य की स्थापना के पश्चात् मई 1950 में एक विशेष सांख्यिकीय अधिकारी की देखरेख में जयपुर में एक सांख्यिकीय ब्यूरो (Statistical Bureau) स्थापित किया गया। आरम्भ में प्रशासन के उपोत्पाद के रूप में उपलब्ध समंकों के विधियन (processing) के अतिरिक्त इस ब्यूरो ने कोई योजनाबद्ध कार्य नहीं किया। अगस्त 1956 से इस कार्यालय को पुनर्गठित करके इसके कार्यकलापों में विस्तार किया गया और इसका नाम अर्थ एवं सांख्यिकी निदेशालय (Directorate of Economics and Statistics) रखा गया। राजस्थान में विभिन्न मन्त्रालयों से संलग्न तथा अन्य वर्तमान सांख्यिकीय इकाइयों की संख्या 126 है जिनमें कुल मिलाकर 1998 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्य करते हैं। 1986–87 में इन सभी इकाइयों पर 1·33 करोड़ रु० वास्तविक व्यय हुआ था जबकि 1988–89 में प्रस्तावित व्यय 5·6 करोड़ रु० था।

प्रबन्ध एवं अनुभाग—निदेशालय का प्रबन्ध एक निदेशक (Director) की देख-रेख में होता है। उसके अधीन तीन संयुक्त निदेशक (Joint Directors), छः उप-निदेशक (Deputy Directors), आठ सहायक निदेशक (Assistant Directors) कार्यरत हैं जो निम्न अनुभागों के प्रभारी है—(i) सर्वेक्षण व सारणीयन; (ii) कृषि समंक; (iii) जीवनांक, उद्योग व मूल्य समंक, (iv) नियोजन सम्बन्धी समंकों का समन्वय; (v) प्रतिदर्श सर्वेक्षण; (vi) राजकीय आय व वित्तीय समंक; (vii) प्रशासन, लेखा व जिला-समंक समन्वय, तथा (viii) प्रशिक्षण अनुभाग।

उपर्युक्त प्रभारी अधिकारियों के अतिरिक्त राज्य में सांख्यिकीय कार्य को सुचारू रूप से संचालित करने के लिए 10 सांख्यिकीय अधिकारी, 27 जिला सांख्यिकीय अधिकारी—प्रत्येक जिले में एक—लेखाधिकारी, विधि-सहायक तथा अनेक निरीक्षक, सहायक निरीक्षक और प्रगणक कार्यरत है।

आठ अनुभागों के अतिरिक्त निदेशालय के कार्य को 20 इकाइयों में बाँटा गया है जिनमें से राष्ट्रीय आय, योजना संसाधन अध्ययन, जीवन-मृत्यु समंकों का पंजीयन व सर्वेक्षण, जिला-समन्वय, राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण, कृषि उद्योगों का वार्षिक सर्वेक्षण, यान्त्रिक सारणीयन व समंक विधियन, प्रशिक्षण, प्रकाशन, समन्वय इकाइयां महत्त्वपूर्ण हैं।

निदेशालय के कार्य (Functions)

कार्य (Functions)—अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय वही कार्य सम्पन्न करता है जो केन्द्रीय स्तर पर C.S.O. करता है। संक्षेप में इस निदेशालय के निम्नलिखित मुख्य कार्य है—

(1) **समन्वय**—राज्य की सांख्यिकीय इकाइयों के कार्यों में समन्वय स्थापित करना।

(2) **सम्पर्क व सूचना का आदान-प्रदान**—केन्द्रीय सरकार से तथा अन्य राज्यों के सर्वोच्च सांख्यिकीय कार्यालयों से सम्पर्क स्थापित करना तथा आवश्यक सूचना का आदान-प्रदान करना।

(3) **अवधारणाएँ एवं परिभाषाएँ**—समंकों में एकरूपता लाने के लिए सर्वेक्षणों में प्रयुक्त अवधारणाओं और परिभाषाओं का प्रमापीकरण करना।

(4) **परामर्श**—राज्य की विभिन्न सांख्यिकीय इकाइयों को सांख्यिकीय मामलों पर तकनीकी सलाह देना, नीति निर्धारण में उनकी सहायता करना तथा सांख्यिकीय कार्यों व नीतियों में सुधार करना।

(5) **योजना मूल्यांकन**—पंचवर्षीय योजना एवं विभिन्न परियोजनाओं की प्रगति का मूल्यांकन करना।

(6) **समंक प्रदर्शन**—सार्वजनिक प्रदर्शन के लिए रेखाचित्र, चार्ट, आदि तैयार करना।

(7) **समंक संकलन व विधियन**—राज्य में कृषि उत्पादन, पशु संगणना, उद्योग एवं सम्बन्धी समंक एकत्र करना व उनका विश्लेषण व विधियन करना।

(8) **सूचकांक**—उत्पादन व मूल्य (थोक व उपभोक्ता) के सूचकांक तैयार करना।

(9) आय आकलन—राज्य की आय का अनुमान लगाना।

(10) N.S.S.O. से सहयोग—विभिन्न सर्वेक्षणों में एकीकृत कार्यक्रम' के अधीन N.S.S.O. के साथ सहयोग करना।

(11) अर्थ सामाजिक सर्वेक्षण—राज्य के महत्वपूर्ण विषयों पर आर्थिक व सामाजिक सर्वेक्षण आयोजित करना।

(12) कर्मचारी संगणना—राज्य कर्मचारियों की नियमित रूप से संगणना करना।

(13) प्रशिक्षण—सम्मेलनों का आयोजन करना और सांख्यिकीय प्रशिक्षण की व्यवस्था करना।

(14) प्रकाशन—समंकों का नियमित रूप से प्रकाशन करना।

सर्वेक्षण (Surveys)—राज्य के अर्थ एवं सांख्यिकी निदेशालय द्वारा अनेक सर्वेक्षण नियमित रूप से आयोजित किये जाते हैं जिनमे से महत्वपूर्ण निम्न प्रकार हैं—

खेती की उन्नत क्रियाओं, उत्तम खाद व उत्तम बीज आदि के किसानों द्वारा प्रयोग की जाँच करने के लिए रबी व खरीफ की फसलों पर सर्वेक्षण, सिंचाई परियोजनाओं का लागत-लाभ विश्लेषण, राजस्थान नहर क्षेत्र व चम्बल क्षेत्र के बैंच-मार्क सर्वेक्षण (bench-mark surveys), ग्रामीण बेरोजगारी का अध्ययन, जन्म-मरण व प्रवसन पर एक प्रतिशत (1%) प्रतिदर्श सर्वेक्षण, केन्द्र के श्रम ब्यूरो की योजना के अनुसार विभिन्न नगरों के श्रमिकों के पारिवारिक बजट सर्वेक्षण, रहन-सहन के स्तर व उपभोग का मूल्यांकन अध्ययन, क्षेत्रीय परिवहन सर्वेक्षण, शहरी श्रम-शक्ति अध्ययन, जयपुर की औद्योगिक बस्ती का सर्वेक्षण, एकीकृत कार्यक्रम (integrated programme) के अन्तर्गत N.S.S.O. के सहयोग से किये जाने वाले विभिन्न अर्थ-सामाजिक सर्वेक्षण इत्यादि। वर्ष 1977 से नियमित रूप से राज्य में आर्थिक संगणना आयोजित करने की व्यवस्था की गई है। इसके लिए निदेशालय में एक नये अनुभाग की स्थापना की जा रही है।

विभिन्न सूचकांकों की रचना—राज्य का अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय निम्न प्रमुख सूचकांकों की भी नियमित रूप से रचना करता है—

(i) औद्योगिक श्रमिक वर्ग के उपभोक्ता मूल्य सूचकांक—वर्ष 1971 के आधार पर जयपुर, जोधपुर, उदयपुर, कोटा, अजमेर तथा श्रीगंगानगर के उपभोक्ता मूल्य सूचकाक तैयार किये जाते हैं। इनका आधार वर्ष बदला जाता रहा है।

(ii) थोक मूल्य सूचकांक—1970–71 वित्तीय वर्ष के आधार पर 22 केन्द्रों में प्रमुख वस्तुओं के मूल्य-उद्धरण लेकर मासिक सामान्य उद्देश्य थोक मूल्य सूचकांक भारित समान्तर माध्य का प्रयोग करके तैयार किये जाते हैं। तुलनात्मक अध्ययन की दृष्टि से इनका आधार वर्ष भी परिवर्तित किया जा रहा है।

(iii) कृषि उत्पादन सूचकांक—निदेशालय द्वारा 2 वर्गों (खाद्य एवं अखाद्य फसलें) व पाँच उपवर्गों में विभाजित कृषि वस्तुओं के 1952–53 से 1955–56 तक के चार वर्षों के औसत को आधार मानकर कृषि उपज सूचकांकों की रचना की जाती है। इसमें भारित समान्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है। आधार वर्ष व भार में परिवर्तन किया जाता रहा है।

प्रकाशन—राजस्थान के अर्थ व सांख्यिकी निदेशालयों द्वारा नियमित रूप से अनेक पत्रिकाएँ प्रकाशित की जाती हैं जिनमें से प्रमुख निम्नांकित हैं—

वार्षिक—
1. Statistical Abstract of Rajasthan.
2. Basic Statistics—Rajasthan (Hindi and English).
3. Annual Plan Progress Report.
4. Administration Reports.
5. Progress Report of the Directorate of Economics & Statistics.
6. Industrial Structure of Rajasthan.
7. Municipal Year Book.
8. Key Statistics of Rajasthan.

9. Statistical Atlas.

10. District Statistical Outlines (Hindi)—for each district.

त्रैमासिक—1. Quarterly Digest of Economics and Statistics, Rajasthan (Hindi and English).

मासिक—आर्थिक सूचकांक (प्रेस नोट)।

अन्य सांख्यिकीय इकाइयाँ (Other Statistical Units)

अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय के अतिरिक्त राजस्थान में निम्न विभागों के अन्तर्गत सांख्यिकीय इकाइयाँ कार्य कर रही हैं—

1. नियोजन विभाग—इस विभाग की सांख्यिकीय शाखा योजनाओं पर व्यय के समंकों का संग्रहण करने, योजना निर्माण में सहायता प्रदान करने तथा योजनाओं की प्रगति का मूल्यांकन करने के उद्देश्य से कार्य कर रही है।

2. पंचायत एवं विकास विभाग—इस विभाग की सांख्यिकीय इकाई, समंकों का संग्रहण, विश्लेषण, विधियन और निर्वचन करके तथा विभिन्न प्रतिवेदनों की जाँच करके महत्वपूर्ण सामग्री 'त्रैमासिक प्रगति रिपोर्ट' (Quarterly Progress Report) नामक पत्रिका में प्रकाशित करती है।

3. कृषि विभाग की सांख्यिकीय शाखा शोध कार्य के समंकों का विश्लेषण व निर्वचन करने तथा कृषि लागतों को कम करने का कार्य करती है।

4. राजस्व मण्डल की सांख्यिकीय शाखा निम्न महत्वपूर्ण कार्य सम्पन्न करती है—

(i) प्रदेश में कृषि, वर्षा और मौसम से सम्बन्धित समंकों का संग्रहण, विश्लेषण, विधियन व निर्वचन करना;

(ii) कृषि समंकों में सुधार करना, तथा

(iii) प्रमुख फसलों के लिए फसल-कटाई सर्वेक्षण (Crop-cutting surveys) आयोजित करना तथा कृषि उपज का पूर्वानुमान लगाना।

5. चिकित्सा एवं स्वास्थ्य निदेशालय की जीवन समंक शाखा राज्य में जन्म, मरण, रोग, परिवार नियोजन, टीकाकरण, मलेरिया उन्मूलन आदि से सम्बद्ध समंकों का संकलन, विधियन व निर्वचन करके उन्हें मासिक पत्रिका 'Bulletin of Vital Statistics' तथा अनेक वार्षिक पत्रिकाओं जैसे Health Statistics तथा Directory of Medical & Health Institutions आदि में प्रकाशित करती है।

6. आबकारी विभाग की समंक शाखा, मादक पदार्थों—शराब, भाँग, अफीम, गाँजा आदि से सम्बन्धित समंकों का संग्रहण एवं प्रकाशन करती है।

7. वाणिज्य कर आयुक्त के कार्यालय की सांख्यिकीय शाखा बिक्री कर, मनोरंजन कर, यात्री कर व विद्युत शुल्क आदि से सम्बन्धित समंकों का संग्रहण, सारणीयन व विधियन करके वार्षिक प्रकाशन Commercial Taxes Statistical Abstract में प्रसारित करती है।

8. प्राथमिक एवं माध्यमिक शिक्षा निदेशक की सांख्यिकीय इकाई द्वारा प्रतिवर्ष Basic Education Statistics नामक पत्रिका में प्राथमिक एवं माध्यमिक शिक्षा सम्बन्धी समंकों का प्रकाशन किया जाता है।

9. उपर्युक्त शाखाओं के अतिरिक्त महाविद्यालय शिक्षा निदेशालय, श्रम आयुक्त कार्यालय, समाज कल्याण विभाग, पशुपालन, खान निदेशालय, उद्योग निदेशालय, परिवहन निगम, राज्य विद्युत मण्डल, चुनाव विभाग आदि विभागों में भी सांख्यिकीय इकाइयाँ कार्यरत हैं।

व्यावहारिक आर्थिक शोध की राष्ट्रीय परिषद (N.C.A.E.R.) द्वारा राजस्थान सरकार के आदेश पर राज्य का तकनीकी-आर्थिक सर्वेक्षण भी किया गया है जिससे उपयोगी आर्थिक ... प्राप्त किये गये हैं। इसके अतिरिक्त, राज्य में प्रतिचयन आधार पर आर्थिक एवं ... सर्वेक्षण भी किया गया है। मूल्यांकन संगठन द्वारा राज्य में लोकतान्त्रिक [illegible]

पंचायती राज्य की योजनाओं की प्रगति का मूल्यांकन किया जाता है। गेजेटीयर विभाग प्रत्येक जिले का गेजेटीयर तैयार करता है। राज्य के 27 जिलों में जिला सांख्यिकीय अधिकारी पर अपने क्षेत्र मे प्राथमिक समंकों का संगठन करके निदेशालय को भेजने का दायित्व है।

इस प्रकार 1956 मे अर्थ एवं सांख्यिकी निदेशालय की स्थापना से अब तक राजस्थान ने साख्यिकीय क्षेत्र में काफी प्रगति की है और अर्थव्यवस्था के विभिन्न पहलुओं पर मूल्यवान सूचनाएँ उपलब्ध हुई हैं।

राजस्थान की सांख्यिकीय व्यवस्था की त्रुटियाँ (Shortcomings of the Statistical System in Rajasthan)—राजस्थान का अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय सांख्यिकीय व्यवस्था के शीर्षस्थ संगठन के रूप में महत्वपूर्ण भूमिका निभा रहा है परन्तु राज्य की सांख्यिकीय व्यवस्था में निम्नांकित प्रमुख दोष हैं जिनका निराकरण परमावश्यक है—

1. समन्वय का अभाव—निदेशालय राज्य की विभिन्न सांख्यिकीय शाखाओं की गतिविधियों में समन्वय स्थापित करने में असफल रहा है।

2. दोहरापन—कुछ समंक राज्य निदेशालय, विभागीय इकाइयों तथा C.S.O. द्वारा एकत्रित किये जाते हैं जिससे उनमें आवश्यक रूप से दोहरापन आ जाता है और व्यर्थ मे धन, श्रम और समय की बर्बादी होती है। वस्तुतः यह दोहरापन भी समुचित समन्वय की कमी के कारण होता है।

3. तुलनीयता का अभाव—निदेशालय द्वारा संग्रहीत समंकों में तुलनीयता का अभाव होता है। मुख्य रूप से विभिन्न वर्गों के उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों में आधार वर्ष, केन्द्र व वस्तुओं की संख्या आदि मे विविधता होती है, अतः इनमे परस्पर तुलना नहीं की जा सकती।

4. मानक शब्दावली के प्रयोग में शिथिलता—केन्द्रीय संगठन तथा राज्य निदेशालय द्वारा प्रयुक्त प्राविधिक शब्दावली में अन्तर होता है। मानक शब्दावली के प्रयोग मे कमी होने के कारण समंकों से भ्रामक परिणाम निकलते हैं।

5. वैधानिक अनिवार्यता की कमी—उद्योगों के वार्षिक सर्वेक्षण तथा जन्म-मरण से सम्बन्धित सूचना देना संसूचको के लिए अनिवार्य है। अन्य महत्वपूर्ण विषयो पर सूचना देने का संसूचकों पर कोई वैधानिक दायित्व नही है, अतः सूचना उपलब्ध होने में कठिनाई होती है।

6. प्रकाशन-विलम्ब—राज्य निदेशालय द्वारा प्रसारित पत्रिकाओं, प्रतिवेदनों व प्रत्यायो के प्रकाशन में अत्यधिक विलम्ब हो जाता है जिससे अनेक प्रकाशनो का तो मात्र ऐतिहासिक महत्व ही रह जाता है।

सुधार के सुझाव—राज्य के अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय को अधिक उपयोगी बनाने के लिए निम्न सुधार किये जाने चाहिए—

1. समन्वय—समंकों के दोहरेपन को समाप्त करने के लिए राज्य की विभिन्न सांख्यिकीय इकाइयों और केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C.S.O.) से निदेशालय का समुचित समन्वय होना चाहिए जिससे संग्रहीत समंकों मे तुलनीयता का समावेश हो सके।

2. मानक अवधारणाओं व परिभाषाओं का अक्षरशः पालन—केन्द्र द्वारा निर्धारित मानक आर्थिक व सांख्यिकीय अवधारणाओं एवं परिभाषाओं का राज्य की विभिन्न सांख्यिकीय क्रियाओं मे पूर्णरूपेण अनुपालन किया जाना चाहिए ताकि केन्द्र तथा अन्य राज्यों के समंको से तुलनीयता सम्भव हो सके।

3. वैधानिक अनिवार्यता—निदेशालय व अन्य सांख्यिकीय इकाइयो द्वारा आवश्यक समंक संग्रहीत करने के लिए उपयुक्त वैधानिक प्रावधान होने चाहिएँ जिससे संसूचको द्वारा सूचना देना अनिवार्य किया जा सके।

4. अभिकलित्र व्यवस्था और प्रशिक्षण—निदेशालय द्वारा समंको के विधियन और विश्लेषण को शीघ्रतापूर्वक सम्पन्न करने के उद्देश्य से कम्प्यूटर (अभिकलित्र) सेवाओ की व्यवस्था की जानी चाहिए तथा सांख्यिकों को विद्युत्-समक विधियन और अभिकलित्रीकरण के क्षेत्र मे पर्याप्त प्रशिक्षण दिया जाना चाहिए।

5. शीघ्र प्रकाशन—विभिन्न समंकों को शीघ्र प्रकाशित एवं प्रसारित करना उनकी उपादेयता बढाने के लिए परमावश्यक है। अभिकलित्र की सेवाओं के उपयोग से प्रकाशन-विलम्ब दूर किया जा सकता है।

6. समंक-अधिकोष की स्थापना—राज्य के अर्थ-साख्यिकी निदेशालय मे समक-अधिकोष (Data Bank) की स्थापना की जानी चाहिए जिसमें विभिन्न इकाइयो से उपलब्ध समंको का संग्रह किया जा सके।

राष्ट्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था समीक्षा समिति की सिफारिशों के अनुसार अभी हाल ही में राजस्थान में भी निदेशालय के आंचलिक कार्यालय खोले गये है तथा अभिकलित्र सेवाओं और समंक-अधिकोषों की व्यवस्था की जा रही है। आशा है भविष्य मे उपर्युक्त अनेक सुझावो को क्रियान्वित करके प्रदेश मे साख्यिकीय व्यवस्था को अधिक सुदृढ़, व्यापक और विश्वसनीय बनाया जा सकेगा।

मध्य प्रदेश

मध्य प्रदेश (M. P.) की 438 सांख्यिकीय इकाइयो में 3529 साख्यिकीय कर्मचारी कार्य करते हैं। 1986–87 मे इन इकाइयों का वास्तविक व्यय 3·24 करोड़ रु० था तथा 1988–89 मे प्रस्तावित व्यय 4·33 करोड़ रु० था। समन्वय हेतु 1954 में अर्थ एव साख्यिकी निदेशालय (Directorate of Economics & Statistics) स्थापित किया गया था जिसके प्रमुख कार्य है—राज्य सरकार के अनेक साख्यिकीय अनुभागो मे समन्वय स्थापित करना, विभिन्न विषयो पर सर्वेक्षण करना, N.S.S.O. की एकीकृत योजना मे भाग लेना, राज्य की वार्षिक आय का अनुमान लगाना, योजनाओ की प्रगति का मूल्यांकन करना और सूचकाक निर्माण करना।

निदेशालय का संचालन, निदेशक के अधीन कार्यरत, उपनिदेशक, सहायक निदेशक, जिला सांख्यिकीय अधिकारी, तथा अनेक राजपत्रित कर्मचारियों द्वारा किया जाता है। निरन्तर बढते कार्य को दृष्टिगत रखकर निदेशालय के अनेक आचलिक कार्यालय स्थापित किये गये है। निदेशालय का सम्पूर्ण कार्य 9 अनुभागों में विभाजित हैं। निदेशालय के निम्नलिखित प्रमुख प्रकाशन है—

वार्षिक—
1. Statistical Abstract of Madhya Pradesh.
2. Economic Survey of M. P. (Hindi and English).
3. Pocket Compendium of M. P. Statistics.
4. Annual Report of the Directorate.
5. Estimates of State Income of M. P. at Current & Constant Prices.
6. मध्य प्रदेश का आय-व्ययक।
7. Basic Statistics of M. P.
8. Census of State Govt. Employees.

त्रैमासिक—
1. Quarterly Bulletin of M. P. Statistics.
2. मध्य प्रदेश की साख्यिकीय समीक्षा।

अर्थ-सांख्यिकी निदेशालय के अतिरिक्त मध्य प्रदेश सरकार के मन्त्रालयो की विभिन्न साख्यिकीय शालाओं द्वारा अपने कार्य-क्षेत्र मे आवश्यक समक संकलित एवं प्रकाशित किये जाते हैं। उदाहरणार्थ, 1956 में स्थापित भूमि अभिलेख निदेशालय (Directorate of Land Records) कृषि समंको का संग्रह करके उन्हे निम्न मुख्य प्रकाशनों मे प्रस्तुत करता है—

पंचवर्षीय— Standard Out-turn per acre of Crops in M. P.

वार्षिक—
1. Estimates of Area and Yield of Crops.
2. Season and Crop Report of M. P.
3. Tables of Agricultural Statistics of M. P.
4. Index Numbers of Agricultural Production in M.

5. Crop Estimation Surveys—(Different Crops).
6. मध्य प्रदेश में प्रमुख कृषि फसलों के क्षेत्रीय भाव।
7. Annual and Monthly Rainfall Tables of M. P.

मासिक— 1. Index Numbers of Agricultural Wages.
2. Daily and Monthly Rainfall Tables.

साप्ताहिक— Weather and Crop Reports.

रोजगार एवं प्रशिक्षण निदेशालय द्वारा प्रदेश में रोजगार स्थिति का विवरण त्रैमासिक Employment Market Reports, Annual Reports, Monthly Progress Reports आदि में प्रकाशित होता है। पशुपालन एवं पशु-चिकित्सा निदेशालय का सांख्यिकीय विभाग 'Veterinary and Animal Husbandry Statistics—Annual'—का प्रकाशन करता है। सार्वजनिक शिक्षा निदेशालय तथा भूगर्भ एवं खनन निदेशक कार्यालय की सांख्यिकीय शाखाओं द्वारा अपने विभागों की वार्षिक प्रगति रिपोट निर्गमित की जाती है। आदिवासी कल्याण निदेशालय का मूल्यांकन-कक्ष अनुसूचित आदिवासी क्षेत्रों के प्रशासन का वार्षिक प्रतिवेदन प्रस्तुत करता है। श्रम आयुक्त द्वारा ग्वालियर व इन्दौर के श्रमिक वर्ग उपभोक्ता मूल्य सूचकांक 'Monthly Review of the Economic Situation in M. P.' में निर्गमित किये जाते हैं। हाल ही में केन्द्रीय श्रम-ब्यूरो ने भोपाल, ग्वालियर, इन्दौर व बालाघाट नगरों के औद्योगिक श्रमिकों के उपभोक्ता मूल्य सूचकाक प्रकाशित करना आरम्भ किया है। सहकारी विभाग, सार्वजनिक निर्माण विभाग, सड़क परिवहन निगम आदि कार्यालयों के वार्षिक प्रतिवेदनो में प्रदेश की आर्थिक प्रगति का विस्तृत विवरण मिल जाता है। राज्य के प्रत्येक जिले में जिला सांख्यिकीय अधिकारी तथा विकास खण्ड स्तर पर सांख्यिकीय सहायक नियुक्त हैं जिनके द्वारा प्राथमिक समंकों को संग्रहीत करके उन्हें विभिन्न सम्बद्ध इकाइयों व निदेशालय को भेज दिया जाता है।

बिहार

बिहार (Bihar) में विभिन्न मन्त्रालयों की 96 सांख्यिकीय शाखाओ में समन्वय करने, राज्य सरकार को सांख्यिकीय मामलो पर सलाह देने, सर्वेक्षणों द्वारा आर्थिक सूचना प्रदान करने के उद्देश्य से 1949 मे वित्त-विभाग के अधीन अर्थ-समक केन्द्रीय ब्यूरो (Central Bureau of Economics and Statistics) की स्थापना की गई। 1960 में कृषि सांख्यिकी शाखा को तथा 1964 में योजना मूल्याकन निदेशालय को इस ब्यूरो में हस्तान्तरित करके इसका नाम सांख्यिकी एवं मूल्याकन निदेशालय (Directorate of Statistics & Evaluation) रख दिया गया। इसका कार्य पाँच अनुभागो में बँटा हुआ है। प्रदेश के 42 जिलों में जिला सांख्यिकीय कार्यालय स्थापित है तथा खण्ड स्तर पर सांख्यिकीय सहायक नियुक्त हैं। आजकल निदेशालय तथा विभिन्न सांख्यिकीय शाखाओ मे 3228 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्य करते है। 1986–87 में राज्य की सांख्यिकीय व्यवस्था पर वास्तविक व्यय 2·37 करोड़ रु० तथा 1988–89 मे प्रस्तावित व्यय 3·12 करोड़ रु० था। निदेशालय के कुछ आचलिक कार्यालय भी स्थापित किये गये है।

कार्य—बिहार के सांख्यिकी एवं मूल्यांकन निदेशालय के प्रमुख कार्य हैं—

(i) राज्य की विभिन्न सांख्यिकीय इकाइयों द्वारा संग्रहीत समंको में तथा अन्य राज्यों के सांख्यिकीय निदेशालयों व केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C.S.O.) में समन्वय स्थापित करना;

(ii) अर्थ-सामाजिक विषयों पर सर्वेक्षण करना;

(iii) राज्य की वार्षिक आय का अनुमान लगाना;

(iv) राज्य सरकार को सांख्यिकीय व आर्थिक मामलों पर तकनीकी सलाह देना और समंक संग्रहण व विधियन की रीतियो में सुधार प्रस्तावित करना;

(v) सांख्यिकीय मानकों व मापदण्डों का निर्धारण करना तथा रीतियों में सुधार करना;

(vi) सर्वेक्षणों की रिपोर्ट और नियमित प्रकाशन निर्गमित करना।

निदेशालय के अग्रांकित प्रमुख प्रकाशन हैं—

वार्षिक— 1. Bihar Statistical Handbook.
2. Bihar through Figures.
3. Agricultural Statistics Handbook.
4. Season and Crop Reports.
5. Vital Statistics—Bihar.
6. Census of Bihar Govt. Employees.
7. Annual Administrative Report.
8. State Income of Bihar.

त्रैमासिक— Quarterly Bulletin of Statistics.

इस निदेशालय के अतिरिक्त शिक्षा विभाग की प्रतिवेदन शाखा, वन शोध विभाग, श्रम-विभाग आदि के सांख्यिकीय कक्षों द्वारा सम्बद्ध गतिविधियों की नियमित रूप से रिपोर्ट प्रकाशित की जाती है। अपराध अनुसन्धान विभाग (C. I. D.) प्रदेश में अपराध-सम्बन्धी स्थिति के बारे में वार्षिक, त्रैमासिक व मासिक विवरण प्रस्तुत करता है। आदिवासी शोध संस्थान भी आदिवासियों की जनांकिकीय स्थिति का प्रतिवेदन प्रकाशित करता रहता है। सिंचाई विभाग, राष्ट्रीय रोजगार सेवा निदेशालय, राज्य विद्युत-मण्डल तथा सड़क परिवहन निगम की ओर से भी समय-समय पर आवश्यक समंक प्रकाशित किये जाते हैं।

हरियाणा

हरियाणा सरकार ने अपने विभिन्न मन्त्रालयों से संलग्न 111 सांख्यिकीय इकाइयों (जिनमें 1127 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्य करते हैं) में समन्वय स्थापित करने के लिए 1966 में आर्थिक एवं सांख्यिकीय संगठन (Economic and Statistical Organization) की स्थापना की। समन्वय, समंक संकलन, सर्वेक्षण, राष्ट्रीय आय गणना, योजना मूल्यांकन, सूचकांक रचना, जीवन समंकों का विश्लेषण, सरकार की सांख्यिकीय नीति का निर्धारण, तकनीकी सलाह व प्रशिक्षण, अन्य राज्यों व केन्द्र से सूचना का आदान-प्रदान आदि इस संगठन के महत्वपूर्ण कार्य हैं। संगठन 12 अनुभागों में विभक्त है। प्रदेश की सांख्यिकीय व्यवस्था पर 1986–87 में 6·98 करोड़ रु० वास्तविक व्यय हुआ तथा 1988–89 में 8·59 करोड़ रु० प्रस्तावित व्यय था।

हरियाणा के आर्थिक एवं सांख्यिकीय संगठन के निम्नलिखित महत्वपूर्ण नियमित प्रकाशन हैं—

पंचवर्षीय— Statistical Abstracts of Districts—प्रत्येक जिले के लिए अलग-अलग सांख्यिकीय सारांश प्रकाशित किये जाते हैं।

त्रिवर्षीय— Municipal Year Books of Districts.

वार्षिक— 1. Statistical Abstract of Haryana.
2. Basic Statistics of Haryana.
3. Plan Progress Reports.
4. Estimates of State Income.
5. Statistical Abstract of Public Finance.
6. Parity Index Report.

उपर्युक्त मुख्य प्रकाशनों के अतिरिक्त राज्य के कृषि निदेशक, कृषि उत्पादन एवं ग्राम विकास आयुक्त, रजिस्ट्रार, सहकारी समितियाँ, सिंचाई व सार्वजनिक स्वास्थ्य के प्रमुख अभियन्ता, श्रम आयुक्त, राज्य यातायात नियन्त्रक, निदेशक शिक्षा विभाग आदि के द्वारा वार्षिक प्रशासनिक प्रतिवेदन प्रकाशित किये जाते हैं। भूमि-अभिलेख निदेशक (Director of Land Records) द्वारा भी कुछ महत्वपूर्ण विवरण व प्रतिवेदन (जैसे Annual Season and Crop Report, Monthly Rainfall Statement, Fortnightly Wholesale/Consumer Price Statement, Weekly Weather and Crop Report आदि) निर्गमित किये जाते हैं। जिला सांख्यिकीय

अधिकारियों द्वारा अपने क्षेत्र में ग्रामों और विकास-खण्डों से एकत्रित प्राथमिक समंकों को सम्बद्ध विभाग/निदेशालय भेज दिया जाता है।

पंजाब

हरियाणा की भाँति पंजाब में भी सांख्यिकीय कार्यों को सम्पन्न करने के लिए 1966 से आर्थिक एवं सांख्यिकीय संगठन (Economic and Statistical Organization) कार्य कर रहा है। पंजाब में 187 सांख्यिकीय इकाइयाँ हैं जिनमें 1365 सांख्यिकीय कर्मचारी कार्य करते हैं। 1986–87 में पंजाब की सांख्यिकीय व्यवस्था पर 2·2 करोड़ रु० खर्च हुआ जबकि 1988-89 के लिए प्रस्तावित व्यय 3·76 करोड़ रु० था।

वार्षिक— 1. Statistical Abstract of Punjab.
2. Statistical Handbook of Punjab.
3. Socio-economic Review of Punjab.
4. *Farm Accounts in Punjab.*
5. Family Budget of Cultivators.
6. Census of Punjab Govt. Employees.
7. Index Numbers of Parity.
8. District Statistical Abstract—12 जिलों में से प्रत्येक के लिए।

त्रैमासिक— Quarterly Bulletin of Statistics.

मासिक — 1. Monthly Survey of Economic Conditions in Punjab.
2. *Consumer Price Index Numbers.*

साप्ताहिक—1. Weekly Bulletin of Wholesale Prices.
2. *Weekly Bulletin of Retail Prices.*

उपर्युक्त प्रकाशनों के अतिरिक्त सहकारी समिति के रजिस्ट्रार, सार्वजनिक शिक्षा संचालक, प्रमुख सिंचाई अभियन्ता, पशुपालन निदेशक आदि के कार्यालयों की ओर से नियमित प्रशासकीय रिपोर्ट निर्गमित की जाती है। भूमि अभिलेख निदेशालय द्वारा निम्न महत्त्वपूर्ण पत्रिकाएँ प्रकाशित की जाती हैं—

पंचवर्षीय— 1. Livestock Census.
2. Report of Punjab Wages Surveys.

वार्षिक— 1. *Annual Rainfall.*
2. Season and Crop Report.

साप्ताहिक—1. Wholesale and Retail Prices.

इन विभिन्न प्रकाशनों से पंजाब की बहुमुखी प्रगति का व्यापक चित्र प्रस्तुत होता है।

इसी प्रकार, सभी राज्यों के मन्त्रालयों से सलग्न सांख्यिकीय शाखाएँ जिला-स्तरीय अधिकारियों से उपलब्ध समंकों को प्रकाशित करती रहती है तथा सांख्यिकीय निदेशालय इन संस्थाओं की क्रियाओं में सामंजस्य करके सार रूप में प्रदेश के मौलिक समंकों को प्रस्तुत करता है। आवश्यकता इस बात की है कि नव-स्थापित जिला सांख्यिकीय कार्यालय को अधिक सशक्त बनाया जाये तथा जिला, तालुका व खण्ड स्तर पर समंक अधिकोष स्थापित किये जाएँ।

योजना काल में राज्यों और केन्द्र-शासित प्रदेशों के सांख्यिकीय संस्थानों द्वारा अनेक उल्लेखनीय कार्य आरम्भ किये गये है, जैसे विकास खण्डों का व्यापक सर्वेक्षण करना, आय, जनसंख्या, भवन-निर्माण आदि क्रियाओं का अध्ययन व समन्वय करना, कर्मचारियों को प्रशिक्षण प्रदान करना, इत्यादि। अनेक राज्यों में कार्यरत सांख्यिकीय इकाइयों द्वारा कृषि, उद्योग, यातायात, जीवनांक, राष्ट्रीय आय आदि क्षेत्रों में व्यापक स्तर पर तथा वैज्ञानिक विधियों द्वारा यथेष्ट समंक संकलित किये गये है। प्रविधि, सर्वेक्षण विधि आदि में बहुत सुधार किया जा रहा है। प्रशिक्षण सम्बन्धी सुविधाओं का भी विस्तार किया जा रहा है। राष्ट्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था

समीक्षा समिति (1979–80) के सुझाव तथा राष्ट्रीय सांख्यिकी सलाहकार मण्डल (N.A.B.S.) की सलाह पर अनेक राज्यों में सांख्यिकीय व्यवस्था में सुधार करने के उद्देश्य से निम्न महत्वपूर्ण कदम उठाये जा रहे है —

(i) निदेशालय के आंचलिक कार्यालयों (Regional Offices) की स्थापना;

(ii) जिला और विकास-खण्ड स्तर पर समंक अभिकोषों (Data Banks) की स्थापना;

(iii) राज्यों के अर्थ व सांख्यिकी निदेशालयों को अभिकलित्रीय (कम्प्यूटर) सेवाएँ उपलब्ध कराना तथा तकनीकी प्रशिक्षण का व्यापक स्तर पर प्रसार करना जिससे प्रकाशन-विलम्ब दूर किया जा सके;

(iv) केन्द्र में भारतीय सांख्यिकीय सेवा (I.S.S.) के समान राज्यों में भी एक समान सांख्यिकीय संवर्ग (Statistical Cadre) की स्थापना के प्रयास करना, तथा

(v) अनेक विषयों में सूचना देना संसूचकों के लिए वैधानिक रूप से अनिवार्य करने हेतु प्रयास करना।

आशा है कि आगामी वर्षों में राज्यों की सांख्यिकीय क्रियाएँ और अधिक व्यापक, समन्वित एवं सुव्यवस्थित हो जाएँगी तथा पंचवर्षीय योजनाओं के लिए आवश्यक सांख्यिकीय सामग्री यथेष्ट मात्रा में शीघ्रता से स्थायी आधार पर उपलब्ध होती रहेगी।

विकेन्द्रित सांख्यिकीय संगठन में समन्वय-व्यवस्था

(Machinery for Co-ordination in Decentralised Statistical System)

एक विकेन्द्रित सांख्यिकीय व्यवस्था में कार्य के दोहरेपन को रोकने, यथेष्ट समंकों का उचित समय पर संकलन करने तथा उपलब्ध संसाधनों का अनुकूलतम उपयोग करने के लिए पर्याप्त समन्वय-व्यवस्था का होना परमावश्यक है। भारत में राष्ट्रीय स्तर पर यह कार्य केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C.S.O.) द्वारा और राज्य-स्तर पर राज्य अर्थ-सांख्यिकी निदेशालयों (D.E.S.) द्वारा सम्पन्न किया जा रहा है।

केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन की स्थापना से पहले, विभागीय सांख्यिकों की एक स्थायी समिति (Standing Committee of Departmental Statisticians) द्वारा समय-समय पर सामान्य हित की समस्याओं पर विचार-विमर्श किया जाता था। C.S.O. की स्थापना के बाद स्थायी समिति के स्थान पर केन्द्रीय एवं राज्य सांख्यिकों के संयुक्त सम्मेलन (Joint Conference of Central and State Statisticians) का सांख्यिकीय समन्वय एवं विकास के लिए प्रमुख सलाहकार संस्था के रूप में समारम्भ किया गया। 1961 में सांख्यिकी विभाग की स्थापना के पश्चात् संयुक्त सम्मेलन का नाम बदलकर केन्द्रीय सांख्यिकी तकनीकी सलाहकार परिषद (Central Technical Advisory Council on Statistics) रख दिया गया। साथ ही सांख्यिकी विभाग के समक्ष प्रस्तुत की जाने वाली समस्याओं पर विचार करने के लिए एक अधिक सुव्यवस्थित स्थायी सलाहकार समिति (Standing Advisory Committee) का भी गठन किया गया। इनके सम्मेलनों में जिन विषयों पर विचार-विमर्श किया गया उनमें महत्वपूर्ण हैं—राज्यों में सांख्यिकीय तन्त्र को सुदृढ़ बनाना, सांख्यिकीय कार्मिक-प्रशिक्षण की व्यवस्था करना, समंकों के संकलन, विधियन और प्रकाशन के लिए एक समान मानदण्ड निर्धारित करना, प्राथमिक समंकों की व्यापकता, क्षेत्र और सामयिक संकलन की व्यवस्था में सुधार करना और समंकों के विकास एवं प्रसार की परियोजनाओं का निर्माण करना।

कालान्तर में, परिषद और समिति, दोनों के स्थान पर केन्द्रीय एवं राज्य सांख्यिकीय संगठनों के सम्मेलन (Conference of Central and State Statistical Organisations—C.O.C.S.S.O.) का समारम्भ किया गया। दो वर्ष में एक बार उक्त सम्मेलन आयोजित करने का कार्यक्रम है। सम्मेलन की सिफारिशों का अनुसरण करने का कार्य एक स्थायी समिति द्वारा किया जाता है। सम्मेलन (C.O.C.S.S.O.) ने अनेक महत्वपूर्ण विषयों पर विचार किया है जैसे समंक बैंकों की स्थापना, जिला सांख्यिकीय अधिकारियों के निरन्तर बढ़ते हुए कार्य, क्षेत्रीय लेखों की

रचना, पंचवर्षीय योजनाओं में सांख्यिकीय कार्यक्रम, समंक-संकलन, विधियन व विश्लेषण की प्रक्रियाओं में सुधार, 1991 की जनगणना की प्रविधि, केन्द्रीय और प्रादेशिक सूचना व्यवस्था के लिए राष्ट्रीय संसूचना शृंखला (NICNET) का अनुकूलतम उपयोग आदि। सम्मेलन की सिफारिशों के अनुसार अनेक राज्यों में, दोहरापन को दूर करने और इकाइयों में प्रभावी समन्वय करने के लिए उच्च-स्तरीय सांख्यिकीय समितियों का गठन किया गया है। एक अन्य सिफारिश के अनुसार केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन ने जिला व अधीन स्तर के सांख्यिकीय संगठनों को सुदृढ बनाने के लिए एक कार्यकारी दल की स्थापना की है जिसने जिला-स्तर पर समन्वय-प्रक्रिया को सशक्त बनाने के उद्देश्य से जिला सांख्यिकीय समन्वय समितियो (District Coordination Committees on Statistics) के गठन का सुझाव दिया है। दल के अनुसार जिला-मजिस्ट्रेट उक्त समिति का अध्यक्ष और जिला सांख्यिकी अधिकारी उसका सदस्य-सचिव होना चाहिए। C.O.C.S.S.O. की सिफारिशों के अनुसार नियुक्त एक अन्य कार्यकारी दल ने समंक-संकलन अधिनियम, 1953 का क्षेत्र और अधिक व्यापक करने तथा कुछ महत्त्वपूर्ण सूचना की गोपनीय प्रकृति को कायम रखने का सुझाव दिया है। 1982 में देश में सांख्यिकीय व्यवस्था को अधिक सुदृढ बनाने तथा नीति सम्बन्धी मामलो पर तकनीकी सलाह देने के लिए एक उच्चस्तरीय राष्ट्रीय सांख्यिकी सलाहकार बोर्ड (National Advisory Board on Statistics—N.A.B.S.) की स्थापना की गई है। यह आशा की जाती है कि इस सर्वोच्च संस्था की स्थापना से समंकों के समन्वयन, दोहरेपन के निवारण और सरकार को तकनीकी सलाह देने और नीति-निर्धारण के क्षेत्र में सराहनीय प्रगति होगी और भारतीय सांख्यिकीय व्यवस्था के दोष दूर हो जाएँगे।

सांख्यिकीय प्रशिक्षण एवं सांख्यिकीय सेवा-संवर्ग
(Training in Statistics and Statistical Cadres)

गत पचास वर्षों में प्रशासन के क्षेत्र मे प्रशिक्षित सांख्यिकों की माँग में बहुत अधिक वृद्धि हुई है। केन्द्र एवं राज्यो में सांख्यिकीय कर्मचारियों की संख्या 1952–53 में 4769 से बढ़कर 1987–88 में 57950 हो गई है। इसके अतिरिक्त निजी क्षेत्र के उद्योगो और व्यावसायिक संगठनों मे भी प्रशिक्षित सांख्यिकीय कर्मचारियों की आवश्यकता निरन्तर बढ़ती जा रही है।

प्रशिक्षित कर्मचारियों की बढ़ती हुई माँग को पूरा करने के लिए विभिन्न विश्वविद्यालयों, संस्थानों और सरकारी विभागों द्वारा विविध स्तरो पर अनेक प्रकार के प्रशिक्षण कार्यक्रम आयोजित किये जा रहे हैं। अनेक विश्वविद्यालय सांख्यिकी में स्नातक एवं स्नातकोत्तर पाठ्यक्रम आयोजित करते है। भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (I.S.I.) सांख्यिकी मे प्रशिक्षण एवं शोध के क्षेत्र में महत्वपूर्ण भूमिका निभा रहा है। इसके अतिरिक्त कुछ अन्य संस्थान भी सेवारत कर्मचारियों के लिए विशिष्ट पाठ्यक्रम चलाते हैं। इनमे भारतीय कृषि समंक शोध संस्थान (Indian Agricultural Statistics Research Institute), वन शोध संस्थान (Forest Research Institute), जनसंख्या अध्ययन का अन्तर्राष्ट्रीय संस्थान (International Institute of Population Studies), व्यावहारिक आर्थिक शोध की राष्ट्रीय परिषद् (N.C.A.E.R.), व्यावहारिक जनशक्ति शोध संस्थान (Institute of Applied Manpower Research), भारतीय विदेश व्यापार संस्थान (I.I.F.T.) और रिजर्व बैंक ऑफ इण्डिया (R.B.I.) प्रमुख हैं।

केन्द्रीय सरकार, राज्य सरकारों तथा सार्वजनिक क्षेत्र उपक्रमों के सेवाधीन, (in-service) सांख्यिकीय कर्मचारियों के लिए केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C.S.O.) द्वारा भारतीय सांख्यिकीय संस्थान के सहयोग से दो पूर्ण-कालिक प्रशिक्षण पाठ्यक्रम नियमित आधार पर संचालित किये जाते हैं—पहला, व्यावसायिक स्तर के सांख्यिकों के लिए 6 सप्ताह का और दूसरा, मध्यवर्ती स्तर के कर्मचारियो के लिए 9 माह की अवधि का पाठ्यक्रम। इसके अतिरिक्त, C.S.O भारतीय सांख्यिकीय सेवा (Indian Statistical Service—I. S. S.) के नये प्रशिक्षार्थियों के लिए प्रशिक्षण कार्यक्रम और वरिष्ठ अधिकारियों के लिए प्रगत पाठ्यक्रम भी आयोजित करता है।

I. S. I. और अन्तर्राष्ट्रीय सांख्यिकीय शिक्षण केन्द्र, कलकत्ता (International Statistical Education Centre, Calcutta) के विद्यार्थियों के लिए भी C. S. O. राजकीय समंकों के क्रमशः 6 सप्ताह और 4 सप्ताह के पाठ्यक्रमों का संचालन करता है। अन्तर्राष्ट्रीय सगठनों के तकनीकी सहायता कार्यक्रम (Technical Assistance Programmes) के अधीन अन्य देशों के प्रशिक्षार्थियों के लिए विशेष प्रशिक्षण कार्यक्रम भी C. S. O. द्वारा आयोजित किये जाते हैं।

C. S. O. के नियमित प्रशिक्षण कार्यक्रमों के अतिरिक्त सांख्यिकी विभाग ने संयुक्त राष्ट्र विकास कार्यक्रम संगठन (U. N. D. P.) से अनुबन्ध किया है जिसके तहत विकासशील देशों को स्वतन्त्र एकीकृत सर्वेक्षण आयोजित करने में सक्षम बनाने हेतु सयुक्त राष्ट्र गृहस्थ सर्वेक्षण क्षमता कार्यक्रम (United Nations Household Survey Capability Programme) के तत्वावधान में विशिष्ट पाठ्यक्रम आयोजित करने की व्यवस्था की गई है। राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण सगठन (N. S. S. O.) भी संकलन कार्य में लगे अपने मध्यवर्ती और निम्न स्तर के तकनीकी कर्मचारियों के लिए पांच क्षेत्रीय प्रशिक्षण केन्द्रों में प्रशिक्षण देने की व्यवस्था करता है। जैसा कि पहले स्पष्ट किया जा चुका है कम्प्यूटर केन्द्र द्वारा भी केन्द्रीय व राज्य सरकारों, सार्वजनिक उपक्रमों तथा E.S.C.A.P. आदि द्वारा नामित U.N.D.P. के शिक्षावृत्ति भोगियों (Fellows) के लिए विशेष प्रशिक्षण कार्यक्रम संचालित किए जाते हैं।

C.O C.S.S.O. की सिफारिशों के अनुसार नियुक्त एक कार्यकारी दल ने केन्द्रीय और राज्यीय सांख्यिकीय कर्मचारियों को दिये जाने वाले वर्तमान प्रशिक्षण में सुधार के अनेक सुझाव दिये हैं। आदर्श पाठ्यक्रमों व प्रशिक्षण नियमावली की रचना और प्रशिक्षण में राज्य अर्थ-सांख्यिकी निदेशालयों (D. E. S.) के पारस्परिक क्षेत्रीय सहयोग की भी दल ने सिफारिश की है।

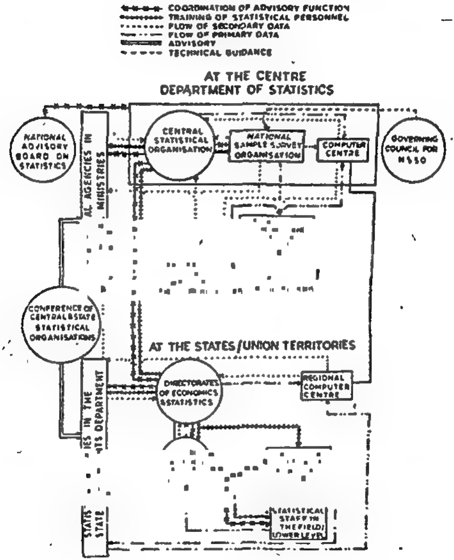
केन्द्रीय मन्त्रालयों की उच्चस्तरीय सांख्यिकीय अधिकारियों से सम्बन्धित आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए केन्द्रीय सरकार ने 1964 में भारतीय सांख्यिकीय सेवा (Indian Statistical Service—I. S. S) का गठन किया। उत्तर प्रदेश, राजस्थान, महाराष्ट्र, गुजरात, कर्नाटक, केरल, तमिलनाडु और पश्चिमी बंगाल ने अपने-अपने सांख्यिकीय सेवा-संवर्गों (Statistical cadres) की संरचना की है। अन्य राज्यों में भी पृथक् सांख्यिकी सेवा-संवर्ग का गठन किया जाना चाहिए। यदि किसी राज्य में यह सम्भव न हो तो संयुक्त सांख्यिकीय व आर्थिक प्रशासनिक सेवा-संवर्ग स्थापित किया जाना चाहिए। केन्द्र और राज्यों के मध्य समय-समय पर सांख्यिकीय अधिकारियों का विनिमय भी होता रहना चाहिए।

सांख्यिकीय अधिनियम-निर्माण (Statistical Legislation)—समंक-संकलन कार्यक्रमों में उत्तरदाता और संसूचकों से महत्वपूर्ण समंक उपलब्ध करने के लिए उपयुक्त सांख्यिकीय अधिनियमों की आवश्यकता होती है। हमारे देश में प्रत्येक दशक में जनगणना, भारतीय जनगणना अधिनियम, 1948 के अन्तर्गत आयोजित की जाती है। औद्योगिक समंक अधिनियम, 1942 के प्रावधानों के अनुसार 1946 में प्रथम औद्योगिक संगणना सम्पन्न की गई। औद्योगिक संगणनाओं को अधिक व्यापक बनाने और कुछ क्षेत्रों मे अनिवार्यता के आधार पर समंक संकलन की व्यवस्था करने के उद्देश्य से 1953 का समंक संकलन अधिनियम पारित किया गया। आजकल उद्योगों के वार्षिक सर्वेक्षण (Annual Survey of Industries) इसी अधिनियम के तहत आयोजित किये जाते हैं। राष्ट्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था समीक्षा समिति (1980) ने समंक संकलन के क्षेत्र में विस्तार करने तथा अधिक प्रभावी ढंग से अनिवार्य आधार पर समंक एकत्र करने के उद्देश्य से समक संकलन अधिनियम में आवश्यक संशोधन करने की सिफारिश की है। सांख्यिकीय अधिकारियों के एक कार्यकारी दल ने समंक संकलन अधिनियम को समस्त गैर-कृषि क्षेत्र पर लागू करने की संस्तुति की है। आशा है अनेक क्षेत्रों में संसूचकों से गोपनीयता के आश्वासन पर और अनिवार्यता के आधार पर उपयोगी और महत्वपूर्ण सांख्यिकीय सामग्री प्राप्त की जाती रहेगी।

अग्रांकित प्रवाह चित्र (Flow Chart) से केन्द्र तथा राज्यों में सांख्यिकीय व्यवस्था के अधीन स्थापित अनेक सांख्यिकीय कार्यालयों और इकाइयों के कार्यों और उनके पारस्परिक सम्बन्धों का स्पष्टीकरण हो जाता है—

भारत में सांख्यिकीय-व्यवस्था

STATISTICAL SYSTEM IN INDIA



भारत में राजकीय समंक
(OFFICIAL STATISTICS IN INDIA)

भारत में राजकीय समंकों की प्रकृति, क्षेत्र और संकलन-विधि, आदि का अध्ययन निम्न शीर्षकों में किया जा सकता है—

(क) जनसंख्या समंक (Population Statistics);

(ख) राष्ट्रीय लेखा समंक (National Accounts Statistics) अथवा राष्ट्रीय आय समंक (National Income Statistics);

(ग) कृषि समंक (Agricultural Statistics);

(घ) औद्योगिक समंक (Industrial Statistics);

(ङ) व्यापार सम्बन्धी समंक (Trade Statistics);

(च) श्रम समंक (Labour Statistics);

(छ) मूल्य समंक (Price Statistics),

(ज) अन्य समंक (Other Statistics)।

जनसंख्या-समंक
(Population Statistics)

संसार के सभी देशों में अत्यन्त प्राचीन काल से ही जनसंख्या सम्बन्धी समंकों का संग्रहण, विश्लेषण एवं निर्वचन होता रहा है। आर्थिक, सामाजिक तथा राजनीतिक दृष्टि से जनसंख्या समंक अत्यन्त उपयोगी होते हैं।

आर्थिक महत्व—एक विकासशील देश के योजनाबद्ध कार्यक्रम की सफलता अधिकांश रूप मे यथार्थ जनसंख्या-समंकों की निरन्तर उपलब्धि पर निर्भर होती है। जनसंख्या-वृद्धि के भावी प्रक्षेपणों के आधार पर खाद्य पदार्थ, वस्त्र, मकान, रोजगार आदि से सम्बन्धित आवश्यकताओं का पूर्वानुमान लगाया जाता है। प्रति व्यक्ति आय, प्रति व्यक्ति खाद्य-सामग्री, वस्त्रादि की उपलब्धि तथा अन्य विकास-सूचक, जनसंख्या के आकार व विशेषताओं पर आश्रित होते हैं। सरकार की खाद्य नीति, रोजगार-सम्बन्धी नीति, कर-नीति, परिवार-नियोजन, औद्योगिक स्थानीयकरण, नगरीकरण, क्षेत्रीय सन्तुलन आदि से सम्बद्ध नीतियाँ जनसंख्या के आकार, घनत्व, संकेन्द्रण, वर्गीकरण व पेशेवर वितरण पर आधारित होती हैं। व्यापारी, उद्योगपति व यातायात संस्थान, जनसंख्या के घनत्व व उपभोक्ताओं की संख्या, अभिरुचि, आय आदि का अध्ययन करके वस्तुओं व सेवाओं की माँग का अनुमान लगाते हैं। जनसंख्या-समंकों के आधार पर बीमा-संस्थान मृत्यु सारणियों का निर्माण करते है और बीमा शुल्क की दर निश्चित करते हैं। अतः आर्थिक क्षेत्र में जनसंख्या-समंकों की अत्यधिक उपयोगिता है।

सामाजिक महत्व—सामाजिक दृष्टि से भी जनसंख्या आँकड़ों का बहुत महत्व है, क्योंकि इनसे निरक्षरता, बाल-विवाह, शिशु-मृत्यु, विधवा विवाह, संयुक्त परिवार, भाषा, धर्म एवं जाति आदि से सम्बद्ध अनेक समस्याओं की गम्भीरता का आभास होता है और सामाजिक कुरीतियों के उन्मूलन में सहायता मिलती है।

राजनीतिक महत्व—राजनीतिक क्षेत्र में भी जनसंख्या-समंक कम उपयोगी नहीं है। देश में राज्यों का भाषानुसार पुनर्गठन, आम चुनाव के लिए विभिन्न निर्वाचन-क्षेत्रों का सीमांकन, अनुसूचित व पिछड़ी जातियों के प्रतिनिधित्व का प्रश्न, केन्द्र व राज्यों में विभाज्य कर-आय

वितरण, विभिन्न भत्तों के लिए नगरों का श्रेणीकरण तथा बजट-निर्माण आदि के लि जनसंख्या समंक आधार स्तम्भ का काम करते हैं।

जनगणना
(Population Census)

जनसंख्या समंकों को तीन भागों में बाँटा जा सकता है—

(i) जनगणना, (ii) जीवन-समंक, तथा (iii) तदर्थ जनांकिकीय सर्वेक्षण।

जनगणना का अर्थ एवं विशेषताएँ—किसी देश के सांख्यिकीय क्षेत्र में जनगणना सब महत्वपूर्ण घटना है जो प्रत्येक दशाब्दी में एक बार आयोजित की जाती है। जनगणना ए महत्वपूर्ण राष्ट्रीय कार्य है जिससे एक नियत समय पर देश और देशवासियों से सम्बन्धित उपयो जानकारी मिलती है। इससे जनसंख्या की प्रवृत्ति और उसकी विभिन्न विशेषताओं का भी पत चलता है जो नियोजन के लिए परमावश्यक है। जनसंख्या-समंकों से व्यापारियों, उद्योगपतिय योजनाकारों, निर्वाचन-अधिकारियों आदि की आवश्यकताओं की पूर्ति तो होती ही है साथ ही स प्रभावी और कुशल प्रशासन के लिए भी ये समंक नितान्त आवश्यक होते हैं। अत: सभी प्रगतिशी देशों में जनगणना एक नियत अन्तराल से सम्पन्न की जाती है। 'भारत में गत जनगणना 1991 में की गयी थी। यह देश की तेरहवीं, स्वतन्त्रता के बाद की पाँचवी और बीसवी शताब्दी की अन्ति जनगणना थी। *जनगणना का तात्पर्य व्यक्तियों की गणना-मात्र (mere counting of heads)* से नहीं है वरन् आधुनिक जनगणना 'एक सुनिश्चित समय पर एक देश के सभी व्यक्तियों की संख्या उनकी जनांकिकीय, आर्थिक एवं सामाजिक स्थिति से सम्बद्ध सूचना के संग्रहण, संकलन और प्रकाशन की सम्पूर्ण प्रक्रिया' को कहते हैं।[1] इस प्रकार, जनगणना (i) एक राष्ट्रीय स्कन्ध-मूल्यांकन की क्रिया (national stock-taking activity) होती है जिसमें सम्पूर्ण जनसंख्या के आगणन, आयु, लिंग, पेशे आदि के अनुसार उसके वितरण तथा उसकी आर्थिक व सामाजिक विशेषताओं के सम्बन्ध में व्यापक जानकारी उपलब्ध की जाती है। (ii) जनगणना सरकार द्वारा (state sponsorship) प्रत्येक दशक में एक बार संगठित की जाती है, (iii) यह स्पष्ट रूप से परिभाषित क्षेत्र (well-defined territory) से सम्बद्ध होती है, (iv) पूरे क्षेत्र की गणना एक निश्चित *कालावधि के लिए एक साथ (simultaneous count) सम्पन्न की जाती है,* (v) गणना-क्षेत्र के सभी व्यक्तियों (all people) की बिना रिक्ति व बिना दोहरेपन (without omission or duplication) के गणना की जाती है, (vi) प्रत्येक व्यक्ति के बारे में व्यक्तिगत (individual) सूचना प्राप्त की जाती है, तथा (vii) व्यापक सूचना का प्रकाशन व प्रसारण (publication and dissemination) किया जाता है।

जनगणना की पद्धतियाँ—जनगणना की निम्न दो पद्धतियाँ हैं—(i) तथ्यसिद्ध पद्धति और (ii) विधिसिद्ध पद्धति।

(i) तथ्यसिद्ध पद्धति (De facto Method)—इस प्रणाली के अनुसार सारे देश में एक साथ एक पूर्वनिश्चित रात या दिन को सभी व्यक्तियों की गणना उस स्थान पर कर ली जाती है जहाँ वे *जनगणना रात्रि/दिवस को उपस्थित हो चाहे उनका सामान्य निवास अन्यत्र हो।* जो व्यक्ति जहाँ उपस्थित होता है वह वहीं का निवासी मान लिया जाता है। गणना-कार्य एक रात/दिन में ही पूरा कर लिया जाता है इसीलिए इसे एक-रात्रि गणना (one-night enumeration) या तिथि प्रणाली (date system) भी कहते हैं।

गुण-दोष—जनगणना की यह पद्धति सरल व स्पष्ट है, तथा अन्तर्राष्ट्रीय तुलना के लिए उपयुक्त है। परन्तु इसमें प्रमुख दोष यह है कि गणना-कार्य के लिए बहुत अधिक संख्या में प्रगणकों

[1] *A census of population* may be defined as 'the total process of collecting, compiling and publishing demographic, economic and social data pertaining, at a specified time or times, to all persons in a country or delimited territory.' —United Nations, *Principles and Recommendations for National Population Censuses.*

की आवश्यकता होती है क्योंकि यह कार्य एक रात्रि/दिवस में ही पूरा करना होता है। इस कारण इसमें खर्च भी अधिक होता है, अशुद्धियाँ बढ़ जाती है और किसी स्थान की जनसंख्या का स्थायी लेखा उपलब्ध नहीं होता। अधिकतर यात्री व खानाबदोश व्यक्ति गणना से छूट जाते हैं। जनगणना रात्रि/दिवस का चयन भी बहुत सावधानी से करना पड़ता है। भारत में 1931 तक यह रीति अपनायी जाती थी।

(ii) विधिसिद्ध पद्धति (De jure Method)—इस प्रणाली के अन्तर्गत व्यक्तियों की गणना उनके सामान्य निवास-स्थान (normal residence) के आधार पर की जाती है। गणना-अवधि में अस्थायी रूप से आने-जाने वाले व्यक्तियों पर ध्यान नहीं दिया जाता वरन् उनकी गिनती उस स्थान के आधार पर ही की जाती है जहाँ के वे स्थायी निवासी हों। गणना-कार्य एक सप्ताह या दो-तीन सप्ताहों की अवधि में सम्पन्न किया जाता है। इसी कारण इसे कालावधि प्रगणन (period enumeration) भी कहते हैं। आजकल भारत में यही रीति अपनायी जाती है।

गुण-दोष—विधिसिद्ध प्रणाली द्वारा जनसंख्या का स्थायी अभिलेख प्राप्त हो जाता है, अशुद्धियाँ कम होती हैं, कम प्रगणकों की आवश्यकता होती है, अतः कम खर्चा होता है। संगणना की प्रतिदर्श-जाँच सरल हो जाती है। यह विधि वैधानिक,आवश्यकताओं के सर्वथा अनुकूल है और निर्वाचन, कर-निर्धारण, सामाजिक सुरक्षा सेवाएँ—जैसे शिक्षा, आवास आदि तथा जन्म-मृत्यु दरों के संकलन आदि प्रशासनिक क्रियाओं का वैधानिक आधार प्रस्तुत करती है। परन्तु यह प्रणाली जटिल है और इसमें गृह, गृहस्थ, सामान्य निवास आदि शब्दों की मानक परिभाषाएँ निश्चित करनी पड़ती हैं। प्रगणन के लिए अनेक विस्तृत निर्देश देने पड़ते हैं। ऐसे व्यक्तियों की गणना कठिन होती है जिनका कोई स्थायी सामान्य निवास नहीं होता या एक से अधिक स्थायी निवास होता है।

इस प्रकार दोनों ही पद्धतियो में कुछ गुण-दोष हैं। वास्तव में आदर्श प्रणाली वह है जिसमें दोनों आधारों पर प्रगणन किया जाये।

प्रगणन-विधि—जनसंख्या का प्रगणन भी दो प्रकार से किया जा सकता है—(i) विशेष रूप से नियुक्त प्रगणको की सहायता से याचना विधि (canvasser method) द्वारा। इस विधि मे प्रगणक घर-घर जाकर सूचना उपलब्ध करके अनुसूची मे प्रविष्ट करते है ; (ii) आत्म-प्रगणन या गृहस्थ-विधि (householder method) द्वारा जिसमें परिवाराध्यक्ष, अनुसूची भरने के लिए उत्तरदायी होता है। स्पष्ट है कि भारत मे पहली विधि ही अपनायी जा सकती है।

भारतीय जनगणना
(Indian Population Census)

मारत में प्रथम जनगणना 1872 में आयोजित की गई थी परन्तु अनेक त्रुटियों के कारण 1881 की जनगणना को प्रथम विधिवत् जनगणना माना जाता है। 1991 की जनगणना के साथ भारत की जनगणना के एक सौ बीस वर्ष पूरे हुए।

1931 तक की जनगणनाएँ—1931 तक भारतीय जनगणना एक रात्रि मे सम्पन्न की जाती थी और उसका मुख्य उद्देश्य देश की जनगणना का आशुचित्र प्रस्तुत करना होता था।[1] इस प्रकार, 1931 तक देश मे जनगणना कार्य तथ्यसिद्ध प्रणाली के आधार पर एक रात्रि में ही पूरा किया जाता था। इस प्रणाली के अनुसार प्रत्येक व्यक्ति की गणना वहाँ की जाती थी जहाँ वह गणना-रात्रि (census night) को उपस्थित होता था चाहे उसका वास्तविक निवास-स्थान कहीं और हो। गणना-रात्रि से कुछ दिन पूर्व घरों की सूची बनाकर प्रारम्भिक गणना की जाती थी। फिर उस रात्रि को अन्तिम रूप से गणना करके नये जन्म और मृत्यु का संशोधन कर दिया जाता था। प्रातः काल छः बजे सब रेलें रोककर यात्रियो की गणना की जाती थी। यह प्रयत्न

[1] 'Upto 1931 census was a one-night affair which mainly aimed at presenting a snapshot of the country's population.' —Census of India 1991, *Paper 1 of 1991-Provisional Population Totals, U P.*, p. 5.

किया जाता था कि न तो कोई व्यक्ति गिनने से रहे और न ही उसकी दोहरी गणना हो। गणना कार्य खण्ड-प्रगणकों (block enumerators) द्वारा किया जाता था जो संकलित सूचना वृत्त निरीक्षकों (Circle Supervisors) को प्रदान कर देते थे, जिनसे यह जिला जनगणना अधिकारियों (District Census Officers) को, फिर प्रान्तीय जनगणना अधीक्षकों (Provincial Census Superintendents) को और अन्त में जनगणना-आयुक्त (Census Commissioner) को भेज दी जाती थी। तथ्य-सिद्ध प्रणाली के आधार पर एक-रात्रि जनगणना की यह रीति त्रुटिपूर्ण थी। जन-सहयोग के अभाव के कारण भी वास्तविक सूचना उपलब्ध नहीं हो पाती थी।

1941 की जनगणना से प्रविधि, सूचना-क्षेत्र, व्यापकता आदि के सम्बन्ध में अनेक महत्वपूर्ण परिवर्तन किये गये हैं। प्रथम, एकरात्रि-प्रणाली के स्थान पर 'गणना की अवधि रीति' (period method of enumeration) का प्रयोग किया गया। 1941 में गणना-कार्य एक सप्ताह में सम्पन्न हुआ। इससे, कम प्रगणकों की सहायता से ही सूचना प्राप्त होने लगी। दूसरे, गणना की विधिसिद्ध प्रणाली (de jure System) अपनायी गयी जिसके अन्तर्गत प्रत्येक व्यक्ति की गिनती, गणना-अवधि में उसके सामान्य निवास (normal residence) के अनुसार की जाने लगी, चाहे वह गणना के समय अस्थायी रूप से अनुपस्थित ही हो। इससे दोहरी गणना और छूट जाने की आशंकायें न्यूनतम हो गयी। तीसरे, अनुसूचियों के स्थान पर गणना-पर्चियों (enumeration slips) का प्रयोग किया जाने लगा। चौथे, गृह-सूची का विस्तार कर दिया गया। पाँचवें, सभी गणना-पर्चियों का 2% यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया जाता था ताकि भविष्य में उनके आधार पर संकलित सूचना की प्रतिदर्श जाँच (sample check) हो सके। छठे, मुद्रण का केन्द्रीयकरण किया गया और यान्त्रिक सारणीयन का प्रयोग किया जाने लगा। सातवें, पेशेवर वर्गीकरण को अधिक वैज्ञानिक व वास्तविक स्तर पर संशोधित कर दिया गया। आठवें, अधिक व्यापक सूचना उपलब्ध की जाने लगी। 1941 तक जनगणना कार्य अस्थायी रूप से किया जाता था। 1951 की जनगणना रिपोर्ट में 1941 तक की जाने वाली जनगणनाओं की उपमा एक ऐसे काल्पनिक या पौराणिक पक्षी (phoenix) से की गयी है जो अपना संक्षिप्त जीवन काल स्वयं भस्म होकर समाप्त कर देता है और फिर इसकी भस्मी में से कुछ समय पश्चात् पुनः नवजीवन का उदय होता है।[1] 1941 तक की जनगणनायें इसी प्रकार एक अस्थायी अधिनियम के अधीन की जाती थीं और गणना-कार्य पूरा होने पर संगठन समाप्त कर दिया जाता था तथा फिर 8–9 वर्षों बाद अगली जनगणना से कुछ समय पूर्व नये अधिनियम के अनुसार गणना-संगठन पुनः स्थापित किया जाता था जो गणना पूरी होने पर पुनः समाप्त कर दिया जाता था। इस प्रकार, आकाश में एक पुच्छल तारे की भाँति (like a comet in the sky) भारतीय जनगणना दस वर्षों में एक बार ध्यान आकर्षित करके समाप्त हो जाती थी।

1951 की जनगणना स्वतन्त्र भारत की प्रथम जनगणना थी जिसमें पंचवर्षीय योजनाओं के लिए व्यापक आर्थिक व सामाजिक सूचना प्राप्त की गयी थी। इस जनगणना में भी कई नवीन परिवर्तन किये गये। सबसे महत्वपूर्ण परिवर्तन यह था कि इसे 1948 के स्थायी जनगणना अधिनियम (Permanent Census Act) के अधीन आयोजित किया गया जिससे जनगणना की अस्थायी प्रकृति समाप्त हो गई। दूसरे, 1948 के अधिनियम के अनुसार महा-पंजीकार एवं पदेन जनगणना-आयुक्त (Registrar-General and Ex-Officio Census Commissioner) का कार्यालय स्थायी कर दिया गया। तीसरे, गणना-अवधि बढ़ाकर तीन सप्ताह (9 फरवरी से 1 मार्च 1951 तक) कर दी गयी। चौथे, प्रथम बार 'नागरिकों का राष्ट्रीय रजिस्टर' (National Register of Citizens) प्रत्येक नगर, ग्राम, जिला आदि के लिए स्थायी रूप से रखा गया। गणना-पर्चियों से सूचना उक्त रजिस्टर में प्रविष्ट की जाती थी और जन्म-मरण लेखांकन द्वारा उसे अद्यतन (uptodate) रखा जाता था। पाँचवे, गणना 'गृहस्थ' (household)

[illegible] —the only bird of [illegible] funeral pyre and [illegible]"—*Census Report*, 1951.

के आधार पर की गयी, गृह (house) के आधार पर नहीं। 'गृह' का अर्थ निवास-स्थान है जिसका द्वार अलग हो, परन्तु 'गृहस्थ' (या परिवार) का तात्पर्य व्यक्तियों के उस समूह में है जो एक साथ रहते हों और एक ही चूल्हे पर तैयार किया गया खाना खाते हों। इससे संयुक्त परिवार के विघटन के बारे में सूचना प्राप्त हुई। छठे, धर्मनिरपेक्ष देश होने के कारण, धर्म, जाति, वर्ग, सम्प्रदाय आदि के विषय में प्रश्न नहीं पूछे गये वरन् जीविका के साधनों व आर्थिक स्थिति के समंकों को विशेष महत्व दिया गया। जीविकोपार्जन के साधनों को दो प्रमुख वर्गों—कृषि वर्ग व अ-कृषि वर्ग तथा प्रत्येक को चार-चार उपवर्गों में विभाजित किया गया। सातवें, जनगणना-परिणामों का दैव प्रतिदर्श जाँच (random sample check) द्वारा सत्यापन किया गया जिसमें 11 व्यक्ति प्रति हजार का अल्प-प्रगणन (under-enumeration) पाया गया। 1951 की जनगणना में लगभग 6 लाख प्रगणकों ने 21 दिनों में 644 लाख घरों में जाकर 14 प्रश्नों की गणना-पर्ची के आधार पर पूछताछ करके 36·1 करोड़ व्यक्तियों के सम्बन्ध में व्यापक सूचना उपलब्ध की जिसे 63 भागों में विभाजित 17 खण्डों में तथा 307 जिला गणन-पुस्तिकाओं में प्रकाशित किया गया। कुल 1·49 करोड़ रुपया खर्च हुआ।

1961 की जनगणना 1948 के स्थायी जनगणना अधिनियम के अधीन योजना काल के प्रथम दशक के अन्त में 10 फरवरी से 28 फरवरी 1961 तक प्रगणन चक्र (enumeration round) के रूप में की गई। 1 से 5 मार्च तक प्रगणकों ने संकलित सूचना का पुनर्परीक्षण दौर (check round) पूरा किया। लगभग 7 लाख खण्ड-प्रगणकों (स्कूल अध्यापक, सरकारी कर्मचारी, लेखपाल आदि) को दिसम्बर 1960 से जनवरी 1961 तक गणना-कार्य का अल्पकालीन प्रशिक्षण दिया गया।

1961 की जनगणना में तीन प्रकार की सूचियों का प्रयोग किया गया—(क) गृह-सूची, (ख) परिवार-अनुसूची, (ग) व्यक्तिगत प्रगणन पर्ची। जनगणना से कुछ माह पूर्व विस्तृत गृह-सूची (House List) तैयार की गयी जिसमें अनेक तथ्यों के बारे में सूचना प्राप्त की गई जैसे गृह-संख्या, गृह-निर्माण का उद्देश्य, गणना-गृह का प्रयोग इत्यादि। परिवार-अनुसूची (House-hold Schedule) का प्रयोग पूरे परिवार की आर्थिक व सामाजिक क्रियाओं की सूचना संकलित करने के लिए किया गया। खेती, भूमि-अधिकार, पारिवारिक उद्योग, कर्मचारियों की संख्या आदि के बारे में विवरण प्राप्त किया गया। प्रत्येक व्यक्ति के सम्बन्ध में व्यक्तिगत सूचना 13 प्रश्नों की व्यक्तिगत प्रगणन-पर्ची (Individual Enumeration Slip) पर प्राप्त की गयी जिनमें से 5 प्रश्न जनांकिकीय (जैसे नाम, आयु, वैवाहिक स्तर, जन्म-स्थान व लिंग), 5 प्रश्न आर्थिक (कृषक, कृषि-श्रमिक, गृह-उद्योग, अन्य काम करने वाले, अकर्मण्य) और शेष 3 प्रश्न सामाजिक (अनुसूचित जाति, साक्षरता तथा मातृ-भाषा) प्रकृति के थे।

प्रमुख सूचना के अतिरिक्त 580 गाँवों के विशेष सर्वेक्षण (Village Surveys) तथा 197 परम्परागत हस्तकलाओं के सर्वेक्षण (Traditional Craft Surveys) दैव प्रतिचयन आधार पर सम्पन्न किये गये। वैज्ञानिकों व तान्त्रिक शिक्षा-प्राप्त विशेषज्ञों के बारे में विशेष कार्डों पर सूचना प्राप्त की गयी। परिवार अनुसूची के पीछे व्यक्तिगत प्रगणन-पर्चों की सहायता से जनगणना अभिलेख पूरा किया गया। इस जनगणना से पूर्व जनसंख्या का वर्गीकरण आय या आर्थिक स्वतन्त्रता के आधार पर किया जाता था परन्तु 1961 में 'कार्य' के अनुसार दो श्रेणियों में समस्त जनसंख्या को बाँटा गया—(क) कार्यशील (working), तथा (ख) कार्यहीन (not working)। काम करने वालों को भी 9 वर्गों (जैसे कृषक, कृषि-श्रमिक, पारिवारिक उद्योग, व्यापार आदि) में विभाजित किया गया तथा काम न करने वालों में विद्यार्थी, आश्रित बालक, बेरोजगार, घरेलू काम में लगी गृहस्थी-स्त्रियाँ (housewives), अवकाश प्राप्त व्यक्ति, भिखारी, जेल व पागलखाने में रहने वाले व्यक्ति आदि को सम्मिलित किया गया।

इस जनगणना में प्रथम बार समस्त भारत, प्रत्येक राज्य व केन्द्र प्रशासित क्षेत्र के जनगणना-समंकों को अलग-अलग मानचित्रावली (Census Atlas) के रूप में प्रदर्शित किया गया। प्रत्येक राज्य में ग्रामीण क्षेत्रों में 1% खण्डों का और 10% घरों का तथा नगरों में 2%

खण्ड व 5% गृहों का प्रतिदर्श लेकर गणनोत्तर परीक्षण (Post-Enumeration Check) किया गया। इस जाँच से दो प्रकार की गणना त्रुटियों का अनुमान लगाया जा सका—(क) गणना-गृह के छूट जाने या दोबारा गिने जाने की अशुद्धि, (ख) गृह के निवासियों के छूट जाने या दोबारा गिने जाने की त्रुटि। इस जाँच से यह पता चला कि 1,000 व्यक्तियों पर 7 की अल्प-प्रगणन त्रुटि रह गयी है जबकि 1951 की गणना में 11 प्रति हजार की अशुद्धि थी। इस जनगणना के कुल प्रकाशनों की संख्या 1,476 थी। समस्त भारत, अलग-अलग राज्यों, 326 जिलों, ग्रामीण सर्वेक्षणों, आदि के सम्बन्ध में सामान्य रिपोर्ट, राज्य-स्तरीय खण्ड जिला-गणना पुस्तिकाएँ, धार्मिक व सांस्कृतिक सारणियाँ आदि प्रकाशित की गयी थी।

1 मार्च 1961 को देश की कुल जनसंख्या 43,92,34,771 थी जिसमें स्त्री-पुरुष अनुपात (sex-ratio) 941 था। जन्म-दर व मृत्यु-दर क्रमशः 40 व 18 प्रति हजार रही। 10 वर्षों में औसत वृद्धि दर 21·51% रही जबकि 1941–51 में यह 13·31% थी। जनसंख्या का औसत घनत्व 142 व्यक्ति प्रति वर्ग किलोमीटर था। साक्षरता का अनुपात 28·3% था जबकि 1951 में यह 18·3% था। जीवन-प्रत्याशा 32 वर्ष (1951) से बढ़कर 42 वर्ष (1961) हो गयी। कुल जनसंख्या का 82·2% ग्रामीण क्षेत्रों में तथा 17·8% नगरीय क्षेत्रों में रहता था। 72·8% जनसंख्या प्राथमिक क्षेत्र में, 11·7% द्वितीयक क्षेत्र तथा 15·5% तृतीयक क्षेत्र में क्रियाशील थी।

1971 की जनगणना

1971 की जनगणना स्वतन्त्र भारत की तीसरी जनगणना थी जिसके साथ ही भारत में जनगणना-कार्य के सौ वर्ष पूरे हुए। प्रगणन-कार्य (enumeration round) 10 मार्च से 31 मार्च 1971 तक और जाँच का कार्य (check round) 1 अप्रैल से 3 अप्रैल तक चला। लोकसभा चुनावों के कारण जनसंख्या-संदर्भ तिथि 1 मार्च के स्थान पर 1 अप्रैल 1971 रखी गई थी। लगभग 10 लाख व्यक्तियों ने जनगणना-कार्य में सक्रिय भाग लेकर संसार की कुल जनसंख्या के लगभग 15% अंश (अर्थात् 54·816 करोड़ व्यक्ति) का कुशलतापूर्वक प्रगणन किया। संगठन, व्यापकता व प्रविधि आदि की दृष्टि से 1971 की जनगणना बहुत कुछ 1961 की जनगणना से मिलती-जुलती थी परन्तु इसमें कुछ नवीन बातों का भी समावेश किया गया था।

विशेषताएँ—1971 की जनगणना की निम्न महत्वपूर्ण विशेषताएँ हैं—

(1) संगठन—1971 की जनगणना का संगठन प्रशासकीय-स्तूप (Administrative Pyramid) के रूप में था। सर्वोच्च अधिकारी महा-रजिस्ट्रार एवं जनगणना-आयुक्त होता है। वास्तविक गणना-कार्य खण्ड-प्रगणकों द्वारा घर-घर जाकर किया गया। निम्न सारणी में विभिन्न स्तरों पर जनगणना-संगठन प्रदर्शित किया गया है—

स्तर	अधिकारी	
(क) केन्द्रीय स्तर पर	महारजिस्ट्रार एवं जनगणना-आयुक्त (Registrar General and Census Commissioner)	
(ख) राज्य स्तर पर	गणना-कार्य-अधीक्षक (Superintendent of Census Operations)	
(ग) जिला स्तर पर	जिला गणना अधिकारी (जिलाधीश) (Dist. Census Officer—D. M.)	
(घ) उपक्षेत्रीय स्तर पर	उप-जिला गणना अधिकारी (उप-जिलाधीश) (Sub-Divisional Census Officer—S. D. M.)	
(ङ) ग्राम व नगर स्तर पर	चार्ज अधिकारी (Charge Officer)	
	तहसील स्तर पर	नगर स्तर पर
	तहसीलदार (Tehsildar)	नगरपालिका आयुक्त/अधिशासी अधिकारी (Municipal Commissioner/E.O.)

(च) गणना वृत्त-स्तर — वृत्ति-निरीक्षक 5 या 6 खण्ड (Circle Superviser—5 or 6 blocks)

(छ) खण्ड वृत्त-स्तर पर — खण्ड-प्रगणक (Block Enumerator)

ग्राम	नगर
एक खण्ड	एक खण्ड
150 परिवार/750 व्यक्ति	120 परिवार/600 व्यक्ति

(2) **स्थायी विभागों की स्थापना** (Establishment of permanent departments)—संकलित समंकों के कुशल विधियन एवं विश्लेषण के लिए पाँच विशिष्ट विभाग स्थायी रूप से स्थापित किये गये हैं—(i) नियोजन एवं क्रियान्वयन, (ii) केन्द्रीय सारणीयन, (iii) यान्त्रिक सारणीयन, (iv) मानचित्रांकन, तथा (v) सामाजिक अध्ययन विभाग।

(3) **प्रगणन-अवधि** (Enumeration Period)—मूल कार्यक्रम के अनुसार जनगणना कार्य फरवरी 1971 में किया जाना था परन्तु देश में निर्वाचन होने के कारण प्रगणन-कार्य को स्थगित करना पड़ा। 10 मार्च से 31 मार्च तक प्रगणन-चक्र और 1 अप्रैल से 3 अप्रैल तक निरीक्षण-चक्र सम्पन्न हुआ। सन्दर्भ तिथि 1 अप्रैल 1971 (सूर्योदय) रखी गई।

(4) **प्रशिक्षण** (Training)—जनगणना अधिकारियों द्वारा खण्ड-प्रगणकों को अनुसूचियाँ भरने का सघन प्रशिक्षण दिया गया।

(5) **गणक-यन्त्रों (Computers) का अधिक प्रयोग**—इस जनगणना में विद्युत्-संगणक-यन्त्रों (electronic computers) का अधिकाधिक प्रयोग किया गया जिससे कम समय में अधिक परिशुद्धता से अधिक समंकों का सारणीयन व विश्लेषण हो सके।

(6) **व्यय** (Expenditure)—1971 की जनगणना की कुल अनुमानित लागत 18 करोड़ रु० थी। प्रत्येक प्रगणक को औसत रूप से 40 रु० पारिश्रमिक दिया गया—15 रु० गृह-सूची तैयार करने के लिए और 25 रु० प्रगणन-कार्य के लिए।

(7) **गोपनीयता** (Secrecy)—नागरिकों द्वारा दी गई व्यक्तिगत सूचना पूर्ण रूप से गोपनीय रखी गयी।

(8) **वर्तमान उर्वरता** (Current Fertility)—इस जनगणना में पहली बार वर्तमान उर्वरता के समंक प्राप्त करने के लिए विवाहित स्त्रियों से विवाह के समय आयु व पिछले एक वर्ष में शिशु-जन्म के सम्बन्ध में प्रश्न पूछे गये।

(9) **प्रव्रजन** (Migration)—यह जानकारी भी पहली बार प्राप्त की गई है कि पिछला निवास-स्थान क्या था और वर्तमान निवास-स्थान में निवास की अवधि क्या है। इस सूचना का उद्देश्य जनसंख्या में प्रव्रजन की प्रवृत्तियों का विश्लेषण करना है।

(10) **आर्थिक वर्गीकरण** (Economic Classification)—1961 की भाँति ही जनसंख्या का 'कार्य' के अनुसार आर्थिक वर्गीकरण किया गया। प्रत्येक व्यक्ति से उसकी प्रमुख गतिविधि और सहायक (दूसरा) कार्य के बारे में प्रश्न पूछे गये। कार्य करने वालों को काश्तकार, खेतिहर मजदूर, पारिवारिक उद्योग या अन्य धन्धे में लगे व्यक्तियों में वर्गित किया गया। काम न करने वालों में गृहणियाँ, विद्यार्थी, सेवा-निवृत्त व्यक्ति, किराया पाने वाले, आश्रित व्यक्ति, बीमार, अपंग, भिखारी आदि को शामिल किया गया।

(11) **उपाधिधारियों व तकनीकी व्यक्तियों** (Degree-holders and technical personnel) के बारे में सूचना एक अलग विशेष कार्ड पर प्राप्त की गई जिससे शिक्षित बेरोजगार व्यक्तियों के समंक प्राप्त किये जा सकें।

(12) **अनुसूचियाँ** (Schedules)—1971 की जनगणना में निम्न चार ... प्रयोग किया गया—

(i) **मकान-सूची** (House-List)—आवास-व्यवस्था के बारे में मौलिक ... करने के लिए पहले मकानों की विस्तृत सूची तैयार की गई। आवास-गृहों में कमरों ...

उनमें रहने वाले व्यक्तियों की संख्या का अनुपात (Congestion Ratio) ज्ञात किया गया।

(ii) प्रतिष्ठानों की सूची (Establishment Schedule)—प्रतिष्ठानों (establishments) के लिए एक विशेष सूची तैयार की गयी जिसमें उनकी किस्म—सरकारी, निजी, सहकारी संस्था, निर्माणी, व्यापारिक या कार्यालय सम्बन्धी संस्थान—उनमें काम करने वाले व्यक्तियों की संख्या आदि के समंक एकत्र किये गये।

(iii) परिवार-अनुसूची (Household Schedule)—इनको चार भागों में बांटा गया—(क) जनसंख्या-अभिलेख, (ख) आवास-तिथि, (ग) उर्वरता-अनुसूची, और (घ) परिवार नियोजन अनुसूची।

(iv) व्यक्तिगत प्रगणन-पर्ची (Individual Enumeration Slip)—सबसे महत्वपूर्ण अनुसूची व्यक्तिगत पर्ची थी जिसमें 17 प्रश्नों का समावेश किया गया। ये प्रश्न व्यक्ति के आर्थिक व सामाजिक जीवन और जनांकिकीय पहलू पर आधारित थे। जिन नवीन प्रश्नों को इसमें शामिल किया गया उनका पहले ही उल्लेख किया जा चुका है।

1981 की जनगणना

भारत की बारहवीं और स्वतन्त्रता-प्राप्ति के बाद की चौथी जनगणना 9 फरवरी से 28 फरवरी 1981 तक की अवधि में 12 लाख से अधिक प्रगणकों द्वारा की गई। सदर्भ-काल 1 मार्च 1981 का सूर्योदय रखा गया। जानकारी को अद्यतन करने के लिए 1 मार्च से 5 मार्च के दौरान जांच कार्य किया गया। इस प्रगणन-कार्य के लिए प्रगणकों का प्रशिक्षण, प्रश्नावलियों की रचना व पूर्व-परीक्षण का कार्य 1978 से ही आरम्भ कर दिया गया था।

प्रमुख विशेषताएँ (Main Features)—1981 की जनगणना की निम्नांकित प्रमुख विशेषताएँ हैं—

(1) प्रगणन-अवधि और सन्दर्भ-तिथि (Enumeration Period and Reference Date)—गणना कार्य 9 फरवरी से 28 फरवरी 1981 तक हुआ और जांच का दौर (Revisional Round) 1 मार्च से 5 मार्च तक चला। जम्मू एवं कश्मीर में प्रगणन-कार्य 20 अप्रैल से 5 मई 1981 तक और जांच-कार्य 6 मई से 10 मई 1981 तक किया गया। इस जनगणना में सन्दर्भ-काल 1 मार्च 1981 का सूर्योदय रखा गया था जबकि 1971 की जनगणना के लिए सन्दर्भ काल 1 अप्रैल 1971 का सूर्योदय रखा गया था। सन्दर्भ-तिथि भिन्न होने के कारण दोनों जनगणनाओं के परिणाम बिना समायोजन के तुलना योग्य नहीं है।

(2) मकान सूची (House List)—जनगणना करने से पहले यह आवश्यक है कि उन सभी स्थानों का पता लगाया जाये जहाँ लोग रहते है या उनके रहने की सम्भावना है। अतः मकान सूची तैयार करना जनगणना कार्य के लिए महत्वपूर्ण प्रारम्भिक कदम है। मकान सूची के द्वारा मूलभूत जानकारी एकत्रित की जाती है जिससे प्रगणक-ब्लाक बनाने मे सहायता मिलती है और उद्यम-सूची बनाना सुगम हो जाता है। मकान सूचीकरण (house listing) कार्य के लिए दिये गये क्षेत्र का नजरी नक्शा (notional map) और खाका (Layout sketch) तैयार किया जाता है, मकानों पर नम्बर डाले जाते हैं, मकान सूची व उद्यम सूची तथा उनके सार (Summaries) बनाये जाते हैं।

(3) परिवार अनुसूची (Household Schedule)—1981 की जनगणना मे प्रयुक्त परिवार अनुसूची दो भागो मे विभाजित थी—प्रथम भाग—परिवार के विवरण के लिए जिसमे 15 प्रविष्टियाँ थी; और दूसरा भाग—जनसंख्या रिकार्ड के लिए जिसमे 35 खाने रखे गये थे। भारतीय जनगणना के इतिहास में पहली बार परिवार को उपलब्ध सुविधाओं—पीने का पानी, बिजली और नगरीय क्षेत्रो के लिए शौचालय—के सम्बन्ध मे 1981 जनगणना मे परिवार अनुसूची के माध्यम से सूचना प्राप्त की गई। इसके अतिरिक्त परिवार के मकान की दीवारों, फर्श व छत में लगने वाली सामग्री के बारे मे भी सूचना उपलब्ध की गई।

परिवार अनुसूची के दूसरे भाग—जनसंख्या रिकार्ड—में 35 कॉलम थे। इनमे से कॉलम

1 से 7 में व्यक्तिगत पर्ची भरने से पहले प्रविष्टियाँ करनी थीं। कॉलम 8 से 21 पुरुषों के बारे में और 22 से 35 स्त्रियों के बारे में विवरण का लेखा प्रस्तुत करते हैं।

(4) **व्यक्तिगत पर्ची** (Individual Enumeration Slip)—व्यक्तिगत पर्चियाँ जनसंख्या के प्रगणन कार्य का मूलाधार होती है। 1981 की जनगणना में प्रथम बार दो प्रकार की व्यक्तिगत प्रगणन पर्चियाँ प्रयोग की गईं—एक, सभी क्षेत्रों के लिए (For Universal Canvassing); और दूसरी, केवल सैम्पल क्षेत्रों के लिए (For Canvassing on a sample basis)। इस प्रकार 1981 की जनगणना का क्षेत्र गत जनगणनाओं की तुलना में अधिक व्यापक हो गया।

(i) **व्यक्तिगत पर्ची** (सभी क्षेत्रों के लिए)—परिवार के प्रत्येक सदस्य के लिए व्यक्तिगत प्रगणन पर्ची भरी गई जिसमें 16 प्रश्न थे। इनमें से 5 प्रश्न जनांकिकीय, 8 प्रश्न सामाजिक व शिक्षा-सम्बन्धी तथा 3 प्रश्न आर्थिक कार्य-सम्बन्धी थे। यद्यपि 1981 जनगणना मे प्रश्नों की संख्या 1971 जनगणना में पूछे गये प्रश्नों की संख्या (17) से एक कम थी लेकिन उनका क्षेत्र अधिक व्यापक था।

नये प्रश्न—कुछ नये प्रश्नों का उक्त पर्ची मे समावेश किया गया। प्रथम, स्कूल/कालेज जाते हैं ? हाँ/नहीं (प्रश्न संख्या 13); दूसरे, क्या गत वर्ष किसी भी समय काम किया ? (प्रश्न संख्या 14क); तीसरे, यदि 14क में 'हाँ' तो क्या गत वर्ष के अधिकाश समय काम किया ? (14ख); चौथे, क्या काम की खोज मे है/काम करने के इच्छुक है ? (प्रश्न सख्या 16)। अन्तिम प्रश्न (16) से बेरोजगारी की व्यापक समस्या के बारे मे महत्वपूर्ण सूचना उपलब्ध करने की व्यवस्था की गई।

(ii) **व्यक्तिगत पर्ची** (केवल सैम्पल क्षेत्रों के लिए)—इस जनगणना मे पहली बार सैम्पल क्षेत्रों (20 प्रतिशत) के लिए अलग व्यक्तिगत पर्ची का प्रयोग किया गया जिसमें दो महत्त्वपूर्ण पहलुओं—प्रवसन (migration) और जनन-क्षमता (fertility) से सम्बन्धित 6 प्रश्न पूछे गये। इन प्रश्नों का क्षेत्र 1971 जनगणना में इन विषयों पर पूछे गये प्रश्नों की तुलना मे अधिक व्यापक रखा गया। उदाहरणार्थ, 1981 जनगणना मे पूर्व निवास-स्थान छोड़ने का कारण भी पूछा गया (प्रश्न संख्या 3) तथा उन सभी महिलाओं से जो विवाहित हैं या थीं जीवित पैदा हुए कुल बच्चों तथा इस समय जीवित (surviving) बच्चों—बालक/बालिकाओं—की संख्या के सम्बन्ध में विवरण माँगा गया [प्रश्न सख्या 5 (ख) व (ग)]।

सैम्पल व्यक्तिगत पर्ची निम्न राज्यो के समस्त क्षेत्रो में भरी गई—

अण्डमान-निकोबार द्वीप-समूह, अरुणाचल, असम, संघ-शासित क्षेत्र चण्डीगढ़, दादरा व नागर हवेली, दिल्ली, गोवा, दमन व दीव, हिमाचल प्रदेश, जम्मू व कश्मीर, लक्षद्वीप, महाराष्ट्र, मणिपुर, मेघालय, मिजोरम, नागालैण्ड, पाण्डिचेरी, सिक्किम, त्रिपुरा और पश्चिमी बंगाल।

इन प्रदेशों के अतिरिक्त अन्य सभी राज्यो में यह पर्ची केवल 20% सैम्पल ब्लाको के सभी परिवारों के बारे में भरी गई। यह पर्ची सामान्य पर्ची (सभी क्षेत्रों के लिए) के अतिरिक्त भरी गई।

(5) **डिग्री-धारकों और तकनीकी कार्मिकों का सर्वेक्षण** (Survey of degree-holders and technical personnel)—डिग्री-धारको और तकनीकी कर्मचारियों से उनकी योग्यता, तकनीकी विशिष्टीकरण, वर्तमान रोजगार, अध्ययन, प्रशिक्षण व सेवाकार्य के लिए विदेश भ्रमण आदि के सम्बन्ध में व्यापक विवरण प्राप्त किया गया। यह सूचना एक विशेष निःशुल्क जवाबी पत्र को भरकर वैज्ञानिक व औद्योगिक शोध परिषद् (C. S. I. R.) की वैज्ञानिक एवं तकनीकी कार्मिक शाखा को भेजनी थी।

1981 जनगणना से प्राप्त कुछ महत्वपूर्ण समंक निम्न प्रकार हैं—

(i) **कुल जनसंख्या** (Total Population)—1 मार्च 1981 को भार[illegible] जनसंख्या 68,51,84,692 अर्थात् 68·518 करोड़ थी जबकि 1971 में यह [illegible] अर्थात् 54·816 करोड़ थी। इस प्रकार 10 वर्षों की अवधि मे 13,70,[illegible] करोड़ की वृद्धि हुई। 1981 में असम में जनगणना नही की गई थी।

(ii) वृद्धि की दर (Rate of Growth)—1971–81 में जनसंख्या की दशवर्षीय वृद्धि दर 24·66% रही है जो 1961–71 में वृद्धि की दर 24·80% से कम है। दोनों दरों की तुलना करने से यह प्रतीत होता है कि दसवर्षीय वृद्धि की दर जो 1951–61 से लगातार बढ़ रही थी (1951–61 → 13·31, 1961–71 → 21·51, 1961–71 → 24·80) अब (1971–81 → 24·66) लगभग स्थिर हो गई है। ऐसा प्रतीत होता है कि पिछले दशक में वृद्धि की दर कम हो गई थी लेकिन 1971 जनगणना की सन्दर्भ-तिथि 1 अप्रैल 1971 के लिए एक माह का समायोजन करने के पश्चात् 1 मार्च 1971 और 1 मार्च 1981 के बीच जनसंख्या वृद्धि की दर 24·99% और 1 मार्च 1961 और 1 मार्च 1971 के बीच वृद्धि की दर 24·57% थी। इस प्रकार 1971–81 में 1961–71 की अपेक्षा वृद्धि 0·42 बिन्दु अधिक हुई है, कम नहीं हुई।[1]

(iii) राज्यों का जनसंख्या-क्रम (Ranks of States by Population)—जनसंख्या के आकार के क्रम में सर्वप्रथम उत्तरप्रदेश (11·0862 करोड़ या 16·18%) फिर बिहार (10·20%), महाराष्ट्र (9·16%), पश्चिमी बंगाल (7·97%), आन्ध्र प्रदेश (7·82%), मध्य प्रदेश (7·62%), तमिलनाडु (7·06%), कर्नाटक (5·42%), राजस्थान (5%) आते हैं।

(iv) स्त्री-पुरुष अनुपात (Sex-Ratio)—1 मार्च 1981 को पुरुषों की कुल संख्या 35·3 करोड़ थी और स्त्रियों की संख्या 33·03 करोड़ थी। इस प्रकार स्त्रियों की संख्या प्रति 1000 पुरुष 934 हो गई जबकि 1971 में यह 930 थी।

(v) साक्षरता (Literacy)—साक्षरता की दर जो 1971 में 29·45% थी 1981 में बढ़कर 36·23% हो गई। परन्तु साक्षरता दर में 6·78% की वृद्धि होने पर भी निरक्षर व्यक्तियों की संख्या में 5·1 करोड़ की वृद्धि हुई। 1981 में पुरुषों में साक्षरता की दर 46·89% थी जबकि 24·82% स्त्रियाँ साक्षर थी। 1991 की जनगणना में साक्षरता दर के आगणन में 0 से 6 वर्ष की आयु वाले बच्चों को सम्मिलित नहीं किया गया जबकि 1981 तक 0 से 4 आयु वर्ग के बच्चों का समावेश नहीं किया जाता था।

(vi) ग्रामीण-नगरीय जनसंख्या वितरण (Rural-Urban Population Distribution)—1981 में नगरीय जनसंख्या का अनुपात बढ़कर 23·3% हो गया है जबकि यह 1971, 1961 व 1951 में क्रमशः 20%, 18·3% और 17·6% था। इस प्रकार ग्रामीण जनसंख्या का अनुपात 1971 में 80% से घटकर 1981 में 76·7% हो गया है। नगरीकरण की प्रवृत्ति बढ़ रही है।

(vii) जनसंख्या घनत्व (Population Density)—1981 में जनसंख्या-घनत्व बढ़कर 216 व्यक्ति प्रति वर्ग किलोमीटर हो गया जबकि 1971 में यह 177 था।

भारत की जनगणना, 1991
(Census of India, 1991)

जनगणना महत्वपूर्ण राष्ट्रीय कार्य है जिसे दस वर्ष के अन्तराल से सम्पन्न किया जाता है। भारतीय जनगणना की एक गौरवशाली परम्परा है और इसकी विश्व में बड़ी मान्यता है। 1991 की जनगणना भारत की तेरहवीं, स्वतन्त्रता-प्राप्ति के बाद की पाँचवीं और बीसवीं सदी की अन्तिम जनगणना थी। समूचे भारत के लिए गणना-अवधि (enumeration period) 9 फरवरी से 28 फरवरी 1991 निश्चित की गई और सन्दर्भ-काल (reference date) 1 मार्च 1991 का सूर्योदय निर्धारित किया गया। 1 मार्च 1991के सूर्योदय तक की जानकारी को अद्यतन (upto-date) करने के लिए 1 मार्च से 5 मार्च 1991 के दौरान जाँच कार्य का दौर (revisional round) पूरा किया गया। जम्मू और कश्मीर, हिमाचल प्रदेश और उत्तरप्रदेश के कुछ हिमाच्छादित क्षेत्रों के लिए खराब मौसम के कारण गणना की तारीखें भिन्न रखी गई। उदाहरणार्थ उत्तर-प्रदेश के उत्तरकाशी, चमोली और पिथौरागढ़ जनपदों के 111 ग्रामों और 3 नगरीय इकाइयों—गंगोत्री, बद्रीनाथ और केदारनाथ—में प्रगणन-कार्य सितम्बर 1990 में किया गया और सन्दर्भ-

[1] Krishnamurty and Sundaram, 'India's Population—Projections and Expectations', *Economic Times*, 13 April 1981.

काल 1 अक्तूबर 1990 के सूर्योदय का समय रखा गया। बेघर जनसंख्या (houseless population) की गणना 27 फरवरी की रात्रि में की गई।

समस्त विश्व के देशों में दूसरे स्थान की जनसंख्या का प्रगणन करने के लिए बहुत बड़ी संख्या में प्रशिक्षित व कर्मठ प्रगणको की आवश्यकता होती है। 1991 की भारतीय जनगणना में 17 लाख से अधिक प्रगणकों और पर्यवेक्षकों ने राज्य, जनपद, प्रभारी और खण्ड स्तरो पर प्रगणन-कार्य का प्रशिक्षण लेकर जनगणना कार्य मे सक्रिय भाग लिया। प्रत्येक प्रगणक ने गणना-काल में घर-घर जाकर लगभग 600–750 व्यक्तियो के बारे मे व्यक्तिगत पर्ची (23 प्रश्न) तथा परिवार अनुसूची (34 खाने) के आधार पर व्यापक सूचना एकत्र की जिसके लिए उसे औसतन 225 रु० पारिश्रमिक दिया गया। प्रशिक्षण व मकान सूचीकरण के लिए प्रति प्रगणक 100 रु० मानदेय भी दिया गया। स्पष्ट है कि कार्य की जटिलता और व्यापकता को देखते हुए यह राशि बहुत कम है। कुल मिलाकर 1991 जनगणना कार्य के लिए 300 करोड़ रु० व्यय का प्रावधान है जो अन्य बड़े देशों के जनगणना व्यय की तुलना में बहुत कम है।

1991 की जनगणना के प्रगणन-कार्य की तैयारियाँ लगभग तीन वर्ष पूर्व 1988 से ही आरम्भ कर दी गईं थी। वर्ष 1988–89 में केन्द्र व राज्य सरकारो के वरिष्ठ अधिकारियों, विश्वविद्यालय-आचार्यों, योजनाकारों, समाजशास्त्रियो, अर्थशास्त्रियों, जनांकिकी विशेषज्ञों, प्रशासकों और समंक प्रयोक्ताओं के अखिल भारतीय सम्मेलन में विस्तृत विचार-विमर्श के बाद जनगणना में प्रयोग की जाने वाली प्रश्नावलियों और अनुसूचियो को अन्तिम रूप दिया गया। 1991 की जनगणना में प्रयोग की गई प्रमुख अनुसूचियाँ निम्नांकित है—

(i) मकान सूची (House List);
(ii) उद्यम सूची (Enterprise List);
(iii) परिवार अनुसूची (Household Schedule);
(iv) व्यक्तिगत पर्ची (Individual Enumeration Slip)।

जनगणना प्रशासनिक पदानुक्रम (Census Administrative Hierarchy)—भारतीय जनगणना एक बृहत् स्तर का राष्ट्रीय कार्य है जिसको सुचारू रूप से सम्पन्न करने के लिए एक व्यापक प्रशासन-तन्त्र की आवश्यकता होती है। जनगणना प्रशासनिक पदानुक्रम में केन्द्रीय स्तर पर सर्वोच्च अधिकारी महारजिस्ट्रार एवं जनगणना आयुक्त (Registrar General & Census Commissioner) होता है। राज्य स्तर पर प्रत्येक राज्य/संघशासित प्रदेश मे राज्य-जनगणना प्रशासन-तन्त्र के शिखर पर जनगणना कार्य निदेशक (Director of Census Operations) होता है। ये दोनों शीर्षस्थ अधिकारी जनगणना अधिनियम 1948 के तहत पूर्णकालिक अधिकारी के रूप में नियुक्त किये जाते हैं जो अपने क्षेत्र में समस्त जनगणना क्रियाओं का नियोजन, पर्यवेक्षण, मार्ग-दर्शन और संचालन करते हैं। राज्य में विभिन्न स्तरों पर राज्य सरकार के प्रशासनिक अधिकारियों ने अपने नैत्यिक कार्यों (routine work) के साथ-साथ जनगणना कार्य मे भी सक्रिय भाग लिया। बड़े राज्यों मे क्षेत्रीय स्तर पर क्षेत्रीय उप-निदेशक (Regional Deputy Directors) नियुक्त किये गये। उत्तरप्रदेश मे इनकी संख्या 19 थी। जनपद और महापालिका स्तर पर अपने-अपने अधिकार क्षेत्रों में जिला अधिकारी (District Magistrate) तथा मुख्य नगर अधिकारी को प्रमुख जनगणना अधिकारी (Principal Census Officer) नामांकित किया गया। जनपद तथा महापालिका स्तर पर जनगणना कार्य का समन्वय और पर्यवेक्षण करने के लिए सभी जिलों में अपर जिला अधिकारी (A. D. M.) को जिला गणना अधिकारी (District Census Officer) मनोनीत किया गया। ग्रामीण इलाको के लिए तहसीलदारो को तथा नगरीय क्षेत्रों के लिए अधिशासी अधिकारियों (Executive Officers) को अपने क्षेत्रों मे प्रभारी ... (Charge Officers) नियुक्त किया गया। वास्तविक प्रगणन और पर्यवेक्षण का कार्य ... के लिए देश भर में 17 लाख प्रगणकों/परिवेक्षको (enumerators and ... गया जिनमें से 3 लाख प्रगणकों व पर्यवेक्षकों ने उत्तर प्रदेश में जनगणना-कार्य ...

निम्नांकित चार्ट* से 1991 की जनगणना का प्रशासनिक पदानुक्रम स्पष्ट हो जाता है—

स्तर — अधिकारी

(i) केन्द्र
महारजिस्ट्रार एवं जनगणना आयुक्त, भारत
(Registrar General and Census Commissioner, India)

(ii) राज्य
गणना कार्य निदेशक
(Director of Census Operations)

(iii) क्षेत्र
क्षेत्रीय उपनिदेशक
(Regional Deputy Director)

(iv) जनपद/महापालिका

जनपद
- प्रमुख जनगणना अधिकारी (Principal Census Officer—Dist. Magistrate)
- जिला जनगणना अधिकारी (Dist. Census Officer—A.D.M.)
- अतिरिक्त जिला जनगणना अधिकारी (Addl. Dist. Census Officer—Dist. Statistical Officer)

महापालिका
- प्रमुख जनगणना अधिकारी (Principal Census Officer—Mukhya Nagar Adhikari)
- नगर जनगणना अधिकारी (City Census Officer—Up-Nagar Adhikari)
- अतिरिक्त नगर जनगणना अधिकारी (Addl. City Census Officer—Dist. Statistical Officer)

(v) प्रभार/चार्ज
प्रभारी अधिकारी (Charge Officer)

ग्रामीण (Rural)
- तहसीलदार
- अतिरिक्त/सहायक प्रभारी (Addl./Asst. Charge Officer—B.D.O./Naib Tahsildar/S.D.I. Schools)

नगरीय (Urban)
- तहसीलदार/अधिशासी अधिकारी
- अतिरिक्त/सहायक प्रभारी (Addl./Asst. Charge Officer—Education/Tax Superintendent)

(vi) पर्यवेक्षण
पर्यवेक्षक (Supervisor)
(प्रति 5 प्रगणकों पर एक)

(vii) प्रगणन-खण्ड
प्रगणक (Enumerator)

- ग्रामीण (लगभग 750 की जनसंख्या के खण्ड पर एक)
- नगरीय (लगभग 600 की जनसंख्या के खण्ड पर एक)

1991 की जनगणना की क्रियाविधि (Methodology for 1991 Census)—1991 की भारतीय जनगणना के प्रगणन का कार्य, कुछ दुर्गम और हिमाच्छादित इलाकों को छोड़कर पूरे देश में 9 फरवरी से 28 फरवरी 1991 तक की अवधि में सम्पन्न किया गया। सन्दर्भ-काल 1 मार्च 1991 का सूर्योदय रखा गया जबकि 1 मार्च से 5 मार्च 1991—कुछ राज्यों में 10 मार्च—तक की अवधि में जनगणना आँकड़ों को अद्यतन बनाने के लिए जाँच कार्य हुआ।

* Census of India 1991, *Series 25*—Uttar Pradesh, *Paper I of 1991*, p. 9.

1991 में जनगणना की तैयारियाँ वास्तव में प्रगणन के क्षेत्र-कार्य से लगभग तीन वर्ष पहले से ही आरम्भ हो गई थी। केन्द्र व राज्य सरकारों के वरिष्ठ अधिकारियों, विषय विशेषज्ञों, योजनाकारों, प्रशासकों और समंक प्रयोक्ताओं के प्रतिनिधियों के सम्मेलन आयोजित किये गये जिनमें सघन विचार-विमर्श के उपरान्त जनगणना में प्रयोग की जाने वाली प्रश्नावलियाँ व अनुसूचियाँ तैयार की गई तथा प्रतिदर्श क्षेत्र में उनका पूर्व-परीक्षण करके उन्हें अन्तिम रूप दिया गया।

1991 की भारतीय जनगणना का सम्पूर्ण कार्य निम्न चरणों में पूरा किया गया—

(1) प्रारम्भिक कार्य (Preliminary Work)—सर्वप्रथम राज्य स्तर पर समस्त क्षेत्र के हल्के और गाँवों के अनुसार नगरों और तहसीलों के नजरी नक्शे तैयार किये गये। गाँवों का विवरण एक ग्रामीण पंजिका में तथा मोहल्लों और वार्डों का विवरण नगर पंजिका में दर्ज किया गया। प्रत्येक गाँव और वार्ड को प्रगणक खण्डों (enumeration blocks) में बाँटा गया। ग्रामीण क्षेत्रों के एक प्रगणक खण्ड के लिए 750 व्यक्तियों की जनसंख्या और नगरीय इलाकों के लिए 600 व्यक्तियों की जनसंख्या को आदर्श आकार माना गया। इसके लिए ग्रामीण इलाकों और नगरीय वार्डों की 1981 की जनसंख्या में क्रमशः 20% और 60% की वृद्धि की गई।

क्षेत्र-कार्य आरम्भ करने से पूर्व प्रगणकों और पर्यवेक्षकों को जनगणना कार्य का राज्य, जनपद और प्रभार स्तर पर अल्पकालिक सैद्धान्तिक और व्यावहारिक प्रशिक्षण दिया गया।

(2) मकान सूचीकरण कार्य (House-listing Operations)—प्रारम्भिक कार्य पूरा करने के बाद, क्षेत्र-कार्य के प्रथम महत्त्वपूर्ण चरण के रूप में मकान सूची तैयार करने का कार्य किया गया। मकान सूचीकरण कार्य के लिए सर्वप्रथम प्रत्येक खण्ड का नजरी नक्शा (notional map) अर्थात् रेखाचित्र तैयार किया गया जिसमें सम्पूर्ण ग्राम या नगरीय ब्लाक की सामान्य भौगोलिक स्थिति, आबादी स्थलों तथा महत्त्वपूर्ण स्थायी लक्षण और भू-चिन्ह जैसे सड़कें, गलियाँ, रेल लाईन, पहाड़ियाँ, नदियाँ, सीमाएँ आदि अंकित की गईं। नजरी नक्शा तैयार करने के बाद ब्लाक का खाका (layout sketch) या कच्चा नक्शा बनाया गया जिसमें गलियाँ तथा उनमें स्थित भवन दर्शाये गये ताकि इस खाके के आधार पर गणना-कार्य किया जा सके। पक्के मकान को वर्ग □ और कच्चे मकान को त्रिभुज △ के निशान से दिखाया गया। तत्पश्चात् सभी निर्मित इकाइयों (भवनों व जनगणना इकाइयों) पर 'गेरु' से नम्बर डाले गये।

मकान सूची में प्रयुक्त 'भवन', 'जनगणना मकान' और 'परिवार' शब्दों को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया—

भवन—आमतौर पर एक पूरी इमारत को भवन कहते हैं। कभी-कभी इमारतों में एक से अधिक संघटक इकाइयाँ होती है जिन्हें निवास, दुकान, कार्यालय, कारखाना, स्कूल, पूजा-स्थल, गोदाम आदि के रूप में एक से अधिक प्रयोजनों के लिए उपयोग में लाया जाता है।

जनगणना मकान—जनगणना मकान एक भवन या भवन का वह भाग है जो पृथक् इकाई के रूप में प्रयोग किया जाता हो तथा जिसका अलग मुख्य प्रवेश द्वार हो। कुछ मामलों में जैसे हॉस्टल, होटल, अहाता आदि के सम्बन्ध में जनगणना मकान की परिभाषा को अक्षरशः लागू करने में कठिनाई हो सकती है।

परिवार—परिवार ऐसे व्यक्तियों के समूह को कहते हैं जो सामान्यतः एक साथ रहते हों और यदि काम की आवश्यकता उन्हें मजबूर न करे तो एक ही रसोई से खाना खाते हों। असम्बन्धित व्यक्तियों के परिवार जैसे हॉस्टल, मैस, जेल, आश्रम आदि 'संस्थागत परिवार' कहे जाते हैं। प्रत्येक परिवार को एक पहचान नम्बर दिया जाता है।

मकानों पर नम्बर डालने के बाद उनका विवरण 24 खानों वाली एक मकान सूची में दर्ज किया गया। विवरण की प्रमुख मदें इस प्रकार थी—भवन, जनगणना मकान नं दीवार, छत व फर्श में लगी प्रमुख सामग्री, मकान स्वयं का है या किराये पर लिया गया ...स उपयोग में आता है, परिवार, सदस्यों की संख्या, उपलब्ध सुविधाएँ—बिजली ...य. खाना बनाने में उपयोग किया जाने वाला ईंधन, परिवार के उद्यम का विवरण

सम्पूर्ण ब्लाक की मकान सूची को पूरा करने के बाद मकान सूची-सार तैयार किया गया ताकि मकान सूची में एकत्रित जनगणना मकानों की संख्या, परिवारों की संख्या और अन्य सम्बन्धित विवरण आसानी से सारांश के रूप में उपलब्ध हो जाएं।

मकान सूची और मकान सूची सार बनाने के पश्चात् संक्षिप्त मकान सूची (Abridged House List) तैयार की गई जो मकान सूचीकरण और जनगणना कार्य के बीच की महत्वपूर्ण कड़ी है। संक्षिप्त मकान सूची में 8 खाने हैं और इसके 3 भाग हैं। भाग 2 में ब्लॉक के सभी जनगणना मकानों और परिवारों की सूची है जिन्हें मकान सूची से नकल करके लिखा गया है। मूल मकान सूची में होने वाले परिवर्तनों का समावेश करके संक्षिप्त मकान सूची को अद्यतन बनाया गया है। नये जनगणना मकानों और परिवारों को भाग 3 में दर्ज किया गया। भाग 1 को जनगणना के अन्त में भरा गया। पटरियों आदि पर रहने वाले बेघर परिवारों की गणना 28 फरवरी 1991 कुछ राज्यों में 27 फरवरी की रात्रि को की गई तथा गणना पूरी होने के पश्चात् इन बेघर परिवारों का विवरण संक्षिप्त मकान सूची के भाग 3 में प्रविष्ट किया गया।

जनगणना कार्य का प्रथम चरण—मकान सूचीकरण—अप्रैल से सितम्बर 1990 में विभिन्न राज्यों और संघ-शासित प्रदेशों में सम्पन्न किया गया। उत्तरप्रदेश में यह कार्य 10 से 25 सितम्बर 1990 की अवधि में पूरा हुआ।

उद्यम-सूची (Enterprise List)—जनगणना कार्य के प्रथम चरण—मकान सूचीकरण-कार्य—के साथ-साथ अप्रैल-सितम्बर 1990 की अवधि में केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C. S. O.) की ओर से उद्यम सूची का भी अनुमापन (canvassing) किया गया। यह आर्थिक संगणना (Economic Census) का कार्य था जिससे उपलब्ध समंकों को विधियन और प्रसारण के लिए केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन को सौंप दिया गया। आर्थिक संगणना के अन्तर्गत उद्यम सूची भरकर देश के प्रत्येक आर्थिक उपक्रम से उसकी गतिविधियों की प्रकृति, उद्यम का वर्गीकरण, उसके स्वामित्व की प्रकृति, नियुक्त कर्मचारियों की संख्या, प्रयोग की जाने वाली ऊर्जा का विवरण इत्यादि विषयों पर व्यापक सूचना एकत्र की गई। मकान सूचीकरण के साथ-साथ उद्यम सूची भरने वाले प्रत्येक प्रगणक को 50 रु० मानदेय दिया गया। त्वरित हस्त सारणीयन (Quick Manual Tabulation—QMT) द्वारा आर्थिक संगणना के परिणाम केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन द्वारा प्रसारित किये जाने से आठवी पंचवर्षीय योजना (*1 अप्रैल 1992 से 31 मार्च 1997 तक*) को अन्तिम रूप देने में उपयोगी सहायता मिली है।

(3) **प्रगणन-कार्य** (Enumeration)—जनगणना 1991 के दूसरे महत्वपूर्ण चरण में गणना अवधि—9 फरवरी से 28 फरवरी 1991—में प्रत्येक प्रगणक ने घर-घर जाकर अपने ब्लाक में स्थित परिवार के निम्न व्यक्तियों की उनके सामान्य निवास के अनुसार गणना की—

(क) वे सभी व्यक्ति जो सामान्यतः परिवार में रहते हों और प्रगणन अवधि के दौरान वहीं हों;

(ख) वे व्यक्ति जो सामान्यतः परिवार में रहते हों और प्रगणन-अवधि के कुछ भाग में वहां रहे हों परन्तु परिवार की गणना के दिन बाहर गये हों;

(ग) वे व्यक्ति जो सामान्यतः परिवार में रहते हों परन्तु उस परिवार की गणना के दिन वे अनुपस्थित हों और 28 फरवरी 1991 से पहले उनके वापस लौटने की आशा हो; और

(घ) ऐसे अतिथि जो गणना के दिन परिवार में हो और जिनकी गणना की पूरी अवधि में अपने सामान्य निवास स्थान से बाहर रहने की सम्भावना हो तथा जिनकी गणना कहीं और न हो चुकी हो। ऐसे अतिथियों को उस परिवार का सामान्य निवासी माना गया जिसमें वे गणना-अवधि में वस्तुतः रहते हुए पाये गये बशर्ते कि उनकी गणना कहीं और न हो चुकी हो।

यह स्पष्ट है कि यदि कोई व्यक्ति सम्पूर्ण गणना अवधि में अपने सामान्य निवास स्थान से बाहर रहा था तो उसकी उस परिवार में गणना नहीं की गई जिसका वह सामान्य निवासी हो वरन् उसकी गणना वहीं की गई जहाँ वह गणना अवधि में रहता पाया गया। ऐसे व्यक्ति (अतिथि) को प्रगणक द्वारा यह हिदायत दी गई कि यदि वह उस परिवार से दूसरी जगह चला जाए

तो अपनी गणना दुवारा न कराये ।

गणना-काल में दो महत्वपूर्ण अनुसूचियों—व्यक्तिगत पर्ची और परिवार अनुसूची—में प्रविष्टियाँ करके प्रगणन ब्लॉक में रहने वाले प्रत्येक व्यक्ति और परिवार के बारे में विस्तृत सूचना उपलब्ध की गई—

व्यक्तिगत पर्ची का नमूना

भारत की जनगणना 1991 — व्यक्तिगत पर्ची — गोपनीय

लोकेशन कोड ——————( ) परिवार की क्रम सं० [ ] पैड सं० ——

विकास खंड का कोड सं० —————— पर्ची सं० ——

1 नाम ——————

2 परिवार के मुखिया से सम्बन्ध ——————

3 पुरुष (1)/स्त्री (2) ——————

4 आयु ——————

5 वैवाहिक स्थिति ——————

6 मातृ-भाषा ——————

7 दो अन्य भाषाएं जिनका ज्ञान हो ——————

8 धर्म ——————

9 क्या अ.जा.(1) अथवा अ.ज.जा.(2) के सदस्य हैं ——————

10 अनुसूचित जाति/जनजाति का नाम ——————

11 साक्षर (1)/निरक्षर (2) ——————

12 कहा तक शिक्षा पाई है ——————

13 स्कूल/कालेज जाते हैं, हां (1)/नहीं (2) ——————

14क क्या गत वर्ष किसी भी समय काम किया ? (फार्म पर या घरेलू उद्यम में बिना मजदूरी के काम सहित) — हां / नहीं (गृ./वि./आ./रि./भि./स./अन्य)

14ख यदि 14क में 'हां' तो क्या गत वर्ष अधिकांश समय काम किया? हां (1)/नहीं (2) ——————

15क गत वर्ष में मुख्य काम ? — 14ख में 'हां' (का./खे.म./पा.उ./अ.का.) / 14ख में 'नहीं' (गृ./वि./आ./रि./भि./स./अन्य)

यदि 15क में पा.उ./अ.का

(i) प्रतिष्ठान का नाम ——————

(ii) उद्योग, व्यापार या सेवा का स्वरूप ——————

(iii) व्यक्ति के काम का विवरण ——————

(iv) काम करने वाले का वर्ग ——————

15ख 14ख में 'हां' —गत वर्ष किसी समय अन्य कोई काम किया ? हां (का./खे.म./पा.उ./अ.का.)/नहीं / 14ख में 'नहीं' —गत वर्ष किसी भी समय जो काम किया हो ? (का./खे.म./पा.उ./अ.का.)

यदि 15ख में पा. उ./अ. का.

(i) प्रतिष्ठान का नाम ——————

(ii) उद्योग, व्यापार या सेवा का स्वरूप ——————

(iii) व्यक्ति के काम का विवरण ——————

(iv) काम करने वाले का वर्ग ——————

16क यदि 14क में 'नहीं' तो क्या काम की खोज में हैं/काम करने के इच्छुक हैं ? हां (1)/नहीं (2) ——————

16ख यदि 16क में 'हां' तो क्या आपने पहले कभी काम किया है ? हां (1)/नहीं (2) ——————

17क क्या आप भूतपूर्व सैनिक हैं ? हां (1)/नहीं (2)

17ख यदि 17क में 'हां', तो पेंशनभोगी (1)/गैर-पेंशनभोगी (2)

18 जन्म स्थान
- (क) जन्म का स्थान
- (ख) ग्रामीण (1)/नगरीय (2)
- (ग) जिला
- (घ) राज्य/देश

19 पूर्व निवास स्थान
- (क) इसके पूर्व का निवास स्थान
- (ख) ग्रामीण (1)/नगरीय (2)
- (ग) जिला
- (घ) राज्य/देश

20 पूर्व निवास स्थान छोड़ने का कारण (कोड)*

21 गणना के ग्राम या कस्बे में निवास की अवधि

22 उन सभी महिलाओं के लिए जो विवाहित हैं या थीं
- (क) विवाह के समय आयु
- (ख) इस समय जीवित बच्चों की संख्या

पुरुष ☐ स्त्री ☐ योग ☐

- (ग) जीवित पैदा हुए कुल बच्चों की संख्या

पुरुष ☐ स्त्री ☐ योग ☐

23 केवल उन महिलाओं के लिए जो इस समय विवाहित हैं

गत एक वर्ष में कोई जीवित बच्चा पैदा हुआ

* रोजगार (1) व्यवसाय (2) शिक्षा (3) परिवार का स्थान परिवर्तन (4) विवाह (5) प्राकृतिक विपदाएं जैसे सूखा, बाढ़, आदि (6) अन्य (7)

(i) व्यक्तिगत पर्ची (Individual Slip)—व्यक्तिगत पर्ची 1991 के जनगणना कार्य का मूलाधार थी। 1991 की जनगणना में विस्तृत सूचना उपलब्ध करने के लिए 23 प्रश्नों वाली व्यक्तिगत प्रगणन पर्ची का प्रयोग किया गया। इससे पहले 1981 की जनगणना में दो प्रकार की व्यक्तिगत पर्चियों का प्रयोग किया गया था—एक, सभी क्षेत्रों के लिए 16 प्रश्नों वाली पर्ची तथा दो, 6 प्रश्नों वाली पर्ची सैम्पिल क्षेत्रों (20%) के लिए। 1991 में जनगणना के लिए प्रयुक्त पर्ची में 1981 की इन दोनों पर्चियों के सभी 16+6=22 प्रश्नों के साथ एक नये प्रश्न (सं० 17 भूतपूर्व सैनिकों और उनके पेंशन भोगी/गैर पेंशन भोगी होने की स्थितियों के बारे में) का भी समावेश किया गया है। इस प्रकार 1991 जनगणना की व्यक्तिगत पर्ची में कुल 23 प्रश्न हैं। प्रश्नों के उत्तर दर्ज करने से पहले प्रत्येक व्यक्तिगत पर्ची पर शीर्षकों के रूप में चार्ज अधिकारी/पर्यवेक्षक द्वारा प्रदत्त प्रत्येक पैड (50, 25 या 10 पर्चियों वाले) के आवरण पृष्ठ पर पैड संख्या और पर्ची की क्रम संख्या, लोकेशन कोड—राज्य/जिला/तहसील या नगर/वार्ड नं० तथा कोष्ठक में गणना ब्लॉक नं०—तथा संक्षिप्त मकान सूची के कालम 7 में दर्ज परिवार की क्रम संख्या को प्रविष्ट किया जाता था। व्यक्तिगत पर्ची के 23 प्रश्नों का संक्षिप्त विवरण निम्नवत् है—

(क) सामान्य सामाजिक प्रश्न—पर्ची में 13 प्रश्न (क्रम संख्या 1 से 13 तक) सामान्य प्रकृति के थे जैसे नाम, परिवार के मुखिया से सम्बन्ध, पुरुष/स्त्री, आयु—पूर्ण किये गये वर्षों में, वैवाहिक स्थिति, मातृ-भाषा व दो अन्य भाषाएँ जिनका ज्ञान हो, धर्म, अनुसूचित जाति अथवा अनुसूचित जनजाति की सदस्यता, उक्त जाति का नाम, साक्षर/निरक्षर, कहां तक शिक्षा प्राप्त की, स्कूल/कालेज जाते हैं या नहीं।

1991 की जनगणना में 'साक्षर' उस व्यक्ति को माना गया जो किसी भाषा को समझ

सकता है और उसे लिख और पढ़ सकता है। वह व्यक्ति जो सिर्फ पढ़ सकता है लेकिन लिख नहीं सकता, साक्षर नहीं माना जाता। इस जनगणना में 0–6 वर्ष के आयु वर्ग के बच्चों को निरक्षर माना गया भले ही वे स्कूल जाते हों और थोड़ा बहुत लिखना पढ़ना भी सीख चुके हों। अतः 0–6 वर्ष के बच्चों को साक्षरता दर की गणना करने के लिए शामिल नहीं किया गया। इससे पहले की जनगणनाओं में साक्षरता दर आगणित करने में 0–4 वर्ष की आयु के बच्चों की जनसंख्या का समावेश नहीं किया जाता था।

(ख) आर्थिक प्रश्न—व्यक्तिगत पर्ची में 3 आर्थिक प्रश्न (14 से 16 तक) पूछे गए। प्रश्न 14 क में पूछा गया—'क्या गत वर्ष किसी भी समय काम किया?' इसमें फार्म पर या घरेलू उद्यम में अवैतनिक काम भी शामिल किया गया। सन्दर्भ अवधि (गत वर्ष) गणना की तारीख से एक वर्ष पहले की थी। खेती जैसे मौसमी कार्यों के लिए सन्दर्भ अवधि गणना से पहले बीते फसली वर्ष रखी गई।

प्रश्न 14 ख—यदि 14 क में 'हाँ' तो क्या गत वर्ष अधिकांश समय काम किया? अधिकांश समय का अर्थ है छः माह (183 दिन) या उससे अधिक समय। अधिकांश समय काम करने वालों को 'मुख्य काम करने वाला' माना गया और छः माह से कम काम करने वालों को 'सीमान्तिक काम करने वाला' (marginal worker) माना गया।

प्रश्न 15 क—गत वर्ष में मुख्य काम (6 माह से अधिक) करने वालों को चार वर्गों में बाँटा गया—काश्तकार (का०)/खेतिहर मजदूर (खे० म०)/पारिवारिक उद्योग में कार्यरत (पा० उ०) व अन्य काम करने वाले (अ० का०)। 14 ख में उत्तर 'नहीं' होने पर, अधिकांश समय काम न करने वालों को सात वर्गों में बाँटा गया—घरेलू कार्य (गृ०)/विद्यार्थी (वि०)/आश्रित (आ०)/रिटायर्ड या किरायाभोगी (रि०)/भिखारी आदि (भि०)/संस्थागत (सं०)/अन्य काम न करने वाले (अ०)।

ऐसे व्यक्तियों के मामलों में जो मुख्यतः पारिवारिक उद्योग या अन्य काम में लगे हों, प्रतिष्ठान का नाम, उद्योग, व्यापार या सेवा का स्वरूप, काम का विवरण और वर्ग 15 क (i) से 15 क (iv) तक में दर्ज किया गया। 'काम के विवरण' का तात्पर्य काम करने वालों के पेशे से है चाहे वह किसी भी प्रकार के उद्योग, व्यापार, पेशा या सेवा में काम कर रहा हो। वास्तविक कार्य का पर्याप्त विवरण देना अनिवार्य था, जैसे कार्य—'सरकारी सेवा' है तो कार्य का विवरण—चपरासी, अनुभाग अधिकारी, तहसीलदार, पुलिस उप-निरीक्षक या उपनिदेशक (स्वास्थ्य) आदि—दर्ज करना अपेक्षित था। काम करने वालों के वर्ग (15 क iv) को चार श्रेणियों में बाँटा गया—मौलिक, कर्मचारी, एकल कार्यकर्ता तथा पारिवारिक काम करने वाला (अवैतनिक)।

प्रश्न 15 ख—गत वर्ष किसी भी समय अन्य कोई काम किया। इससे गौण या सीमान्तिक काम का विस्तृत विवरण उपलब्ध हुआ। मुख्य काम करने वालों से सम्बद्ध प्रविष्टियों की तरह ही इसकी भी प्रविष्टियाँ की गईं।

प्रश्न 16 क—यदि 14 क में 'नहीं' (काम न करने वाले) तो क्या काम की खोज में हैं? काम करने के इच्छुक हैं? इस प्रश्न का उद्देश्य बेरोजगारी की व्यापकता का माप करना है।

प्रश्न 16 ख—में बेरोजगार व्यक्तियों से यह पूछा गया कि क्या उन्होंने पहले कभी काम किया है।

यह प्रश्न (16 ख) 1991 में पहली बार पूछा गया।

इस प्रकार उपर्युक्त तीन आर्थिक प्रश्नों के माध्यम से जनसंख्या के आर्थिक क्रियाकलापों का विस्तृत ब्यौरा प्राप्त किया गया।

(ग) नवीन प्रश्न—भूतपूर्व सैनिकों के सम्बन्ध में पहली बार दो भागों में प्रश्न पूछा गया—17 क—क्या आप भूतपूर्व सैनिक हैं? यदि 'हाँ' तो 17 ख—पेंशन भोगी हैं या गैर-पेंशन भोगी। यह प्रश्न रक्षा-मन्त्रालय के निर्देश पर पूछा गया।

(घ) स्थान-परिवर्तन अर्थात् प्रव्रजन के सम्बन्ध में चार प्रश्न (18–21) पूछे गए—जन्म-स्थान, पूर्व निवास स्थान, पूर्व निवास स्थान छोड़ने का कारण और गणना के ग्राम या

प्रगणक ने प्रगणन अवधि की अन्तिम रात्रि को ब्लॉक में सभी प्रकार के बेघर परिवारों की गणना पूरी की। बेघर व्यक्तियों के रहने के अनेक स्थान हो सकते हैं, जैसे सड़कों के किनारे पटरियों पर, बड़े पाइप में, सीढ़ियों के नीचे, खुले में, प्लेटफार्मों पर, मन्दिरों, मण्डपों आदि में। ग्राम के बाहरी भागों के इर्द-गिर्द बड़ी संख्या में खानाबदोश बस्तियों का विशेष रूप से प्रगणन किया गया। प्रत्येक बेघर परिवार के लिए भी परिवार अनुसूची में प्रविष्टियाँ की गईं।

(4) जाँच कार्य (Revisional Round)—प्रगणन कार्य के बाद 1 मार्च से 5 मार्च 1991 तक—कुछ बड़े राज्यों में 10 मार्च तक—सभी परिवारों की जाँच का कार्य सम्पन्न किया गया। इस अवधि में प्रगणक अपने ब्लाक के सभी परिवारों में जाँच के लिए दुबारा गए और यह पता लगाया कि—

(i) क्या उस परिवार की गणना के बाद और 1 मार्च 1991 के सूर्योदय से पहले वहाँ किसी नये बच्चे का जन्म तो नहीं हुआ या किसी व्यक्ति की मृत्यु तो नहीं हुई?

(ii) क्या उस परिवार में कोई ऐसा नया व्यक्ति तो नहीं आया जो प्रगणन-काल (9–28 फरवरी 1991) के दौरान अपने सामान्य निवास स्थान में न रहा हो?

(iii) क्या कोई ऐसा पूरा परिवार तो ब्लॉक में नहीं आ गया जिसकी पहले कहीं भी गणना न की गई हो?

परिवार अनुसूची में नए जन्मों के लिए नई प्रविष्टियों और मृतकों के लिए निरस्त की गई प्रविष्टियों के अनुरूप संशोधन करके योग में तदनुसार परिवर्तन किये गए।

जाँच कार्य सम्पन्न होने के बाद प्रगणकों द्वारा अपने पर्यवेक्षक को निम्न कागजात सौंप दिये गए—

> 'नजरी नक्शा, खाका, परिवार अनुसूचियों की भरी हुई पुस्तिकाएँ, भरी हुई व्यक्तिगत पर्चियों के सारे पैड, भरी हुई संक्षिप्त मकान सूची, प्रगणक की वर्किंग शीट, प्रगणक-सार, स्नातकोत्तर डिग्रीधारी व तकनीकी कर्मिकों की अनुसूचियाँ, तथा बिना भरी परिवार अनुसूचियों की पुस्तिकाएँ, व्यक्तिगत पर्चियों के खाली पैड, अन्य खाली फार्म आदि।'

(5) सारणीयन (Tabulation)—जनगणना से सम्बिन्धित क्षेत्र-कार्य समाप्त होने के बाद बृहत् स्तर पर समंकों के सारणीयन का कार्य आरम्भ कर दिया गया। पूरे देश में 163 क्षेत्रीय सारणीयन केन्द्रों में जनगणना-पर्चियों व अनुसूचियों का समंक-विधियन किया गया। इन केन्द्रों में लगभग 44,500 कर्मचारियों ने हस्तचालित सारणीयन कार्य (manual tabulation work) द्वारा शत प्रतिशत आधार पर मौलिक जनगणना समंकों का विश्लेषण आरम्भ कर दिया। साथ ही साथ अभिकलित्रीय सारणीकरण (computerised tabulation) के प्रथम चरण में छोटे राज्यों की सभी व्यक्तिगत पर्चियों का तथा बड़े राज्यों की 10 प्रतिशत प्रतिदर्श पर्चियों का विस्तृत परीक्षण और विश्लेषण भी सम्पन्न किया गया। इसके बाद दूसरे और तीसरे चरणों में एक सुनिश्चित योजना के तहत सभी व्यक्तिगत पर्चियों का सारणीयन किया गया। वर्ष 1995 के अन्त तक जनगणना 1991 के सभी जनसंख्या सारणी प्रकाशित होने की सम्भावना है।

विकेन्द्रित समंक विधियन के लिए प्रमुख अभिकलित्र (main-frame computer) के साथ-साथ सूक्ष्म-अभिकलित्र (micro-computer) का भी प्रयोग किया जा रहा है। 1991 जनगणना की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि विभिन्न प्रकाशनों के अतिरिक्त समंक प्रयोक्ताओं को पहली बार सारणियों के फ्लापी-चक्र (floppy discs) भी उपलब्ध होंगे जिससे जनगणना-समंकों की उपादेयता बहुत बढ़ जायेगी।

1991 की जनगणना में होने वाली व्याप्ति और विषय-सामग्री सम्बन्धी त्रुटियों (coverage and content errors) का पता लगाने के लिए प्रगणनोत्तर परीक्षण (Post Enumeration Checks—P.E.C.) तथा जनगणना मूल्यांकन अध्ययन (Census Evaluation Study—C.E.S.) आयोजित किये गए जिनसे जनगणना परिणामों का सही मूल्यांकन उपलब्ध हो सके।

में निवास की अवधि। पूर्व निवास स्थान छोड़ने के 7 कारणों का उल्लेख किया गया जिनमें से 'व्यवसाय' तथा 'प्राकृतिक विपदाएँ जैसे सूखा, बाढ़ आदि' इस जनगणना में पहली बार शामिल किये गये।

(ङ) **प्रजननता**—दो प्रश्न (22 व 23) प्रजननता के सम्बन्ध में पूछे गए। प्रश्न 22 उन सभी महिलाओं से पूछा गया जो विवाहित हैं या थी। विवाहित, विधवा, पृथक् या तलाकशुदा स्त्रियों से विवाह के समय आयु, इस समय जीवित बच्चों की संख्या तथा जीवित पैदा हुए बच्चों की संख्या (लिंगानुसार) के बारे में सूचना उपलब्ध की गई। सारांश में प्रश्न 22 से विभिन्न आयु वर्गों की स्त्रियों की विवाह के समय आयु तथा उनके प्रजननता-प्रतिरूप (fertility pattern) के बारे में उपयोगी विवरण प्राप्त हुआ।

अन्तिम प्रश्न (23) केवल उन महिलाओं के बारे में अधियाचित किया गया जो इस समय विवाहित हैं। इन महिलाओं से गत एक वर्ष में पैदा हुए जीवित बच्चे के बारे में सूचना प्राप्त की गई। इस सूचना को माता की आयु से सम्बन्धित करके चालू आयु-विशिष्ट प्रजनन दर (current age-specific fertility age) तथा जन्म-दर का आगणन किया जा सकता है। जांच दौर (1–5 मार्च 1991) के दौरान यदि यह पता लगे कि किसी परिवार में विवाहित महिला ने गणना के बाद तथा 1 मार्च 1991 के सूर्योदय से पहले किसी बच्चे को जन्म दिया है तो प्रश्न 23 में तदनुसार शुद्धियाँ करनी पड़ेंगी।

इस प्रकार, 1991 की जनगणना में प्रयुक्त व्यक्तिगत प्रगणन पर्ची के आधार पर भारतीय जनसंख्या के सामाजिक, आर्थिक, प्रव्रजन व प्रजनन सम्बन्धी अनेक मामलों पर महत्वपूर्ण सूचना उपलब्ध की गई।

(ii) **परिवार अनुसूची (Household Schedule)**—1991 की जनगणना में प्रयुक्त परिवार अनुसूची मे कुल 34 कॉलम रखे गए। परिवार के प्रत्येक सदस्य की व्यक्तिगत पर्ची भरने से पहले परिवार अनुसूची के प्रथम सात कॉलमों—1 से 7 तक—में प्रविष्टियाँ करना अनिवार्य था। ये सात कॉलम, परिवार की क्रम संख्या, नाम, मुखिया से सम्बन्ध, पुरुष/स्त्री, आयु और वैवाहिक स्थिति से सम्बन्धित थे। शेष 27 कॉलम—8 से 34 तक—व्यक्तिगत पर्ची में की गई प्रविष्टियों के अनुसार ही भरने थे। इन 27 खानों में मातृभाषा, धर्म, अनुसूचित जाति/अनुसूचित जनजाति, साक्षर, निरक्षर, व्यक्तिगत पर्ची के मुख्य आर्थिक प्रश्नों—14 क, 14 ख, 15 क व 15 ख का विभिन्न खानों मे कार्यानुसार विवरण, प्रतिष्ठान का नाम, उद्योग, व्यापार या सेवा का स्वरूप आदि के बारे में विश्लेषणात्मक सूचना प्रविष्ट की गई। विभिन्न खानों का योग करके परिवार अनुसूची भरने का कार्य पूरा हो जाता था।

(iii) **प्रगणक की वर्किंग शीट व प्रगणक सार (Enumerator's Working Sheets and Abstracts)**—प्रगणन के अन्त में प्रगणको द्वारा परिवार-अनुसूची से अलग-अलग सामान्य, संस्थागत और बेघर परिवारों के लिए 29 कॉलम वाली वर्किंग शीट तैयार की गई जिनकी सहायता से 15 मदों और 5 स्तम्भों वाला प्रगणक-सार संकलित किया गया।

(iv) **स्नातकोत्तर डिग्रीधारी व्यक्तियों और तकनीकी कर्मियों का सर्वेक्षण (Survey of Post-graduate Degreeholders and Technical Personnel : PGDHTP)**—1991 की जनगणना में प्रगणन कार्य का एक महत्वपूर्ण पहलू यह था कि प्रत्येक परिवार के स्नातकोत्तर डिग्रीधारकों और तकनीकी कर्मियो से उनकी शैक्षिक योग्यता, व्यावसायिक स्थिति, वर्तमान रोजगार, विशेषज्ञता का क्षेत्र, औसत मासिक आय, 'प्रशिक्षण व नौकरी' के सम्बन्ध में तीन महीने से अधिक निवास के लिए विदेश यात्रा आदि के बारे में विवरण प्राप्त किये गए। विस्तृत सूचना अन्तर्देशीय पत्र पर मुद्रित तकनीकी कर्मियों की अनुसूची (P.G.D.H.T.P. Schedule) भरकर जांच कार्य के दौरान प्रगणक को वापस देनी थी या पत्र को डाक द्वारा (निःशुल्क) पूसा-नई दिल्ली स्थित सी० एस० आई० आर० के वैज्ञानिक व तकनीकी कार्मिक अनुभाग के मानव संसाधन विकास वर्ग को भेजनी थी।

(v) **बेघर लोगों की गणना (Enumeration of Houseless Persons)**—प्रत्येक

प्रगणक ने प्रगणन अवधि की अन्तिम रात्रि को ब्लॉक में सभी प्रकार के बेघर परिवारों की गणना पूरी की। बेघर व्यक्तियों के रहने के अनेक स्थान हो सकते हैं, जैसे सड़कों के किनारे पटरियों पर, बड़े पाइप में, सीढ़ियों के नीचे, खुले में, प्लेटफार्मों पर, मन्दिरों, मण्डपों आदि में। ग्राम के बाहरी मार्गों के इर्द-गिर्द बड़ी संख्या में खानाबदोश बस्तियों का विशेष रूप से प्रगणन किया गया। प्रत्येक बेघर परिवार के लिए भी परिवार अनुसूची में प्रविष्टियाँ की गई।

(4) जाँच कार्य (Revisional Round)—प्रगणन कार्य के बाद 1 मार्च से 5 मार्च 1991 तक—कुछ बड़े राज्यों में 10 मार्च तक—सभी परिवारों की जाँच का कार्य सम्पन्न किया गया। इस अवधि में प्रगणक अपने ब्लाक के सभी परिवारों में जाँच के लिए दुबारा गए और यह पता लगाया कि—

(i) क्या उस परिवार की गणना के बाद और 1 मार्च 1991 के सूर्योदय से पहले वहाँ किसी नये बच्चे का जन्म तो नहीं हुआ या किसी व्यक्ति की मृत्यु तो नहीं हुई ?

(ii) क्या उस परिवार में कोई ऐसा नया व्यक्ति तो नहीं आया जो प्रगणन-काल (9–28 फरवरी 1991) के दौरान अपने सामान्य निवास स्थान में न रहा हो ?

(iii) क्या कोई ऐसा पूरा परिवार तो ब्लॉक में नहीं आ गया जिसकी पहले कहीं भी गणना न की गई हो ?

परिवार अनुसूची में नए जन्मों के लिए नई प्रविष्टियों और मृतकों के लिए निरस्त की गई प्रविष्टियों के अनुरूप संशोधन करके योग में तदनुसार परिवर्तन किये गए।

जाँच कार्य सम्पन्न होने के बाद प्रगणकों द्वारा अपने पर्यवेक्षक को निम्न कागजात सौंप दिये गए—

> 'नजरी नक्शा, खाका, परिवार अनुसूचियों की भरी हुई पुस्तिकाएँ, भरी हुई व्यक्तिगत पर्चियों के सारे पैड, भरी हुई संक्षिप्त मकान सूची, प्रगणक की वर्किंग शीट, प्रगणक-सार, स्नातकोत्तर डिग्रीधारी व तकनीकी कर्मिकों की अनुसूचियाँ, तथा बिना भरी परिवार अनुसूचियों की पुस्तिकाएँ, व्यक्तिगत पर्चियों के खाली पैड, अन्य खाली फार्म आदि।'

(5) सारणीयन (Tabulation)—जनगणना से सम्बिन्धित क्षेत्र-कार्य समाप्त होने के बाद बृहत् स्तर पर समंकों के सारणीयन का कार्य आरम्भ कर दिया गया। पूरे देश में 163 क्षेत्रीय सारणीयन केन्द्रों में जनगणना-पर्चियो व अनुसूचियों का समंक-विधियन किया गया। इन केन्द्रों में लगभग 44,500 कर्मचारियों ने हस्तचालित सारणीयन कार्य (manual tabulation work) द्वारा शत प्रतिशत आधार पर मौलिक जनगणना समंको का विश्लेषण आरम्भ कर दिया। साथ ही साथ अभिकलित्रीय सारणीकरण (computerised tabulation) के प्रथम चरण में छोटे राज्यों की सभी व्यक्तिगत पर्चियों का तथा बड़े राज्यों की 10 प्रतिशत प्रतिदर्श पर्चियों का विस्तृत परीक्षण और विश्लेषण भी सम्पन्न किया गया। इसके बाद दूसरे और तीसरे चरणों में एक सुनिश्चित योजना के तहत सभी व्यक्तिगत पर्चियों का सारणीयन किया गया। वर्ष 1995 के अन्त तक जनगणना 1991 के सभी जनसंख्या सारणी प्रकाशित होने की सम्भावना है।

विकेन्द्रित समंक विधियन के लिए प्रमुख अभिकलित्र (main-frame computer) के साथ-साथ सूक्ष्म-अभिकलित्र (micro-computer) का भी प्रयोग किया जा रहा है। 1991 जनगणना की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि विभिन्न प्रकाशनों के अतिरिक्त समंक प्रयोक्ताओं को पहली बार सारणियो के फ्लापी-चक्र (floppy discs) भी उपलब्ध होंगे जिससे जनगणना-समंकों की उपादेयता बहुत बढ जायेगी।

1991 की जनगणना में होने वाली व्याप्ति और विषय-सामग्री सम्बन्धी त्रुटियों (coverage and content errors) का पता लगाने के लिए प्रगणनोत्तर परीक्षण (Post Enumeration Checks—P.E.C.) तथा जनगणना मूल्यांकन अध्ययन (Census Evaluation Study—C.E.S.) आयोजित किये गए जिनसे जनगणना परिणामों का सही मूल्याकन उपलब्ध हो सके।

1991 की जनगणना की विशेषताएँ (Special Features of Census, 1991)—भारतीय जनगणना के 120 वर्षों के इतिहास में 1991 की जनगणना का विशिष्ट स्थान है। अब तक की सभी जनगणनाओं में इसे निस्संदेह सर्वश्रेष्ठ कहा जा सकता है। पिछली जनगणनाओं की तुलना में 1991 की जनगणना में अनेक नवीन सुधारों का समावेश किया गया है। संक्षेप में, 1991 की भारतीय जनगणना के निम्नलिखित विशेष लक्षण हैं—

(1) प्रभावी प्रशासन तन्त्र (Effective Administrative Machinery)—जनगणना जैसे समंक-संग्रहण के वृहत् स्तर का अभियान सुव्यवस्थित ढंग से आयोजित, क्रियान्वित और नियन्त्रित करने के लिए एक सशक्त, कुशल और प्रभावी प्रशासन तन्त्र का होना परमावश्यक है। 1991 की जनगणना का प्रशासनिक पदानुक्रम पिछली सभी जनगणनाओं से श्रेष्ठ रहा है। केन्द्र और राज्य/संघशासित स्तर पर स्थायी शीर्षस्थ अधिकारी नियुक्त हैं जिन्होंने इस जनगणना का आयोजन, क्रियान्वयन और पर्यवेक्षण अत्यन्त कुशलता से सम्पन्न किया। राज्य में महापालिका और जनपद स्तर पर अलग-अलग अधिकारी जनगणना कार्य की देखभाल करते हैं। ग्रामीण और नगरीय इलाकों के लिए पृथक् प्रशासनिक व्यवस्था है। मूल प्रगणन कार्य खण्ड प्रगणकों और पर्यवेक्षकों द्वारा पूरा किया गया जिनको विशेषज्ञों की देख-रेख में जनगणना कार्य का सघन प्रशिक्षण दिया गया था। इस प्रकार प्रभावी प्रशासनतन्त्र और प्रगणकों का उद्देश्यपूर्ण गहन प्रशिक्षण इस जनगणना की सफलता में बहुत सहायक रहे हैं।

(2) मकान सूचीकरण के समय व्यापक व शीघ्र सूचना प्राप्ति (Canvassing of detailed Information during Houselisting operations)—1991 की जनगणना का प्रथम चरण—मकान सूचीकरण—मूल प्रगणन कार्य से लगभग 8–10 महीने पूर्व सम्पन्न किया गया जिसके दौरान मकानों, सुविधाओं और उपक्रमों के क्रियाकलापों के सम्बन्ध में ऐसे विस्तृत प्रश्न पूछे गये जो 1981 की जनगणना में प्रगणन अवधि में पूछे गये थे। इस प्रकार 1991 की जनगणना में मकानों और उद्यमों के बारे में मूल प्रगणन कार्य से 8–10 महीने पहले ही व्यापक सूचना प्राप्त कर ली गई जिससे उनका सारणीयन गत जनगणना की तुलना में काफी पहले पूरा कर लिया गया।

(3) मकान सूची में नवीन प्रश्न (New Queries in the Houselist)—1991 की जनगणना में मकान सूचीकरण के समय निम्न दो विषयों पर नये प्रश्न पूछकर पहली बार सूचना एकत्र की गई—

(i) परिवार द्वारा खाना बनाने में उपयोग में लाया जाने वाला ईंधन जैसे लकड़ी, कोयला, गैस, बिजली, मिट्टी का तेल आदि। इससे ईंधन-उपभोग स्वरूपों (fuel consumption patterns) का पर्यावरण और वन संसाधन पर प्रभाव ज्ञात करने में सहायता मिली तथा यह भी पता चला कि घरेलू खाना पकाने में किस सीमा तक वैकल्पिक ऊर्जा का प्रयोग हो रहा है।

(ii) ग्रामीण इलाकों में भी परिवारों को उपलब्ध शौचालय सुविधाएँ। 1981 की जनगणना में केवल नगरीय इलाकों के परिवारों में शौचालय सुविधा की उपलब्धता के बारे में सूचना प्राप्त की गई थी।

(4) व्यक्तिगत पर्चों में नया प्रश्न भूतपूर्व सैनिकों के बारे में (New Question in Individual Slip on Ex-servicemen)—1991 की [illegible] में प्रयुक्त व्यक्तिगत पर्चों में एक नया प्रश्न (17 [illegible] व 17 ग) [illegible] सैनिकों और [illegible] /गैर पेंशनभोगी स्थिति के बारे में पूछा गया।

Unemployed Persons)—1991 की जनगणना में प्रश्न 16 दो भागों में पूछा गया—16 क तथा 16 ख। 16 ख नया भाग था जिसके अनुसार काम की खोज मे/काम करने के इच्छुक व्यक्तियों से यह सूचना प्राप्त की गई कि उन्होंने पहले कभी काम किया है या नही। यह प्रश्न सीमान्तिक कर्मिकों से नही पूछा गया। प्रश्न 16 ख के उत्तर में उपलब्ध सूचना से श्रम-शक्ति में नये प्रवेशार्थियों की संख्या ज्ञात करने में सहायता मिली।

(7) फार्म पर या घरेलू उद्यम में अवैतनिक कर्मिकों पर अधिक बल (Greater emphasis on Unpaid workers on Farm or in Domestic enterprise)—यद्यपि 'कार्य' से सम्बन्धित आर्थिक प्रश्नों के सम्बन्ध में संकल्पनाएँ पूर्ववत् रहीं तथापि 1991 जनगणना में फार्म पर या घरेलू उद्यम में अवैतनिक आधार पर कार्यरत स्त्रियों और बच्चों के गत वर्ष किसी समय काम करने के सम्बन्ध में अधिक विस्तार से प्रश्न पूछे गये। प्रगणकों को अनुदेश देते समय तथा उनके प्रशिक्षण के समय स्त्रियों के अवैतनिक घरेलू कार्य के बारे में विस्तृत सूचना उपलब्ध करने की आवश्यकता पर अधिक बल दिया गया।

(8) साक्षरता दर के परिगणन में परिवर्तन (Change in the computation of Literacy Rate)—1991 और 1981 जनगणनाओं में 'साक्षर' की परिभाषा एक समान रखी गई परन्तु साक्षरता दर की गणना में एक महत्वपूर्ण परिवर्तन यह किया गया कि 0–6 वर्ष की आयु के बच्चों को निरक्षर मानते हुए इस आयु वर्ग की-जनसंख्या का समावेश नही किया गया। इससे पहले 1981 की जनगणना तक 0–4 वर्ष के आयु-वर्ग को निरक्षर मानकर साक्षरता दर की गणना में शामिल नही किया जाता था। इस परिवर्तन के कारण 1981 और इससे पूर्व की जनगणनाओं में साक्षरता दर की गणना में संशोधन करना आवश्यक हो गया।

(9) आर्थिक क्रियाकलापों के विस्तृत सारणीयन हेतु सभी व्यक्तिगत पर्चियों का समंक विधियन (Processing of all Individual Slips for Detailed Tabulation of Economic Activities)—1991 जनगणना मे आर्थिक गतिविधि पर अधिक विस्तृत सारणियाँ उपलब्ध करने के लिए मुख्य काम करने वालों की सभी व्यक्तिगत पर्चियो का शत-प्रतिशत आधार पर समंक विधियन किया जा रहा है। 1981 की जनगणना में उक्त सारणीयन व्यक्तिगत पर्चियो के 20 प्रतिशत प्रतिदर्श के आधार पर किया गया। स्पष्ट है कि 1991 जनगणना के आर्थिक कार्य सम्बन्धी परिणाम अधिक व्यापक और विश्वसनीय होगे।

(10) प्रगणनोत्तर जांच सर्वेक्षणों और जनगणना मूल्यांकन अध्ययनों का आयोजन (Conduct of Post-Enumeration Check Surveys and Census Evaluation Studies)—1991 की जनगणना मे होने वाली व्याप्ति (coverage) व विषय-सामग्री (content) से सम्बन्धित अशुद्धियों का पता लगाने के लिए प्रगणनोत्तर जाँच सर्वेक्षण (P.E.C. Surveys) तथा जनगणना मूल्यांकन अध्ययन (Census Evaluation Studies—C.E.S.) आयोजित किये गये है। ये उच्च कोटि के नियन्त्रित तकनीकी सर्वेक्षण हैं जिनसे जनगणना के परिणामों का सही मूल्यांकन होने की सम्भावना है।

(11) शीघ्र हस्त-चालित सारणीयन तथा अभिकलित्रीय समंक विधियन (Quick Manual Tabulation and Computerised Data Processing)—एक सुनियोजित व्यवस्था के अन्तर्गत 1991 की जनगणना के मूल समंकों का विभिन्न क्षेत्रीय सारणीयन केन्द्रों मे शत-प्रतिशत आधार पर त्वरित हस्त-चालित सारणीयन किया जा रहा है। साथ ही साथ बड़े राज्यों की व्यक्तिगत पर्चियो का 10% प्रतिदर्श आधार पर तथा छोटे राज्यों का शत-प्रतिशत आधार पर तीन चरणो में विकेन्द्रित समंक-विधियन व सारणीयन सूक्ष्म-अभिकलित्रो (Micro-Computers) पर सम्पन्न किया जा रहा है।

परिवार अनुसूचियों के विस्तृत विधियन के आधार पर इस जनगणना में पहली बार 'प्राथमिक जनगणना-सार' (Primary Census Abstracts—P. C. A.) नामक प्राथमिक सारणियाँ तथा मातृभाषा और धर्म के बारे में विस्तृत सारणियाँ ग्रामीण स्तर पर तथा नगर के वार्ड-स्तर पर बहुत कम समय में उपलब्ध की जा रही हैं।

1991 जनगणना के अन्तिम परिणामों की मूल जनगणना सारणियाँ 1992 के अन्त तक तैयार हो जाएँगी तथा अभिकलित्रीय सारणीयन के प्रथम, द्वितीय व तृतीय चरणों में तैयार की गई विस्तृत सारणियाँ क्रमशः वर्ष 1993, 1994 और 1995 के अन्त तक उपलब्ध हो जाएँगी। इस प्रकार शीघ्र हस्त-सारणीयन और अभिकलित्रीय समंक विधियन द्वारा 1991 जनगणना के अन्तिम परिणाम पूर्व जनगणनाओं के परिणामों की तुलना में कम समय में ही उपलब्ध हो जाएँगे।

(12) जनगणना-सारणियों की फ्लॉपी चक्र के रूप में भी उपलब्धता (Availability of *Census Tables in the form of Floppy Discs* also)—जनगणना के परिणामों के सूक्ष्म अभिकलित्रों द्वारा समंक विधियन से यह लाभ होगा कि जनगणना-सारणी, कम्प्यूटर में प्रयोग होने वाले फ्लॉपी चक्रों एवं चक्रिकाओं (floppy discs and diskettes) के रूप में भी उपलब्ध होने लगेंगी। समंक-प्रयोक्ताओं को इससे बहुत लाभ होगा।

1991 जनगणना से प्राप्त अनन्तिम परिणाम
(Provisional Results of 1991 Census)

1991 की भारतीय जनगणना के लिए प्रगणन कार्य 9 से 28 फरवरी तक किया गया; 1 मार्च का सूर्योदय सन्दर्भ-काल रखा गया और जाँच कार्य 1 मार्च से 5 मार्च तक पूरा किया गया। प्रगणकों की वर्किंग शीट और प्रगणक सार के शीघ्र हस्त-सारणीयन के परिणामस्वरूप जनगणना के प्रथम अनन्तिम परिणाम भारत के महारजिस्ट्रार एवं जनगणना आयुक्त श्री ए० आर० नन्दा द्वारा 25 मार्च, 1991 को एक प्रकाशन* निर्गत करके प्रसारित किये गये। जनगणना पूर्ण होने के तीन सप्ताहों के भीतर ही अनन्तिम जनसंख्या योग तथा अन्य महत्वपूर्ण जनसंख्या समंकों का प्रकाशन निस्सन्देह-एक सराहनीय कार्य है। हस्त-सारणीयन और कम्प्यूटर समंक विधियन क्रिया सम्पन्न होने पर 1991 जनगणना के अन्तिम परिणाम वर्ष 1992 से प्रसारित होने आरम्भ हो जाएँगे।

जनगणना आयुक्त द्वारा निर्गमित अनन्तिम जनगणना परिणामों के आधार पर भारत की 1991 की जनसंख्या से सम्बन्धित निम्नलिखित तथ्य विशेष रूप से उल्लेखनीय हैं—

(i) कुल जनसंख्या (Total Population)—जनगणना 1991 की सन्दर्भ-तिथि 1 मार्च 1991 को भारत की कुल संख्या 84,39,30,861 अर्थात् 84·39 करोड़ थी जो समस्त विश्व की जनसंख्या का 16 प्रतिशत है। जनसंख्या के मामलों में भारत, चीन (जनसंख्या 116 करोड़) के बाद विश्व में दूसरे स्थान पर आता है। विश्व के कुल भू-क्षेत्र का केवल 2·4 प्रतिशत भाग ही भारत के हिस्से में आता है।

1981 में भारत की कुल जनसंख्या 68,33,29,097 अर्थात् 68·33 करोड़ थी। 1981 में असम राज्य में जनगणना नहीं की गई थी। उसका अनुमान कुल जनसंख्या में शामिल किया गया था। 1971 की जनगणना के अन्तिम परिणामों और 1991 के अनन्तिम समंकों का समावेश करके 1981 में असम राज्य की जनसंख्या का आन्तरगणन किया गया है जिसके फलस्वरूप कुल अनन्तिम जनसंख्या 68,51,84,692 में तदनुसार संशोधन करके कुल योग 68,33,29,097 आगणित किया गया है।

(ii) दशकीय वृद्धि दर (Decadal Growth Rate)—1981–91 दशक में जनसंख्या वृद्धि की दर 23·50% रही जबकि 1971–81 और 1961–71 में दसवर्षीय वृद्धि दर क्रमशः 24·66% और 24·80% थी। इस प्रकार, पिछले तीन दशकों में जनसंख्या वृद्धि दर में कुछ कमी आई है। परन्तु पिछले दशक 1981–91 में वृद्धि दर कुछ कम होने के बावजूद भी निरपेक्ष रूप में भारत की जनसंख्या में 16,06,01,764 अर्थात् 16·06 करोड़ की वृद्धि हुई है जो आस्ट्रेलिया की आबादी का दस गुना है।

राज्यानुसार विश्लेषण से यह ज्ञात होता है कि नागालैण्ड (56·86% सर्वाधिक), राजस्थान,

* *Census of India 1991, Series 1—India, Paper 1 of 1991, Provisional Population Totals.*

मध्यप्रदेश, हरियाणा, महाराष्ट्र, उत्तरप्रदेश (25·16%), पश्चिमी बंगाल, आन्ध्र प्रदेश, अरुणाचल प्रदेश, असम, मणिपुर, मेघालय, मिजोरम, सिक्किम और त्रिपुरा राज्यों में 1981–91 दशक में जनसंख्या वृद्धि दर पूरे देश की वृद्धि दर (23·50%) से अधिक रही जबकि केरल (न्यूनतम 13·98%), तमिलनाडु, हिमाचल प्रदेश, बिहार, उड़ीसा, पंजाब, कर्नाटक, गोआ और गुजरात में यह दर राष्ट्रीय औसत से कम रही।

(iii) स्त्री-पुरुष अनुपात (Sex Ratio)—1991 की जनगणना के अनुसार भारत में पुरुषों की संख्या 43,75,97,929 अर्थात् 43·76 करोड़ और स्त्रियों की संख्या 40,63,32,932 अर्थात् 40·63 करोड़ थी। इस प्रकार देश में 1991 में स्त्री-पुरुष अनुपात अर्थात् स्त्रियों की संख्या प्रति हजार पुरुष 929 हो गई जो 1981 में स्त्री-पुरुष अनुपात (934) से 5 कम है। बीसवीं शताब्दी की प्रत्येक जनगणना में भारत में स्त्री-पुरुष अनुपात निरन्तर घटता ही जा रहा है जिससे यह ज्ञात होता कि देश मे स्त्रियों की स्थिति अच्छी नहीं है। 1991 की जनगणना के अनन्तिम समको के अनुसार स्त्री-पुरुष अनुपात मे राज्यानुसार बहुत अन्तर पाया जाता है। उदाहरणार्थ, केरल (1040 सर्वाधिक), हिमाचल प्रदेश (996), आंध्र प्रदेश, गोआ, गुजरात, कर्नाटक, मध्यप्रदेश, महाराष्ट्र, मणिपुर, मेघालय, उडीसा, तमिलनाडु और त्रिपुरा राज्यों में तथा संघशासित क्षेत्र पांडिचेरी, दादरा, नागर हवेली, दमन दीव व लक्षद्वीप में यह अनुपात राष्ट्रीय स्त्री-पुरुष अनुपात से अधिक है जबकि अन्य राज्यों व संघ शासित क्षेत्रों मे यह राष्ट्रीय औसत से कम है। सबसे कम स्त्री-पुरुष अनुपात चण्डीगढ़ (793) और अरुणाचल प्रदेश (861) में है।

(iv) साक्षरता (Literacy)—1991 में देश मे साक्षरता की दर बढ़कर 52·11% (पुरुषों में 63·86% और स्त्रियों में 39·42%) हो गई जबकि 1981 में यह 43·56% थी। यह बात विशेष रूप से उल्लेखनीय है कि 1991 की जनगणना के लिए साक्षरता दर की गणना 7 वर्ष और उससे अधिक की जनसंख्या के आधार पर की गई अर्थात् 0–6 वर्ष के आयु वर्ग को शामिल नही किया गया जबकि इससे पूर्व की जनगणनाओं में 5 वर्ष या उससे अधिक आयु की जनसख्या को आधार माना जाता था अर्थात् 0–4 वर्ष के आयु वर्ग को सम्मिलित नहीं किया जाता था।

निम्न सारणी में 1951–1991 मे भारत में कुल साक्षरता दर व पुरुष और स्त्री जनसंख्या में अलग-अलग साक्षरता दरें दी गई हैं। 1951, 1961 और 1971 की साक्षरता दर 5 वर्ष या अधिक आयु-वर्गों की जनसंख्या पर आधारित हैं जबकि 1981 और 1991 के लिए ये दरें 7 वर्ष या अधिक आयु वर्गों की जनसंख्या के आधार पर आगणित की गई हैं। 1981 के लिए 5 वर्ष या अधिक के लिए साक्षरता दरें कोष्ठक में दी गई हैं—

साक्षरता प्रतिशत—भारत 1951–1991
(Literacy Percentage—India 1951–1991)

जनगणना वर्ष (Census Year)	व्यक्ति (Persons)	पुरुष (Males)	स्त्री (Females)
1951	18 33	27·16	8·86
1961	28·31	40·40	15·34
1971	34·45	45·95	21·97
1981	43·56	56·37	29·75
	(41·42)	(53 45)	(28·46)
1991	52·11	68·86	39·42

देश के 16 राज्यों और 6 संघशासित क्षेत्रों में कुल साक्षरता दर राष्ट्रीय औसत साक्षरता दर (52·11%) से अधिक है, शेष 9 राज्यों और दादरा नागर हवेली में यह राष्ट्रीय औसत दर से कम है। सबसे अधिक साक्षरता दर केरल में 90·59% है, दूसरे स्थान पर मिजोरम (81·23%) है। सबसे कम साक्षरता प्रतिशत बिहार (38·54%) में है, राजस्थान में यह दर 38·81% है। स्त्रियों में निम्नतम साक्षरता दर राजस्थान में (20·84%) है।

(v) जनसंख्या घनत्व (Density of Population)—1991 की जनगणना के अनुसार देश में प्रति वर्ग किलोमीटर क्षेत्र मे 267 व्यक्ति है जबकि 1981 में 216 व्यक्ति थे। शताब्दी के आरम्भ (1901) मे जनसंख्या घनत्व मात्र 77 व्यक्ति प्रति वर्ग किमी० था। 9 राज्यों और 6 संघ शासित क्षेत्रों का जनसंख्या घनत्व 1991 में सम्पूर्ण देश के घनत्व से अधिक था जबकि 16 राज्यों और एक संघ शासित क्षेत्र (अण्डमान निकोबार) में यह राष्ट्रीय औसत से कम था। 1991 में दिल्ली की जनसंख्या 83·7 लाख है और घनत्व सर्वाधिक 6319 व्यक्ति प्रति वर्ग किलोमीटर है। राज्यों में पश्चिमी बंगाल में घनत्व सर्वाधिक 766, उसके बाद केरल, बिहार, उत्तरप्रदेश में क्रमशः 747, 497 और 471 व्यक्ति प्रति वर्ग किलोमीटर है। मध्य प्रदेश और राजस्थान में जनसंख्या घनत्व क्रमशः 149 और 128 है। अरुणाचल प्रदेश में घनत्व न्यूनतम 10 व्यक्ति प्रति वर्ग किलोमीटर है।

(vi) 1991 में *जनसंख्या आकार के अनुसार राज्यों, संघ-शासित क्षेत्रों का कोटिक्रम* (Ranking of States/Union Territories by Population Size, 1991)—1991 की जनगणना के अनुसार जनसंख्या आकार के क्रम में विभिन्न राज्यों और संघ-शासित क्षेत्रों की स्थिति देखने से यह स्पष्ट होता है कि राज्यों में सबसे अधिक आबादी उत्तरप्रदेश (16·44%) मे है और सबसे कम सिक्किम (0·05%) में है। संघ शासित क्षेत्रों में दिल्ली सबसे अधिक (1·11%) और लक्षद्वीप सबसे कम (0·01%) जनसंख्या वाला क्षेत्र है।

(vii) सर्वाधिक जनसंख्या वाले महानगर व जनपद (Heavily Populated Metropolitan Towns and Districts)—देश के चार महानगरों की जनसंख्या 1991 की जनगणना के अनुसार इस प्रकार थी—

महानगर (Metropolis) :	बम्बई (Bombay)	कलकत्ता (Calcutta)	दिल्ली (Delhi)	मद्रास (Madras)
जनसंख्या (करोड़) (Population in Crores) :	1·257	1·086	0·838	0·536

देश में लगभग 460 जिले हैं। इनमें से सर्वाधिक जनसंख्या वाले जिलों में हैदराबाद, चण्डीगढ़, माही, हावड़ा और बंगलौर प्रमुख है।

(viii) जन्म दर व मृत्यु दर (Birth Rate and Death Rate)—1986–91 की पंचवर्षीय अवधि में भारत में जन्म दर 30·9 प्रति हजार और मृत्यु दर 10·8 प्रति हजार थी। जनगणना के अनन्तिम समंकों और प्रतिदर्श पंजीकरण व्यवस्था (Sample Registration System—S.R.S.) से प्राप्त जीवन-मृत्यु समंकों के विश्लेषण के आधार पर 1991–96 के लिए जन्म दर और मृत्यु दर क्रमशः 27·5 और 9·4 प्रति हजार पूर्वानुमानित की गई हैं।

1991 में जन्म पर जीवन प्रत्याशा (expection of life at birth) 60·1 वर्ष अनुमानित है जबकि 1981 में यह 54·4 वर्ष थी।

1992 के अन्त से 1991 की जनगणना के अन्तिम परिणाम प्रकाशित किये जाने लगेंगे और 1995 तक सभी जनगणना सारणियों के प्रकाशित होने की संभावना है।

भारतीय जनगणना के दोष (Defects of Indian Census)—1872 से 1991 तक एक सौ बीस साल की अवधि मे भारतीय जनगणना की क्रियाविधि एवं उपलब्ध की जाने वाली सूचना की व्यापकता में अनेक सुधार हुए है परन्तु फिर भी भारतीय जनगणना मे निम्नलिखित दोष पाये जाते है—

(1) तुलनीयता की कमी (Lack of Comparability)—पिछली भारतीय जनगणनाओं में प्रयुक्त पारिभाषिक शब्दों, भौगोलिक व्याप्ति (coverage) तथा समंकों के वर्गीकरण एवं सारणीयन के आधार भिन्न-भिन्न होने के कारण उनमें तुलना-योग्यता की कमी रही है। पिछली पाँच जनगणनाओं में भवन, जनगणना मकान, परिवार आदि शब्दों के विभिन्न अर्थ लगाये गये। 1951 की जनगणना में जम्मू-कश्मीर को शामिल नहीं किया गया था जबकि 1961 में इस

राज्य के अतिरिक्त पांडिचेरी, गोआ, दामन, दीव, दादरा, नागर हवेली आदि सभी क्षेत्र सम्मिलित थे। 1981 में प्रमुख फ्रेम अभिकलित्रों (main frame computers) तथा 1991 में सूक्ष्म अभिकलित्रों (micro computers) का प्रयोग बढ़ाया गया है। 1991 में जनगणना सूचना की फ्लापी चक्रिकाएँ (floppy discs) भी तैयार की गई है।

प्रत्येक जनगणना में पूछे गये प्रश्नों में भी परिवर्तन किये जाते रहे हैं। उदाहरणार्थ, 1991 जनगणना में 23 प्रश्नों वाली व्यक्तिगत पर्ची का प्रयोग किया गया जिसमें 16+6=22 प्रश्न 1981 में अधियाचित दोनों प्रकार की पर्चियों के थे और एक प्रश्न (17) सर्वथा नया प्रश्न था। 1981 में व्यक्तिगत प्रगणन पर्ची दो प्रकार की थी—एक, 16 प्रश्नों वाली सभी के लिए और दो, 20% प्रतिदर्श क्षेत्र में अधियाचना हेतु प्रयोग की गई थी, जबकि 1971 में 17 प्रश्न पर्ची में शामिल किये गये थे और 1961 में केवल 13 प्रश्न पूछे गये थे। इस प्रकार अधियाचित सूचना में भी पिछली जनगणनाओं में काफी अन्तर था। 1991 की जनगणना में साक्षरता दर का आगणन करने में 0–6 वर्ष की आयु के बच्चों को निरक्षर मानकर छोड़ दिया गया जबकि पूर्व की जनगणनाओं में 0–4 आयु वर्ग की जनसंख्या को शामिल नहीं किया जाता था।

(2) पेशे के अनुसार वर्गीकरण में एकरूपता का अभाव (Lack of Uniformity in Occupational Classification)—विभिन्न जनगणनाओं में पेशे के अनुसार अर्थात् व्यावसायिक वर्गीकरण का आधार, वर्गों की संख्या व उनकी व्याख्या आदि में एकरूपता की सर्वथा कमी रही है। स्वतन्त्रता-प्राप्ति के बाद की जनगणनाओं में भी इस सम्बन्ध में असमानता रही है। 1951 में आय या कमाई के आधार पर तीन वर्ग किये गये थे जबकि 1961 में कार्य के आधार पर जनसंख्या को दो प्रमुख वर्गों और फिर प्रत्येक को अनेक उपवर्गों में बाँटा गया था। 1971 मे प्रमुख गतिविधि व अन्य या अनुपूरक कार्य के रूप में सूचना एकत्र की गई थी। 1981 और 1991 की जनगणनाओं में काम की खोज करने वालों अथवा काम के इच्छुक व्यक्तियों तथा गौण व सीमान्त कार्य करने वालों के सम्बन्ध मे भी सूचना एकत्र की गई जिससे कुल कार्यशील जनसंख्या का सही अनुमान प्राप्त किया जा सके तथा व्यापक बेरोजगारी की भी जानकारी प्राप्त हो सके। 1991 की जनगणना में बेरोजगार व्यक्तियों से यह भी पूछा गया कि उन्होंने पहले कभी काम किया था। घरेलू कार्य या पारिवारिक उद्योग में लगी महिलाओं के अवैतनिक कार्य सम्बन्धी सूचना पर अधिक बल दिया गया। व्यावसायिक वर्गीकरण और कार्यशील जनसंख्या की अवधारणाओं को बार-बार बदलना उचित नहीं है।

(3) सूचना की अशुद्धि (Inaccuracy of Information)—जनगणना-त्रुटियाँ दो प्रकार की होती हैं—व्याप्ति सम्बन्धी (coverage errors) तथा विषय सामग्री सम्बन्धी त्रुटियाँ (content errors)। भारतीय जनगणनाओं में दोनों प्रकार की त्रुटियाँ होती हैं। सामान्यतः व्यक्तियों की अज्ञानता, अभिनति, रूढ़िवादिता तथा मनोवैज्ञानिक धारणाओं के कारण आयु, वैवाहिक स्तर व धर्म आदि से सम्बन्धित समंकों में अनेक त्रुटियाँ पायी जाती हैं। जनगणना समंकों की प्रतिदर्श जाँच से यह अनुमान लगाया गया कि 1951 में अल्प-प्रगणन विभ्रम 11 प्रति हजार था और 1961 में 7 प्रति हजार। 1971 में अल्प-गणन 1·67 प्रतिशत था और 1981 में जनसंख्या-अल्प-प्रगणन का अनुपात 1·8 प्रतिशत था। प्रसिद्ध जनांकिकी-विशेषज्ञ, प्रो० आशीष बोस के अनुसार, 1991 की जनगणना में अल्प-प्रगणन का अनुपात 2 प्रतिशत से अधिक होने की सम्भावना है।

सुधार के लिए सुझाव (Suggestions for Improvement)—जनगणना अधिनियम पास होने के पश्चात् 1951, 1961, 1971, 1981 और 1991 की जनगणनाओं में प्रशासनिक व्यवस्था, अधियाचित सूचना की व्यापकता व क्रियाविधि के सम्बन्ध में अनेक महत्वपूर्ण सुधार किये गये है जिनके कारण जनसंख्या-समंकों की परिशुद्धता में अत्यधिक वृद्धि हुई है। पर[illegible] इक्कीसवीं शताब्दी में आयोजित की जाने वाली भारतीय जनगणनाओं में निम्न बातों [illegible] सावधानी अपेक्षित है—

(i) प्रगणकों एवं गणना-निरीक्षकों की नियुक्ति और प्रशिक्षण पर विशेष

जाना चाहिए। योग्य व अनुभवी प्रगणकों को एक सघन-प्रशिक्षण-परियोजना के अन्तर्गत प्रशिक्षित करना चाहिए। साथ ही पारिश्रमिक में यथेष्ट वृद्धि करना भी आवश्यक है। जनगणना-कार्य में भाग लेने के लिए प्रगणकों को कम से कम एक माह का अतिरिक्त वेतन देना उचित रहेगा;

(ii) अन्तर्राष्ट्रीय तुलनीयता लाने के लिए मानक व्यावसायिक/औद्योगिक वर्गीकरण (*International Standard Industrial Classification*) को कुछ संशोधनों के साथ अपनाया जाना चाहिए;

(iii) आगामी जनगणनाओं में पूछे जाने वाले प्रश्नों का कई क्षेत्रों में पूर्व-परीक्षण (pre-testing) किया जाना चाहिए जिससे सूचकों की प्रतिक्रिया ज्ञात हो सके। प्रश्न सरल और स्पष्ट होने चाहिएँ तथा उनकी संख्या 20 से अधिक नहीं होनी चाहिए;

(iv) निरन्तर प्रचार-कार्य द्वारा जन-सम्पर्क बनाये रखना भी आवश्यक है। जनगणना से कुछ समय पूर्व जनता के सुझाव आमन्त्रित किये जाने चाहिएँ। प्रगणन-कार्य में अर्द्ध-सरकारी तथा गैर-सरकारी संस्थाओं का भी सहयोग प्राप्त करना चाहिए;

(v) परिवार-नियोजन कार्यक्रम की प्रगति का मूल्यांकन करने के लिए उर्वरता व प्रजनन-सम्बन्धी विस्तृत सूचना उपलब्ध करना भी परमावश्यक है;

(vi) पर्दानशीन स्त्रियों से प्रश्न पूछने के लिए अधिकाधिक स्त्री प्रगणकों की नियुक्ति की जानी चाहिए।

राष्ट्रीय आय समंक
(National Income Statistics)

किसी देश की राष्ट्रीय आय उसकी आर्थिक स्थिति का महत्वपूर्ण मापदण्ड है। राष्ट्रीय आय समंकों से अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के योगदान और सापेक्ष महत्व का आभास होता है; जीवन स्तर का तुलनात्मक विवेचन हो जाता है तथा विकास योजनाओं की प्रगति का मूल्यांकन होता है। सरकार को कर, आय वितरण व सकेन्द्रण, आर्थिक नियोजन, सामाजिक सुरक्षा व रोजगार आदि से सम्बन्धित नीति-निर्धारण में सहायता मिलती है तथा भावी प्रवृत्तियों का संकेत मिलता है। राष्ट्रीय आय समंकों से समाज के विभिन्न वर्गों में आय के वितरण की जानकारी हो जाती है और आर्थिक समस्याओं को दूर करने के उपाय किये जा सकते हैं। वस्तुतः राष्ट्रीय आय के तुलनात्मक अध्ययन से किसी देश की समृद्धि की तुलनात्मक जानकारी प्राप्त हो जाती है।

राष्ट्रीय आय का अर्थ (Meaning of National Income)—नोबेल पुरस्कार विजेता प्रोफेसर साइमन कुजनेट्स के शब्दों में '*राष्ट्रीय आय को एक राष्ट्र के नागरिकों द्वारा उत्पादित वस्तुओं और सेवाओं (आर्थिक वस्तुएँ) के शुद्ध योग के रूप में सामान्यतया परिमापित किया जा सकता है।*' बाउले रॉबर्टसन समिति (1934) के अनुसार, '*राष्ट्रीय आय किसी देश के निवासियों की किसी वर्ष में प्राप्त होने वाली वस्तुओं और सेवाओं का मौद्रिक माप है जिसमें उनकी व्यक्तिगत तथा सामूहिक सम्पत्ति में होने वाली शुद्ध वृद्धि को जोड़ना और शुद्ध कमी को घटाना आवश्यक होता है।*' इस प्रकार, राष्ट्रीय आय की गणना के लिए उत्पादन के सभी साधनों की आय का योग इस प्रकार किया जाता है कि दोहरी गणना (double counting) न हो जाये तथा किसी साधन की आय न छूट जाये।

वास्तव में, मार्शल, पीगू, फिशर आदि प्रसिद्ध परम्परावादी अर्थशास्त्रियों ने विभिन्न दृष्टिकोणों से राष्ट्रीय आय की व्याख्या की है। उत्पादन दृष्टिकोण के अनुसार राष्ट्रीय आय शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद है जो एक निर्दिष्ट अवधि में आर्थिक क्रिया की सभी शाखाओं में उत्पादों व सेवाओं के शुद्ध मूल्य तथा विदेशों से प्राप्त शुद्ध आय का योग होता है। आय दृष्टिकोण के अन्तर्गत, आय एक अवधि में वितरणात्मक अंशों के रूप में विभाजित किये गये उत्पादन के घटकों के पारिश्रमिक-भुगतानों—मजदूरी, लगान, ब्याज व लाभ—का शुद्ध सामूहिक योग है। व्यय दृष्टिकोण के अनुसार राष्ट्रीय आय अन्तिम उपभोग पदार्थों व सेवाओं तथा आन्तरिक व विदेशी शुद्ध विनियोगों पर किया जाने वाला सकल व्यय है।

राष्ट्रीय आय लेखे (National Income Accounts)—भारत मे सत्तर के दशक (Seventies) में राष्ट्रीय लेखांकन प्रणाली (National Accounting System) का प्रयोग आरम्भ किया गया जिसके अन्तर्गत अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों मे उत्पादन और वितरण के सांख्यिकीय विवरण तैयार किये जाते हैं जिनसे अर्थव्यवस्था की कार्यप्रणाली की विस्तृत सूचना उपलब्ध हो जाती है। 'राष्ट्रीय आय लेखे' अथवा 'राष्ट्रीय लेखे' की अवधारणा 'राष्ट्रीय आय' से अधिक विस्तृत, व्यापक व विश्लेपणात्मक है। आजकल अधिकाश देशों में राष्ट्रीय लेखांकन प्रणाली का ही प्रयोग किया जाता है। 'राष्ट्रीय आय लेखे' अथवा सरल रूप में 'राष्ट्रीय लेखे' ऐसे सुव्यवस्थित सांख्यिकीय विवरणों के समूह को कहते हैं जो अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों—कृषि, उद्योग, परिवहन, व्यापार, अधिकोषण आदि—में विनिर्मित अन्तिम उत्पादो का कुल मूल्य अभिव्यक्त करते हैं और साथ ही साथ अर्थव्यवस्था के अन्तिम व्यय और विभिन्न वर्गों में साधन आय के वितरण के विस्तृत विवरण को भी प्रदर्शित करते हैं।[1] वस्तुओं और सेवाओं के उत्पादन से लेकर उनके अन्तिम निपटान तक अनेक लेन-देन सम्पन्न होते है। राष्ट्रीय लेखों से हमें संक्षेप में यह समझने में आसानी होती कि किस प्रकार ये विभिन्न लेन-देन आपस मे अन्तर-सम्बन्धित होते हैं। इन लेखों से हमें देश की अर्थव्यवस्था की कार्य-प्रणाली का आभास होता है।

भारत में राष्ट्रीय आय अनुमानित करने में प्रयुक्त रीति-विधान (Methodology used in India for Estimating National Income)—आजकल भारत मे राष्ट्रीय आय के अनुमान राष्ट्रीय आय समिति द्वारा सुझायी गई रीति के आधार पर ही तैयार किये जाते हैं। राष्ट्रीय आय का आकलन उत्पादन-संगणना तथा आय-संगणना विधियों के सम्मिश्रण द्वारा किया जाता है।

वस्तु उत्पन्न करने वाले क्षेत्रों (Commodity producing sectors)—कृषि, वनोद्योग, मछली उद्योग, खनन व उत्खनन, विनिर्माण कार्य, आवास गृहो का स्वामित्व और शीत भण्डार के लिए उत्पादन-संगणना रीति प्रयोग की जाती है। आय-सगणना विधि का प्रयोग निम्न क्षेत्रों से सकल/शुद्ध घरेलू उत्पाद का अनुमान लगाने के लिए किया जाता है—

बिजली, गैस व जलपूर्ति, यातायात, संदेशवाहन, भण्डारण, बैंकिंग व बीमा-व्यवसाय, स्थायी सम्पत्ति और व्यवसाय-सेवाएँ, लोक प्रशासन और प्रतिरक्षा, अन्य सेवाएँ और थोक तथा फुटकर व्यापार, होटल और जलपान गृह।

निर्माण-कार्य (Construction) के मूल्याकन मे तथा सकल स्थायी पूंजी-निर्माण (gross fixed capital formation) के अनुमान में वस्तु-प्रवाह और व्यय-संगणना विधि के सम्मिश्रण का प्रयोग किया जाता है।

सरकार के अन्तिम उपभोग-व्यय, वस्तुओं व सेवाओ के आयात-निर्यात और स्कन्ध मे वृद्धि का अनुमान प्रत्यक्ष व्यय-सगणना द्वारा तथा निजी अन्तिम उपभोग व्यय के अनुमान वस्तु-प्रवाह विधि द्वारा लगाये जाते हैं।

नियमित आधार पर राष्ट्रीय आय का अनुमान लगाने का कार्य केन्द्रीय सांख्यिकीय सगठन (C.S.O.) को हस्तान्तरित किया गया जिसके अधीन एक 'राष्ट्रीय आय प्रभाग' (National Income Division) का गठन किया गया है। आजकल इसके क्रियाकलापो में प्रसार होने के कारण इस प्रभाग का नाम 'राष्ट्रीय लेखा प्रभाग' (National Accounts Division—N.A.D.) रखा गया है।

राष्ट्रीय आय अनुमान शृंखला—केन्द्र साख्यिकीय संगठन (C.S.O.) ने फरवरी 1988 मे 1980–81 आधार वर्ष लेकर राष्ट्रीय आय लेखों की नवीन शृखला आरम्भ की है जो पिछली सभी शृंखलाओं से अधिक व्यापक, विश्लेषणात्मक और विश्वसनीय है। इस शृखला मे 1980–81

[1] 'The national income accounts or simply national accounts can be set of systematic statistical statements which reflect the value of the total final in the various sectors of the economy such as agriculture, industry, banking etc., together with details of distribution of factor incomes amon and final expenditure of the economy.' C.S O., *National Income* .

के मूल्यों और प्रचलित वर्ष की कीमतों पर मूल्यांकित राष्ट्रीय उत्पाद के समंक विश्लेषणात्मक रूप में प्रस्तुत किये गये हैं। पिछली शृंखलाओं की तुलना में इस नवीन शृंखला (1980–81 पर आधारित) में निम्न सुधारों का समावेश किया गया—

(i) सिक्किम राज्य को सम्मिलित करके इस शृंखला की भौगोलिक व्याप्ति में विस्तार किया गया है।

(ii) अनेक विशेष अध्ययनों के परिणामों का समावेश करके इस शृंखला को अधिक उपयोगी बनाया गया है। उदाहरणार्थ रिजर्व बैंक (R.B.I.) राज्यों के अर्थ-सांख्यिकी निदेशालयों (DESs) तथा कृषि मन्त्रालय के अर्थ-सांख्यिकी महानिदेशालय (DES-Ag) के सहयोग से 1983 से राष्ट्रीय लेखा प्रभाग (N.A.D.) द्वारा सतत स्कन्ध रीति (Perpetual Inventory Method) का प्रयोग करके स्थायी पूंजी के उपभोग के अनुमान आकलित किये गये हैं।

(iii) इस नवीन शृंखला में 1981 की जनगणना, नवीनतम पशु गणना, आर्थिक संगणना, कृषि लागत सर्वेक्षण, अखिल भारतीय ऋण एवं विनियोग सर्वेक्षण से उपलब्ध समंकों का प्रयोग करके कृषि और गैर-कृषि क्षेत्रों के असंगठित क्षेत्रों में व्याप्त समंक रिक्तियों (data gaps) की सम्पूर्ति करने का प्रयास किया गया है।

(iv) 1980–81 शृंखला में क्रियाविधि सम्बन्धी अनेक सुधार किये गये हैं। अधिकांश सुधार धान के मूल्यांकन, वस्त्र-उद्योग के मूल्य संवर्द्धन, सार्वजनिक प्रशासन और प्रतिरक्षा के घरेलू उत्पाद का स्थिर कीमतों पर मूल्यांकन, स्थायी पूंजी उपभोग, निजी अन्तिम उपभोग की अन्य मदों, सार्वजनिक उपक्रमों की हानियों के मूल्यांकन की क्रियाविधि से सम्बन्धित हैं।

(v) 1980–81 शृंखला के समारम्भ से महत्त्वपूर्ण बृहत्-आर्थिक समूहों (macro-economic aggregates), सार्वजनिक क्षेत्र व राष्ट्र के संघटित लेखों (Consolidated Accounts) के क्षेत्र, विषय-सामग्री और प्रारूपों (formats) में काफी सुधार किया गया है। N.A.S. के वार्षिक प्रकाशनों में राष्ट्रीय उत्पाद के समंकों के अतिरिक्त उपभोग व्यय, बचत, पूंजी-निर्माण आदि के विस्तृत अ-समूहित (Disaggregated) सांख्यिकीय विवरण प्रस्तुत किये जाते हैं।

(vi) नवीन शृंखला के अन्तर्गत वर्ष 1980–81 के आधार पर 1950–51 से 1989–90 तक के राष्ट्रीय उत्पाद और सम्बद्ध बृहत्-आर्थिक समूहों के अनुमान 1980–81 कीमतों और प्रचलित कीमतों (1980–81 and current prices) पर प्रकाशित किये गये हैं।

भारतीय समंकों के सामान्य दोष
(General Shortcomings of Indian Statistics)

इस अध्याय में हमने भारत में उपलब्ध आर्थिक समंकों के स्रोत, प्रकृति एवं व्याप्ति का आलोचनात्मक विवेचन किया है। जनसंख्या, राष्ट्रीय आय आदि से सम्बन्धित प्रकाशित समंकों के गुण-दोषों की यथास्थान समीक्षा की गई है। इनके अध्ययन से भारतीय समंकों के निम्नांकित सामान्य दोष स्पष्ट हो जाते हैं—

(1) अपर्याप्तता एवं अपूर्णता (Inadequacy and Incompleteness)—अब भी देश में अनेक महत्वपूर्ण तथ्यों के सम्बन्ध में या तो समंक बिल्कुल ही संकलित नहीं किये जाते या उनकी भौगोलिक व्याप्ति अपूर्ण है। उदाहरणार्थ, अभी तक लगभग 7·5% भूभाग के कृषि समंक उपलब्ध नहीं हैं। अनेक दुर्गम स्थानों के मानचित्र नहीं बनाये गये हैं। कृषि-समंकों में फल-सब्जियों-दूध आदि के उत्पादन-समंक, कृषि-व्यय, आय आदि के समंक, कुटीर व लघु उद्योग, सड़क यातायात द्वारा आन्तरिक व्यापार के समंक व्यवस्थित रूप से उपलब्ध नहीं किये जाते। अन्य अर्थ-सामाजिक व जनांकिकीय क्षेत्रों में भी अनेक रिक्तियाँ (gaps in coverage) हैं।

(2) अशुद्धता (Inaccuracy)—जो समंक प्राप्त हैं उनमें भी अधिकतर शुद्धता की कमी होती है क्योंकि संकलनकर्ता अधिकतर अयोग्य, अनुभवहीन एवं लापरवाह होते हैं। लेखपाल तथा प्रगणकों के दोषों पर विस्तार से विचार किया जा चुका है। प्रशिक्षण, उचित पारिश्रमिक तथा

निरीक्षण की कमी से संग्रह-संस्थान अनुत्तरदायी हो जाता है तथा अशिक्षा, अन्धविश्वास व उदासीनता के कारण सूचना देने वाले भी सही जानकारी नहीं देते।

(3) समुचित विश्लेषण एवं विधियन का अभाव (Lack of Proper Analysis and Processing)—संकलित सामग्री का वैज्ञानिक विश्लेषण, विधियन एव सारणीयन भी अधिकतर नही किया जाता। इसका मुख्य कारण यह है कि अधिकतर समंक, प्रशासन के उपोत्पाद के रूप मे एकत्रित किये जाते रहे है।

(4) एकरूपता की कमी (Lack of Uniformity)—भारतीय समंकों के संकलन, वर्गीकरण एवं सारणीयन की विधियों तथा प्रयुक्त इकाइयों व परिभाषाओ में समय-समय पर परिवर्तन हुए हैं जिसके कारण उनमें एकरूपता व तुलनीयता की कमी रही है।

(5) समन्वय का अभाव (Lack of Coordination)—प्राय: एक ही विषय से सम्बद्ध समंक विभिन्न स्तर की संस्थाओं व व्यक्तियों द्वारा सकलित किये जाते है। उनकी कार्य-विधि मे भी अन्तर होता है। इससे शक्ति, समय व धन का बहुत अपव्यय होता है। यद्यपि समन्वय स्थापित करने के लिए केन्द्र व राज्यो में सर्वोच्च संस्थाएँ स्थापित है फिर भी अनेक दिशाओं में कार्य के दोहरेपन को पूर्ण रूप से समाप्त नहीं किया जा सका है।

(6) प्रकाशन-विलम्ब (Delay in Publication)—यह सभी प्रकार के भारतीय समको का प्रमुख सामान्य दोष है जिसके कारण उनकी व्यावहारिक उपयोगिता कम हो जाती है। भारत मे कुछ समंकों का प्रकाशन तो उनके संकलन के 4–5 वर्ष बाद होता है जिसके कारण उनका केवल ऐतिहासिक महत्व रह जाता है। प्रकाशन में काल-विलम्बना न्यूनतम होनी चाहिए।

(7) प्रचार की अपर्याप्तता (Inadequate Publicity)—प्रचार की कमी के कारण अधिकांश समंक जनसाधारण तक नही पहुँच पाते। अत: न तो वे समंकों में कोई रुचि रखते हैं और न ही उनके वास्तविक महत्व को समझ पाते हैं।

भारत में समंक संकलन में कठिनाइयाँ
(Difficulties in the Collection of Statistics in India)

भारतीय समंकों के सकलन में निम्नलिखित प्रमुख कठिनाइयाँ आती हैं जिनके कारण इन समंकों की विश्वसनीयता कम हो जाती है—

(1) जनता की निरक्षरता व अशिक्षा—देश की अधिकांश जनता निरक्षर व अशिक्षित है। अत: देश के नागरिक समंकों की महत्ता को नहीं समझते।

(2) असहयोग—विशेष रूप से ग्रामीण इलाकों में रहने वाले व्यक्ति सरकारी सर्वेक्षणों को शंका व भय की दृष्टि से देखते है। वे प्रगणकों से सहयोग नही करते।

(3) देश की विशालता—विशाल देश होने के कारण भी दूर-दूर के स्थानों से अखिल भारतीय स्तर पर समंक संकलित करना कठिन हो जाता है।

(4) विविधता—भाषाओं, रीति-रिवाजों व आर्थिक तथा सामाजिक स्तरों में विविधता के कारण भी समंको में समरूपता की कमी होती है। प्रतिदर्श-सर्वेक्षणों में अनेक कठिनाइयाँ आती है।

(5) उदासीनता—संसूचको और प्रगणको में उदासीनता, लापरवाही और पक्षपात की भावना भी शुद्ध समंकों के व्यवस्थित संकलन में बाधक है।

भारतीय समंकों के उपर्युक्त दोषो और कठिनाइयों को दूर करने के लिए समय-समय पर अनेक जांच समितियों तथा सम्मेलनों ने महत्वपूर्ण सुझाव दिये हैं। सरकार ने अनेक सुझावों को कार्यान्वित भी किया है। अनेक नये उच्च-स्तरीय संगठन आदि भी स्थापित किये गये हैं जिससे समंक-संकलन, समन्वय, विश्लेषण, समंक विधियन व प्रकाशन का कार्य प्रभावशाली ढंग से सम्पन्न किया जा सके। तान्त्रिक एवं प्राविधिक क्षेत्र में भी अनेक सुधार किये गये हैं। भारतीय समंकों राष्ट्रीय एव अन्तर्राष्ट्रीय मानको के अनुरूप आवश्यक संशोधन किये जा रहे हैं। परन्तु समंकों और अधिक उपयोगी बनाने के लिए यह परमावश्यक है कि परिभाषाओं व प्रमापीकरण, प्रगणकों के सघन प्रशिक्षण, व्यापक प्रचार-कार्य तथा विभिन्न विभागों में

समन्वय की व्यवस्था की जाये। शोध-संस्थानों, व्यवसाय एवं उद्योग के संगठनों का सहयोग प्राप्त करना भी भारतीय समंक व्यवस्था में निरन्तर सुधार के लिए परमावश्यक है।

प्रश्न

1. भारत में केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन के गठन एवं कार्यों का वर्णन कीजिये। इसे अधिक उपयोगी और प्रभावशाली बनाने के लिए आप क्या सुझाव देंगे ?
Describe the organisation and functions of C.S O. in India. What suggestions would you offer to make it more useful and effective ? [*B. Com., Meerut, 1991; Raipur, 1990; M. A Raj. 1985; Jodhpur, Rohilkhand, 1985*]

2 केन्द्रीय मन्त्रालयों में सांख्यिकीय व्यवस्था का संक्षिप्त वर्णन कीजिये। भारत सरकार के विभिन्न विभागों में सांख्यिकीय अनुभाग स्थापित करने की क्या आवश्यकता है ? इन अनुभागों के कार्यों में समन्वय कैसे स्थापित होता है ?
Give a brief account of the Statistical organisations in the Central ministries What is the necessity of establishing statistical sections/divisions in separate departments of the Government of India ? How is their work coordinated ?

3 राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन के गठन और कार्यों की व्याख्या कीजिए। इसकी कार्य-पद्धति को किस प्रकार सुधारा जा सकता है ? विवेचना कीजिए।
Explain the organisation and functions of the National Sample Survey Organisation How can its working be improved ? Discuss [*M. Com., Allahabad, 1988*]

4 अपने राज्य में सांख्यिकीय व्यवस्था के विकास का संक्षिप्त वर्णन कीजिये। राज्य में सर्वोच्च स्तर पर स्थापित शिखर संस्थान के कार्यों का विवेचन कीजिए और बताइये कि यह राज्य और केन्द्र के योजना विभागों की कहाँ तक और किस प्रकार सहायता करता है ?
Trace briefly the growth of statistical organisations in your State. Discuss the functions of nodal statistical agency at the highest level and state how far and in what manner does it help the planning departments of the State and the Centre.

5. निम्नलिखित में से किन्हीं दो पर संक्षिप्त व्याख्यात्मक टिप्पणियाँ लिखिए—
(i) राष्ट्रीय सांख्यिकी सलाहकार मण्डल;
(ii) कम्प्यूटर केन्द्र;
(iii) राष्ट्रीय संज्ञान केन्द्र;
(iv) भारतीय सांख्यिकीय संस्थान।
Write short explanatory notes on any two of the following—
(*i*) National Advisory Board on Statistics;
(*ii*) Computer Centre;
(*iii*) National Informatics Centre;
(*iv*) Indian Statistical Institute.

6. आर्थिक नियोजन में जनसंख्या समंकों की उपयोगिता का संक्षिप्त विवेचन कीजिये। जनगणना की विधि-सिद्ध तथा तथ्य-सिद्ध पद्धतियों का अन्तर स्पष्ट करते हुए उनके गुण-दोषों की समीक्षा कीजिये।
Discuss briefly the utility of population statistics in economic planning Explain the difference between the *de jure* and *de facto* methods of conducting population census, bringing out their merits and demerits

7. 1991 की जनगणना के लिए प्रशासनिक तन्त्र तथा क्रियाविधि का संक्षेप में वर्णन कीजिये। भारतीय जनगणना की त्रुटियों का उल्लेख कीजिए। भावी जनगणनाओं के लिए क्या सावधानियाँ बरतनी चाहिएँ ?
Briefly describe the administrative machinery and methodology used in the population census in India in 1991. Point out the shortcomings of Indian population census. What precautions should be taken for future population censuses in India ?

8 भारत में समंकों के सामान्य दोष बताइए। यहाँ समंकों के संकलन में क्या कठिनाइयाँ हैं ? सुधार के लिए सुझाव दीजिए।
Enumerate the general shortcomings of Indian Statistics. What are the difficulties in the way of collection of Statistics in India Give suggestions for improvement.

प्रारम्भिक गणित
(ELEMENTARY MATHEMATICS)

1. समान्तर, गुणोत्तर व हरात्मक श्रेणियाँ
(Arithmetic, Geometric and Harmonic Progressions)

श्रेणी (Progression)—यदि कुछ पद बिना किसी क्रम के प्रस्तुत किये जायें, तो वे केवल पदों का समूह कहे जाएँगे। ऐसे किसी समूह में यह नही ज्ञात किया जा सकता कि किसी विशिष्ट पद के बाद में आने वाले पद का या उससे पहले पद का क्या मान होगा। परन्तु इन्हीं पदों को यदि एक सुनिश्चित नियम के आधार पर विशिष्ट क्रम से शृंखलाबद्ध या व्यवस्थित कर दिया जाए तो यह सरलता से मालूम किया जा सकता है कि किसी विशेष पद के बाद के पद का या पहले के पद का क्या मान होगा ? उदाहरणार्थ—

(i) 2, 4, 6, 8, 10, 12............अगला पद 14, फिर 16, 18 आदि।

(ii) 2, 4, 8, 16, 32, 64............अगला पद 128, फिर 256, 512 आदि।

(iii) $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$............अगला पद $\frac{1}{13}$, फिर $\frac{1}{15}, \frac{1}{17}$ आदि।

उपर्युक्त तीनों क्रम किसी न किसी नियम के अनुसार बने हैं। प्रथम क्रम—(i) में प्रत्येक पद पिछले पद से 2 अधिक है ; (ii) में प्रत्येक पद पिछले पद का 2 गुना है; और (iii) में प्रत्येक पद का व्युत्क्रम पिछले पद के व्युत्क्रम से 2 अधिक है।

संख्याओं का एक ऐसा क्रम जिसमें प्रत्येक पद पिछले पद के आधार पर किसी सुनिश्चित नियम के अनुसार निर्धारित किया जा सकता है, श्रेणी या श्रेढ़ी (series or progression) कहलाता है। श्रेणी की प्रत्येक संख्या को उसका पद (term) कहा जाता है। उपर्युक्त तीनों उदाहरण अलग-अलग प्रकार की श्रेणियों से सम्बन्धित हैं।

परिमित तथा अपरिमित श्रेणी—जिस श्रेणी में पदों की संख्या सीमित होती है उसे परिमित श्रेणी (finite progression) कहते हैं जैसे 1, 3, 5, 7........21. इसके विपरीत जिस श्रेणी मे पदों की संख्या असीमित होती है उसे अपरिमित या अनन्त श्रेणी (infinite progression) कहते है। जैसे 1, 3, 5, 7....∞

प्रकार—गणितीय श्रेणियाँ मुख्यतः तीन प्रकार की होती है—(i) समान्तर श्रेणी (Arithmetic Progression) ; (ii) गुणोत्तर श्रेणी (Geometrical Progression) ; तथा (iii) हरात्मक श्रेणी (Harmonical Progression)। प्रस्तुत अध्याय में हम इन तीनों प्रकार की श्रेणियों का संक्षिप्त अध्ययन करेंगे।

समान्तर श्रेणी
(Arithmetic Progression : A.P.)

अर्थ—पदों का ऐसा समूह जिसमें निकटवर्ती पदों का अन्तर समान रहता है, ...त श्रेणी (A.P.) कहलाता है। इस श्रेणी का प्रत्येक पद अपने पिछले पद में निश्चित राशि बीजगणितीय योग (+ या −) करने पर प्राप्त होता है। इस प्रकार, इस श्रेणी के किसी भी

का उससे अगले या पिछले पद से अन्तर सदा समान रहता है। यह अन्तर किसी भी पद को उसके बाद वाले पद में से घटाकर निकाला जा सकता है। यह पदान्तर सर्वनिष्ठ अन्तर या सार्व-अन्तर (common difference) कहलाता है। पूरी श्रेणी में समीपवर्ती पदों के बीच समान अर्थात् एक ही अन्तर रहने के कारण यह श्रेणी समान्तर श्रेणी कहलाती है।

समान्तर श्रेणी (A.P.) के उदाहरण—

	श्रेणी	प्रथम पद	सार्व-अन्तर
(i)	2, 4, 6, 8, 10, 12......	2	+2
(ii)	9, 6, 3, 0, −3, −6......	9	−3
(iii)	$0, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}...$	0	$\sqrt{3}$
(iv)	8·4, 7·6, 6·8, 6·0, 5·2, 4·4...	8·4	−0·8
(v)	$a, a+d, a+2d, a+3d......$	a	$+d$

सामान्य स्वरूप (General Form)—समान्तर श्रेणी के प्रथम पद (first term—T_1) को 'a' तथा सार्व-अन्तर (common difference) को 'd' संकेत द्वारा व्यक्त किया जाता है (उदाहरण v)। श्रेणी का सामान्य स्वरूप निम्नवत् है—

$$a, (a+d), (a+2d), (a+3d), (a+4d),......$$

समान्तर श्रेणी का व्यापक पद (nth term of A.P.)—

प्रथम पद :	$T_1=a$	या	$a+(1-1)d$
दूसरा पद :	$T_2=a+d$	या	$a+(2-1)d$
तीसरा पद :	$T_3=a+2d$	या	$a+(3-1)d$
...	...	...	...
...	...	...	...
व्यापक पद :	$\boxed{T_n=a+(n-1)d}$	या	$\boxed{a+(n-1)d}$

अतः d का गुणांक पद की क्रम-संख्या से हमेशा 1 कम रहता है।

इस प्रकार स० श्रे० का व्यापक पद={प्रथम पद+$(n-1)$ सार्व-अन्तर}

समान्तर श्रेणी के यदि दो पद ज्ञात हों तो श्रेणी का कोई भी पद ज्ञात किया जा सकता है और इस प्रकार पूरी श्रेणी निकाली जा सकती है। प्रदत्त दोनों पदों से सम्बन्धित सूचना की सहायता से दो समीकरण बन जाते हैं जिनका हल करने में सार्व-अन्तर (d) और प्रथम पद (a) प्राप्त हो जाते हैं। ये दो मूल्य पूरी श्रेणी की रचना के लिए पर्याप्त हैं।

उदाहरण 1—(क) निम्न श्रेणी का 20वाँ पद ज्ञात कीजिए—

1, 5, 9, 13......

(ख) निम्न श्रेणी का 25वाँ पद निकालिए—

3, 7, 11, 15, 19.........

(ग) किसी श्रेणी का 5वाँ पद 14 और 11वाँ पद 32 हो तो श्रेणी ज्ञात कीजिये और उस श्रेणी का 20वाँ पद निकालिये।

हल—(क) प्रथम पद $a=1$, सार्व-अन्तर $d=4$ ($13-9$ या $9-5$ या $5-1$)

$$T_n=a+(n-1)\,d;$$

20वाँ पद $T_{20}=a+19d=1+19\times4=77$

(ख) प्रथम पद $a=3$, सार्व-अन्तर $d=4$ ($7-3$ या $19-15$)

$$T_n=a+(n-1)d \quad \text{यदि} \quad n=25$$

तो 25वाँ पद $T_{25}=3+(25-1)\times4=3+96=99$

(ग) $T_5=a+(5-1)\,d=a+4d=14$ ...(i)

$T_{11}=a+(11-1)d=a+10d=32$ ...(ii)

पहले समीकरण को दूसरे में से घटाने पर $6d=18$ अतः $d=3$

समीकरण (i) में d का मान रखने पर

$a+4\times3=14$ $\therefore\ a=14-12=2$

प्रथम पद $a=2$ सार्व अन्तर $d=3$

अतः अभीष्ट श्रेणी 2, 5, 8, 11, 14.........होगी ।

20वां पद $T_{20}=a+19d=2+19\times3=59$

उदाहरण 2—(i) निम्न समान्तर श्रेणी में बताइए कौनसा पद 498 होगा ?—

$$3+8+13+18+23+28......$$

[*B. Com*, *T. D. C. (II Yr.), CQM Raj., 1979 (Non-Collegiate)*]

(ii) किसी समान्तर श्रेणी के 8वें तथा 102वें पद के मान क्रमशः 23 और 305 हैं। श्रेणी ज्ञात कीजिये ।

(iii) यदि किसी समान्तर श्रेणी (A.P.) के दूसरे और सातवें पद क्रमशः 4 व 19 हों तो श्रेणी के 11वें पद को ज्ञात कीजिये ।

(iv) श्रेणी 5, 8, 11......... का कौन-सा पद 320 होगा ?

हल—(i) प्रदत्त A.P. में प्रथम पद; $a=3$, सार्व-अन्तर $d=5$ $(8-3$ या $13-8)$

$T_n=a+(n-1)\,d;\quad 498=3+(n-1).5,\quad 495=5n-5$

$500=5n\quad \therefore\quad n=100$ अतः 100वें पद का मान 498 होगा ।

(ii) $T_8=a+7d=23;\quad T_{102}=a+101d=305$

घटाने पर $94d=282\qquad \therefore\ d=3$

$a+7d=23\qquad \therefore\ a=23-21=2$

अभीष्ट श्रेणी 2, 5, 8, 11, 14.........है ।

(iii) $T_2=a+d=4;\qquad T_7=a+6d=19$

$\therefore\ 5d=15,\ d=3;\ a=4-3=1;$

$\therefore\ T_{11}=a+10d=1+10\times3=31$

(iv) प्रदत्त श्रेणी में प्रथम पद $a=5$, सार्व-अन्तर $d=3$

$T_n=a+(n-1)\,d=5+(n-1)\,3=320$

$3\,(n-1)=320-5\qquad \therefore\ n-1=105\quad n=106$

अतः प्रस्तुत श्रेणी के 106वें पद का मान 320 होगा ।

उदाहरण 3—(i) ज्ञात कीजिए क्या 302 निम्न श्रेणी का पद है—

$$2+6+10+14+18$$

[*B. Com., T.D.C. (II Yr. CQM) Raj., 1979 (Non-Collegiate)*]

(ii) एक A.P. में तीसरा पद प्रथम पद का चार गुना है तथा छठा पद 17 है। श्रेणी को ज्ञात कीजिए । [*B. Com., T.D.C. (II Yr. CQM) Raj, 1980, 1978*]

(iii) एक टेलीविजन सेट का निर्माण करने वाली कम्पनी 50 सेट प्रति माह बनाती है। जनवरी 1970 से वह उत्पादन बढ़ाना चाहती है परन्तु प्रति माह 15 सेटों की वृद्धि ही हो सकती है। यदि वह जनवरी 1970 से हर महीने टी० वी० सेटों का उत्पादन उक्त दर से बढ़ाती जाए तो किस वर्ष के किस माह में वह 2000 सेट प्रति माह का लक्ष्य प्राप्त कर लेगी ?

हल—(i) प्रदत्त श्रेणी A.P. है जिसमें प्रथम पद, $a=2$, सार्व-अन्तर, $d=+4$:

$302=a+(n-1)\,d=2+(n-1).4=2+4n-4$

$302-2+4=4n\quad \therefore\ 4n=304,\ n=76$

अतः 302 इस श्रेणी के 76वें पद का मान है ।

(ii) प्रथम पद, $T_1=a$, तीसरा पद$=T_3=a+2d$

$T_3=4T_1$ अर्थात् $a+2d=4a\quad \therefore\quad 3a=2d$

$a=\frac{2}{3}d$ या $d=\frac{3}{2}a$

$T_6=a+5d=17,\quad \frac{2}{3}d+5d=17\qquad (\because\ a=\frac{2}{3}d)$

$2d+15d=51;\ 17d=51\quad \therefore\ d=3$

$T_6=a+5\times3=17;\quad \therefore\ a=2$

प्रथम पद 2 है और सर्वनिष्ठ अन्तर 3 है अतः श्रेणी निम्नवत् होगी—

2, 5, 8, 11, 14, 17......

(iii) जनवरी 1970 से पहले का मासिक उत्पादन, $a=50$ सेट । जनवरी 1... प्रति माह 15 सेटों की वृद्धि की जा सकती है—अर्थात् जनवरी 1970 में $50+15=$

फरवरी 1970 में 65+15=80, मार्च 1970 में 95 और इसी प्रकार.......

दिसम्बर 1969 का उत्पादन, $a=50$ (T_1) मासिक वृद्धि की दर अर्थात् सार्व-अन्तर,

$d=15$ लक्ष्य=2000 सेट=T_n

$$T_n=a+(n-1)\,d \quad \therefore \quad 2000=50+(n-1)\,15$$

$$1950=15n-15 \quad \therefore \quad 15n=1965$$

$$\therefore\ n=131$$

दिसम्बर 1969 से 131वें महीने में 2000 प्रति माह का लक्ष्य पूरा होगा। अतः अक्टूबर 1980 में 2000 सेट प्रति माह का लक्ष्य पूरा हो जाएगा। (नवम्बर 1979 तक 120 महीने तथा अक्टूबर 1980 तक 131 (120+11) महीने हो जाते हैं)।

उदाहरण 4—(i) क्या 59 और 100 निम्न श्रेणी के कोई पद हैं ?

$$2,\ 9,\ 16,\ 23 \ldots\ldots$$

(ii) निम्न श्रेणी में $\frac{1}{10}$ कौन-सा पद है ?

$$1,\ \frac{37}{40},\ \frac{17}{20},\ \frac{31}{40},\ \frac{7}{10} \ldots\ldots$$

हल—(i) प्रदत्त श्रेणी A.P. है जिसमें $a=2$ और $d=7$, यदि, $T_n=59$ तो

$$T_n=a+(n-1)\,d \quad \text{या} \quad 2+(n-1)\,7=59$$

$$\therefore\ 2+7n-7=59 \quad \text{या} \quad 7n=59+7-2=64$$

$$\therefore\ n=\tfrac{64}{7}=9\tfrac{1}{7} \text{ जो असम्भव है।}$$

अतः 59 उक्त श्रेणी का कोई-सा पद नहीं है। यदि $T_n=100$, तो

$$100=2+(n-1).7 \quad \text{या} \quad 98=7n-7$$

$$\therefore\ 105=7n \quad \text{या} \quad n=\tfrac{105}{7}=15$$

अतः 100 प्रदत्त श्रेणी का 15वाँ पद है।

(ii) हर का लघुत्तम समापवर्त्य (40) लेने पर श्रेणी को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है—

$$\frac{40}{40},\ \frac{37}{40},\ \frac{34}{40},\ \frac{31}{40},\ \frac{28}{40} \ldots\ldots \frac{4}{40}$$

प्रथम पद $\frac{40}{40}$ है। अतः $a=1$, और सार्व-अन्तर, $d=-\frac{3}{40}$

$$\left(\because\ \tfrac{37}{40}-\tfrac{40}{40}=\tfrac{34}{40}-\tfrac{37}{40}=-\tfrac{3}{40}\right)$$

यदि $T_n=\frac{4}{40}$ तो $\quad T_n=a+(n-1)\,d$

$$\frac{4}{40}=1+(n-1)\times-\frac{3}{40}$$

$$\frac{4}{40}-1=-\frac{3}{40}n+\frac{3}{40}$$

$$\therefore\ \frac{3}{40}n=\frac{3}{40}+1-\frac{1}{10}=\frac{3+40-4}{40}=\frac{39}{40}$$

$$\therefore\ n=\frac{39}{40}\times\frac{40}{3}=13$$

अतः $\frac{1}{10}$ दी हुई श्रेणी का 13वाँ पद है।

[परीक्षण—यदि $a=1$, $d=-\frac{3}{40}$ तो

$$T_{13}=a+(13-1)\,.\,d=1+\left(12\times\frac{-3}{40}\right)$$

$$=1+\left(-\frac{36}{40}\right)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$$]

उदाहरण 5—(क) किसी समान्तर श्रेणी का 12वाँ पद उसके 5वें पद से 14 अधिक है और उनका जोड़ 36 है। श्रेणी ज्ञात कीजिए। [*B. Com., T.D.C. (II Yr. CQM) Suppl. Raj. 1979*]

(ख) किसी समान्तर श्रेणी का pवाँ पद q और qवाँ पद p है, तो सिद्ध कीजिए कि $(p+q)$वाँ पद शून्य होगा।

हल—(क) $T_{12}=a+11d \qquad T_{12}-T_5=(a+11d)-(a+4d)=14$

$T_5=a+4d \qquad T_{12}+T_5=(a+11d)+(a+4d)=36$

सरल करने पर $7d=14 \quad \therefore \quad d=2$

$$2a+15d=36$$

$$2a+15\times2=36 \quad \therefore \quad a=3$$

$a=3,\ d=+2 \quad \therefore$ श्रेणी 3, 5, 7, 9, 11........है।

(ख) प्रथम पद को a तथा सार्व-अन्तर को d द्वारा निरूपित करने पर—

pवाँ पद $\quad T_p=a+(p-1)\,d=q$ ....(i)

qवाँ पद $\quad T_q=a+(q-1)\,d=p$ ....(ii)

समीकरण (ii) को (i) में से घटाने पर—

$$(p-1)\,d-(q-1)\,d=q-p$$

$$(p-1-q+1)\,d=q-p$$

$$d\,(p-q)=q-p$$

$$d=\frac{q-p}{p-q}=\frac{-(p-q)}{p-q}=-1$$

d का मान समीकरण (i) में आदिष्ट करने पर—

$$a+(p-1)\times(-1)=q; \quad a-p+1=q$$

$$\therefore \quad a=p+q-1$$

प्रथम पद $a=p+q-1$; सार्व-अन्तर, $d=-1$

$$\therefore \quad T_n=a+(n-1)\,d$$

$$T_{p+q}=a+(p+q-1)\,d$$

$$=(p+q-1)+(p+q-1)\times-1$$

$$=p+q-1-p-q+1=0$$

अतः $(p+q)$वाँ पद, $T_{p+q}=0$

उदाहरण 6—(क) यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी में mवाँ पद n और nवाँ पद m हो तो सिद्ध कीजिए कि pवाँ पद $m+n-p$ होगा।

(ख) यदि एक समान्तर श्रेणी के pवें, qवें और rवें पदों का मान क्रमशः x, y, z हो तो सिद्ध कीजिए कि—

$$x\,(q-r)+y\,(r-p)+z\,(p-q)=0$$

हल—(क) प्रथम पद a व सार्व-अन्तर d संकेत द्वारा व्यक्त करने पर—

$T_m=a+(m-1)\,d=n$ ...(i)

$T_n=a+(n-1)\,d=m$ ...(ii)

समीकरण (ii) को (i) में से घटाने पर—

$$(m-1)\,d-(n-1)\,d=n-m$$

$$d\,(m-1-n+1)=n-m$$

$$d=\frac{n-m}{m-n}=-1$$

समीकरण (i) के अनुसार $\quad a+(m-1)\times(-1)=n$

$$a-m+1=n$$

$$\therefore \quad a=m+n-1$$

$a=m+n-1;\ d=-1 \quad T_p=a+(p-1)\,d$

$$=m+n-1+(p-1)\times-1$$

$$=m+n-1-p+1$$

$$=m+n-p$$

अतः pवाँ पद $m+n-p$ है।

(ख)

$$T_p=a+(p-1).d=x$$

$$T_q=a+(q-1).d=y$$

$$T_r=a+(r-1).d=z$$

(i) को $(q-r)$ से, (ii) को $(r-p)$ से तथा (iii) को $(p-q)$ से गुणा करने पर—

$$x(q-r)=a(q-r)+(q-r)(p-1).d \quad ...(iv)$$
$$y(r-p)=a(r-p)+(r-p)(q-1).d \quad ...(v)$$
$$z(p-q)=a(p-q)+(p-q)(r-1).d \quad ...(vi)$$

समीकरण (iv), (v) व (vi) को जोड़ने पर—

$$x(q-r)+y(r-p)+z(p-q)=a(q-r)+(q-r)(p-1).d+a(r-p)+(r-p)(q-1).d+a(p-q)+(p-q)(r-1)d$$
$$=a(q-r+r-p+p-q)+d(pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+pr-qr-p+q)$$
$$=a\times 0+d\times 0=0$$

अतः $\quad x(q-r)+y(r-p)+z(p-q)=0$

उदाहरण 7—(क) यदि $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ समान्तर श्रेणी में हों तो सिद्ध कीजिए a^2, b^2, c^2 भी A.P. में हैं।

(ख) एक फर्म X, 1000 टेलीविजन सेटों (Black and White TV sets) से उत्पादन आरम्भ करती है और प्रतिवर्ष 100 इकाई उत्पादन घटाती है। दूसरी फर्म, Y, 500 रंगीन सेटों (Colour TV sets) से उत्पादन आरम्भ करती है और प्रतिवर्ष 25 इकाई उत्पादन बढ़ाती है।

(i) X और Y का उत्पादन कब बराबर होगा ?

(ii) X का उत्पादन कब शून्य होगा ?

(iii) जब X का उत्पादन शून्य होगा, उस वर्ष Y का उत्पादन कितना होगा ?

हल—(क) $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ A.P. में हैं अतः

$$\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}$$
$$\frac{b+c-c-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c+a-a-b}{(a+b)(c+a)}$$
$$\frac{(b-a)}{(c+a)(b+c)}=\frac{(c-b)}{(a+b)(c+a)}$$

दोनों पक्षों को $(c+a)$ से गुणा करने पर—

$$\frac{(b-a)(c+a)}{(b+c)(c+a)}=\frac{(c-b)(c+a)}{(a+b)(c+a)} \quad \text{या} \quad \frac{b-a}{c+b}=\frac{c-b}{b+a}$$

$b^2-a^2=c^2-b^2$ (सार्व-अन्तर) अतः a^2, b^2, c^2 भी A. P. में हैं।

(ख) फर्म X—$a=1000$, $d=-100$, $T_n=a+(n-1)d=1000+(n-1)\times -100$

फर्म Y—$a=500$, $d=+25$, $T_n=500+(n-1)25$

(i) $T_n=1000+(n-1)\times -100=500+(n-1)25$

या $\quad 1000-100n+100=500+25n-25$

$$-125n=-625 \quad \therefore \quad n=5$$

पाँचवें पद पर अर्थात् 5वें वर्ष में दोनों फर्मों के उत्पादन की मात्रा बराबर हो जाती है।

(ii) $1000+(n-1)\times -100=0$ या $1100-100n=0 \quad \therefore \quad n=11$

11वें वर्ष मे फर्म X का उत्पादन शून्य हो जाएगा।

(iii) 11वें वर्ष में फर्म Y का उत्पादन—

$$T_{11}=500+(11-1)\times 25 \quad \text{या} \quad 500+250=750 \text{ सेट}$$

समान्तर माध्य या मध्यमान (Arithmetic Mean)—जब तीन संख्याएँ समान्तर श्रेणी में हों तो उनके बीच की संख्या को अन्य दो संख्याओं का समान्तर माध्य कहते हैं। 2, 5, 8 समान्तर श्रेणी में हैं अतः मध्य का मान 5, 2 व 8 का समान्तर माध्य है। यदि तीन संख्यायें a, A, b स० श्रे० में हों तो मध्यमान $A=\frac{a+b}{2}$

क्योंकि $(A-a)=(b-A)$ $\therefore$ $2A=a+b$ अतः $A=\frac{a+b}{2}$

अनेक समान्तर माध्य—यदि a और b दो प्रदत्त राशियाँ हों जिनके बीच रखे हुए समान्तर माध्यों की संख्या n हो तो पदों की कुल संख्या (सिरे वाले पदों a व b को शामिल करते हुए) $n+2$ होगी। यहाँ पर $n+2$ पदों वाली एक ऐसी समान्तर श्रेणी ज्ञात करनी होगी जिसका पहला पद a और अन्तिम पद $(n+2)$th term b हो, सार्व-अन्तर d हो।

अन्तिम पद $T_{n+2}=a+(n+2-1)\,d=a+(n+1)\,d=b$

$$(n+1)\,d=b-a \quad \therefore \quad d=\frac{b-a}{n+1}$$

अतः अभीष्ट समान्तर माध्य निम्नांकित होंगे—

$$a+\frac{b-a}{n+1},\ a+2\left(\frac{b-a}{n+1}\right),\ a+3\left(\frac{b-a}{n+1}\right)+\ldots\ldots a+n\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$$

उदाहरण 8—(i) 7 और 37 के मध्य 9 समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

(ii) 8 और 44 के बीच n समान्तर माध्य प्रविष्ट किये गए हैं। यदि $(n-7)$वें माध्य और $(n-3)$वें माध्य में वही अनुपात हो जो 5 और 8 में है तो n का मान ज्ञात कीजिए।

(iii) एक समान्तर श्रेणी के उन तीन क्रमिक पदों को ज्ञात कीजिए जिनका योग 51 है तथा जिनके बाह्य पदों का गुणनफल 273 है।

हल—(i) 7 प्रथम पद है और 37 अन्तिम पद अर्थात् $n+2=9+2=11$वाँ पद है। यदि सार्व-अन्तर d हो तो—

$$a+(9+2-1)\,d=37 \quad \text{या} \quad 7+10d=37 \quad \therefore \quad d=3$$

अतः श्रेणी 7, 10, 13, 16, 19........31, 34, 37 होगी और 9 समान्तर माध्य के निम्न मूल्य होंगे—

10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31 व 34.

(ii) $(n-7)$वाँ समान्तर माध्य $=a+(n-7)\left(\frac{b-a}{n+1}\right)=8+(n-7)\left(\frac{44-8}{n+1}\right)$

$(n-3)$वाँ समान्तर माध्य $=a+(n-3)\left(\frac{b-a}{n+1}\right)=8+(n-3)\left(\frac{44-8}{n+1}\right)$

इन दोनों पद-मानों का अनुपात 5 : 8 है।

$$\text{अतः} \ \frac{8+(n-7)\left(\frac{44-8}{n+1}\right)}{8+(n-3)\left(\frac{44-8}{n+1}\right)}=\frac{5}{8},\ \frac{8\,(n+1)+36\,(n-7)}{n+1}\times\frac{n+1}{8\,(n+1)+36\,(n-3)}=\frac{5}{8}$$

$$8\,\{8\,(n+1)+36\,(n-7)\}=5\,\{8\,(n+1)+36\,(n-3)\}$$
$$64n+64+288n-2016=40n+40+180n-540$$
$$352n-220n=2016+40-540-64$$
$$\therefore \quad 132n=1452 \quad \text{या} \quad n=11.$$

(iii) मान लिया कि तीनों क्रमिक पद $a-d$, a तथा $a+d$ हैं।

तीनों का जोड़ $\quad a-d+a+a+d=3a=51 \quad \therefore \quad a=17$

बाह्य पदों की गुणा $(a-d)(a+d)=a^2-d^2=273$

$(17)^2-d^2=273,\ 289-d^2=273$ या $-d^2=-16$

$\therefore \ d^2=16,\ d=\pm4$; क्योंकि $a=17,\quad d=\pm4$

अतः तीनों पद निम्न प्रकार होंगे—

यदि $d=+4$ तो 13, 17, 21; $\quad$ यदि $d=-4$ तो 21, 17, 13

उदाहरण 9—(i) एक श्रेढी का nवाँ पद $3n-1$ है तो सिद्ध कीजिए कि श्रेढी समान्तर श्रेणी में है और उसका प्रथम पद व सार्व-अन्तर ज्ञात कीजिये।

(ii) 1 और -39 के मध्य 9 समान्तर माध्य निविष्ट कीजिये।

हल—(i) $\qquad T_n=3n-1$

यदि $n=1, 2, 3, 4.... n$ तो $\quad T_1=3\times1-1=2$

$$T_2=3\times2-1=5$$
$$T_3=3\times3-1=8$$
$$T_4=3\times4-1=13$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$T_n=3n-1$$

उक्त श्रेढी समान्तर श्रेणी में है क्योंकि $T_2-T_1=T_3-T_2=T_4-T_3=d=3$

प्रथम पद, a=2, सार्व-अन्तर d=3

a व d का निर्धारण निम्न सूत्रानुसार भी किया जा सकता है—

$$T_n=a+(n-1)d=3n-1=3n-3+2$$
$$=3(n-1)+2 \quad \text{या} \quad 2+(n-1).3$$
$$\therefore \quad a=2, d=3$$

(ii) 1 और -39 के मध्य 9 समान्तर माध्य प्रविष्ट करने हैं—

यदि $A_1, A_2,....A_9$ नौ अभीष्ट माध्य हों तो—

$1, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, -39$ A.P. में हैं।

प्रथम पद, $a=1$ श्रेणी में कुल $9+2=11$ पद हैं।

ग्यारहवें पद का मान, $\quad T_{11}=-39=a+(n-1)d$

$$=1+(11-1)d=1+10d$$
$$\therefore \quad 10d=-39-1 \quad \therefore \quad d=-4$$
$$A_1=T_2=a+1d=1+(-4)=-3$$
$$A_2=T_3=a+2d=1-8=-7$$
$$A_3=T_4=a+3d=1-12=-11$$
$$A_4=T_5=a+4d=1-16=-15$$
$$A_5=T_6=a+5d=1-20=-19$$
$$A_6=T_7=a+6d=1-24=-23$$
$$A_7=T_8=a+7d=1-28=-27$$
$$A_8=T_9=a+8d=1-32=-31$$
$$A_9=T_{10}=a+9d=1-36=-35$$

अतः 1 और -39 के मध्य निम्नांकित 9 समान्तर माध्य होंगे—

$$-3, -7, -11, -15, -19, -23, -27, -31, -35$$

उदाहरण 10—3 और 54 के मध्य n समान्तर माध्य हैं। यदि 8वें समान्तर माध्य का $(n-2)$वें समान्तर माध्य से 3 : 5 का अनुपात हो तो n का मान बताइये।

हल—3 और 54 के मध्य n समान्तर माध्य हैं—

श्रेणी—$3, A_1, A_2, A_3, A_4...A_{n-2}, A_{n-1}, A_n, 54$

पद—$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5...T_{n-1}, T_n, T_{n+1}, T_{n+2}$

श्रेणी में पदों की कुल संख्या$=n+2, \quad T_1=a=3$

$$T_{(n+2)}=a+(n+2-1)d=a(n+1)d=54$$
$$T_{(n+2)}=3+(n+1)d=54, \quad (n+1)d=51$$
$$nd+d=51 \qquad ...(i)$$
$$A_8=T_9=a+8d=3+8d$$
$$A_{n-2}=T_{n-1}=a+(n-2)d=3+nd-2d$$

अनुपात $A_8 : A_{n-2}=3 : 5; \quad \dfrac{3+8d}{3+nd-2d}=\dfrac{3}{5}$

$$5(3+8d)=3(3+nd-d)$$
$$15+40d=9+3nd-6d$$
$$46d-3nd=-6$$
$$3nd-46d=6 \qquad ...(ii)$$

दोनों युगपत् समीकरण—

$$nd+d=51 \qquad ...(i)$$
$$3nd-46d=6 \qquad ...(ii)$$

समीकरण (i) को 3 से गुणा करने तथा उसमें से (ii) घटाने पर—

$$\begin{aligned} 3nd+3d&=153 \\ 3nd-46d&=6 \\ \hline 49d&=147 \\ \therefore\ d&=3 \end{aligned}$$

समीकरण (i) के अनुसार $nd+d=51$

$$\begin{aligned} n\times3+3&=51 \\ 3n&=48 \\ \therefore\ n&=16 \end{aligned}$$

अत: 3 और 54 के मध्य समान्तर माध्यों की संख्या 16 है ।

[परीक्षण (Verification)—कुल पदों की संख्या $=n+2=18$

$$a=3,\ d=3$$

$$A_8=T_9=a+8d=3+24=27$$

$$A_{16-2}=T_{15}=a+14d=3+42=45$$

$$\frac{27}{45}=\frac{3}{5}$$

अत: $A_8 : A_{14}=3 : 5$

अन्तिम पद, $T_{18}=a+17d=3+17\times3=54$]

समान्तर श्रेणी के n पदों का योग (Sum of n terms of an A. P.)—यदि समान्तर श्रेणी का पहला पद a, सार्व-अन्तर d, पदो की संख्या n, अन्तिम अर्थात् nवाँ पद l तथा अभीष्ट योगफल S_n संकेत द्वारा व्यक्त किया जाए तो पूरी श्रेणी का योग निम्न प्रकार परिकलित किया जाएगा—

पहला पद a, दूसरा पद $a+d$, तीसरा $a+2d$....अन्तिम पद l, अन्तिम से पहला पद $l-d$, अन्तिम पद से दो पद पहले का पद $l-2d$ होगा ।

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(l-2d)+(l-d)+l \qquad \ldots(i)$$

श्रेणी को विपरीत क्रम से लिखने पर—

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\ldots+(a+2d)+(a+d)+a \qquad \ldots(ii)$$

दोनों (i) व (ii) को जोड़ने पर—

$$2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots+(a+l)+(a+l)+(a+l)\ldots n \text{ पदों तक}$$
$$=n\,(a+l)$$

$\therefore\ S_n=\frac{1}{2}\{n(a+l)\}$ लेकिन $l=$ अन्तिम पद $=a+(n-1)d$

$$\therefore\ S_n=\frac{n}{2}\{a+a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

$$S_n=\frac{\text{पदों की संख्या}}{2}\{(2\times\text{प्रथम पद})+(\text{पदो की संख्या से एक कम})\times(\text{सार्व-अन्तर})\}$$

समान्तर श्रेणी का योग $=S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$.

अथवा— $S_n=\frac{\text{पदों की संख्या}}{2}$ (प्रथम पद + अन्तिम पद)

$$=\frac{n}{2}(T_1+T_n) \text{ या } \frac{n}{2}(a+l)$$

उदाहरण 11—निम्न समान्तर श्रेणियों का निर्देशानुसार योग निकालिए—

(i) $1+3+5+\ldots\ldots\ldots$ 30 पदों तक

(ii) $49+44+39\ldots\ldots$ 17 पदों तक

(iii) 5, 11, 17, 23,......... 179.

हल—समान्तर श्रेणी का योग $S_n=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)\,d\right\}$

(i) यहाँ $a=1,\ d=2,\ n=30$

$$\therefore\ S_n=\frac{30}{2}\{2\times1+(30-1)\times2\}=15\,(2+58)=900.$$

(ii) यहाँ $a=49,\ d=-5,\ n=17$

$\therefore\ S_n=\frac{17}{2}\{(2\times49)+(17-1)(-5)\}=\frac{17}{2}(98-80)$

$=\frac{17\times18}{2}=153.$

(iii) यहाँ $a=5,\ d=6,\ l=179$; पहले n निकाला जाएगा ।

$\because\ l=a+(n-1)\,d$ या $179=5+(n-1)\,6$

$\therefore\ \frac{174}{6}+1=n=30$

$S_{30}=\frac{30}{2}(5+179)=15\times184=2760.$

उदाहरण 12—(i) श्रेढी का योग ज्ञात कीजिए—

$2+5+8+11+14+\cdots\cdots$ 20 पदों तक ।

(ii) श्रेणी 42, 39, 36⋯⋯मे कितने पद लिए जायें कि योग 312 हो ?

[B. Com. T.D.C., (II Yr. CQM), Raj., 1979]

(iii) श्रेणी 2, 8/3, 10/3, 4⋯⋯के 20 पदों का योग निकालिए । यह भी बताइए कि इस श्रेणी का कौन-सा पद 76 होगा ?

हल—(i) $a=2,\ d=3$ अर्थात् $5-2$ या $8-5$ या $11-8$, $n=20$

$$S_n=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}=\frac{20}{2}\left\{2\times2+(20-1)\times3\right\}$$
$$=10(4+57)=610$$

(ii) $S_n=312,\ a=42,\ d=-3\ (39-42$ या $36-39),\ n=?$

$$S_n=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)\,d\right\};\quad 312=\frac{n}{2}\left\{2\times42+(n-1)\times-3\right\}$$
$$312=\frac{n}{2}\left(84-3n+3\right);\ 624=n(87-3n)$$
$$624=87n-3n^2$$
$$3n^2-87n+624=0$$
$$n^2-29n+208=0$$
$$n^2-16n-13n+208=0$$
$$n(n-16)-13(n-16)=0$$
$$(n-16)(n-13)=0\quad\therefore\quad n=13,\ 16$$

13 पद या 16 पद लिए जाएँ

[परीक्षण (Verification)—

यदि $n=13,\quad S_{13}=\frac{13}{2}\left\{84+(12\times-3)\right\}=\frac{13}{2}\left(84-36\right)$

$=\frac{13\times48}{2}=312$

यदि $n=16,\quad S_{16}=\frac{16}{2}\left\{84+(15\times-3)\right\}=8(84-45)$

$=8\times39=312$

अतः उक्त श्रेणी के 13 पदों का योग तथा 16 पदो का योग दोनों ही 312 होगे ।

$\therefore\quad n=13,\ 16]$

(iii) श्रेणी 2, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$, 4,......है जिसमे $a=2,\ d=\frac{2}{3}$,

$(4-3\frac{1}{3}$ या $3\frac{1}{3}-2\frac{2}{3}$ या $2\frac{2}{3}-2)\quad n=20$

$$S_n=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}=\frac{20}{2}\left\{2\times2+(20-1)\frac{2}{3}\right\}$$
$$=10\left\{4+\frac{19\times2}{3}\right\}=10\left(\frac{50}{3}\right)=\frac{500}{3}=166\frac{2}{3}$$

मान लिया nवाँ पद 76 है—$T_n=76$

$$T_n=a+(n-1)d$$

$$76=2+(n-1)\times\tfrac{2}{3};\ 74=\tfrac{2}{3}(n-1)$$

$$(n-1)=\frac{74\times3}{2}=111\quad\therefore\quad n=112$$

अतः 112वें पद का मान 76 होगा।

उदाहरण 13—(i) 100 और 200 सहित इनके बीच आने वाली सम-संख्याओं (even numbers) का योग ज्ञात कीजिए।

(ii) $3+7+11+\ldots\ldots$ के कितने पद लिए जाएँ कि उनका जोड़ 300 हो जाए।

(iii) समान्तर श्रेणी में क्रमबद्ध 4 पदों का योग 4 है। पहले और अन्तिम पद के गुणनफल तथा दोनों मध्यवर्ती पदों के गुणनफल का जोड़ -38 है। संख्याएँ बताइए।

हल—(i) $S=100+102+104+\ldots\ldots+200$

प्रथम पद $a=100$, सार्व-अन्तर $d=+2$, nवाँ पद$=200$

$$T_n=a+(n-1)d \text{ या } 200=100+(n-1)2$$

या $100=2n-2\quad\therefore\quad 2n=102$ या $n=51$

$$S_n=S_{51}=\tfrac{51}{2}\{2\times100+(51-1)2\} \text{ या } S_{51}=\tfrac{51}{2}(200+100)$$
$$=51\times150=7650.$$

(ii) $S_n=300,\ a=3,\ d=+4,\ n=?$

$$S_n=300=\frac{n}{2}\left\{2\times3+(n-1)\,4\right\} \text{ या } 300=\frac{n}{2}(6+4n-4)$$

या $600=2n+4n^2$

$$4n^2+2n-600=0 \text{ या } 2n^2+n-300=0$$

$$n=\frac{-1\pm\sqrt{1+2400}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{2401}}{4}=\frac{-1\pm49}{4}$$

$$=\frac{-50}{4} \text{ या } \frac{48}{4} \text{ अर्थात् } -12\tfrac{1}{2} \text{ या } 12$$

स्पष्ट है कि पदों की संख्या 12 होगी।

(iii) मानलिया कि चारों पद क्रमशः $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$ हैं। प्रश्नानुसार—

$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=4$$
$$(a-3d)(a+3d)+(a-d)(a+d)=-38$$

सरल करने पर— $4a=4\quad\therefore\quad a=1$

$$a^2-9d^2+a^2-d^2=-38 \text{ या } 2a^2-10d^2=-38$$

$$a^2-5d^2=-19 \text{ या } 1-5d^2=-19;\ d^2=\frac{-20}{-5}=4$$

$d=\pm2$ अतः $a=1,\ d=+2$ या -2

यदि $d=+2$ तो

श्रेणी $(1-6), (1-2), (1+2), (1+6)$ या $-5, -1, 3, 7.$

यदि $d=-2$, तो

श्रेणी $(1+6), (1+2), (1-2), (1-6)$ या $7, 3, -1, -5$.

अतः अभीष्ट पद—

$-5, -1, 3, 7$ या $7, 3, -1, -5$ है।

उदाहरण 14—(i) 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं (odd numbers) का योग ज्ञात कीजिए। *[B. Com., T.D.C. (II Yr. CQM) Raj., 1980]*

(ii) यदि एक समान्तर श्रेणी के प्रथम और अन्तिम पदों के मान क्रमशः 1 और 50 हों और श्रेणी का योग 204 हो तो सार्व-अन्तर क्या होगा?

(iii) एक समान्तर श्रेणी के उन तीन पदों को ज्ञात कीजिए जिनका योग 18 और गुणनफल 120 है।

हल—(i) $S=101+103+105+....+197+199$

$$a=101,\ d=+2,\ T_n=199$$

$$T_n=a+(n-1)\,d \quad \therefore \quad 199=101+(n-1).2$$

$$\therefore \quad 98=2n-2 \quad \therefore \quad 2n=100,\ n=50$$

$$S_n=S_{50}=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)\,d\right\}$$

$$=\frac{50}{2}\left\{(2\times 101)+(50-1).2\right\}$$

$$=25\ (202+98)=25\times 300=7500$$

(ii) $a=1,\ l$ या $T_n=50;\ \ S_n=204;\ d=?$

$S_n=\frac{n}{2}(a+l)$ या $204=\frac{n}{2}(1+50)$ या $51n=408$

$\therefore\ \ n=8;\ T_8=a+7d$ या $50=1+7d$ या $7d=49$

$\therefore\ \ d=7$ (सार्व-अन्तर)

(iii) मान लिया पद $a-d,\ a$ व $a+d$ है

योग : $(a-d)+(a)+(a+d)=3a=18 \quad \therefore \quad a=6$

गुणनफल : $(a-d).a.(a+d)$ या $a\,(a^2-d^2)=6\,(36-d^2)=120$

$\therefore \quad 36-d^2=20; \quad -d^2=-16 \qquad \therefore \quad d=\pm 4$

$a=6;\ \ d=\pm 4$

अतः पद इस प्रकार है : $6-4,\ 6,\ \ 6+4$

या $6-(-4),\ 6,\ 6+(-4)$

तीन संख्याएँ 2, 6, 10 या 10, 6, 2 होंगी।

उदाहरण 15—(i) श्रेणी का जोड़ कीजिए— $2\sqrt{3}+\frac{9}{\sqrt{3}}+\frac{12}{\sqrt{3}}+......9$ पदो तक।

(ii) श्रेणी 15, 12, 9 के कितने पद लिए जाएँ कि उनका जोड़ 36 हो जाए।

हल—(i) प्रथम पद $a=2\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\times 3}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}$

सार्व-अन्तर $d=\frac{12}{\sqrt{3}}-\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9}{\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}$

$$S_9=\frac{9}{2}\left\{2\times\frac{6}{\sqrt{3}}+8\times\frac{3}{\sqrt{3}}\right\}=\frac{9}{2}\times\frac{36}{\sqrt{3}}=\frac{162}{\sqrt{3}} \text{ या } 54\sqrt{3}.$$

(ii) $a=15,\ \ d=-3,\ \ S_n=36=\frac{n}{2}\{2\times 15+(n-1)\times -3\}$

$$36=\frac{n}{2}\{30-3n+3\} \quad \text{or} \quad 72=n(33-3n)=33n-3n^2$$

$$3n^2-33n+72=0;\ n^2-11n+24=0;\ (n-3)\,(n-8)=0$$

$$\therefore \quad n=3,\ 8.$$

अतः 3 पदों का योग और 8 पदो का योग भी 36 होगा।

उदाहरण 16—(i) सिद्ध कीजिए कि पहले n विषम पूर्णांकों (n odd integers) का जोड़ n^2 होता है।

(ii) किसी समान्तर श्रेणी में तीन क्रमिक संख्याओ का जोड़ 3 है और उनके वर्गों का जोड़ 75 है। संख्याएँ बताइए।

(iii) निम्न श्रेणी या $3n$ पदो तक का जोड़ ज्ञात कीजिए—

$$1+3-5+7+9-11+13+15-17.$$

हल—(i) $1+3+5+7+9+......n$ पदों तक

पहला पद— $a=1$; सार्व-अन्तर $d=+2$

$$S_n=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}=\frac{n}{2}\left\{2+(n-1)2\right\}$$
$$=\frac{n}{2}\left\{2+2n-2\right\}=\frac{n}{2}\times 2n=n^2.$$

(ii) मानलिया कि संख्याएँ $a-d, a, a+d$ हैं

∴ उनका जोड़ $(a-d)+(a)+(a+d)=3$ या $3a=3$ ∴ $a=1$

उनके वर्गों का जोड़ $(a-d)^2+(a)^2+(a+d)^2=75$

$$a^2+d^2-2ad+a^2+a^2+d^2+2ad=75$$
$$3a^2+2d^2=75 \text{ या } 2d^2=75-3=72$$
$$\therefore\ d^2=36 \text{ या } d=\pm 6$$

यदि $d=+6$ तो पद $(1-6), 1, (1+6)$ या $-5, 1$ व 7 हैं।

यदि $d=-6$ तो पद $(1+6), 1, (1-6)$ या $7, 1$ व -5 हैं।

तीनों पद $-5, 1$ व 7 या $7, 1$ व -5 हैं।

(iii) प्रदत्त श्रेणी समान्तर श्रेणी नहीं है परन्तु उसे तीन समान्तर श्रेणियों में विभाजित किया जा सकता है—

$S_{3n}=1+3-5+7+9-11+13+15-17\ldots 3n$ पदों तक

$=(1+7+13\ldots n$ पदों तक$)+(3+9+15\ldots n$ पदों तक$)+(-5-11-17\ldots$ …n पदों तक$)$

अतः $S_{3n}=S_1+S_2+S_3$

$S_1=1+7+13\ldots n$ पदों तक $=\frac{n}{2}\left\{2+(n-1)6\right\}=\frac{n}{2}(6n-4)=n(3n-2)$

$S_2=3+9+15\ldots n$ पदों तक $=\frac{n}{2}\left\{6+(n-1)6\right\}=\frac{n}{2}\times 6n=3n^2$

$S_3=-5-11-17\ldots n$ पदों तक $=\frac{n}{2}\left\{-10+(n-1)(-6)\right\}$

$$=\frac{n}{2}\left\{-10-6n+6\right\}=-n(3n+2)$$

$$S_{3n}=S_1+S_2+S_3=n(3n-2)+3n^2-n(3n+2)$$
$$=3n^2-2n+3n^2-3n^2-2n$$
$$=3n^2-4n.$$

उदाहरण 17—(i) ऐसी तीन राशियाँ ज्ञात कीजिए जो समान्तर श्रेढ़ी (A.P.) में हों तथा जिनका योग 33 और गुणनफल 1232 हो।

[B. Com., T.D.C. (II Yr. CQM), Raj, 1979, 1976]

(ii) समान्तर श्रेणी में तीन संख्याओं का योग 27 है और उनका गुणनफल 504 है, उन्हें ज्ञात कीजिए।

(iii) 500 और 1000 के मध्य आने वाली ऐसी प्राकृत संख्याओं (natural numbers) का योग ज्ञात कीजिए जो 13 से विभाज्य हों।

हल—(i) मान लिया राशियाँ $(a-d), a, (a+d)$ हैं

योग— $(a-d)+(a)+(a+d)=3a=33$ ∴ $a=11$

गुणनफल— $(a-d).a.(a+d)=a(a^2-d^2)=1232$

$$11(121-d^2)=1232;\ 121-d^2=112$$
$$\therefore\ -d^2=-9;\ d=\pm 3$$

अतः पद इस प्रकार हैं—

$T_1=11-3$ या $11-(-3)$ अर्थात् 8 या 14

$T_2=11$

$T_3=11+3$ या $11+(-3)$ अर्थात् 14 या 8

तीन राशियाँ 8, 11, 14 या 14, 11, 8 होंगी।

(ii) तीन संख्याओं का योग—$(a-d)+(a)+(a+d)=3a=27$ $\therefore$ $a=9$

$$\text{गुणनफल}—(a-d).a.(a+d)=a(a^2-d^2)=504$$

$$9(81-d^2)=504;\ 81-d^2=56 \quad \therefore \quad d^2=25$$

$$d=\pm 5$$

$T_1=a-d=9-5=4$ या $T_1=a-d=9-(-5)=14$

$T_2=a \quad =9$ $\qquad T_2=a \quad =9$

$T_3=a+d=9+5=14$ या $T_3=9+(-5) \quad =4$

अभीष्ट संख्याएँ हैं, 4, 9, 14 या 14, 9, 4

(iii) 500 को 13 से भाग देने पर 6 शेष रहता है क्योंकि $500=(13\times 38)+6$; अतः 500 से अधिक न्यूनतम संख्या $500+(13-6)=507$, 13 से विभाज्य है। 1000 को 13 से भाग देने पर 12 शेष बचता है क्योंकि $(13\times 76)+12=1000$; अतः $13\times 76=988$ अधिकतम संख्या है जो 1000 से कम है और 13 से विभाज्य है।

श्रेणी इस प्रकार है—

$$507+520+533+\ldots\ldots+988$$

$$a=507,\ d=+13,\ n=?$$

$$T_n=a+(n-1)d;\quad 988=507+(n-1).13$$

$$481=13n-13 \quad \therefore \quad 13n=494 \quad \therefore \quad n=38$$

अभीष्ट योग $\quad S_n=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$

$$=\frac{38}{2}\left\{2\times 507+37\times 13\right\}$$

$$=19(1014+481)=19\times 1495=28405$$

अतः 500 और 1000 के मध्य 13 से विभाजित होने वाली प्राकृत संख्याओं का जोड़ 28405 है।

उदाहरण 18—(i) एक A.P. में n पदों का योग $5n^2+3n$ है। श्रेणी ज्ञात कीजिए तथा अन्तिम पद (T_n) का मान बताइए।

(ii) प्राकृत अंकों की एक शृंखला निम्नवत् लिखी जाती है—

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16
...	...	...	...	...	...	...

सिद्ध कीजिए कि nवीं पंक्ति के अंकों का योग $n^2+(n-1)^2$ है।

हल—(i) $\qquad S_n=5n^2+3n$

यदि $n=1$ तो $S_1=5\times 1^2+3\times 1=\ 8=T_1$

,, $n=2$ तो $S_2=5\times 2^2+3\times 2=26\ (T_1+T_2)$

,, $n=3$ तो $S_3=5\times 3^2+3\times 3=54\ (T_1+T_2+T_3)$

पहला पद $T_1=8$, दूसरा पद $T_2=S_2-S_1=26-8=18$

तीसरा पद $T_3=S_3-S_2=54-26=28$

अतः श्रेणी इस प्रकार है—8, 18, 28, 38........

अन्तिम पद $\quad T_n=a+(n-1)d=8+(n-1)10=8+10n-10$

$$\therefore \quad T_n=10n-2$$

(ii) किसी A.P. के पदों का जोड़ ज्ञात करने के लिए पदों की संख्या, प्रथम पद और अन्तिम पद का मूल्य मालूम होना चाहिए—

nवीं पंक्ति में पदों की संख्या—पहली पंक्ति में पदों की संख्या$=1$

दूसरी ,, ,, ,, ,, ,, $=3$

तीसरी ,, ,, ,, ,, ,, $=5$

चौथी ,, ,, ,, ,, ,, $=7$

∴ nवीं पंक्ति में पदों की संख्या = A.P. 1, 3, 5, 7 का nवाँ पद

nवाँ पद $=1+(n-1)2=1+2n-2=2n-1$ (श्रेणी में $a=1$ व $d=2$)

प्रथम पद—मान लिया कि nवीं पंक्ति का प्रथम पद t_n है और सभी पंक्तियों के प्रथम पदों का जोड़ $=S_n$ है—

$$S=1+2+5+10+\ldots\ldots t_n$$
$$S=\quad 1+2+5+10+\ldots\ldots t_{n-1}+t_n \text{ (प्रत्येक पद को एक स्थान आगे रखने पर)}$$

घटाने पर—

$$0=1+1+3+5+\ldots\ldots(n-1) \text{ पद तक}-t_n$$
$$t_n=1+(1+3+5+7+\ldots\ldots n-1 \text{ पदों तक})$$
$$=1+\left[\frac{n-1}{2}\left\{2\times1+(n-2)2\right\}\right] \quad \because \; S_n=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$$
$$=1+\left\{\frac{n-1}{2}\left(2+2n-4\right)\right\} \text{ या } 1+\left\{\frac{n-1}{2}\left(2n-2\right)\right\}$$
$$\text{या } 1+\left\{(n-1)(n-1)\right\}$$
$$=1+(n-1)^2 \quad \text{या} \quad n^2-2n+2$$

अन्तिम पद—प्रत्येक पंक्ति का अन्तिम पद उस पंक्ति की क्रम संख्या का वर्ग है जैसे

पहली पंक्ति का अन्तिम (एकमात्र) पद $1^2=1$ है

दूसरी पंक्ति का अन्तिम पद $2^2=4$ है

तीसरी पंक्ति का अन्तिम पद $3^2=9$ है

चौथी पंक्ति का अन्तिम पद $4^2=16$ है

nवीं पंक्ति का अन्तिम पद n^2 है।

इस प्रकार nवीं पंक्ति का प्रथम पद $a=(n-1)^2+1$

nवीं पंक्ति का अन्तिम पद $l=n^2$

nवीं पंक्ति के पदों की संख्या $=2n-1$

अतः nवीं पंक्ति के पदों का जोड़—

$$S=\frac{2n-1}{2}\left[\left\{(n-1)^2+1\right\}+n^2\right] \qquad \because \; S_n=\frac{n}{2}\left(a+l\right)$$
$$=\frac{2n-1}{2}\left(n^2-2n+1+1+n^2\right) \text{ या } \frac{2n-1}{2}\left(2n^2-2n+2\right)$$
$$=(2n-1)(n^2-n+1)$$
$$=2n^3-3n^2+3n-1$$
$$=n^3+n^3-3n^2+3n-1$$
$$=n^3+(n-1)^3$$

उदाहरण 19—(i) सिद्ध कीजिए कि a और b के बीच n समान्तर माध्यों का योग a और b के समान्तर माध्य का n गुना होता है।

(ii) एक प्रत्याशी को दो पदों में से एक का चयन करना है। पहले पद में आरम्भिक वेतन 220 रु० मासिक है तथा 8 रु० प्रति वर्ष की वेतन-वृद्धि मिलती है। दूसरे पद के लिए वेतन 185 रु० प्रति माह से आरम्भ होता है लेकिन उस पर 12 रु० प्रति वर्ष की दर से वेतन-वृद्धि मिलती है। उसने ऐसे पद को स्वीकार करने का निर्णय किया जिससे उसे सेवाकाल के प्रथम **20** वर्षों में अधिक प्राप्ति हो। उसे कौनसा पद स्वीकार करना चाहिए ?

हल—(i) n समान्तर माध्यों को $A_1, A_2, A_3\ldots\ldots A_n$ द्वारा व्यक्त करने $a, A_1, A_2, A_3, A_4\ldots\ldots A_n, b$ एक A.P. है जिसमें $(n+2)$ पद हैं।

इस श्रेणी का जोड़ $=\frac{n+2}{2}(a+b)$ $\left\{\because \; S_n=\frac{n}{2}(a+l)\right\}$

a और b के बीच के पदों (समान्तर माध्यों) का जोड़

$$=\left\{\frac{n+2}{2}(a+b)\right\}-(a+b)$$
$$=(a+b)\left\{\left(\frac{n+2}{2}\right)-1\right\}$$
$$=(a+b)\left(\frac{n+2-2}{2}\right)=(a+b)\frac{n}{2}$$
$$=\frac{n}{2}(a+b)$$

a और b का समान्तर माध्य $=\dfrac{a+b}{2}$

इसका n गुना $\qquad =n\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\dfrac{n}{2}(a+b)$

अतः a और b के बीच n समान्तर माध्यों का योग $=\dfrac{n}{2}(a+b)=a$ और b के समान्तर माध्य का n गुना $=n\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

(ii) पहले पद में प्रत्याशी का 20 वर्षों का कुल अर्जित वेतन—

पहले वर्ष का वेतन $=220\times 12=2640$ रु०

दूसरे वर्ष का वेतन $=228\times 12=2736$ रु०

तीसरे वर्ष का वेतन $=236\times 12=2832$ रु०

$\therefore$ 20 वर्षों का कुल वेतन $=(220\times 12)+(228\times 12)+(236\times 12)+\ldots\ldots 20$ पदों तक

$=12(220+228+236+\ldots\ldots+20$ पदों तक)

$$=12\left\{\frac{20}{2}(2\times 220+19\times 8)\right\}$$
$$=12(10\times 592)=12\times 5920=71040 \text{ रु०}$$

दूसरे पद में 20 वर्षों का कुल अर्जित वेतन—

$=12(185+197+209+\ldots\ldots 20$ पदों तक)

$$=12\left\{\frac{20}{2}(2\times 185+19\times 12)\right\}$$
$$=12(10\times 598)=12\times 5980=71760 \text{ रु०}$$

स्पष्ट है कि वह दूसरे पद को स्वीकार करेगा।

उदाहरण 20—(i) एक व्यक्ति ने 10 वर्षों में कुल 16,500 रु० की बचत की। प्रथम वर्ष के बाद प्रति वर्ष उसने पूर्वगामी वर्ष की अपेक्षा 100 रु० अधिक बचाये। बताइये पहले वर्ष उसने कितनी धनराशि बचायी ?

(ii) एक क्यारी में कुल 2520 पौधे हैं। प्रथम पंक्ति में 160 पौधे हैं। प्रत्येक पंक्ति में उससे पिछली पंक्ति की अपेक्षा एक निश्चित संख्या में कम पौधे हैं। इस प्रकार अन्तिम पंक्ति में 80 पौधे रह जाते हैं। क्यारी में कुल कितनी पंक्तियाँ हैं ? नवी और उन्नीसवी पंक्तियों में कितने पौधे हैं ?

हल—(i) प्रथम वर्ष की बचत, $T_1=a=?$

वर्षों की संख्या, $n=10$, सार्व-अन्तर, $d=+100$

10 वर्षों की कुल बचत $S_{10}=16500$

$$S_n=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\} \text{ या } 16500=\frac{10}{2}\left\{2a+(10-1)100\right\}$$

$16500=5(2a+900)$ या $10(a+450)=16500$

$a+450=1650 \quad \therefore \quad a=1650-450=1200$ रु०

पहले वर्ष की बचत $=1200$ रु०

(ii) क्यारी में कुल पौधों की संख्या $S_n=2520$
पहली क्यारी में पौधों की संख्या $T_1=a=160$
अन्तिम पंक्ति मे पौधों की संख्या $T_n=80$
पंक्तियो की संख्या $n=?$

$$S_n=\frac{n}{2}\left[\{a\}+\{a+(n-1)\,d\}\right] \text{ या } S_n=\frac{n}{2}\left\{T_1+T_n\right\}$$

अतः $2520=\frac{n}{2}\left(160+80\right)$ या $2520=\frac{n\times240}{2}$

$$\therefore\; n=\frac{2520}{120}=21$$

21वी (अन्तिम) पंक्ति में पौधों की संख्या $T_{21}=80$

$$T_{21}=a+20d \text{ या } 160+20d=80$$

$$\therefore\; d=\frac{80-160}{20}=-4$$

नवी पंक्ति व उन्नीसवी पंक्ति में पौधों की संख्या—

$T_9=a+8d$	$T_{19}=a+18d$
$=160+(8\times-4)$	$=160+(18\times-4)$
$=160-32=128$.	$=160-72=88$

अतः क्यारी में पंक्तियों की संख्या $=21$
नवीं क्यारी में पौधों की संख्या $=128$
उन्नीसवीं क्यारी में पौधों की संख्या $=88$

उदाहरण 21—(i) एक संयन्त्र की मूल लागत 12 लाख रु० थी। यदि उस पर पहले वर्ष 15% की दर से, दूसरे वर्ष $13\frac{1}{2}\%$, तीसरे वर्ष 12%, चौथे वर्ष $10\frac{1}{2}\%$ और इसी प्रकार···· मूल लागत पर ह्रास काटा जाता है तो पाँचवें वर्ष के अन्त मे और दसवें वर्ष के अन्त में उस संयन्त्र का क्या मूल्य होगा ?

(ii) एक फर्म के कर्मचारी को 10710 रु० गिनने है। वह पहले आधे घण्टे तक 180 रु० प्रति मिनट के हिसाब से राशि गिनता है और उसके बाद वह प्रत्येक मिनट पिछले मिनट की अपेक्षा 3 रु० कम गिनता है। पूरी राशि को गिनने में उसे कुल कितना समय लगता है ?

हल—(i) मान लीजिए संयन्त्र की मूल लागत 100 रु० है। उस पर पहले, दूसरे, तीसरे, चौथे·······वर्ष के अन्त में ह्रास की दरें क्रमशः 15, 13·5, 12, 10·5.... आदि हैं जो समान्तर श्रेणी में हैं।

अतः $a=15$, $d=-1\cdot5$

दसवें साल ह्रास की दर $T_{10}=a+(n-1)\,d$

$$=15+(10-1)\times-1\cdot5$$
$$=15-(9\times1\cdot5)=1\cdot5$$

10 वर्षों में कुल ह्रासित-मूल्य—

$$S_{10}=\frac{10}{2}\left\{2\times15+(10-1)(-\tfrac{3}{2})\right\}=5\,(30-13\cdot5)$$
$$=5\times16\cdot5 \text{ या } 82\cdot5 \text{ रु०}$$

अतः दसवें वर्ष के अन्त में संयन्त्र का मूल्य $=100-82\cdot5=17\cdot5$ रु०

कुल मूल लागत 12,00,000 रु० है अतः दसवें साल के अन्त में उसका मूल्य—

$$=\frac{1200000\times17\cdot5}{100}=210000 \text{ रु०}$$

(ii) गिनी जाने वाली कुल धनराशि $=10710$ रु०
पहले 30 मिनटों मे गिनी गई राशि $18\times30=5400$ रु०
गिनने के लिए शेष धनराशि $=531$

30 मिनट के बाद पहले अर्थात् 31वें मिनट में
गिनी जाने वाली राशि $=180-3=177$ रु०

प्रति मिनट 3 रु० कम गिने जाएँगे अतः $d=-3,\ a=177$

$S_n=5310,\ n=?$

$$S_n=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)\,d\right\} \quad \text{या} \quad 5310=\frac{n}{2}\left\{2\times 177+(n-1).-3\right\}$$

$$5310=\frac{n}{2}\left(354-3n+3\right) \quad \text{या} \quad 10620=n\,(357-3n)$$

$$357n-3n^2-10620=0 \quad \text{या} \quad 3n^2-357n+10620=0$$

$$n^2-119n+3540=0$$

$$n^2-60n-59n+3540=0$$

$$n\,(n-60)-59\,(n-60)=0$$

$$n=59 \quad \text{या} \quad 60$$

59 मिनटों में गिनी गई राशि—

$$=\frac{59}{2}\left(2\times 177-58\times 3\right)=\frac{59}{2}\times 180=5310$$

60वें मिनट में गिनी गई राशि—

$$T_{60}=a+59d=177+59\times -3=0$$

अतः कुल 10710 गिनने में लगने वाला समय $=30+59$

$=89$ मिनट या 1 घण्टा 29 मिनट

गुणोत्तर श्रेणी
(Geometrical Progression)

अर्थ—जब किसी श्रेणी के पदों का क्रम इस प्रकार का हो कि प्रत्येक पद का उससे पिछले पद से अनुपात एक समान रहे, तो उस श्रेणी को गुणोत्तर श्रेणी (Geometrical Progression or G. P.) कहा जाता है। गुणोत्तर श्रेणी में किसी भी संख्या को उससे पिछली संख्या से भाग देने पर सदा एक ही अचर राशि (constant quantity) प्राप्त होती है। इस श्रेणी के पद किसी अचर गुणनखण्ड से लगातार बढ़ते या घटते हैं। जिस अनुपात से पद बढ़ते या घटते हैं उस स्थिर अनुपात या दर को सार्व-अनुपात (common ratio) कहा जाता है। यह सार्व-अनुपात किसी भी पद को उसके पूर्वगामी पद से भाग देने पर ज्ञात होता है।

उदाहरण—

	गुणोत्तर श्रेणी	प्रथम पद	सार्व-अनुपात
(i)	2, 4, 8, 16, 32, 64...	2	2 $(4\div 2$ या $8\div 4...)$
(ii)	$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ..	1	$-\frac{1}{2}$ $(-\frac{1}{2}\div 1$ या $\frac{1}{4}\div -\frac{1}{2}...)$
(iii)	$a, ar, ar^2, ar^3...$	a	r $(ar\div a$ या $ar^2\div ar...)$

गुणोत्तर श्रेणी का सामान्य स्वरूप (General form)—

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3......ar^{n-1}$$

यह गुणोत्तर श्रेणी का सामान्य या व्यापक रूप है जिसमें प्रथम पद को a और सार्व-अनुपात को r द्वारा व्यक्त किया जाता है।

गुणोत्तर श्रेणी का nवां पद (nth term)—यदि गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद और सार्व-अनुपात ज्ञात हो तो श्रेणी का कोई भी पद (nth term) तथा पूरी श्रेणी का मान ज्ञात किया जा सकता है—

प्रथम पद	दूसरा	तीसरा	चौथा	पाँचवाँ	nवाँ
T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	.........T_n
a	ar	ar^2	ar^3	ar^4	.........ar^{n-1}
ar^{1-1}	ar^{2-1}	ar^{3-1}	ar^{4-1}	ar^{5-1}	.........ar^{n-1}

अतः nवां पद $T_n=ar^{n-1}$

पद की क्रम संख्या में से 1 घटाकर प्राप्त घातांक r पर रखने और उससे a को गुणा करने पर उस पद का मान प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 22—(i) निम्न श्रेणी का आठवाँ पद निकालिए—

$$2, 4, 8, 16........$$

[*B. Com., T.D.C. (II Yr. CQM) Raj., 1978 (N.C.)*]

(ii) निम्न श्रेणी का नवाँ पद ज्ञात कीजिए—

$$3, 6, 12, 24........$$

[*B. Com., T.D.C. (II Yr. CQM) Raj., 1976 (N.C.)*].

हल—(i) प्रदत्त श्रेणी G.P. है जिसका प्रथम पद $a=2$,

सार्व-अनुपात $r=2$ अर्थात् ($\frac{4}{2}$ या $\frac{8}{4}$ या $\frac{16}{8}$)

आठवाँ पद, $T_8=ar^{8-1}=ar^7=2\times2^7=256$

(ii) प्रदत्त G.P. में $a=3$, $r=2$ ($\frac{6}{3}$ या $\frac{12}{6}$ या $\frac{24}{12}$)

$$T_9=ar^8=3\times2^8=3\times256=768$$

उदाहरण 23—(i) एक गुणोत्तर श्रेणी का तीसरा पद 36 और छठा पद $121\frac{1}{2}$ है। श्रेणी बताइए।

(ii) निम्न गुणोत्तर श्रेणी में कौन-सा पद 32 होगा—

$$\tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, 1, 2...$$

हल—(i) $T_3=ar^2=36$, $T_6=ar^5=121\frac{1}{2}$

$$\frac{ar^5}{ar^2}=r^3=\frac{243}{2\times36}=\frac{27}{2\times4}=\frac{3\times3\times3}{2\times2\times2} \quad \therefore \quad r=3/2$$

तीसरा पद $T_3=ar^2=a\left(\frac{3}{2}\right)^2=36 \quad \therefore \quad a=\frac{36\times2\times2}{3\times3}=16$

प्रथम पद $a=16$; सार्व-अनुपात $r=\frac{3}{2}$

अतः गुणोत्तर श्रेणी—

$$16, 16\times\tfrac{3}{2}, 16\times\tfrac{9}{4}, 16\times\tfrac{27}{8}, 16\times\tfrac{81}{16}, 16\times\tfrac{243}{32}......$$

या $16, 24, 36, 54, 81, 121\frac{1}{2}......$

(ii) प्रथम पद $a=\frac{1}{16}$, सार्व-अनुपात $r=\frac{1}{8}\div\frac{1}{16}=2$

$$T_n=ar^{n-1} \text{ या } \tfrac{1}{16}\times2^{n-1}=32 \text{ या } 2^{n-1}=512$$

$$2^{n-1}=(2)^9=512 \quad \therefore \quad n-1=9 \quad \therefore \quad n=10$$

अतः उक्त श्रेणी में 10वें पद का मान 32 होगा।

उदाहरण 24—(i) निम्न श्रेणी का आठवाँ पद ज्ञात कीजिए—

$$1-\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{9}-\tfrac{8}{27}+........$$

[*B. Com., T.D.C. (II Yr. CQM), Raj, 1976*]

(ii) निम्न श्रेणी में कौनसा पद 81 है?

$$1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}........$$

(iii) एक गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.) का तीसरा पद उसके पहले पद का वर्ग है और पाँचवाँ पद 64 है। श्रेणी लिखिये।

हल—(i) यह G.P. है जिसका प्रथम पद, $a=1$ है। सार्व-अनुपात—

$$r=-\tfrac{2}{3} \quad (-\tfrac{2}{3}\div1 \text{ या } \tfrac{4}{9}\div-\tfrac{2}{3} \text{ या } \tfrac{8}{27}\div\tfrac{4}{9})$$

$$T_8=ar^7=1.(-\tfrac{2}{3})^7=-\frac{128}{2187}$$

(ii) मान लिया nवाँ पद 81 है, $T_n=81$

$$a=1 \qquad r=\frac{\sqrt{3}}{1} \text{ या } \frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$T_n=a.r^{n-1}=1.(\sqrt{3})^{n-1}=81$$
$$(\sqrt{3})^{n-1}=81 \quad 3^{1/2(n-1)}=81$$
$$3^{1/2(n-1)}=3^4 \quad \therefore \quad \tfrac{1}{2}(n-1)=4;\ n-1=8;\ n=9$$

अतः 9वाँ पद 81 है।

(iii) तीसरा पद $T_3=ar^2$ | $ar^2=(a)^2$ या $ar^2=a^2$

पहला पद $T_1=a$ | $r^2=(a^2/a)=a;$ ....(1)

पाँचवाँ पद $T_5=ar^4$ | $ar^4=64$ ....(2)

(2) में a का मान (r^2) आदिष्ट करने पर—

$$ar^4=64 \text{ या } r^2.r^4=64,\ r^6=64$$
$$r^6=2^6 \quad \therefore \quad r=\pm 2$$
$$a=r^2=4,\ r=\pm 2$$

अतः अभीष्ट श्रेढ़ी—$a, ar, ar^2, ar^3 ...... ar^{n-1}$

$=4, 8, 16, 32, 64......$ (यदि $r=+2$)

अथवा $4, -8, 16, -32......$ (यदि $r=-2$)

उदाहरण 25—(i) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9........$का कौनसा पद 729 होगा ?

(ii) उन गुणोत्तर श्रेणियों का निर्धारण कीजिए जिनका व्यापक पद निम्नांकित हो—

(क) $3\times 2^{n-1}$ (ख) 7^n

हल—(i) प्रदत्त श्रेणी में प्रथम पद, $a=\sqrt{3}$

सार्व-अनुपात, $r=\sqrt{3}$ $\left(\because \ \frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=...\sqrt{3}\right)$

$$T_n=a.r^{n-1}=729$$
$$\sqrt{3}.(\sqrt{3})^{n-1}=729 \text{ अतः } (\sqrt{3})^{n-1}=\frac{729}{\sqrt{3}} \text{ या } \frac{729\sqrt{3}}{3}$$
$$\therefore \ (\sqrt{3})^{n-1}=243.\sqrt{3} \text{ या } 3^5.\sqrt{3} \text{ या } (\sqrt{3})^{10}.\sqrt{3}=(\sqrt{3})^{10+1}$$
$$\therefore \ (\sqrt{3})^{n-1}=(\sqrt{3})^{11} \quad \therefore \quad n-1=11 \text{ अतः } n=12$$

अतः उक्त श्रेणी में 12वाँ पद 729 है।

(ii) (क) $T_n=3\times 2^{n-1}$

n का मान 1, 2, 3, 4... मानने पर—

$T_1=3.2^{1-1}=3$

$T_2=3.2^{2-1}=6$

$T_3=3.2^{3-1}=12$

$T_4=3.2^{4-1}=24$

अभीष्ट श्रेणी 3, 6, 12, 24... होगी

(ख) $T_n=7^n$

n का मान 1, 2, 3, 4... मानने पर—

$T_1=7^1=7$

$T_2=7^2=49$

$T_3=7^3=343$

$T_4=7^4=2401$

अभीष्ट श्रेणी 7, 49, 343, 2401... होगी

उदाहरण 26—(i) $0{\cdot}004+0{\cdot}02+0{\cdot}1+....$ का nवाँ पद ज्ञात कीजिए। 12·5 उक्त श्रेणी का कौनसा पद है ?

(ii) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का सातवाँ पद $\frac{1}{15625}$ हो और सार्व-अनुपात 5^{-1} हो तो पहला, चौथा और छठा पद ज्ञात कीजिए।

हल—(i) श्रेणी $\cdot004+\cdot02+\cdot1+....$ में प्रथम पद $\cdot004$ है और सार्व-अनुपात $\frac{\cdot02}{\cdot004}$ या $\frac{\cdot2}{\cdot02}=5$ अतः $a=\cdot004,\ r=5$

$$T_n=a.r^{n-1}=\cdot004\times 5^{n-1}=12{\cdot}5$$
$$\frac{4}{1000}\times 5^{n-1}=\frac{1}{125\times 2}\times 5^{n-1}=\frac{1}{2.5^3}\times 5^{n-1}$$
$$=\tfrac{1}{2}\times 5^{-3}\times 5^{n-1}=\frac{5^{n-4}}{2}$$

अतः व्यापक पद $T_n=\frac{5^{n-4}}{2}$

यदि $T_n=12\cdot5$ तो $n=?$

$$T_n=\frac{5^{n-4}}{2}=12\cdot5 \quad \therefore \quad 5^{n-4}=25=5^2$$

$$\therefore \quad n-4=2 \quad \text{अतः} \quad n=2+4=6$$

अतः छठे पद का मान 12·5 होगा।

(ii) $T_7=\frac{1}{15625}$, $r=5^{-1}$ या $\frac{1}{5}$, $a=?$, $T_4=?$, $T_6=?$

$T_n=a.r^{n-1} \quad \therefore \quad T_7=ar^6$

$$a\times\left(\frac{1}{5}\right)^6=\frac{1}{15625}=\frac{1}{(5)^6}$$

$$a\left(\frac{1}{5}\right)^6=\left(\frac{1}{5}\right)^6 \quad \therefore \quad a=1$$

$T_4=a.r^3$
$=1.\left(\frac{1}{5}\right)^3$
$=\frac{1}{125}$

$T_6=ar^5$
$=1.(5^{-1})^5$
$=1\times5^{-5}$
$=\frac{1}{5^5}=\frac{1}{3125}$

उदाहरण 27—तीन संख्याएँ जिनका योग 15 है समान्तर श्रेणी (A.P.) में हैं। यदि उनमें क्रमशः 1, 4 व 19 जोड़े जाएँ तो परिणामस्वरूप संख्याएँ गुणोत्तर श्रेणी (G.P.) में हो जाती हैं। संख्याएँ ज्ञात कीजिए। *[B. Com., Raj. 1981; I.C.W.A., 1971]*

हल—मान लिया कि समान्तर श्रेणी में प्रदत्त संख्याएँ निम्नवत् हैं—

प्रथम	द्वितीय	तृतीय
$T_1=a-d$	$T_2=a$	$T_3=a+d$

तीनों का जोड़—

$$T_1+T_2+T_3=(a-d)+(a)+(a+d)=15$$

$$\therefore \quad 3a=15 \quad \text{अतः } a=5$$

संख्याएँ → $(5-d)$, 5 तथा $(5+d)$ हैं।

क्रमशः 1, 4 व 19 जोड़ने पर—

$$(5-d+1), \quad (5+4), \quad (5+d+19)$$

$$= \quad (6-d) \qquad 9 \qquad (d+24)$$ तीनों G.P. में हैं।

अतः $$\frac{9}{6-d}=\frac{d+24}{9} \qquad \left[a, ar, ar^2 \ \because \ \frac{ar}{a}=\frac{ar^2}{ar}=r\right]$$

$\therefore \quad (6-d)(d+24)=81$ या $6d-d^2+144-24d=81$

$-d^2-18d+144-81=0$ या $d^2+18d-63=0$

$d^2+21d-3d-63=0$ या $d(d+21)-3(d+21)=0$

$(d-3)(d+21)=0 \quad \therefore \quad d=3$ या -21

यदि $d=3$
$T_1=(a-d)=5-3=2$
$T_2=a = =5$
$T_3=(a+d)=5+3=8$

यदि $d=-21$
$T_1=(a-d)=5-(-21)= 26$
$T_2=a = 5$
$T_3=(a+d)=5+(-21)=-16$

अतः अभीष्ट संख्याएँ 2, 5, 8 हैं या 26, 5, —16 है।

[परीक्षण—(i) 2, 5, 8 A P. में हैं—$a=2$, $d=+3$

1, 4, 19 जोड़ने पर $(2+1)$, $(5+4)$, $(8+19)$ अर्थात् 3, 9, 27 हो जो G P. में हैं—$a=3$, $r=3$

(ii) 26, 5, —16 A.P. में है—$a=26$, $d=-21$

1, 4 व 19 जोड़ने पर $(26+1)$, $(5+4)$, $(-16+19)$ अर्थात् जाती है जो G.P में है—$a=27$, $r=\frac{1}{3}$]

(ii) अन्तर $x-y=14$

गुणोत्तर माध्य $\sqrt{xy}=7\sqrt{3}$

$$x-y=14$$
$$xy=7^2.3=147$$
$$x+y=\sqrt{(x-y)^2+4xy}=\sqrt{14^2+4\times147}$$
$$=\sqrt{196+588}=\sqrt{784}=28$$
$$x+y=28$$
$$x-y=14 \quad \text{जोड़ने पर---}$$
$$2x=42 \quad \therefore \quad x=21$$
$$y=28-21=7$$

अत: दोनों सख्याएँ 21 व 7 है।

गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल (Sum of Geometric Progression upto nth term)—यदि गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a, सार्व-अनुपात r, पदों की संख्या n हो, तो n पदों तक उस श्रेणी का योग S_n निम्न प्रकार होगा—

$$S_n=a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^{n-3}+ar^{n-2}+ar^{n-1} \quad \ldots(1)$$

(1) को r से गुणा करने पर—

$$rS_n=ar+ar^2+ar^3+ar^4\ldots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n \quad \ldots(2)$$

(2) में से (1) घटाने पर—

$$rS_n-S_n=ar^n-a \quad \text{अथवा} \quad S_n(r-1)=a(r^n-1)$$

$$\therefore \quad S_n=\frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \quad \ldots(i)$$

अश और हर दोनों को -1 से गुणा करने पर

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \quad \ldots(ii)$$

इस प्रकार गुणोत्तर श्रेणी का n पदो तक योग करने के दो सूत्र है जिनका प्रयोग निम्न स्थितियों मे अलग-अलग किया जाएगा—

(i) यदि $r>1$	(ii) यदि $r<1$	(iii) यदि $r=1$
$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$	$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$	$S_n=na$

गुणोत्तर श्रेणी के योगफल का सूत्र प्रथम पद (a) और अन्तिम पद ($l=ar^{n-1}$) के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है—

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{ar^n-a}{r-1}=\frac{ar^{n-1}.r-a}{r-1}=\frac{lr-a}{r-1}$$

उदाहरण 32—निम्नलिखित श्रेणियों के निर्देशानुसार योगफल ज्ञात कीजिए—

(i) $2+4+8+16+\ldots\ldots$ 10वें पद तक।

(ii) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots\ldots$ 7 पदो तक।

(iii) $1, \sqrt{3}, 3\ldots\ldots$ 12 पदों तक।

हल—(i) प्रथम पद $a=2$, सार्व-अनुपात $r=\frac{4}{2}$ या $\frac{8}{4}=2$; $n=10$

$$\because \quad r>1 \quad \therefore \quad S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=\frac{2\times1023}{1}=2046.$$

(ii) $a=\frac{1}{2}$; $r=\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}$ या $\frac{2}{9}\div\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$; $n=7$

$$\because \quad r<1 \quad \therefore \quad S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{\frac{1}{2}\{1-(\frac{2}{3})^7\}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{128}{2187})}{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2059}{2187}\times\frac{3}{1}=\frac{2059}{1458}.$$

(iii) $a=1$, $r=\frac{\sqrt{3}}{1}$ या $\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$; $n=12$

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{1\{(\sqrt{3})^{12}-1\}}{\sqrt{3}-1}=\frac{(3)^6-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{729-1}{\sqrt{3}-1}$$

अंश और हर दोनों को $\sqrt{3}-1$ के संयुग्मी (conjugate) व्यंजक $\sqrt{3}+1$ से गुणा करने पर—

$$\frac{728}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{728(\sqrt{3}+1)}{3-1}=364(\sqrt{3}+1)$$

उदाहरण 33—(i) एक व्यक्ति जनवरी में 1 रु०, फरवरी मे 2 रु०, मार्च में 4 रु०, अप्रैल मे 8 रु०·······इस प्रकार दिसम्बर तक बचत करने का निर्णय करता है। उसकी बचत की कुल राशि कितनी होगी तथा दिसम्बर माह में वह कितनी राशि बचायेगा ? केवल श्रेढ़ियों के सूत्रों का प्रयोग कीजिए। *[B. Com., T.D.C. (II Yr. CQM), Raj., 1978]*

(ii) एक शतरंज के बोर्ड के प्रथम खाने में गेहूँ का एक दाना रखा जाता है, दूसरे खाने पर 2 दाने, तीसरे खाने पर 4 दाने तथा इसी प्रकार हर बार दानों की संख्या दुगुनी हो जाती है। यह मानते हुए कि शतरंज के बोर्ड के खानो की संख्या 64 होती है, रखे गए कुल दानों की संख्या ज्ञात कीजिए। *[B. Com , T.D C. (II Yr. CQM), Raj Suppl., 1979]*

हल—(i) जनवरी में 1 रु०, फरवरी में 2 रु०, मार्च में 4 रु०, अप्रैल मे 8 रु० और इसी प्रकार·······1, 2, 4, 8........G.P. मे हैं जिनका $T_1=a=1$, $r=2$, ($\frac{8}{4}$ या $\frac{4}{2}$ या $\frac{2}{1}$) दिसम्बर 12वाँ महीना है अतः $T_{12}=ar^{11}=1\times2^{11}=2048$ रु० बचत की कुल राशि $=1+2+4+8+16+........+2048$ (12 पदो तक)

$$S_{12}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{1.(2^{12}-1)}{2-1}=\frac{4096-1}{1}=4095 \text{ रु०}$$

अतः दिसम्बर माह की बचत $=2048$ रु०, पूरे 12 महीनों की कुल बचत $=4095$ रु०

(ii) कुल 64 खाने हैं पहले पर 1, दूसरे पर 2, तीसरे पर 4, चौथे पर 8 और इसी प्रकार दाने रखे जाते हैं।

यह G.P. है—1, 2, 4, 8.... ...64 पदो तक

$$a=1,\ r=2,\ n=64$$

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \qquad S_{64}=\frac{1.(2^{64}-1)}{2-1}$$

$$=2^{64}-1$$

[$2^{64}-1=$ Antilog {64 log 2}$-1=$(Antilog 19·264)-1
अभीष्ट राशि में 20 पूर्णाङ्क होंगे।]

उदाहरण 34—यदि गुणोत्तर श्रेणी के तीन पदो का योग $24\frac{4}{5}$ और गुणनफल 64 हों तो उनके मान बताइए।

हल—माना G. P. के तीन पद $\frac{a}{r}$, a तथा ar हैं

$$\left(\frac{a}{r}+a+ar\right)=\frac{124}{5} \quad ...(1) \qquad \frac{a}{r}.a.ar=a^3=64 \quad ...(2)$$

(2) के अनुसार $a=4$; (1) में a का मान आदिष्ट करने पर

$$\frac{4}{r}+4+4r=\frac{124}{5}$$

$$20+20r+20r^2=124r \quad \text{या} \quad 20r^2+20r-124r+20=0$$

$$5r^2+5r-31r+5=0 \quad \text{या} \quad 5r^2-26r+5=0$$

$$5r(r-5)-1(r-5)=0 \quad \therefore \quad r=5 \text{ या } \tfrac{1}{5}$$

पद $\frac{4}{5}$, 4, 20 या 20, 4 व $\frac{4}{5}$ है।

उदाहरण 35—निम्न श्रेणी का n पदो तक का योग ज्ञात कीजिए—

$3+33+333+3333+.........$ n पदों तक

[B. Com., T.D.C. (II Yr. CQM), Raj. 1980]

हल—माना कि $S_n=3+33+333+3333+.......n$ पदो तक

श्रेणी को 9 से भाग और 9 से गुणा करने पर—

$=\frac{3}{9}(9+99+999+9999+.......n$ पदो तक)

$=\frac{3}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+(10^4-$

$$=\frac{7}{9}[(10+10^2+10^3+10^4+\ldots\ldots n \text{ पदों तक}) - (1+1+1+1+\ldots\ldots n \text{ पदों तक})]$$

$$=\frac{3}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right] \quad \left[\because a=10, r=10 \therefore S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \text{ तथा } 1+1+1+\ldots\ldots n \text{ तक}=n\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right]=\frac{10}{27}(10^n-1)-\frac{n}{3}.$$

उदाहरण 36 — $\cdot 7+\cdot 77+\cdot 777+\cdot 7777+\ldots\ldots\ldots$ का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए।

हल — $S_n=\cdot 7+\cdot 77+\cdot 777+\cdot 7777+\ldots\ldots n$ पदों तक

$$=\frac{7}{9}[\cdot 9+\cdot 99+\cdot 999+\cdot 9999+\ldots\ldots n \text{ पदो तक}]$$

$$=\frac{7}{9}\left[\left(1-\frac{1}{10}\right)+\left(1-\frac{1}{100}\right)+\left(1-\frac{1}{1000}\right)+\ldots\ldots n \text{ पदों तक}\right]$$

$$=\frac{7}{9}\left[n-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots\ldots n \text{ पदों तक}\right)\right]$$

$$=\frac{7n}{9}-\frac{7}{9}\left[\frac{\frac{1}{10}\left\{\left(1-\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}}\right] \qquad \left(\because a=\frac{1}{10}, r=\frac{1}{10}\right)$$

$$=\frac{7n}{9}-\frac{7}{90}\left[\frac{\left(1-\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right]=\frac{7n}{9}-\frac{7}{90}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]\times\frac{10}{9}$$

$$=\frac{7n}{9}-\frac{7}{81}\left(1-\frac{1}{10}\right)^n=\frac{7}{9}\left[n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10}\right)^n\right]$$

उदाहरण 37 — (i) निम्नलिखित श्रेणी के कितने पद लिए जायें ताकि उनका योग $\frac{55}{72}$ हो जाए —

$$\frac{2}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\ldots\ldots$$

[B Com., T.D.C. (II Yr. CQM), Raj., 1979 N.C.]

(ii) $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{4}{3}\ldots\ldots$ में $\sqrt{6}$ कौनसा पद है ?

हल — (i) प्रदत्त श्रेढ़ी G.P. है जिसमें —

$$a=\frac{2}{9}, r=\left(-\frac{1}{3}\div\frac{2}{9}\right) \text{ या } \left(\frac{1}{2}\div-\frac{1}{3}\right)=-\frac{3}{2}$$

योग $\frac{55}{72}$ है — $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$, n ज्ञात करना है।

अतः
$$\frac{55}{72}=\frac{\frac{2}{9}\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}}{-\frac{3}{2}-1}=\frac{\frac{2}{9}\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}}{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{55}{72}\times-\frac{5}{2}\times\frac{9}{2}=\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}$$

$$-\frac{275}{32}+1=\left(-\frac{3}{2}\right)^n$$

$$-\frac{243}{32}=\left(-\frac{3}{2}\right)^n$$

$$-\frac{3^5}{2^5}=\left(-\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^5=\left(-\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\therefore \quad n=5$$

अतः 5 पदों का योग $\frac{55}{72}$ होगा।

(ii) प्रस्तुत श्रेणी G.P. है जिसका प्रथम पद $\frac{8}{9}$ है और सार्व-अनुपात,

$$r=\frac{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{8}{9}}=\frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\times\frac{9}{8}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{2}.\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$T_n=ar^{n-1}$$

$$\sqrt{6}=\frac{8}{9}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{n-1} \quad \text{या} \quad \sqrt{6}\times\frac{9}{8}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{n-1}$$

$$\frac{\sqrt{2\times3}\times3\times3}{2\times2\times2}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}.(\sqrt{3})^4}{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{(2)^4}}=\frac{(\sqrt{3})^5}{(\sqrt{2})^5}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5$$

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{n-1}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5 \quad \therefore \quad n-1=5$$

$$n=5+1=6$$

अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योग (Sum of Infinite G. P.)—n पदों तक गुणोत्तर श्रेणी का योग $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$ (यदि $r<1$) जैसे-जैसे n बड़ा होता जायेगा ar^n तथा $\frac{ar^n}{1-r}$ का मान भी छोटा होता जाएगा और n के अनन्त होने पर ($n\to\infty$) वह नगण्य हो जाएगा।

अतः अनन्त पदों तक गुणोत्तर श्रेणी का योग $S_\infty=\frac{a}{1-r}$ होगा।

उदाहरण 38—(i) $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\ldots\ldots$ का अनन्त पदों तक योग कीजिए।

(ii) $\sqrt{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{4\sqrt{2}}$ का अनन्त पदों तक जोड़ निकालिए।

हल—(i) $a=1, r=\frac{3}{4}\div1$ या $\frac{9}{16}\div\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$.

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4.$$

(ii) $a=\sqrt{2},\ r=\frac{-1}{\sqrt{2}}\div\sqrt{2}=-\frac{1}{2}$

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{\sqrt{2}}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

यदि गुणोत्तर श्रेणी के कुछ लगातार पदों का योग और गुणनफल ज्ञात हों तो उन पदों के मान परिकलित किए जा सकते हैं। परिकलन की सुविधा के लिए उन संख्याओं के लिए ऐसे संकेत माने जाते हैं कि गुणनफल में r का लोप हो जाए जैसे—

तीन अज्ञात क्रमिक पद	$\frac{a}{r}$, a, ar
पाँच अज्ञात क्रमिक पद	$\frac{a}{r^2}$, $\frac{a}{r}$, a, ar, ar^2
चार अज्ञात क्रमिक पद	$\frac{a}{r^3}$, $\frac{a}{r}$, ar, ar^3.

उदाहरण 39—किसी गुणोत्तर श्रेणी में पड़ने वाली लगातार तीन संख्याओं का जोड़ 38 और उनका गुणनफल 1728 है। उनके मान ज्ञात कीजिए।

हल—मानलिया कि संख्याएँ $\frac{a}{r}$, a व ar हैं।

गुणनफल : $\frac{a}{r}\times a\times ar=1728,\ a^3=1728\ \therefore\ a=\sqrt[3]{1728}=12$

योग : $\frac{12}{r}+12+12r=38$ या $12+12r+12r^2=38r$

$12r^2-26r+12=0$ या $6r^2-13r+6=0$

$6r^2-9r-4r+6=0;$ $3r(2r-3)-2(2r-3)=0$

$(3r-2)(2r-3)=0$ $\therefore$ $r=\frac{2}{3}$ व $\frac{3}{2}$.

अतः संख्याएँ : $\frac{12\times 3}{2}$, 12, $12\times\frac{2}{3}$, या 18, 12, 8

अथवा $\frac{12\times 2}{3}$, 12, $12\times\frac{3}{2}$ या 8, 12, 18

उदाहरण 40—गुणोत्तर श्रेणी में पड़ने वाली चार संख्याओं में से प्रथम दो का योग 44 और अन्तिम दो का योग 396 है। संख्याएँ निकालिए।

हल—मान लिया कि चारों संख्याएँ क्रमशः $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ हैं।

प्रथम दो का योग $\frac{a}{r^3}+\frac{a}{r}=44$ ...(1)

अन्तिम दो का योग $ar+ar^3=396$ ...(2)

समीकरण (1) को r^4 से गुणा करने पर—

$$\frac{ar^4}{r^3}+\frac{ar^4}{r}=44r^4 \text{ या } ar+ar^3=44r^4$$

लेकिन (2) के अनुसार $ar+ar^3=396$ $\therefore$ $44r^4=396$

$r^4=396\div 44$ $\therefore$ $r^2=\pm 3$

यदि $r^2=+3$

$\frac{a}{r^3}+\left(\frac{a}{r^3}\right)r^2=44$

$\frac{a}{r^3}+3\left(\frac{a}{r^3}\right)=44$

$4\left(\frac{a}{r^3}\right)=44$

$\therefore\ a/r^3=11$

$a/r=44-11=33$

अतः चारों पद हैं 11, 33, 99, 297

यदि $r^2=-3$

$\frac{a}{r^3}+\left(\frac{a}{r^3}\right)r^2=44$

$\frac{a}{r^3}-3\left(\frac{a}{r^3}\right)=44$

$-2\left(\frac{a}{r^3}\right)=44$

$a/r^3=-22$

$a/r=44-(-22)=66$

चारों पद $-22, 66, -198, 594$

उदाहरण 41—(i) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद 1 हो और अनन्त पदों तक उसका जोड़ 3 हो तो श्रेणी ज्ञात कीजिये।

(ii) किसी गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों का योग $\frac{1}{6}$ है और सार्व-अनुपात $\frac{1}{10}$ है तो श्रेणी का प्रथम पद ज्ञात कीजिए।

हल—(i) $a=1$, $S_\infty=3$ तो $r=?$

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}\quad\therefore\quad\frac{1}{1-r}=3$$

$3(1-r)=1$ या $3-3r=1$ या $-3r=-2$ $\therefore$ $r=\frac{2}{3}$

अतः श्रेणी $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}\ldots\ldots\infty$ होगी।

(ii) $S_{\infty}=\frac{1}{9}, r=\frac{1}{10}, a=?$

$$S_{\infty}=\frac{a}{1-r} \quad \text{अतः} \quad \frac{a}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}$$

$$\frac{a}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{9} \quad \therefore \quad a=\frac{1}{9}\times\frac{9}{10}=\ \text{या}\ \cdot 1$$

उदाहरण 42—(i) निम्न गुणोत्तर श्रेणी का अनन्त पदों तक योग ज्ञात कीजिए—

$$1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+\ldots\infty \qquad (x<1)$$

(ii) यदि $x<1$ और $y=x+x^2+x^3+\ldots.\infty$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$x=\frac{y}{1+y}$$

हल—(i) $a=1,\ r=2x,\ S_{\infty}=?$

$$S_{\infty}=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-2x}$$

(ii) $y=x+x^2+x^3+\ldots\infty=\frac{x}{1-x}$ [$\because$ $a=x, r=x$]

$$\frac{x}{1-x}=y \quad \text{या} \quad \frac{x-1+1}{1-x}=\frac{x-1}{1-x}+\frac{1}{1-x}$$

$$\therefore \quad y=-\frac{(1-x)}{1-x}+\frac{1}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}$$

$\therefore \quad y+1=\frac{1}{1-x}$ R.H.S. में अंश व हर को x से गुणा करने पर

$$y+1=\frac{x.1}{x\,(1-x)}=\frac{1}{x}.\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}y \qquad \left(\because \quad \frac{x}{1-x}=y\right)$$

$$\frac{y+1}{y}=\frac{1}{x} \quad \therefore \quad x=\frac{y}{1+y}$$

वैकल्पिक विधि—$y=\frac{x}{1-x}$ सिद्ध करना है कि $x=\frac{y}{1+y}$

R.H.S. में y का मान रखने पर—

$$\frac{y}{1+y}=\frac{\frac{x}{1-x}}{1+\frac{x}{1-x}} \quad \text{या} \quad \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-x+x}{1-x}}=\frac{x}{1-x}\times\frac{1-x}{1}=x \text{ L.H.S.}$$

$$\therefore \ x=\frac{y}{1+y}$$

उदाहरण 43—किसी गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों का योग 15 है और उनके वर्गों का योग 45 है। श्रेणी ज्ञात कीजिए।

हल—$S_{\infty}=\frac{a}{1-r}=15$ ...(i)

वर्गों का योग $\frac{a^2}{1-r^2}=45$ ...(ii)

(ii) को (i) से भाग देने पर

$$\frac{a^2}{1-r^2}\times\frac{1-r}{a}=\frac{45}{15} \quad \text{या} \quad \frac{a}{1+r}=3 \qquad \ldots(iii)$$

(i) को (iii) से भाग देने पर—

$$\frac{a}{1-r}\times\frac{1+r}{a}=\frac{15}{3} \quad \text{या} \quad \frac{1+r}{1-r}=5$$

$$1+r=5\,(1-r) \quad \text{या} \quad 1+r=5-5r \quad \text{या} \quad 6r=4$$

(iii) में r आदिष्ट करने पर

$$\frac{a}{1+\frac{2}{3}}=3 \quad \text{या} \quad a=3\times\frac{5}{3}=5$$

अत: श्रेणी इस प्रकार है $5 : \frac{10}{3} : \frac{20}{9} \ldots \ldots$

उदाहरण 44—गुणोत्तर श्रेणी की तीन क्रमिक संख्याओं का जोड़ 70 है। यदि दोनों सिरे के पदों को 4 से और माध्य को 5 से गुणा कर दी जाए तो गुणनफल समान्तर श्रेणी में हो जाते हैं। तीनों के मान ज्ञात कीजिए।

हल—मान लीजिए G.P. की तीनों संख्याएँ क्रमश: $\frac{a}{r}, a, ar$ हैं।

$$\left(\frac{a}{r}+a+ar\right)=70 \qquad \ldots(i)$$

$\frac{4a}{r}, 5a, 4ar$ A.P. में हैं। ...(ii)

$$5a=\frac{\frac{4a}{r}+4ar}{2} \quad \text{या} \quad 10a=\frac{4a}{r}+4ar$$

अर्थात्

$$10ar=4a+4ar^2 \quad \text{या} \quad 4ar^2+4a=10ar$$

$$4ar^2-10ar+4a=0$$

$2a$ सर्वनिष्ठ घटक निकालने पर—

$$2r^2-5r+2=0$$

$$2r^2-4r-r+2=0$$

$$2r(r-2)-1(r-2)=0 \quad \therefore \quad r=2, \tfrac{1}{2}$$

(i) में r का मान आदिष्ट करने पर

$$a\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=70$$

$$a\left(\tfrac{1}{2}+1+2\right)=70$$

$$a\left(\tfrac{7}{2}\right)=70$$

$$\therefore \quad a=\frac{70\times2}{7}=20$$

अत: $\frac{a}{r}=\frac{20}{2}=10, \quad a=20, \quad ar=20\times2=40$

संख्याएँ 10, 20, 40 हैं।

उदाहरण 45—एक गुणोत्तर श्रेणी के तीन सतत क्रमिक पदों का गुणनफल 216 है और उन पदों के युग्मों (pairs) के गुणनफलों का योग 156 है। पदों के मान बताइए।

हल—मान लिया G.P. के तीन पद $\frac{a}{r}, a,$ व ar हैं।

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=a^3=216 \quad \therefore \quad a=6$$

पद युग्मों के गुणनफलों का जोड़—

$$\left(\frac{a}{r}.a\right)+\left(\frac{a}{r}.ar\right)+\left(a.ar\right)=156$$

$$\frac{a^2}{r}+a^2+a^2r \quad \text{या} \quad a^2\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=156$$

$$\frac{1}{r}+r+1=\frac{156}{36}=\frac{13}{3}$$

$$1+r^2+r=\frac{13r}{3}$$

$$3+3r+3r^2-13r=0 \quad \text{या} \quad 3r^2-10r+3=0$$

$$3r^2-9r-r+3=0 \quad \therefore \quad 3r(r-3)-1(r-3)=0$$

$$\therefore \quad r=3 \quad \text{या} \quad \tfrac{1}{3}$$

प्रथम पद $\quad \frac{a}{r}=\frac{6}{3}$ या $\frac{6}{\frac{1}{3}}$ अर्थात् 2 या 18

द्वितीय पद $\quad a=6 \qquad 6$

तृतीय पद $\quad ar=6\times3$ या $6\times\frac{1}{3}$ 18 या 2

अतः तीनों संख्याएँ 2, 6 व 18 हैं।

उदाहरण 46—एक गुणोत्तर श्रेणी की चार क्रमिक संख्याओं का जोड़ 60 है। पहली और अन्तिम संख्या का समान्तर माध्य 18 है। संख्याएँ बताइए।

हल—मान लिया कि क्रमिक संख्याएँ निम्नांकित हैं—

$$\frac{a}{r}, \quad a, \quad ar, \quad ar^2$$

योग
$$\frac{a}{r}+a+ar+ar^2=60 \qquad \ldots(i)$$

$$\frac{\frac{a}{r}+ar^2}{2}=18$$

या
$$\frac{a}{r}+ar^2=36 \qquad \ldots(ii)$$

(i) में (ii) का मान रखने पर—

$$a+ar+36=60 \quad \therefore \quad a+ar=24$$

$$a\,(1+r)=24 \quad \text{या} \quad a=\frac{24}{1+r} \qquad \ldots(iii)$$

a का मान (ii) में आदिष्ट करने पर—

$$a\left(\frac{1}{r}+r^2\right)=36 \quad \text{या} \quad \frac{1}{r}+r^2=\frac{36}{a}$$

$$\frac{1}{r}+r^2=\frac{36}{\frac{24}{1+r}} \quad \text{या} \quad \frac{1}{r}+r^2=\frac{36\,(1+r)}{24}$$

$$\frac{1}{r}+r^2=\frac{3}{2}\,(1+r) \quad \text{या} \quad \frac{1+r^3}{r}=\frac{3\,(1+r)}{2}$$

$$2r^3-3r^2-3r+2=0$$

$$2r^2\,(r+1)-5r\,(r+1)+2\,(r+1)=0$$

$$(r+1)\,(2r^2-5r+2)=0$$

$$(r+1)\,(2r-1)\,(r-2)=0$$

$$\therefore \quad r=-1, \tfrac{1}{2} \text{ या } 2$$

(I) $r=-1$ (iii) में रखने पर—

$$a=\frac{24}{1-1}=\infty \qquad \text{असम्भव}$$

(II) $r=2$ (iii) मे रखने पर—

$$a=\frac{24}{1+2}=8$$

अतः अभीष्ट संख्याएँ—

$$\frac{a}{r}=\frac{8}{2}=4$$

$$a=8$$

$$ar=8\times2=16$$

$$ar^2=8\times4=32$$

(III) $r=\frac{1}{2}$ (iii) में रखने पर—

$$a=\frac{24}{1+\frac{1}{2}}=24\times\frac{2}{3}=16$$

अत

$$\frac{a}{r}=\frac{16}{\frac{1}{2}}=32$$

$$a=\quad=16$$

$$ar=16\times\tfrac{1}{2}=8$$

$$ar^2=16\times\tfrac{1}{4}=4$$

अतः मध्याएँ 4, 8, 16 व 32 हैं।

उदाहरण 47—धनात्मक सार्व-अनुपात वाली एक गुणोत्तर श्रेणी के चौथे पद का 12वें पद पर अनुपात $\frac{1}{256}$ है। यदि दोनों पदों का योग 61·68 हो तो 8 पदों तक श्रेणी का जोड़ ज्ञात कीजिए।

हल— $T_4=ar^3;\ T_{12}=ar^{11};\ \frac{T_4}{T_{12}}=\frac{ar^3}{ar^{11}}=\frac{1}{256}$

$$\frac{1}{r^8}=\frac{1}{256}\quad\therefore\quad r^8=2^8\quad\therefore\quad r=\pm2$$

$r=+2$ क्योंकि सार्व-अनुपात धनात्मक है

$$T_4+T_{12}=ar^3+ar^{11}=a(r^3+r^{11})=61{\cdot}68$$

$$a(2^3+2^{11})=a(8+2048)=61{\cdot}68$$

$$\therefore\quad a=\frac{61{\cdot}68}{2056}={\cdot}03$$

$$S_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}=\frac{{\cdot}03(2^8-1)}{2-1}=\frac{{\cdot}03\times255}{1}=7{\cdot}65$$

उदाहरण 48—यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी में n पदों का जोड़ S, गुणनफल P और पदों के व्युत्क्रमों (reciprocals) का गुणनफल R हो तो सिद्ध कीजिए कि—

$$P^2R^n=S^n$$

हल— $S=a+ar+ar^2+\ldots ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ (मान लिया $r<1$)

$$S^n=\frac{a^n(1-r^n)^n}{(1-r)^n}\qquad \ldots(1)$$

$$P=a.ar^1.ar^2.ar^3\ldots\ldots ar^{n-1}$$

$$=a^n.r^1.r^2.r^3\ldots\ldots r^{n-1}$$

$$=a^n r^{1+2+3+\ldots+(n-1)}$$

$$=a^n.r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)(1+n-1)}$$

$\left[1, 2, 3\ldots\ldots n-1 \text{ A.P. है जिसका जोड़ } \frac{n-1}{2}(1+n-1) \text{ होगा}\right]$

$$P^2=(a^n)^2\left\{r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)(n)}\right\}^2$$

$$=a^{2n}\,r^{n(n-1)}\qquad \ldots(2)$$

$$R=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ar}\cdot\frac{1}{ar^2}\cdot\frac{1}{ar^3}\cdots\frac{1}{ar^{n-1}}\quad\left(T_1=\frac{1}{a},\ \text{Ratio}=\frac{1}{r}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)}{1-\frac{1}{r}}=\frac{\frac{1}{a}\left(\frac{r^n-1}{r^n}\right)}{\frac{r-1}{r}}$$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{r^n-1}{r^n}\right)\left(\frac{r}{r-1}\right)=\frac{r(r^n-1)}{ar^n(r-1)}=\frac{1-r^n}{a(1-r)r^{n-1}}\ldots\ldots$$

$$R^n=\frac{(1-r^n)^n}{a^n(1-r)^n.r^{n(n-1)}} \qquad \ldots(3)$$

(2) व (3) को गुणा करने पर—

$$P^2.R^n=a^{2n}.r^{n(n-1)}.\frac{(1-r^n)^n}{a^n(1-r)^n r^{n(n-1)}}$$

$$=\frac{a^n(1-r^n)^n}{(1-r)^n}=\left\{\frac{a(1-r^n)}{1-r}\right\}^n=S^n \qquad \ldots(1)$$

$$\therefore \quad P^2.R^n=S^n \quad \text{या} \quad P^2=\left(\frac{S}{R}\right)^n$$

उदाहरण 49—यदि a^2+b^2, $ab+bc$ और b^2+c^2 गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.) में हों तो सिद्ध कीजिए a, b, c भी G.P. में हैं।

हल—a^2+b^2, $ab+bc$, और b^2+c^2 G.P. मे है।

अतः
$$(ab+bc)^2=(a^2+b^2)(b^2+c^2)$$

$$\{b(a+c)\}^2 \quad \text{या} \quad b^2(a^2+2ac+c^2)=a^2b^2+a^2c^2+b^4+b^2c^2$$

$$a^2b^2+2acb^2+b^2c^2=a^2b^2+a^2c^2+b^4+b^2c^2$$

$$2b^2ac-a^2c^2-b^4=0$$

$$a^2c^2-2acb^2+b^4=0$$

$$(ac-b^2)^2=0 \quad \therefore \quad ac-b^2=0$$

$$ac=b^2$$

अतः a, b और c भी G.P. में हैं।

समान्तरीय-गुणोत्तर श्रेणी (Arithmetico-Geometric Progression)—कुछ श्रेणियाँ ऐसी होती हैं जो न तो पूर्णतया समान्तर श्रेणी होती हैं और न ही गुणोत्तर श्रेणी कही जा सकती हैं। वरन् उनके विभिन्न पद एक समान्तर और एक गुणोत्तर श्रेणी के संगत पदों का गुणनफल होते हैं। इस प्रकार की श्रेणियाँ समान्तरीय-गुणोत्तर श्रेणियाँ (Arithmetico-Geometric Series) कहलाती है।

श्रेणी इस प्रकार होती है—

$$a,\ (a+d)\ r,\ (a+2d)\ r^2,\ (a+3d)\ r^3\ldots\ldots$$

समान्तरीय-गुणोत्तर श्रेणी का n पदों तक योग—

$$S_n=a+(a+d)\ r+(a+2d)\ r^2+\ldots+\{a+(n-1)\ d\}\ r^{n-1}$$

दोनों पक्षों को r से गुणा करके तथा एक पद आगे बढ़ाकर लिखने पर—

$$rS_n=ar+(a+d)\ r^2+(a+2d)\ r^3+\ldots\{a+(n-1)\ d\}\ r^{n-1}+\{a+(n-1)\ d\}\ r^n$$

घटाने पर—

$$S_n-rS_n=a+(dr+dr^2+dr^3+dr^4+\ldots dr^{n-1})-\{a+(n-1)\ d\}\ r^n$$

$$=a+dr\ (1+r+r^2+r^3+r^4+\ldots r^{n-1})-\{a+(n-1)\ d\}\ r^n$$

$$=a+\frac{dr\ (1-r^{n-1})}{1-r}-\{a+(n-1)d\}\ r^n$$

$$S_n=\frac{a}{1-r}+\frac{dr\ (1-r^{n-1})}{(1-r)^2}-\frac{\{a+(n-1)\ d\}r^n}{1-r}$$

समान्तरीय गुणोत्तर श्रेणी का अनन्त पदों तक योग—

$$S_\infty=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{1-r}+\frac{dr\ (1-r^{n-1})}{(1-r)^2}-\frac{\{a+(n-1)\ d\}\ r^n}{1-r}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}-\frac{dr^n}{(1-r)^2}-\frac{\{a+(n-1)\ d\}\ r^n}{1-r}\right]$$

जैसे-जैसे n का मान बढ़ता जाएगा r^n का मान छोटा होता जाएगा ($\because \ r<1$)। अतः $n\to\infty$ होने पर r^n नगण्य हो जाएगा और उन व्यंजकों की उपेक्षा की जा सकती है जिनमें r^n आया है। इस प्रकार—

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}$$

उदाहरण 50—(i) $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}$...... के n पदों का योग बताइए।

(ii) यदि $x<1$ तो श्रेणी $1+2x+3x^2+4x^3+$......... का अनन्त पदों तक (∞) जोड़ कीजिए।

हल—(i) $\frac{1}{2^0}, \frac{3}{2^1}, \frac{5}{2^2}, \frac{7}{2^3}$...... का nवाँ पद $\frac{2\times n-1}{2^{n-1}}$ होगा।

$$S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{9}{2^4}+\ ...\frac{2n-1}{2^{n-1}}.$$

हर गुणात्मक श्रेणी में है जिसका $r=\frac{1}{2}$.

दोनों पक्षों को $r=\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर—

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+...\frac{2n-3}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}.$$

घटाने पर—

$$(1-\tfrac{1}{2})S_n=1+\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^4}+...\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=1+1+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=1+\frac{1\{(1-\frac{1}{2})^{n-1}\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=3-\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$\therefore\ S_n=2\left[3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right]=6-\left(\frac{1}{2^{n-3}}+\frac{2n-1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=6-\frac{4+2n-1}{2^{n-1}}=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}.$$

(ii) $$S_\infty=1+2x+3x^2+4x^3+......\infty$$

x से गुणा करने पर—

$$xS_\infty=x+2x^2+3x^3+4x^4+......\infty$$

घटाने पर—

$$(1-x)S_\infty=1+x+x^2+x^3+......\infty$$

$$(1-x)S_\infty=\frac{1}{1-x}\qquad\left[\because\ a=1, r=x\ \ \therefore\ S_\infty=\frac{a}{1-r}\right]$$

$$S_\infty=\frac{1}{(1-x)^2}\ \text{या}\ (1-x)^{-2}$$

उदाहरण 51—n पदों तक जोड़िए $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+$......

हल—श्रेणी का nवाँ पद $\frac{1+3(-1)n}{5^{n-1}}=\frac{3n-2}{5^{n-1}}$ है।

माना $S=1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+......+\frac{3n-2}{5^{n-1}}$

यह समान्तरीय गुणोत्तर श्रेणी है जिसमें $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{5^2}, ...\frac{1}{5^{n-1}}$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं; सार्व-अनुपात $\frac{1}{5}$ है।

S की $\frac{1}{5}$ से गुणा करके एक पद आगे को स्थानान्तरित करके लिखने पर—

$$S=1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\dots\dots+\frac{3n-2}{5^{n-1}}$$

$$\frac{S}{5}=\quad \frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{7}{5^3}+\dots\dots+\frac{3n-5}{5^{n-1}}+\frac{3n-2}{5^n}$$

घटाने पर—

$$S\left(1-\tfrac{1}{5}\right)=1+\frac{3}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\dots\dots+\frac{3}{5^{n-1}}-\frac{3n-2}{5^n}$$

$$=1+3\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\dots\dots+\frac{1}{5^{n-1}}\right)-\frac{3n-2}{5^n}$$

$$=1+3\times\frac{1}{5}\left[\frac{1-(\frac{1}{5})^{n-1}}{1-\frac{1}{5}}\right]-\frac{3n-2}{5^n}$$

$$\tfrac{4}{5}S=1+\frac{3}{4}\left[1-\frac{1}{5^{n-1}}\right]-\frac{3n-2}{5^n}$$

या $$S=\frac{5}{4}+\frac{15}{16}\left[1-\frac{1}{5^{n-1}}\right]-\frac{3n-2}{4.5^{n-1}}=\frac{35}{16}-\frac{15}{16.5^{n-1}}-\frac{3n-2}{4.5^{n-1}}$$

$$=\frac{35}{16}-\frac{+15+12n-8}{16.5^{n-1}}=\frac{35}{16}-\frac{12n+7}{16.5^{n-1}}.$$

उदाहरण 52—निम्न श्रेणी का अनन्त पदों तक योग ज्ञात कीजिए—

(i) $1+\frac{5}{2}+\frac{9}{4}+\frac{13}{8}+\frac{17}{16}+\dots\dots\infty$

(ii) $1-\frac{3}{4}+\frac{5}{16}-\frac{7}{64}+\dots\dots\infty$

हल—(i) प्रदत्त श्रेणी को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है—

$$1.1+5.\frac{1}{2}+9.\frac{1}{2^2}+13.\frac{1}{2^3}+17.\frac{1}{2^4}+\dots\dots\infty$$

यह A.G. श्रेणी है—

$$1+5+9+13+17+\dots\dots \text{ A.P.}\to a=1,\ d=4$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots\dots \text{ G.P.}\to r=\tfrac{1}{2}$$

A.G. श्रेणी में $S_\infty=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{4\times\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{2}{\frac{1}{4}}$$

$$S_\infty=2+8=10$$

(ii) $1.1+3(-\tfrac{1}{4})+5(-\tfrac{1}{4})^2+7(-\tfrac{1}{4})^3+\dots\dots\infty$

$(1+3+5+7+\dots\dots\infty)+\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4^3}+\dots\dots\infty\right)$

$a=1,\ d=2$ (A.P.) | $r=-\frac{1}{4}$ (G.P.)

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}=\frac{1}{1-(-\frac{1}{4})}+\frac{2\times-\frac{1}{4}}{\{1-(-\frac{1}{4})\}^2}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}+\frac{-\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{4})^2}=\frac{1}{\frac{5}{4}}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{25}{16}}=\frac{4}{5}-\left(\frac{1}{2}\times\frac{16}{25}\right)$$

$$=\frac{4}{5}-\frac{8}{25}=\frac{12}{25}$$

उदाहरण 53—निम्न श्रेणी का अनन्त पदों तक योग कीजिए—

$$\frac{3}{7}-\frac{4}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{4}{7^4}\ldots\ldots\infty$$

हल— $$\frac{3}{7}-\frac{4}{7^2}+\frac{3}{7^3}-\frac{4}{7^4}+\ldots\ldots\infty$$

$$=\left(\frac{3}{7}+\frac{3}{7^3}+\frac{3}{7^5}+\ldots\infty\right)-\left(\frac{4}{7^2}+\frac{4}{7^4}+\frac{4}{7^6}+\ldots\infty\right)$$

$$=\left(\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{1}{7^2}}\right)-\left(\frac{\frac{4}{7^2}}{1-\frac{1}{7^2}}\right) \qquad \because\ S_\infty=\frac{a}{1-r}$$

$$=\left(\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{1}{49}}\right)-\left(\frac{\frac{4}{7^2}}{1-\frac{1}{49}}\right)=\left(\frac{3}{7}\times\frac{49}{48}\right)-\left(\frac{4}{49}\times\frac{49}{48}\right)$$

$$=\frac{7}{16}-\frac{1}{12}=\frac{21-4}{48}=\frac{17}{48}$$

उदाहरण 54—किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के अनन्त पदों तक का योग 4 है और उनके घनों (cubes) का योग (अनन्त तक) 192 है। श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।

हल—$S_\infty=\frac{a}{1-r}=4$ ...(1)

घन (cubes)—a^3, r^3

घनों का जोड़$=\frac{a^3}{1-r^3}=192$ ...(2)

समीकरण (1) का घन करने पर—

$$\left(\frac{a}{1-r}\right)^3=4^3=64=\frac{a^3}{(1-r)^3} \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (2) को (3) से भाग देने पर—

$$\frac{a^3}{1-r^3}\times\frac{(1-r)^3}{a^3}=\frac{192}{64}=3$$

$$\frac{(1-r)(1-r)^2}{(1-r)(1+r+r^2)}=3 \text{ या } \frac{1-2r+r^2}{1+r+r^2}=\frac{3}{1}$$

$$3+3r+3r^2=1-2r+r^2$$

$$2r^2+5r+2=0$$

$$2r^2+4r+r+2=0$$

$$2r(r+2)+1(r+2)=0$$

$$(2r+1)(r+2)=0$$

$$\therefore\ r=-\tfrac{1}{2},\ -2$$

यदि $r=-\frac{1}{2}$;

$$\frac{a}{1-r}=\frac{a}{1-(-\frac{1}{2})}=4a=4\times\frac{3}{2}=6$$

श्रेढ़ी— $6,\ -3,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{4}\ldots\ldots\infty$

यदि $r=-2$

$$\frac{a}{1-r}=\frac{a}{1-(-2)}=4,\quad \therefore\ a=12$$

श्रेढ़ी— $12,\ -24,\ 48,\ -96\ldots\ldots\infty$

हरात्मक श्रेणी
(Harmonical Progression)

अर्थ—वह श्रेणी जिसके पदों के व्युत्क्रम (reciprocal) समान्तर श्रेणी (A.P.) में हों हरात्मक श्रेणी (Harmonical Progression—H.P.) कहलाती है। उदाहरण—

(i) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$ ... ... ($\because$ 3, 5, 7, 9 .... स० श्रे० में हैं)

(ii) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{7}$ ... ... ($\because$ 2, −1, −4, −7 स० श्रे० में हैं)

(iii) $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}$ ... ... ($\because a, a+d, a+2d$ .... स० श्रे० में हैं)

अनुक्रम (iv) हरात्मक श्रेणी का मानक स्वरूप है।

यदि तीन राशियाँ a, b, c हरात्मक श्रेणी में हों तो—

$$a : c = (a-b) : (b-c)$$

प्रमाण—यदि a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं तो उनके व्युत्क्रम (reciproca's) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ समान्तर श्रेणी (A. P.) में होंगे—

अत: $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ या $\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}$

$\therefore \frac{a-b}{b-c}=\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}$ अतः $a : c=(a-b) : (b-c)$

हरात्मक श्रेणी का nवाँ पद (nth term of H. P.)—यह स्पष्ट किया जा चुका है कि हरात्मक श्रेणी के पदों के व्युत्क्रम समान्तर श्रेणी में होते हैं। अतः हरात्मक श्रेणी का कोई पद निकालने के लिये समान्तर श्रेणी का वाञ्छित पद निकाल कर उसका व्युत्क्रम कर लिया जाता है।

उदाहरण 55—(i) निम्न श्रेणी का 7वाँ पद ज्ञात कीजिए—

$$\frac{4}{3}+\frac{3}{2}+\frac{12}{7}+\ldots\ldots$$

(ii) यदि किसी हरात्मक श्रेणी का तीसरा पद $\frac{1}{12}$ और 16वाँ पद $\frac{1}{77}$ हो तो श्रेणी तथा उसके 7वें पद का मान बताइए।

(iii) 4, $4\frac{2}{7}$, $4\frac{8}{13}$, 5........हरात्मक श्रेणी में है। 7वाँ व 9वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल—(i) उक्त श्रेणी के पदों के व्युत्क्रम स० श्रेणी में हैं अर्थात्

$$\frac{9}{12}, \frac{8}{12}, \frac{7}{12}\ldots\ldots\ldots$$

$$a=\frac{9}{12};\ d=-\frac{1}{12};\ T_7=\frac{9}{12}+\left(6\times\frac{-1}{12}\right)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

$\therefore$ प्रदत्त हरात्मक श्रेणी का 7वाँ पद $=4$

(ii) हरात्मक श्रेणी के व्युत्क्रम पद समान्तर श्रेणी में होंगे—

$$T_3=12,\ T_{16}=77,\ T_7=?\ T_3=a+2d=12$$
$$T_{16}=a+15d=77$$

घटाने पर $13d=65 \quad \therefore \quad d=5;\quad a=12-10=2$

अतः श्रेणी 2, 7, 12, 17........है; $T_7=2+6\times5=32$

हरात्मक श्रेणी $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{12}, \frac{1}{17}$........है; और सातवाँ पद $\frac{1}{32}$ है।

(iii) $\frac{4}{1}, \frac{30}{7}, \frac{60}{13}, \frac{5}{1}$........हरात्मक श्रेणी में हैं।

इन पदों के व्युत्क्रम समान्तर श्रेणी में होंगे अर्थात्

$\frac{1}{4}, \frac{7}{30}, \frac{13}{60}, \frac{1}{5}$........समान्तर श्रेणी में हैं।

प्रथम पद $\quad a=\frac{1}{4};\ d=\frac{7}{30}-\frac{1}{4}=\frac{-1}{60}$ या $\frac{1}{5}-\frac{13}{60}=\frac{-1}{60}$

सातवाँ पद $\quad T_7=a+6d=\frac{1}{4}+\left(6\times\frac{-1}{60}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{3}{20}$

नवाँ पद, $T_9=a+8d=\frac{1}{4}+\left(8\times\frac{-1}{60}\right)=\frac{1}{4}-\frac{2}{15}=\frac{7}{60}$.

अत: हरात्मक श्रेणी के 7वें व 9वें पद का मान क्रमश: $\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$ और $\frac{60}{7}=8\frac{4}{7}$ है।

उदाहरण 56—(i) निम्न श्रेढ़ी का पाँचवां पद और सातवाँ पद ज्ञात कीजिए—

$$\frac{1}{3}+\frac{8}{23}+\frac{4}{11}+\ldots$$

[B. Com , T.D.C. (II Yr. CQM), Raj. 1976]

(ii) यदि a, b, c H P. में है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$$

हल—(i) प्रदत्त श्रेणी के व्युत्क्रम (reciprocals) समान्तर श्रेणी में हैं अर्थात्

$$\frac{3}{1}, \frac{23}{8}, \frac{11}{4}\ldots\ldots \text{या } \frac{24}{8}, \frac{23}{8}, \frac{22}{8}$$

$$a=\frac{24}{8},\ d=-\frac{1}{8},\left(\frac{22}{8}-\frac{23}{8}\right) \text{ या } \left(\frac{23}{8}-\frac{24}{8}\right)$$

$$T_5=a+4d=3+4\times-\frac{1}{8}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \text{ जिसका व्युत्क्रम}=\frac{2}{5}$$

$$T_7=a+6d=3+6\times-\frac{1}{8}=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4} \quad ,, \quad = \frac{4}{9}$$

अत: प्रदत्त हरात्मक श्रेणी का पाँचवाँ पद $\frac{2}{5}$ और सातवाँ पद $\frac{4}{9}$ है।

(ii) a, b, c H.P. में है अत: उनके व्युत्क्रम $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ A.P. में होंगे,

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b} \text{ या } \frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}$$

$$ab(b-c)=bc(a-b)$$

$$\frac{ab}{bc}=\frac{a-b}{b-c} \quad \therefore \quad \frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$$

उदाहरण 57—यदि एक हरात्मक श्रेढ़ी के mवें पद का मान n और nवें पद का मान m हों तो सिद्ध कीजिए कि $(m+n)$वें पद का मान $\frac{mn}{m+n}$ होगा।

हल—H.P. में $T_m=n, T_n=m$, $\therefore$ A.P. में $T_m=\frac{1}{n},\ T_n=\frac{1}{m}$

$$T_m=a+(m-1)d=\frac{1}{n},$$

$$a+md-d=\frac{1}{n} \quad \ldots(1)$$

$$T_n=a+(n-1)d=\frac{1}{m};$$

$$a+nd-d=\frac{1}{m} \quad \ldots(2)$$

घटाने पर—

$$d(m-n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$$

$$d=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}{m-n}=\frac{\frac{m-n}{mn}}{m-n}=\frac{m-n}{mn}\times\frac{1}{m-n}=\frac{1}{mn}$$

समी० (1) में d का मान आदिष्ट करने पर—

$$a+(m-1)\frac{1}{mn}=\frac{1}{n};\quad a+\frac{m-1}{mn}=\frac{1}{n}$$

$$a=\frac{1}{n}-\frac{m-1}{mn}=\frac{m-(m-1)}{mn}=\frac{m-m+1}{mn}=\frac{1}{mn}$$

$$T_{m+n}=a+(m+n-1)d=\frac{1}{mn}+\frac{m+n-1}{mn}=\frac{1+m+n-1}{mn}$$

$$T_{m+n}=\frac{m+n}{mn} \quad \text{अत: H.P. में } T_{m+n}=\frac{mn}{m+n}$$

हरात्मक माध्य (Harmonic Mean : H. M.)—यदि तीन राशियाँ हरात्मक श्रेणी में हों तो उनके बीच वाली राशि शेष दोनों राशियों का हरात्मक माध्य कहलाती है। दो राशियों a और b के बीच हरात्मक माध्य H है।

$\because$ a, H, b हरात्मक श्रेणी में है $\therefore$ $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ समान्तर श्रेणी में होंगे

$$\frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H} \text{ या } \frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$$

$2ab=H(a+b)$ $\therefore$ $H=\frac{2ab}{a+b}$; a और b के मध्य H.M. $\frac{2ab}{a+b}$ है।

n हरात्मक माध्य—मानलिया कि a और b के बीच n हरात्मक माध्य $H_1, H_2, \ldots\ldots H_n$ हैं। तब $a, H_1, H_2, \ldots\ldots H_n, b$ हरात्मक श्रेणी में होंगे या $\frac{1}{a}, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2}, \ldots\ldots \frac{1}{H_n}, \frac{1}{b}$ समान्तर श्रेणी में होंगे जिसमें $(n+2)$ पद हैं।

मानलिया श्रेणी का सार्व-अन्तर 'd' है तब—

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+(n+2-1)d=\frac{1}{a}+(n+1)d$$

$$\therefore \quad d=\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\div(n+1)=\frac{a-b}{ab(n+1)}$$

समान्तर माध्य— $\frac{1}{H_1}=\frac{1}{a}+\frac{a-b}{ab(n+1)}$, $\frac{1}{H_2}=\frac{1}{a}+\frac{2(a-b)}{ab(n+1)} \cdots \frac{1}{H_n}=\frac{1}{a}+\frac{n(a-b)}{ab(n+1)}$

हरात्मक माध्य $H_1, H_2, \ldots\ldots H_n$ इनके व्युत्क्रम होंगे...

$$\frac{ab(n+1)}{bn+a}, \frac{ab(n+1)}{b(n-1)+2a}, \frac{ab(n+1)}{b(n-2)+3a} \cdots\cdots \frac{ab(n+1)}{b+na}.$$

उदाहरण 58—(i) 3 और $\frac{6}{23}$ के मध्य 6 हरात्मक माध्य स्थापित कीजिए।

हल—3, $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, \frac{6}{23}$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

अत: $\frac{1}{3}, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2}, \frac{1}{H_3}, \frac{1}{H_4}, \frac{1}{H_5}, \frac{1}{H_6}, \frac{23}{6}$ समान्तर श्रेणी में होंगे।

पहला पद $a=\frac{1}{3}$, आठवाँ पद $T_8=a+7d$ या $\frac{1}{3}+7d=\frac{23}{6}$

$$\therefore \quad d=\left(\tfrac{23}{6}-\tfrac{1}{3}\right)\div 7=\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{1}{H_1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6};\ \frac{1}{H_2}=\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}=1\frac{1}{3};\ \frac{1}{H_3}=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{11}{6}$$

$$\frac{1}{H_4}=\frac{1}{3}+\frac{4}{2}=2\frac{1}{3};\ \frac{1}{H_5}=\frac{1}{3}+\frac{5}{2}=\frac{17}{6};\ \frac{1}{H_6}=\frac{1}{3}+3=3\frac{1}{3}.$$

अत: अभीष्ट हरात्मक माध्य $\frac{6}{5}, \frac{3}{4}, \frac{6}{11}, \frac{3}{7}, \frac{6}{17}, \frac{3}{10}$ है।

उदाहरण 59—$\frac{1}{16}$ और $\frac{1}{25}$ के मध्य 8 हरात्मक माध्य रखिए।

हल—$\frac{1}{16}, H_1, H_2, \ldots\ldots H_8, \frac{1}{25}$ हरात्मक श्रेणी में हैं, अत:

$16, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2} \cdots\cdots \frac{1}{H_8}$, 25 समान्तर श्रेणी में होंगे। कुल पद $n+2=10$ हैं

$$a=16,\ T_{10}=a+9d=25 \text{ या } 16+9d=25 \quad \therefore \quad d=1$$

$$T_2=\frac{1}{H_1}=16+1=17,\ \frac{1}{H_2}=18,\ \frac{1}{H_3}=19,\ \frac{1}{H_4}=20,\ \frac{1}{H_5}=21.$$

$$\frac{1}{H_7}=23,\ \frac{1}{H_8}=24.$$

हरात्मक माध्य इनके व्युत्क्रम होंगे अर्थात् $\frac{1}{16}$ और $\frac{1}{25}$ के बीच 8 हरात्मक माध्य $\frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19} \cdots \frac{1}{24}$ होंगे।

समान्तर, गुणोत्तर एवं हरात्मक माध्यों में सम्बन्ध—

मान लिया a एवं b के बीच A, G और H क्रमशः समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य हैं, तब $A=\frac{a+b}{2}$, $G=\sqrt{ab}$ एवं $H=\frac{2ab}{a+b}$

अब $$A\times H=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$$

$\therefore\ G=\sqrt{AH}$ अतः G, A एवं H का गुणोत्तर माध्य है।

अब $$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

=एक धनात्मक राशि (>0)

$\therefore\ A-G>0$ या $A>G$ परन्तु $AH=G^2$ या $H<G$

$\therefore\ A>G>H.$

विविध उदाहरण (Miscellaneous Illustrations)—

उदाहरण 60—प्राकृत संख्याओं को निम्न समूहों मे बाँटा जाता है—

1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9, 10; और इसी प्रकार····

50वें समूह के अंकों का जोड़ ज्ञात कीजिए।

हल—प्राकृत संख्याएँ इस प्रकार समूहों में क्रमबद्ध है कि पहले समूह में एक है, दूसरे मे अगली 2, तीसरे में अगली 3 और इसी प्रकार....। प्रत्येक समूह मे अन्तिम संख्या उस समूह के क्रम वाले अंक तक के प्राकृत अंको का जोड़ है—अर्थात् दूसरे समूह में अन्तिम संख्या $1+2=3$ होगी, तीसरे में यह $1+2+3=6$, चौथे मे $1+2+3+4=10$ और इसी प्रकार 49वें समूह का अन्तिम पद—

$$1+2+3+4+\ldots+49=\frac{49\times(49+1)}{2}=49\times25=1225$$

[प्रथम प्राकृतिक संख्याओं का जोड़ $\frac{n(n+1)}{2}$ होता है]

पचासवां समूह 1225 से अगली संख्या अर्थात् 1226 से आरम्भ होता है। अतः 50वें समूह की संख्याओं का जोड़—

$$1226+1227+1228+\ldots50 \text{ पदों तक}$$

$$a=1226,\ d=+1\quad n=50\quad\therefore\quad S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

$$=\frac{50}{2}\{(2\times1226)+(50-1)1\}=25(2452+49)=25\times2501=62525.$$

उदाहरण 61—निम्न श्रेणी का अनन्त पदों तक का योग ज्ञात कीजिए—

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\frac{5}{243}+\ldots\infty$$

हल— $$S=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\frac{5}{243}+\ldots\infty$$

$$S=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\frac{5}{3^5}\ldots\infty$$

$$S\left(\tfrac{1}{3}\right)=\quad\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\frac{4}{3^5}\ldots\infty$$ (दोनों पक्षों को $\frac{1}{3}$ से गुणा करने पर)

$\therefore \quad S(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}\ldots\infty$

या $\quad S(\frac{2}{3})=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$ $\qquad \left\{\because \; S_\infty=\frac{a}{1-r}\right\}$

$S(\frac{2}{3})=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore \quad S_\infty=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

उदाहरण 62—निम्न श्रेणी का अनन्त पदों तक योग निकालिए—

$$1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\frac{9}{16}\ldots\infty$$

हल— $\quad 1-\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}-\frac{7}{2^3}+\frac{9}{2^4}\ldots\infty$

सभी धनात्मक पदों को एक वर्ग में तथा सभी ऋणात्मक पदों को दूसरे समूह में पृथक् करने पर—

$$\left(1+\frac{5}{2^2}+\frac{9}{2^4}+\frac{13}{2^6}+\ldots\infty\right)-\left(\frac{3}{2^1}+\frac{7}{2^3}+\frac{11}{2^5}+\ldots\infty\right)$$

प्रथम श्रेणी का जोड़—

$$S_1=1+\frac{5}{2^2}+\frac{9}{4^4}+\frac{13}{2^6}+\ldots\infty$$

$\frac{1}{2^2}$ से गुणा करने पर—

$$\frac{1}{2^2}S_1= \quad \frac{1}{2^2}+\frac{5}{2^4}+\frac{9}{2^6}+\ldots\infty$$

घटाने पर—

$$S_1\,(1-\tfrac{1}{4})=1+\frac{4}{2^2}+\frac{4}{2^4}+\frac{4}{2^6}+\ldots\infty$$

$$S_1(\tfrac{3}{4})=1+4\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots\infty\right)$$

$$=1+4\left(\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}\right)=1+4\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right)=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$$

$$S_1=\frac{7}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{28}{9} \qquad \ldots(i)$$

द्वितीय श्रेणी का जोड़—

$$S_2=\frac{3}{2}+\frac{7}{2^3}+\frac{11}{2^5}+\ldots\infty$$

$$\frac{1}{2^2}\,(S_2)= \quad \frac{3}{2^3}+\frac{7}{2^5}+\ldots\infty$$

घटाने पर—

$$S_2(1-\tfrac{1}{4})=\frac{3}{2}+\frac{4}{2^3}+\frac{4}{2^5}+\ldots\infty$$

$$=\frac{3}{2}+4\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\ldots\infty\right)=\frac{3}{2}+4\left(\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^2}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}+4\left(\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}$$

$$S_2=\frac{13}{6}\times\frac{4}{3}=\frac{26}{9}$$

$$\therefore\quad S_\infty=S_1-S_2=\frac{28}{9}-\frac{26}{9}=\frac{2}{9}$$

वैकल्पिक रीति—A. G. P. के सूत्र द्वारा उक्त प्रश्न निम्न प्रकार हल किया जा सकता है—

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}\qquad[a=1,\ r=-\tfrac{1}{2},\ d=2]$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{2\times-\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2})^2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

[नोट—यदि उक्त प्रश्न के सभी पद धनात्मक (+) हों तो प्रश्न का हल उपर्युक्त विधि के अनुसार ही होगा। दूसरे भाग से पहले — के स्थान पर + का चिह्न होगा। परिकलन की क्रिया में कोई अन्तर नहीं होगा। लेकिन उत्तर निम्नवत् होगा—

$$S_\infty=S_1+S_2=\frac{28}{9}+\frac{26}{9}=\frac{54}{9}=6]$$

उदाहरण 63—(i) प्रथम n प्राकृत संख्याओं (first n natural numbers) का जोड़ (Σn) ज्ञात कीजिए।

(ii) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों (squares) का योग (Σn^2) परिकलित कीजिए।

(iii) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों (cubes) का योग (Σn^3) ज्ञात कीजिए।

हल—(i) $\qquad \Sigma n=1+2+3+\ldots\ldots+n \qquad$ (A.P.)

$$a=1,\ d=(2-1)\ \text{या}\ (3-2)=1\quad\therefore\quad S_n=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)\,d\right\}$$

$$\Sigma n=\frac{n}{2}\left\{2+(n-1).1\right\}=\frac{n}{2}\left(2+n-1\right)=\frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) $\qquad \Sigma n^2=1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots n^2$

$$(n-1)^3=n^3-3n^2+3n-1$$

$$n^3-(n-1)^3=n^3-(n^3-3n^2+3n-1)=n^3-n^3+3n^2-3n+1$$

$$\therefore\quad n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1 \qquad\ldots(1)$$

समीकरण (1) में $n=1,\ 2,\ 3\ldots\ldots n$ रखने पर—

$$1^3-(1-1)^3=3.1^2-3.1+1$$

$$2^3-(2-1)^3=3.2^2-3.2+1$$

$$3^3-(3-1)^3=3.3^2-3.3+1$$

L.H.S. को जोड़ने पर प्रत्येक समीकरण का पहला पद (1^3) अगले समीकरण के दूसरे पद $(2-1)^3$ से निरस्त (cancel out) हो जाता है और अन्त में n^3 ही शेष रहता है।

अतः $\qquad n^3=3(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots n^2)-3(1+2+3+\ldots\ldots n)+(1+1+1\ldots\ldots n\ \text{तक})$

$$n^3=3\Sigma n^2-3\Sigma n+n$$

$$\therefore\quad 3\Sigma n^2=n^3+3\Sigma n-n$$

$$=n^3-n+\frac{3n(n+1)}{2}\qquad\left[\because\ \Sigma n=\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=n(n^2-1)+\frac{3}{2}\left\{n(n+1)\right\}$$

$$=n(n+1)(n-1)+\frac{3}{2}\left\{n(n+1)\right\}$$

$$=n(n+1)\left\{n-1+\frac{3}{2}\right\}\ \text{या}\ n(n+1)\left(\frac{2n-2+3}{2}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore \quad \Sigma n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

(iii) $\Sigma n^3=1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots n^3$

$$(n-1)^4=n^4-4n^3+6n^2-4n+1$$

$$n^4-(n-1)^4=n^4-n^4+4n^3-6n^2+4n-1$$

$$=4n^3-6n^2-4n-1 \qquad \ldots($$

समीकरण (1) में $n=1, 2, 3 \ldots\ldots n$ रखने पर—

$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1$$

$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1$$

$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1$$

L.H.S. को जोड़ने पर प्रत्येक समीकरण का पहला पद अगले समीकरण के दूसरे पद निरस्त हो जाता है और अन्त में n^4 ही शेष रहता है।

अतः $n^4=4(1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots n^3)-6(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots n^2)$
$+4(1+2+3+\ldots\ldots n)-(1+1+1\ldots\ldots n$ तक$)$

$$n^4=4\Sigma n^3-6\Sigma n^2+4\Sigma n-n$$

$$4\Sigma n^3=n^4+6\Sigma n^2-4\Sigma n+n$$

$$=n^4+6\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}-4\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}+n$$

$$\left[\because \ \Sigma n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ और } \Sigma n=\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$4\Sigma n^3=n^4+n(n+1)(2n+1)-2\{n(n+1)\}+n$$

$$=n^4+n(2n^2+3n+1)-2(n^2+n)+n$$

$$=n^4+2n^3+3n^2+n-2n^2-2n+n$$

$$=n^4+2n^3+n^2$$

$$=n^2(n^2+2n+1)$$

$$=n^2(n+1)^2$$

$$\therefore \quad \Sigma n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{2^2}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

उदाहरण 64—(i) श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए—

$$1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots\ldots n \text{ पदों तक}$$

[B. Com., [illegible]]

(ii) $5.6+6.7+7.8+\ldots\ldots$ का n पदों तक [illegible]

हल—(i) प्रदत्त श्रेणी में—

$T_1=1(1+1)$, $T_2=2(2+1)$, $T_3=3(3+1)$ [illegible]

$$S_n=\Sigma n^2+\Sigma n$$

[illegible]

$\therefore \quad S_n=$ [illegible]

[illegible]

$$S_n = \Sigma n^2 + 9\Sigma n + 20n$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 9\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} + 20n$$
$$= \frac{n}{6}\left\{(n+1)(2n+1) + 27(n+1) + (120)\right\}$$
$$= \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 1 + 27n + 27 + 120\right)$$
$$= \frac{n}{6}\left(2n^2 + 30n + 148\right) = \frac{n}{3}\left(n^2 + 15n + 74\right)$$

[उदाहरणार्थ 6 पदों तक का योग $= \frac{6}{3}(6^2 + 15 \times 6 + 74) = 2 \times 200 = 400$

$5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 = 30 + 42 + 56 + 72 + 90 + 110 = 400$]

उदाहरण 65—निम्न श्रेणी का n पदों तक योग कीजिए—

$$2.4.6 + 4.6.8 + 6.8.10 + \ldots\ldots$$

हल—$T_1 = 2.(2+2).(2+4)$, $T_2 = 4(4+2)(4+4)$, $T_3 = 6(6+2)(6+4)$

$$T_n = 2n(2n+2)(2n+4)$$
$$= 2n.2(n+1).2(n+2)$$
$$= 8n(n+1)(n+2)$$
$$= 8n(n^2+3n+2)$$
$$= 8(n^3+3n^2+2n)$$
$$= 8n^3+24n^2+16n$$
$$S_n = 8\Sigma n^3 + 24\Sigma n^2 + 16\Sigma n$$
$$= 8\left\{\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right\} + 24\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\} + 16\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$= 2\{(n^2(n+1)^2\} + 4\{n(n+1)(2n+1)\} + 8\{n(n+1)\}$$

$+1)(4)$

$$= 2n(n+1)(n^2+n+4n+2+4)$$
$$= 2n(n+1)(n^2+5n+6)$$
$$\therefore\ S_n = 2n(n+1)(n+2)(n+3)$$

उदाहरण 66—निम्न श्रेणी का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए—

(i) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots\ldots$

(ii) $1.2^2 + 3.3^2 + 5.4^2 + 7.5^2 + \ldots\ldots$

हल—(i) $T_1 = 2^2$, $T_2 = 4^2$, $T_3 = 6^2$

या $T_1 = 4.1^2$, $T_2 = 4.2^2$, $T_3 = 4.3^2$ $\therefore$ $T_n = (2n)^2 = 4n^2$

$$S_n = 4\Sigma n^2 = 4\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\} = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

(ii) $1 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + 5 \times 4^2 + 7 \times 5^2 + \ldots\ldots n$ पदों तक

प्रत्येक पद, निम्न दो श्रेणियों के तत्संवादी पदों के गुणनफल से बना है—

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots \qquad \ldots(1)$$
$$2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots\ldots \qquad \ldots(2)$$

श्रेणी (1) का $T_n = 1 + (n-1)2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$

श्रेणी (2) का $T_n = \{2 + (n-1)1\}^2 = (2 + n - 1)^2 = (n+1)^2$

प्रदत्त श्रेणी का $T_n = (2n-1)(n+1)^2 = (2n-1)(n^2+2n+1)$

$$= 2n^3 + 3n^2 - 1$$
$$S_n = 2\Sigma n^3 + 3\Sigma n^2 - n$$
$$= 2\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + 3\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\} -$$
$$= 2\left\{\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right\} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-n$$
$$=\frac{n^2(n^2+2n+1)+2n^3+3n^2+n-2n}{2}$$
$$=\frac{n^4+2n^3+n^2+2n^3+3n^2-n}{2}$$
$$=\frac{n^4+4n^3+4n^2-n}{2}$$
$$=\frac{n}{2}(n^3+4n^2+4n-1)$$

उदाहरण 67—(i) उस श्रेणी का n पदों तक का योग ज्ञात कीजिए जिसका nवाँ पद $3n^2-n$ हो।

(ii) निम्न श्रेणी का n पदों तक का योग परिकलित कीजिए—

$$1+5+12+22+\ldots\ldots$$

(iii) श्रेणी $2+7+15+26+40+57+\ldots\ldots$ का n पदों तक जोड़ निकालिए।

हल—(i) $T_n=3n^2-n,\quad S_n=\Sigma t_n=3\Sigma n^2-\Sigma n$

$$=3\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}-\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\left\{2n+1-1\right\}=\frac{n(n+1)}{2}(2n)$$
$$=n^2(n+1)$$

(ii) $S_n=1+5+12+22+\ldots\ldots+T_n$ ...(1)

प्रत्येक पद को अगले स्थान में रखने पर—

$S_n=1+5+12+22+\ldots\ldots+T_n$ ...(1)

$=\quad 1+5+12+\ldots\ldots T_{n-1}+T_n$ ...(2)

समीकरण (2) को (1) में से घटाने पर—

$$0=1+4+7+10+\ldots\ldots-T_n$$
$$\therefore\quad T_n=1+4+7+10+\ldots\ldots=\frac{n}{2}\left\{2+(n-1)3\right\}$$
$$=\frac{n}{2}(2+3n-3)=\frac{n}{2}(3n-1)=\frac{1}{2}(3n^2-n)$$
$$S_n=\Sigma t_n=\tfrac{1}{2}\{3\Sigma n^2-\Sigma n\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{3\,n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}\left\{(2n+1)-1\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}\left\{2n\right\}=\frac{1}{2}n^2.(n+1)$$

(iii) $S_n=2+7+15+26+40+57+\ldots\ldots+T_n$

$S_n=\quad 2+7+15+26+40+\ldots\ldots+T_{n-1}+T_n$

घटाने पर— $0=2+5+8+11+14+17+\ldots\ldots-T_n$

$$\therefore\quad T_n=2+5+8+11+14+17+\ldots\ldots$$
$$=\frac{n}{2}\left\{4+(n-1)\,3\right\}\text{ या }\frac{n}{2}\left\{4+3n-3\right\}$$
$$=\frac{n}{2}\left(3n+1\right)=\frac{1}{2}\left(3n^2+n\right)$$
$$S_n=\frac{1}{2}\left\{3\Sigma n^2+\Sigma n\right\}=\frac{1}{2}\left\{3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}\left\{2n+1+1\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}\left\{2(n+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}n.(n+1)^2$$

उदाहरण 68—(i) यदि दो संख्याओं के मध्य हरात्मक माध्य (H.M.) और गुणोत्तर माध्य (G.M.) का अनुपात 12 : 13 हो तो उन संख्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि a, b, c A.P. में हों, b, c, d G.P. में हों और c, d, e H.P. में हों तो सिद्ध कीजिए कि a, c, e G.P. में होंगे।

(iii) यदि a, b, c समान्तर श्रेढ़ी में हों, p, q, r हरात्मक श्रेढ़ी में हों, ap, bq, cr गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों तो सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{p}{r}+\frac{r}{p}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$$

हल—(i) मान लिया कि दोनों संख्याएँ a व b हैं—

$$\text{H.M.}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2}{\frac{b+a}{ab}}=\frac{2ab}{a+b}$$
$$\text{G.M.}=\sqrt{ab}=\sqrt{ab}$$
$$\frac{\text{H.M.}}{\text{G.M.}}=\frac{\frac{2ab}{a+b}}{\sqrt{ab}}=\frac{12}{13}\Rightarrow\frac{2ab}{a+b}\times\frac{1}{\sqrt{ab}}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{12}{13}$$
$$\frac{(a+b)+(2\sqrt{ab})}{(a+b)-(2\sqrt{ab})}=\frac{13+12}{13-12}=\frac{25}{1}$$
$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{25}{1}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{5}{1}$$
$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{5+1}{5-1}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{b}}=\frac{6}{4}$$
$$\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}=\frac{3}{2}\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{9}{4}$$

अतः $a:b=9:4$

दोनों संख्याओं में 9 : 4 का अनुपात है।

(ii) a, b, c A.P. में है अतः $b=\frac{a+c}{2}$ ...(1)

b, c, d G.P. में है अतः $c^2=bd$ ...(2)

c, d, e H.P. में है अतः $d=\frac{2ce}{c+e}$ ...(3)

b और d के मान समीकरण (2) में रखने पर

$$c^2=bd=\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{2ce}{c+e}\right)=\frac{ce(a+c)}{(c+e)}$$
$$\frac{c^2}{c}=\frac{ce(a+c)}{c(c+e)}\Rightarrow c=\frac{e(a+c)}{c+e}$$
$$c(c+e)=e(a+c)\Rightarrow c^2+ce=ae+ce$$
$$\therefore\ c^2=ae$$

अतः a, c, e G.P. में हैं।

(iii) a, b, c A.P. में है अतः $b=\frac{a+c}{2}$

p, q, r H.P. में है अतः $q=\frac{2pr}{p+r}$

ap, bq, cr G.P. में है अतः $b^2q^2=ap.cr$

$$bq=\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{2pr}{p+r}\right)=\frac{(a+c).pr}{p+r} \quad ...(1)$$

$$b^2q^2=\frac{(a+c)^2p^2r^2}{(p+r)^2}=ap.cr=ac.pr$$

$$\Rightarrow\frac{(a+c)^2(pr)^2}{(p+r)^2}=ac.pr\Rightarrow\frac{(a+c)^2.pr}{(p+r)^2}=ac$$

$$(p+r)^2.ac=(a+c)^2.pr$$

$$\frac{(p+r)^2}{pr}=\frac{(a+c)^2}{ac}\Rightarrow\frac{p^2+r^2+2pr}{pr}=\frac{a^2+c^2+2ac}{ac}$$

$$\Rightarrow\frac{p^2+r^2}{pr}+\frac{2pr}{pr}=\frac{a^2+c^2}{ac}+\frac{2ac}{ac}$$

$$\frac{p^2+r^2}{pr}+2=\frac{a^2+c^2}{ac}+2$$

$$\frac{p^2+r^2}{pr}=\frac{a^2+c^2}{ac}$$

$$\frac{p^2}{pr}+\frac{r^2}{pr}=\frac{a^2}{ac}+\frac{c^2}{ac}$$

$$\frac{p}{r}+\frac{r}{p}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$$

महत्त्वपूर्ण सूत्र

1. समान्तर श्रेणी (A.P.)

(i) A.P.$\rightarrow a, (a+d), (a+2d), (a+3d), \ldots a+(n-1)\,d$

a=प्रथम पद d=सार्व-अन्तर

(ii) व्यापक पद $T_n=l=a+(n-1)\,d$

(iii) समान्तर माध्य (a और b के मध्य)$=\dfrac{a+b}{2}$

(iv) n पदों का योग, $S_n=\dfrac{n}{2}\left\{2a+(n-1)\,d\right\}$

$$=\frac{n}{2}\left(T_1+T_n\right) \text{ या } \frac{n}{2}\left(a+l\right)$$

(v) A.P. के तीन क्रमिक पदों को क्रमशः $(a-d), a, (a+d)$ मानिए।

(vi) A.P. के चार क्रमिक पदों को $(a-3d), (a-d), (a+d), (a+3d)$।

2. गुणोत्तर श्रेणी (G.P.)

(i) G.P.$\rightarrow a, ar, ar^2, ar^3 \ldots ar^{n-1}$

a=प्रथम पद, r=सार्व-अनुपात

(ii) व्यापक पद $T_n=ar^{n-1}$

(iii) दो संख्याओं a व b, में गुणोत्तर माध्य, $G=\sqrt{ab}$

(iv) n पदों का योग—

$$S_n=\frac{a\,(r^n-1)}{r-1} \text{ जबकि } r>1;\ S_n=\frac{a\,(1-r^n)}{1-r} \text{ जबकि } r<1$$

(v) अनन्त पदों तक का योग—$S_\infty=\dfrac{a}{1-r}$ $\quad |r|<1$

(vi) G.P. के तीन क्रमिक पद$\rightarrow \dfrac{a}{r}, a, ar$

चार क्रमिक पद$\rightarrow \dfrac{a}{r^3}, \dfrac{a}{r}, ar, ar^3$

3. समान्तरीय-गुणोत्तर श्रेणी (A-G.P.)

$$a,\ (a+d)\,r,\ (a+2d)\,r^2 \ldots \{a+(n-1)\,d\}.r^{n-1}$$

$$S_n=\frac{a}{1-r}+\frac{dr\,(1-r^{n-1})}{(1-r)^2}-\frac{\{a+(n-1)\,d\}\,r^n}{1-r}$$

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}$$

4. हरात्मक श्रेणी (H.P.)

(i) $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d} \cdots \frac{1}{a+(n-1)\,d}$ समान्तर श्रेणी के व्युत्क्रम (reciprocals)

(ii) हरात्मक माध्य (a और b के मध्य) $H=\frac{2ab}{a+b}$

5. समान्तर, गुणोत्तर व हरात्मक माध्यों का सम्बन्ध

$$G^2=A.H \quad \text{या} \quad G=\sqrt{A.H}$$

$$A > G > H.$$

अभ्यासार्थ प्रश्न (Questions)

(I) समान्तर श्रेणी (Arithmetic Progression)—

1. (i) यदि किसी समान्तर श्रेणी (A. P.) का प्रथम पद 3 और सार्व-अन्तर (common difference) $-\frac{1}{2}$ हो तो श्रेणी के 10वें और 12वें पद के मूल्य बतलाइए।
   (ii) यदि किसी समान्तर श्रेणी के 5वें और 11वें पद के मान क्रमशः 11 और -1 हों तो, श्रेणी की रचना कीजिए और 13वें पद तक का जोड़ निकालिए।
2. ज्ञात कीजिए—
   (i) एक समान्तर श्रेणी का 23वाँ पद जिसके चौथे और 54वें पद क्रमशः 64 और -61 हैं।
   [B. Com., CQM, Raj., 1978]
   (ii) श्रेणी का 16वाँ पद यदि समान्तर श्रेणी के 5वें और 9वें पद क्रमशः 11 और 7 हों।
3. (i) श्रेणी $-5, -11, -17$ का कौन-सा पद -179 होगा ?
   (ii) किसी समान्तर श्रेणी का pवाँ पद q और qवाँ पद p हो तो श्रेणी का mवाँ पद बताइए।
4. यदि किसी समान्तर श्रेणी में mवाँ पद n और nवाँ पद m हो तो सिद्ध कीजिए कि pवाँ पद $m+n-p$ होगा।
5. (i) किसी समान्तर श्रेणी के दूसरे और बारहवें पद के मान क्रमशः -44 और -4 हैं। श्रेणी ज्ञात कीजिए और उसके 23वें पद का मान बताइए। उसके कौनसे पद का मान 100 होगा ?
   (ii) किसी समान्तर श्रेणी का nवाँ पद $3n-5$ है। श्रेणी ज्ञात कीजिए और उसका 20वाँ पद निकालिए। किस पद का मान 100 होगा ?
6. (i) यदि किसी समान्तर श्रेणी का 5वाँ पद उसके पहले पद का तीन गुना हो तो सिद्ध कीजिए कि 7वाँ पद तीसरे पद का दोगुना होगा।
   (ii) यदि किसी समान्तर श्रेणी का mवाँ पद $\frac{1}{n}$ और nवाँ पद $\frac{1}{m}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि उसका mnवाँ पद 1 होगा।
7. (i) 2 और 57 के बीच 10 समान्तर माध्य (arithmetic means) रखिए।
   (ii) $3\frac{1}{2}$ और $-41\frac{1}{2}$ के बीच 17 समान्तर माध्य निकालिए।
8. (i) $\frac{1}{2}$ और $-9\frac{1}{2}$ के मध्य 19 समान्तर माध्य रखिए।
   (ii) x^2 और 1 के बीच x समान्तर माध्य रखिए।
9. एक फर्म पहले वर्ष में 125 रेफ्रिजरेटर बनाती है। तत्पश्चात् प्रति वर्ष 12 रेफ्रिजरेटर का उत्पादन बढ़ा देती है। 12वें वर्ष में कितने रेफ्रिजरेटर बनने लगेंगे ? यदि 13वें वर्ष से प्रति वर्ष उत्पादन वृद्धि की दर दोगुनी (24) कर दी जाए तो 20वें वर्ष के अन्त में कुल उत्पादन कितना होगा ? 21वें वर्ष से यदि उत्पादन 12 इकाइयाँ प्रतिवर्ष की दर से घटने लगे तो 30वें वर्ष के अन्त में उत्पादन कितना होगा ?

10. योग ज्ञात कीजिए—

(i) $3\frac{3}{4}, 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 3 \ldots\ldots$ 17 पदों तक ।

(ii) $-7\frac{1}{2}, -7, -6\frac{1}{2}, -6 \ldots\ldots$ 24 पदों तक ।

(iii) $3, 2\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 1 \ldots\ldots n$ पदों तक ।

11. (i) श्रेणी 3, 8, 13...... के कितने पदों का योग 1010 होगा ? *[B. Com., CQM, Raj., 1977]*

(ii) निम्न श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए—

$13+16+19+\ldots\ldots$ 20 पदों तक । *[B. Com., CQM, Raj., 1976]*

(iii) निम्न का योग कीजिए—

$1+3+5+\ldots\ldots$ 40 पदों तक ।

12. (i) श्रेणी का जोड़ कीजिए—

$-4-1+2+5\ldots\ldots$ 20 पदों तक ।

(ii) एक A.P. का तीसरा पद 18 है और सातवाँ पद 30 है । 17 पदों का योग ज्ञात कीजिए । *[B. Com., CQM (S), Raj., 1977 N. C.]*

(iii) श्रेणी $19+17+15+\ldots\ldots$ के कितने पदों का योग 91 होगा ? *[B. Com., CQM, Raj., 1976 N. C.]*

13. निम्न श्रेणियों का निर्देशानुसार योग ज्ञात कीजिए—

(i) $1\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \ldots\ldots n$ पदों तक ।

(ii) $\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, \sqrt{5} \ldots\ldots$ 25 पदों तक ।

(iii) $2a-b, 4a-3b, 6a-5b, 8a-7b \ldots\ldots n$ पदों तक ।

14. (i) $12+16+20+\ldots\ldots$ के कितने पद लिए जाएँ कि जोड़ 208 हो जाए ।

(ii) समान्तर श्रेणी $-9, -6, -3 \ldots\ldots$ के कितने पदों का योग 66 होगा ।

15. निम्न का योगफल ज्ञात कीजिए—

(i) विषम प्राकृतिक संख्याओं (odd natural numbers) का n तक ।

(ii) सम प्राकृतिक संख्याओं (even natural numbers) का n तक ।

(iii) प्राकृतिक संख्याओं (natural numbers) का n तक ।

16. (i) किसी समान्तर श्रेणी के पहले 11 पदों का जोड़ $82\frac{1}{2}$ है । यदि श्रेणी का 15वाँ पद 12 हो तो श्रेणी बताइए ।

(ii) यदि किसी समान्तर श्रेणी के तीन लगातार पदों का जोड़ 27 और गुणा 504 हो तो उन पदों के मान ज्ञात कीजिए ।

17. (i) तीन अंक जो समान्तर श्रेणी में हैं का योग 15 है । यदि अंकों का गुणनफल 105 हो तो अंक ज्ञात कीजिए । *[B. Com., CQM, Raj., 1977 N. C., 1980 Suppl.]*

(ii) किसी समान्तर श्रेणी का 10वां पद उसके 5वें पद से 10 अधिक है तथा उनका योग 32 है । श्रेणी ज्ञात कीजिए । *[B. Com. II Yr., CQM, Raj., 1981]*

(iii) किसी समान्तर श्रेणी के कुछ पदों का योग 36 है एवं प्रथम व अन्तिम पद क्रमशः 1 व 11 हैं । श्रेणी के कुल पदों की संख्या और सार्व-अन्तर बताइए ।

18. निम्नांकित श्रेणियों के अन्तिम पद और योग ज्ञात कीजिए—

(i) $1+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}+\ldots\ldots$ 58 पदों तक ।

(ii) $(3+4)+(8+9)+(13+14)+\ldots\ldots$ 20 पदों तक ।

19. (i) किसी समान्तर श्रेणी के तीन लगातार पदों का योग 12 और उनके घनों (cubes) का योग 408 है । उन पदों को बताइए ।

(ii) किसी समान्तर श्रेणी की चार लगातार संख्याओं का योग 20 और उनके वर्गों (squares) का योग 120 है । उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए ।

20. (i) समान्तर श्रेणी में पड़ने वाली ऐसी पाँच संख्याएँ बताइए जिनके मध्यमानों के वर्गों (squares of means) का योग 165 और सिरों की संख्याओं (extremes) के वर्गों का योग 170 हो ।

(ii) दो संख्याओं के मध्य जिनका योगफल $2\frac{1}{2}$ है, सम-संख्या (even number) में समान्तर माध्य रखे गये हैं । इन माध्यों का योग इनकी संख्या से एक अधिक है । माध्यों की संख्या निकालिए ।

21. (i) यदि एक समान्तर श्रेणी के n, $2n$, $3n$ पदों का योग क्रमशः S_1, S_2, S_3 हो तो सिद्ध कीजिए कि $S_3=3(S_2-S_1)$ ।

(ii) एक कम्पनी 1982 में 50 रंगीन टेलीविजन सेट प्रति माह बनाती है । वह अपना उत्पादन 2000 Colour TV सेट प्रति माह करना चाहती है । इस लक्ष्य को वह कितने समय में प्राप्त कर सकेगी यदि प्रति माह 15 सेट ही बढ़ सकते हैं ?

22. दो समान्तर श्रेणियो के n पदो के योग $(7n+4):(n+4)$ के अनुपात में है । उनके पाँचवें पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

23. B 9600 रु० के ऋण के 48 किश्तों में भुगतान करने की व्यवस्था करता है । किश्तें समान्तर श्रेणी में हैं । जब 40 किश्तों का भुगतान हो जाता है तब B दिवालिया हो जाता है और उसके ऋणदाता को यह पता चलता है कि 2400 रु० की राशि अदत्त है । B की पहली तीन किश्तों में से प्रत्येक का मूल्य ज्ञात कीजिए । ब्याज की गणना न कीजिए । [B. Com., Delhi, 1977]

24. एक फर्म ने प्रथम वर्ष में 1000 टेलीविजन सेटो का निर्माण किया । दस वर्षों के अन्त में फर्म द्वारा कुल मिलाकर 14500 सेटो का उत्पादन किया गया ।
(i) दसवें वर्ष कितने टी० वी० सेटो का निर्माण हुआ ?
(ii) यदि प्रति वर्ष उत्पादन में समान वृद्धि हुई हो तो, वार्षिक वृद्धि की दर परिकलित कीजिए ।
(iii) 15वें वर्ष और 20वें वर्ष में उत्पादन-स्तर क्या होगा यदि वार्षिक वृद्धि की दर पूर्ववत् रहे ।

25. एक लैम्प जलाने वाले को 100 गैस लैम्प जलाने हैं । उसे एक खम्भे से दूसरे खम्भे तक जाने में $1\frac{1}{2}$ मिनट का समय लगता है । प्रत्येक लैम्प में 10 c.c. (घन सेन्टीमीटर) प्रति घण्टा के हिसाब से गैस जलती है । यदि वह पहला लैम्प सायंकाल 6 बजे प्रज्वलित करता है तो बताइए रात्रि 8·30 बजे तक कितने घन सेन्टीमीटर (c.c.) गैस जलेगी ?

26. एक कर्मचारी का मासिक वेतन पहले तीन वर्षों में 320 रु० था । इसके बाद अगले 12 वर्षों में 40 रु० प्रति माह के हिसाब से उसे वार्षिक वृद्धियाँ मिलीं । तत्पश्चात् अवकाश-ग्रहण तक उसका वेतन स्थिर रहा जबकि उसके सम्पूर्ण सेवाकाल में औसत मासिक वेतन 698 रु० रहा । सेवा की अवधि ज्ञात कीजिए ।

(II) गुणोत्तर श्रेणी (Geometrical Progression)—

1. (i) $5\frac{1}{3}, 6\frac{2}{3}, 8, 9\frac{1}{3}$......मे 10वाँ पद बतलाइए ।
(ii) किसी गुणोत्तर श्रेणी का चौथा और 9वाँ पद क्रमशः $\frac{1}{8}$ और $\frac{1}{256}$ है । श्रेणी ज्ञात कीजिए ।

2. (i) किसी गुणोत्तर श्रेणी का 5वाँ पद 81 और 8वाँ पद 2187 है । श्रेणी बताइए ।
(ii) बताइए कि श्रेणी 96, 48, 24......मे $\frac{3}{16}$ कौन-सा पद है ?

3. (i) किसी गुणोत्तर श्रेणी का 5वाँ पद तीसरे पद का 9 गुना है और दूसरा पद 6 है । श्रेणी ज्ञात कीजिए ।
(ii) $1\frac{1}{2}$ और $\frac{2}{3}$ के बीच दो गुणोत्तर माध्य पद ज्ञात कीजिए ।

4. (i) 8 तथा $\frac{1}{16}$ के मध्य 6 गुणोत्तर माध्य (geometric mean) प्रविष्ट कीजिए ।
(ii) 9 और $\frac{1}{9}$ के मध्य 7 गुणोत्तर माध्य स्थापित कीजिए ।
(iii) $3\frac{5}{9}$ और $40\frac{1}{2}$ के बीच 5 गुणोत्तर माध्य रखिए ।

5. (i) एक गुणोत्तर श्रेणी मे तीन सख्याओ का जोड़ 21 है और उनका गुणनफल 216 है । संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।
(ii) उपर्युक्त प्रश्न (i) मे यदि सख्याओ का जोड़ 19 हो, गुणा वही (216) रहे तो संख्याएँ क्या होगी ?

6. (i) किसी गुणोत्तर श्रेणी की तीन लगातार राशियो का गुणनफल 216 है और उनके दो-दो के जोड़ों के गुणनफलो का योग 156 है । राशियाँ बताइए ।
(ii) किसी गुणोत्तर श्रेणी की तीन सख्याओं का योगफल 14 है । यदि प्रथम दो मे से प्रत्येक में एक जोड़ दिया जाए और तीसरे पद में से एक घटा दिया जाए तो प्राप्त संख्याएँ समान्तर श्रेणी में हो जाती हैं । गुणोत्तर श्रेणी वाली संख्याएँ बतलाइए ।

7. (i) श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए—

$$1+4+16+\ldots\ldots 9 \text{ पदों तक।}$$

(ii) किसी गुणोत्तर श्रेणी का तीसरा पद 24 है और छठा 81 है । प्रथम छः पदो को लिखिए और उनका योग ज्ञात कीजिए ।

8. (i) निम्न श्रेणी का अनन्त पदो तक योग ज्ञात कीजिए—

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots$$

(ii) निम्न श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए—

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\ldots\infty$$

(iii) निम्न अनन्त श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए—

$$1-\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^3+(\tfrac{1}{2})^4-\ldots\ldots$$

9\. (i) निम्नलिखित को हल करके योग निकालिए—

$$7+77+777+7777+\ldots\ldots 10 \text{ पदों तक।}$$

(ii) निम्न श्रेणी को 'n' पदों तक जोड़िए—

$$\cdot 7+\cdot 77+\cdot 777+\ldots\ldots$$ *[B. Com., CQM, Raj., 1976]*

निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेणियों के योगफल निर्देशानुसार ज्ञात कीजिए—

10\. $2, -4, 8\ldots\ldots$ 10 पदों तक।

11\. $\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, \frac{8}{\sqrt{2}}\ldots\ldots$ 7 पदों तक।

12\. $3+33+333+3333\ldots\ldots$ n पदों तक।

13\. $\cdot 2+\cdot 22+\cdot 222+\cdot 2222\ldots\ldots$ n पदों तक।

14\. $\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}+\ldots\ldots$ 6 पदों तक।

15\. $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots\ldots$ ∞ (अनन्त पदों तक)।

16\. $2+\sqrt{3}, 1, 2-\sqrt{3}\ldots\ldots$ ∞ तक।

17\. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^4}, \frac{1}{3^5}, \frac{2}{3^6}\ldots\ldots$ ∞ तक।

[संकेत—उक्त श्रेणी को पहले 2 भागों में बाँटिए $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}\ldots\infty$ तथा $\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}\ldots\infty$ इस प्रकार आगे बढ़िए।]

18\. $\frac{3}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{2}{5^4}+\ldots\ldots\infty$ तक।

निम्नलिखित श्रेणियों के जोड़ निर्देशानुसार परिकलित कीजिए—

19\. $$\frac{5}{7}+\frac{7}{21}+\frac{9}{63}+\frac{11}{189}+\frac{13}{567}+\ldots\ldots\infty \text{ तक।}$$

20\. $1, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{13}{8}\ldots\ldots n$ पदों तक तथा अनन्त पदों तक।

21\. $1+3x+6x^2+10x^3+\ldots\ldots\infty$ तक।

22\. $1+3+7+15+\ldots\ldots n$ पदों तक।

23\. निम्न श्रेणी के $3n$ पदों का योग निकालिए यदि $n=11$ हो—

$$1+5-11+8+9-14+15+13-17+22+17-20+\ldots\ldots$$

24\. (i) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के pवें, qवें तथा rवें पद के मान क्रमशः a, b व c हों तो सिद्ध कीजिए कि—

$$a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}=1$$

(ii) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का चौथा पद x, 7वाँ पद y और 11वाँ पद z हो तो सिद्ध कीजिए कि—

$$xz=y^2$$

25\. (i) किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का दूसरा पद 2 है और अनन्त पदों का जोड़ 8 है। श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।

(ii) किसी गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों का जोड़ 6 है और उनके घनों (cubes) का जोड़ $66\frac{6}{13}$ है। श्रेणी ज्ञात कीजिए।

26 निम्नांकित श्रेणियों का निर्देशानुसार योग ज्ञात कीजिए—

(i) $3+6+11+20+37+\ldots\ldots n$ पदों तक।

(ii) $\cdot 9+\cdot 09+\cdot 009+\cdot 0009+\ldots\ldots$ का 100 पदों तक।

(iii) $x(x+y)+x^2(x^2+y^2)+x^3(x^3+y^3)+\ldots\ldots\infty$

27\. (i) यदि श्रेणी $1, 2, 4\ldots\ldots$ का nवाँ पद, श्रेणी $256, 128, 64\ldots\ldots$ के nवें पद के बराबर हो तो n का मान बताइए।

(ii) मूल्यांकन कीजिए—(क) $0\cdot\dot{1}\dot{7}$, (ख) $1\cdot 4\dot{6}$, (ग) $0\cdot\dot{7}4\dot{2}$

(iii) निम्नलिखित श्रेणी का n पदों तक जोड़ ज्ञात कीजिए—

$$11+103+1005+10007+\ldots\ldots+T_n$$

28\. (i) किसी गुणोत्तर श्रेणी के पहले आठ पदों का जोड़ उसके पहले चार पदों के जोड़ का 5 गुना है। सार्व-अनुपात परिकलित कीजिए।

(ii) तीन संख्याएँ जिनका योग 18 है, समान्तर श्रेढ़ी में हैं, यदि उनमें क्रमशः 2, 4 व 11 जोड़ दिए जाएँ तो प्राप्त संख्याएँ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हो जाती हैं। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

29\. (i) एक अनन्त गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रत्येक पद उसके बाद के सभी पदों के जोड़ का तीन गुना है और पहले [illegible] पदों का योग 15 है। श्रेढ़ी का अनन्त पदों तक का जोड़ ज्ञात कीजिए।

(ii) एक व्यक्ति किसी भिखारी को पहले दिन 1 पैसा, दूसरे दिन 2 पैसे, तीसरे दिन 4 पैसे, चौथे दिन 8 पैसे और इसी प्रकार दान देने का विचार कर रहा है। 1984 में फरवरी माह के लिए उसे कितनी राशि की आवश्यकता होगी ?

30. (i) सिद्ध कीजिए कि 20 प्रतिशत प्रति वर्ष चक्रवृद्धि ब्याज की दर से संचित एक निश्चित राशि 4 वर्षों में अपने दोगुने से अधिक हो जाती है।

(ii) 10 प्रतिशत प्रति वर्ष चक्रवृद्धि ब्याज की दर से एक राशि 5 वर्षों में 8650 रु० तक संचित हो जाती है। आरम्भ में विनियोजित राशि ज्ञात कीजिए।

31. (i) यदि $y=x+x^2+x^3+\ldots\infty$, जहाँ $|x|<1$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$x=y-y^2+y^3\ldots\ldots\infty$$

(ii) यदि $x=1+a+a^2+\ldots\infty$, $y=1+b+b^2+\ldots\infty$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$1+ab+a^2b^2+\ldots\infty=\frac{xy}{x+y-1}$$

32. योगफल ज्ञात कीजिए—

$$\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^6}\right)+\ldots\infty$$

33. तीन क्रमिक महीनों में एक व्यक्ति पहली तारीख को लघु बचत कोष में कुछ राशि जमा करता है। तीनों जमा राशियों का योग 65 रु० है और वे गुणोत्तर श्रेणी में हैं। यदि दोनों सिरे की राशियों को 3 से गुणा कर दिया जाए और माध्य को 5 से गुणा किया जाए तो गुणनफल समान्तर श्रेणी में हो जाते हैं। जमा राशियाँ ज्ञात कीजिए।

(III) हरात्मक श्रेणी (Harmonic Progression)—

1. (i) श्रेणी $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots\ldots$ का 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

(ii) $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{4}\ldots\ldots$ श्रेणी में 7वाँ व 9वाँ पद निकालिए।

(iii) $2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}\ldots\ldots$ का 5वाँ व 7वाँ पद ज्ञात कीजिए।

2. (i) यदि एक हरात्मक श्रेणी का तीसरा पद $\frac{1}{5}$ और ग्यारहवाँ पद $-\frac{8}{19}$ हो तो श्रेणी ज्ञात कीजिए और छठा पद मालूम कीजिए।

(ii) श्रेणी $1, 1\frac{6}{19}, 1\frac{12}{13}, 2\frac{1}{11}\ldots\ldots$ का छठा पद निकालिए।

3. (i) एक हरात्मक श्रेणी का चौथा पद $\frac{1}{12}$ और दसवाँ पद $\frac{1}{42}$ है, उसके 13वें और 16वें पदों के मान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि किसी हरात्मक श्रेणी के पहले और दूसरे पद क्रमशः a व b हों तो उसका nवाँ पद निकालिए।

4. (i) $\frac{1}{2}$ और $\frac{4}{17}$ के बीच 2 हरात्मक माध्य स्थापित कीजिए।

(ii) 5 और -11 के मध्य 7 हरात्मक माध्य प्रविष्ट कीजिए।

5. (i) $\frac{1}{4}$ और $\frac{2}{13}$ के बीच चार हरात्मक माध्य रखिए।

(ii) 7 और $\frac{1}{8}$ के बीच 40 हरात्मक माध्य स्थापित कीजिए।

6. यदि a, b, c हरात्मक श्रेणी में हों तो सिद्ध कीजिए कि—

(क) $a : c=(a-b) : (b-c)$, (ख) $a : a-b=a+c : a-c$

[संकेत—(ii) वाम पक्ष (L.H.S.) में b के स्थान पर उसका मान $2ac/(a+c)$ रखकर आगे बढ़िए।]

(ii) यदि a और c का हरात्मक माध्य b हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}.$$

(iii) यदि किसी हरात्मक श्रेणी का mवाँ पद n और nवाँ पद m हो तो सिद्ध कीजिए कि pवाँ पद $\frac{mn}{p}$ होगा।

(iv) यदि किसी H.P. का pवाँ पद qr और qवाँ पद pr हो तो सिद्ध कीजिए कि उसका rवाँ पद pq होगा।

7. यदि $a^x=b^y=c^z$ और a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हों तो सिद्ध कीजिए कि x, y, z हरात्मक श्रेणी में होंगे।

8. यदि दो पद a और b का समान्तर माध्य A, गुणोत्तर माध्य G व हरात्मक माध्य H हों तो सिद्ध कीजिए कि (क) $AH=G^2$; (ख) $A>G>H$.

9. (i) दो संख्याओं का गुणोत्तर माध्य 12 और हरात्मक माध्य $\frac{48}{5}$ है। उन संख्याओं को बताइए।

(ii) दो संख्याओं का समान्तर माध्य उनके गुणोत्तर माध्य से 10 अधिक है और गुणोत्तर माध्य हरात्मक माध्य से 6 अधिक है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

10. (i) प्रथम n सामान्य संख्याओं से निर्मित श्रेणी के पदों का समान्तर माध्य उस श्रेणी के प्रथम व अन्तिम पद के समान्तर माध्य के बराबर होता है। सिद्ध कीजिए।

(ii) एक गुणोत्तर श्रेढ़ी में प्रथम पद a और सार्व-अनुपात r है। यदि $r < 1$ हो तो इस श्रेणी के अनन्त पद राशियों का योग बताइए।

(iii) प्रथम n विषम संख्याओं 1, 3, 5...... का योग तथा प्रथम n सम संख्याओं 2, 4, 6...... का योग ज्ञात कीजिए।

11. चार धनिक संख्याओं में से प्रथम तीन समान्तर श्रेणी (A.P.) में है और अन्तिम तीन गुणोत्तर श्रेणी (G.P.) में है। पहली अन्तिम संख्याओं का जोड़ 11 है और शेष दो का जोड़ 10 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

12. (i) सिद्ध कीजिए कि 2 और 10 के समान्तर, गुणोत्तर व हरात्मक माध्य गुणोत्तर श्रेढ़ी में है।

(ii) यदि दो संख्याओं के मध्य A_1, A_2; G_1, G_2 तथा H_1, H_2 क्रमशः समान्तर, गुणोत्तर व हरात्मक माध्य हों तो सिद्ध कीजिए—

$$G_1G_2 : H_1H_2 = (A_1+A_2) : (H_1+H_2)$$

उत्तर—I (A.P.)

1. (i) $-3, -4\frac{1}{2}$; (ii) 19, 17, 15, 13...; $S_{13}=91$. 2. (i) $16\frac{1}{2}$; (ii) 0. 3. (i) 30वाँ; (ii) $p+q-m$. 5. (i) $-48, -44, -40..., T_{23}=40$, 38वें पद का मान; (ii) $-2, 1, 4, 7....$, $T_{20}=55$, 35वें पद का मान; 7. (i) 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52; (ii) $1, -1\frac{1}{2}, -4, ... -36\frac{1}{2}, -39$. 8. (i) $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, -1\frac{1}{6} ... -8\frac{1}{6}, -8\frac{5}{6}, -9\frac{1}{6}$; (ii) $x^2-x+1, x^2-2x+2 ... 2x-1, x$. 9. 257, 449, 329. 10. (i) $29\frac{2}{3}$; (ii) -42; (iii) $\frac{n(10-n)}{3}$. 11. (i) 20; (ii) 830; (iii) 1600. 12. (i) 490; (ii) 612; (iii) 7 व 13 पदों का. 13. (i) $\frac{n}{2}\left(\frac{19-n}{8}\right)$; (ii) $75\sqrt{3}$; (iii) $n^2(a-b)+an$. 14. (i) 8; (ii) 11; 15. (i) n^2; (ii) $n(n+1)$; (iii) $\frac{n(n+1)}{2}$. 16. (i) $5, 5\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2}...$; (ii) 4, 9, 14 17. (i) 3, 5, 7; (ii) 3, 5, 7, 9, 11... . (iii) $n=6, d=2$. 18. (i) $T_{18}=20$, $S=609$; (ii) $T_{n}=(98+99)$, $S=2040$. 19. (i) 1, 4, 7; (ii) 2, 4, 6, 8. 20. (i) 1, 4, 7, 10, 13; (ii) 12. 21. (ii) 131 माह. 22. 5 : 1. 23. रु० 82·50, 87·50, 92·50. 24. (i) 1900; (ii) 100; (iii) 2400 व 2900 25. 1262·5 c.c. 26. 40 वर्ष।

उत्तर—II (G.P.)

1. (i) $\frac{81}{2}$; (ii) $\frac{27}{16}, \frac{9}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}....$ 2. (i) 1, 3, 9, 27...; (ii) 10वाँ। 3. (i) 2, 6, 18, 54, 162; (ii) 1 और $\frac{1}{3}$. 4. (i) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$; (ii) $3\sqrt{3}, 3, \sqrt{3}, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}$ व $\frac{1}{3\sqrt{3}}$; (iii) $\frac{16}{3}$, 8, 12, 18, 27. 5. (i) 3, 6, 12; (ii) 4, 6, 9. 6. (i) 2, 6, 18; (ii) 2, 4, 8. 7. (i) 87381; (ii) $10\frac{2}{3}$, 16, 24, 36, 54, 81, $S_6=221\frac{2}{3}$. 8. (i) $\frac{1}{3}$; (ii) 1; [illegible]

9. (i) 8641975300 या $\frac{7}{81}(10^{11}-100)$ या $\frac{700}{81}(10^{9}-1)$; (ii) $\frac{7}{9}\left\{n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right\}$.

10. -682. 11. $\frac{(585\sqrt{2}-292)}{2}$ या $\left(\frac{585}{\sqrt{2}}-146\right)$. 12. $\frac{10}{27}(10^n-1)$

13. $\frac{2n}{9}-\frac{2}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ या $\frac{2}{9}\left\{n-\frac{1}{9}\left(1-10^{-n}\right)\right\}$. 14. $39+13\sqrt{3}$.

16. $(5+3\sqrt{3})/2$. 17. [illegible] या ([illegible]). 18. [illegible] या ([illegible]). 19. [illegible].
20. $S_n=10-\frac{4n+5}{2^{n-2}}$; $S_\infty=10$. 21. $(1-x)^{-3}$ या $\frac{1}{(1-x)^3}$. 22. $2^{n+1}-(n+2)$.
23. $n(4n-9)$, 385. 25. (i) 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$......∞; (ii) 4, [illegible]......∞ या $-12, -36, -108$......∞. 26. (i) $\frac{n(n+1)}{2}+2^{n+1}-2$ (प्रत्येक पद को दो संख्याओं में इस प्रकार विभाजित कीजिए कि पहली संख्याओं से एक A.P. और दूसरी संख्याओं के अनुक्रम से एक G.P. बन जाए, यथा $3=(1+2)$, $6=(2+4)$, $11=(3+8)$... फिर $(1+2+3+...T_n)$ तथा $(2+4+8+...T_n)$ का जोड़ निकालिए। (ii) $1-\frac{1}{(10)^{100}}$; (iii) $\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{xy}{1-xy}$. 27. (i) 5; (ii) (क) $\frac{97}{900}$; (ख) $1\frac{5}{11}$; (ग) [illegible]; (iii) [illegible]$(10^n-1)+n^2$. 28. (i) -1 या $\pm\sqrt{2}$; (ii) 3, 6, 9 या 18, 6, -6.
29. (i) 16, $\left[ar^{n-1}=3.\frac{ar^n}{1-r}, r=\frac{1}{4}, a=12\right]$; (ii) $\frac{\cdot01(2^{29}-1)}{2-1}=5368709\cdot11$ रु०.
30. (i) $(1+\cdot20)^4.x >$ [illegible]$x > 2x$; (ii) 5371 रु०। 32. $2\frac{1}{2}$. 33. 45, 15 व 5 रु० या 5, 15 व 45 रु०।

उत्तर—III (H.P.)

1. (i) [illegible]; (ii) [illegible] व [illegible]; (iii) 10, -10. 2. (i) [illegible]..., $T_n=-5$; (ii) 7.
3. (i) $\frac{1}{42}$ व $\frac{1}{52}$; (ii) $\frac{ab}{b+(n-1)(a-b)}$. 4. (i) $\frac{4}{11}$ व $\frac{2}{7}$; (ii) $6\frac{1}{2}$, [illegible], 11, [illegible], 55, -55, $-18\frac{1}{3}$. 5. (i) [illegible]; (ii) $3\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, [illegible]... [illegible]. 9. (i) 6 व 24; (ii) 45 व 5.
10. (ii) $\frac{a}{1-r}$; (iii) n^2, $n(n+1)$. 11. 2, 4, 6, 9.

2. सरल एवं द्विघात समीकरण

(Simple and Quadratic Equations)

समीकरण (Equation)—एक बीजगणितीय व्यंजक (algebraic expression), बीजगणितीय पदों (terms) का ऐसा समूह होता है जो + या — चिह्नों द्वारा सम्बन्धित हों जैसे (i) $5x+7$, (ii) x^2+5x+6, (iii) $4x^3+5x^2+6xy^2+3$ इत्यादि। समीकरण (equation) एक ऐसा कथन है जिसमें दो व्यंजकों या राशियों के बीच समता-चिह्न (=) रखकर उन दोनों की समता का बोध कराया गया हो। दूसरे शब्दों में, जब एक पद-संहति, दूसरी पद-संहति या शून्य (0) के बराबर हो और इस सम्बन्ध को बराबर है (=) के चिह्न द्वारा प्रदर्शित किया जाए तो प्राप्त सम्बन्ध को समीकरण कहते है। उदाहरणार्थ—

$$3x=15$$
$$x^2-16x+48=0 \quad \text{समीकरण है।}$$

$3x=15$ में x अज्ञात राशि (unknown quantity) है जिसका मान $15/3=5$ है। इसी प्रकार $x^2-16x+48=0$ में x अज्ञात राशि है जिसके दो मान हैं—12 और 4। ये मान समीकरण के 'मूल' (Roots of the equation) हैं क्योंकि इनको x के स्थान पर रखने से समीकरण सन्तुष्ट हो जाता है। इस प्रकार, समीकरण में जिस राशि का मान ज्ञात नहीं होता है उसे अज्ञात राशि कहते हैं और जिस संख्या को रखने से समीकरण सन्तुलित हो जाता है उसे समीकरण का मूल कहते हैं।

सर्वसमिका (Identity)—समीकरण सप्रतिबन्ध होते है और अज्ञात राशियों के केवल कुछ ही मानों के लिए सत्य होते हैं। परन्तु समता के कुछ कथन ऐसे होते हैं जिनमें आए हुए

इसमें x ही एकमात्र अज्ञात मूल्य या चर-मूल्य (variable) है, a व b अचर राशियाँ (constants) हैं जिनमें से a कभी शून्य नहीं हो सकता।

सरल समीकरण को रैखिक समीकरण इसलिए कहा जाता है कि इसमें x का केवल एक ही मूल्य समीकरण को सन्तुष्ट करता है अर्थात् समीकरण का एक ही मूल (root) होता है और यह ग्राफ-पत्र पर सरल रेखा द्वारा निरूपित होता है। रैखिक समीकरण को एक घातीय समीकरण (equation of the first degree) भी कहते हैं क्योंकि इसमें x का अधिकतम घात 1—(x^1 *i.e.* x) होता है।

रैखिक समीकरण का हल (Solution of Linear Equation)

रैखिक समीकरण के हल करने का तात्पर्य उसमें अज्ञात राशि x का एकमात्र मूल्य ज्ञात करना होता है जिससे समीकरण सन्तुष्ट हो जाए। समीकरण को हल करने में निम्न चार नियम उपयोगी सिद्ध होते हैं—

(i) यदि दोनों पक्षों—बाँया (L.H.S.) व दायाँ (R.H.S.)—में समान राशि जोड़ दी जाए तो योग बराबर होंगे—

उदाहरणार्थ $\quad 5x-7=8$

7 जोड़ने पर $\quad 5x-7+7=8+7$

या $\quad 5x=15$

(ii) यदि दोनों पक्षों में से समान राशि घटा दी जाए तो शेष बराबर होते हैं—

उदाहरणार्थ $\quad 3x+5=23$

5 घटाने पर $\quad 3x+5-5=23-5$

$$3x=18$$

(iii) यदि दोनों पक्षों में समान राशि की गुणा की जाए तो गुणनफल बराबर होंगे—

$$\frac{x}{5}=10$$

5 से गुणा करने पर $\quad \frac{x}{5}\times 5=10\times 5$

$$x=50$$

(iv) यदि दोनों पक्षों को समान राशि से भाग कर दिया जाए तो भजनफल बराबर होंगे—

$$14x=70$$

14 से भाग करने पर $\quad \frac{14x}{14}=\frac{70}{14}$

या $\quad x=5$

उदाहरण 1—निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए—

(i) $\quad ax+b=0 \quad (a\neq 0)$

(ii) $\quad 7x-42=0$

(iii) $\quad 5x-8=2x+7$

हल—(i) $\quad ax+b=0$

दोनों पक्षों में से 'b' घटाने पर—

$$ax+b-b=0-b$$

या $\quad ax=-b$

दोनों पक्षों को a से भाग देने पर—

$$\frac{ax}{a}=-\frac{b}{a}$$

या $\quad x=-\frac{b}{a}$

(ii) $\quad 7x-42=0$

दोनों पक्षों में 42 जोड़ने पर—

$$7x-42+42=0+42$$
$$7x=42$$

7 से भाग करने पर—

$$\frac{7x}{7}=\frac{42}{7}$$

या $$x=6$$

(iii) $$5x-8=2x+7$$

8 जोड़ने पर—

$$5x-8+8=2x+7+8$$

या $$5x=2x+15$$

$2x$ घटाने पर—

$$5x-2x=2x-2x+15$$
$$3x=15$$

3 से भाग करने पर—

$$\frac{3x}{3}=\frac{15}{3} \quad \text{अतः} \quad x=5$$

उदाहरण 2—हल कीजिए—

(i) $$3(x+5)+14(x-4)=4+6(7-2x)$$

(ii) $$x-4-[2+\{x-(2+x)\}]=2$$

हल—(i) $$3(x+5)+14(x-4)=4+6(7-2x)$$
$$3x+15+14x-56=4+42-12x$$
$$3x+14x+12x=4+42+56-15$$
$$29x=102-15$$
$$x=\frac{87}{29}=3$$

(ii) $$x-4-[2+\{x-(2+x)\}]=2$$
$$x-4-[2+\{x-2-x\}]=2$$
$$x-4-[2+x-2-x]=2$$
$$x-4-(0)=2$$
$$x=2+4=6$$

उदाहरण 3—हल कीजिए—

(i) $$\frac{7x+17}{9}=\frac{8x-7}{5}$$

(ii) $$3x-\frac{x-1}{3}=\frac{2(x-1)}{5}+3$$

हल—(i) वज्र-गुणन (cross multiplication) द्वारा—

$$5(7x+17)=9(8x-7)$$
$$35x-85=72x-63$$
$$35x-72x=-63-85$$
$$-37x=-148$$
$$x=\frac{-148}{-37}=4$$

(ii) $$3x-\frac{x-1}{3}=\frac{2(x-1)}{5}+3$$
$$\frac{9x-x+1}{3}=\frac{2x-2+15}{5}$$

या $$\frac{8x+1}{3}=\frac{2x+13}{5}$$

$$5(8x+1)=3(2x+13)$$

$$40x+5=6x+39$$

$$40x-6x=39-5$$

$$\therefore\ 34x=34 \qquad \therefore\ x=1$$

उदाहरण 4—निम्नलिखित समीकरणो को हल कीजिए—

(i) $$\frac{4x-2}{5}+\frac{x-7}{3}-6\tfrac{1}{3}=0$$

(ii) $$5(x+4)(2x+1)-10x(x+1)=20$$

हल—(i) $$\frac{4x-2}{5}+\frac{x-7}{3}-\frac{19}{3}=0$$

लघुतम समापवर्त्य (L.C.M.) लेने पर—

$$\frac{3(4x-2)+5(x-7)-5\times 19}{15}=0$$

$$12x-6+5x-35-95=0$$

$$17x-136=0$$

$$\therefore\ x=\frac{136}{17}=8$$

(ii) $$5(x+4)(2x+1)-10x(x+1)=20$$

$$5(2x^2+x+8x+4)-10x^2-10x=20$$

$$10x^2+45x+20-10x^2-10x=20$$

$$35x=20-20$$

$$\therefore\ x=0$$

उदाहरण 5—हल कीजिए—

(i) $$\frac{3}{10+x}-\frac{2}{10-x}=0$$

(ii) $$27^{x-1}\times 3^{1-x}=3^{4x}\div 3^{3x-2}$$

हल—(i) $$\frac{3}{10+x}-\frac{2}{10-x}=0$$

$$\frac{3}{10+x}=\frac{2}{10-x}$$

$$3(10-x)=2(10+x)$$

$$30-3x=20+2x$$

$$-5x=-10$$

$$\therefore\ x=2$$

(ii) $$27^{x-1}\times 3^{1-x}=3^{4x}\div 3^{3x-2}$$

या $$3^{3(x-1)}\times 3^{1-x}=3^{4x}\times\frac{1}{3^{3x-2}}$$

$$3^{3(x-1)+(1-x)}=3^{4x-(3x-2)}$$

अतः $$3x-3+1-x=4x-3x+2$$

$$2x-2=x+2$$

$$x=4$$

उदाहरण 6—हल कीजिए—

(i) $$x=6-\frac{x}{5}-\frac{x-5}{5}$$

(ii) $$3^{3x-2}\times 9^{3x}\times 81^{x}=27^{4x}$$

हल—(i) $$x=6-\frac{x}{5}-\frac{x-5}{5}$$

$$x=\frac{30-x-(x-5)}{5}$$

$$5x=30-x-x+5$$
$$5x+2x=30+5 \quad \text{या} \quad 7x=35$$
$$\therefore \quad x=5$$

(ii) $$3^{3x-2}\times 9^{3x}\times 81^{x}=27^{4x}$$
$$3^{3x-2}\times\{(3)^2\}^{3x}\times\{(3)^4\}^{x}=\{(3)^3\}^{4x}$$
$$3^{3x-2}\times 3^{6x}\times 3^{4x}=3^{12x}$$
$$3^{3x-2+6x+4x}=3^{12x}$$
या $$3^{13x-2}=3^{12x}$$
अतः $$13x-2=12x$$
या $$13x-12x=2$$
$$x=2$$

उदाहरण 7—यदि माँग (Demand) और पूर्ति (Supply) फलन (functions) क्रमशः $D=50-3p$ तथा $S=2p$ हों तो साम्य-कीमत (Equilibrium price) तथा माँग या पूर्ति की मात्रा (Quantity) ज्ञात कीजिए।

हल—माँग-फलन $\rightarrow D=50-3p$

पूर्ति-फलन $\rightarrow S=2p$

साम्यावस्था में माँग व पूर्ति समान होते हैं $D=S$

अतः $$50-3p=2p$$
$$\therefore \quad -3p-2p=-50 \quad \text{या} \quad -5p=-50$$
अतः $$p=10$$

माँग की मात्रा या $D=50-3p=50-30=20$

पूर्ति की मात्रा या $S=2p=20$

अतः $$p=10,\quad D=S=20$$

उदाहरण 8—राम ने अपनी आय का $\frac{17}{20}$ भाग खर्च कर दिया। 175 रु० उसने डाकघर की संचयी सावधि जमा योजना में खर्च किया और उसके पास 125 रु० शेष रहे। उसकी आय ज्ञात कीजिए।

हल—मान लिया राम की कुल आय x है।

उसमें से उसका कुल व्यय $=\frac{17x}{20}$

संचयी सावधि योजना में जमा $=175$ रु०

शेष बची हुई राशि $=125$ रु०

अतः $$x=\frac{17x}{20}+175+125$$
या $$x=\frac{17x}{20}+300$$
$$20x=17x+6000$$
$$20x-17x=6000$$
$$\therefore \quad 3x=6000$$
$$x=2000$$

कुल आय $=2000$ रु०

उदाहरण 9—किसी चुनाव-क्षेत्र में दो प्रत्याशी थे—राम और श्याम। कुल मतदाताओं में से एक चौथाई ने अपने मताधिकार का प्रयोग नहीं किया। 40% मत राम को मिले और वह 100 मतों से श्याम पर विजयी रहा। उस क्षेत्र में कुल मतदाताओं की संख्या बताइए।

हल—मान लिया मतदाताओं की कुल संख्या x है।

मतदान में भाग न लेने वालों की संख्या $=\frac{x}{4}$

राम के मतों की संख्या $=\frac{40}{100}x$ या $\frac{2}{5}x$

श्याम के मतों की संख्या $=\frac{2x}{5}-100$

कुल संख्या $x=\left(\frac{2x}{5}\right)+\left(\frac{2x}{5}-100\right)+\left(\frac{x}{4}\right)$

या $x=\frac{4x}{5}+\frac{x}{4}-100$

$$x=\frac{(4\times 4x)+5x}{20}-100$$

$$20x=16x+5x-2000$$

$$20x-21x=-2000$$

$$\therefore\quad -x=-2000 \text{ या } x=2000$$

उदाहरण 10—पिता की आयु पुत्र की आयु से 28 वर्ष अधिक है। 5 वर्ष बाद पिता की आयु पुत्र की आयु के दो गुने से 7 वर्ष अधिक होगी। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल—मान लिया पुत्र की वर्तमान आयु x वर्ष है।

पिता की वर्तमान आयु $=x+28$ वर्ष

5 वर्ष बाद उन दोनों की आयु क्रमशः $x+5$ वर्ष तथा $x+28+5$ वर्ष होगी।

यदि 5 वर्ष बाद पिता की आयु पुत्र की आयु के दो गुने से 7 वर्ष अधिक हो तो—

$$x+28+5=2(x+5)+7$$

$$x+33=2x+10+7$$

$$x-2x=17-33$$

$$-x=-16$$

$$\therefore\quad x=16$$

यदि पुत्र की वर्तमान आयु 16 वर्ष है तो पिता की आयु $16+28=44$ वर्ष है।

II. द्विघात समीकरण
(Quadratic Equations)

ऐसा समीकरण जिसमें 'अज्ञात राशि' का अधिकतम घात 2 हो, द्विघात समीकरण या वर्ग समीकरण कहलाता है। इस समीकरण के दो मूल (roots) होते हैं।

समीकरण	घात	मूल
$ax+b=0$	एक	एक
$ax^2+bx+c=0$	दो	दो
$ax^3+bx^2+cx+d=0$	तीन	तीन
$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$	चार	चार
$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots=0$	n	n

सामान्य स्वरूप (General Form)—द्विघात समीकरण का निम्नांकित सामान्य स्वरूप है—

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \ldots(i)$$

इसमें a, b, c ज्ञात अचर राशियाँ हैं। किसी भी द्विघात-समीकरण में x^2, x तथा x से विमुक्त पद हो सकते हैं। यदि द्विघात-समीकरण में एक घात का पद (x) न हो तो उसे शुद्ध द्विघात-समीकरण (pure quadratic equation) कहते हैं, जैसे

$$7x^2-343=0$$

दो मूल (Two Roots)—किसी द्विघात-समीकरण में दो मूल होते हैं, दो से अधिक मूल नहीं हो सकते अर्थात् दो संख्याएँ ऐसी होती हैं जिनसे समीकरण अलग-अलग सन्तुष्ट हो सकता है।

प्रमाण (Proof)—मान लिया कि $ax^2+bx+c=0$ के तीन मूल (roots) α, β एवं γ हैं। क्योंकि ये तीनों मूल हैं अतः इनके द्वारा समीकरण अलग-अलग सन्तुष्ट होनी चाहिए। अर्थात्—

$x=\alpha$ रखने पर $\qquad a\alpha^2+b\alpha+c=0 \qquad$ ....(i)

$x=\beta$ रखने पर $\qquad a\beta^2+b\beta+c=0 \qquad$ ....(ii)

$x=\gamma$ रखने पर $\qquad a\gamma^2+b\gamma+c=0 \qquad$ ....(iii)

(ii) को (i) में से घटाकर $\quad a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$

या $\qquad (\alpha-\beta)[a(\alpha+\beta)+b]=0 \qquad$ ..(iv)

फलतः $(\alpha-\beta)=0$ या $a(\alpha+\beta)+b=0$

परन्तु α एवं β भिन्न मूल होने के कारण $(a-\beta)$ शून्य के बराबर नहीं हो सकता।

अतः $\qquad a(\alpha+\beta)+b=0 \qquad$ ...(v)

इसी प्रकार से (i) एवं (iii) से, $a(\alpha+\gamma)+b=0 \qquad$ ....(vi)

(v) एवं (vi) से, $\qquad a(\beta-\gamma)=0$

क्योंकि a शून्य नहीं है अतः $\qquad \beta-\gamma=0$ या $\beta=\gamma$

अतः उक्त समीकरण में तीसरा मूल, दूसरे मूल से भिन्न नहीं हो सकता इसलिए एक द्विघात-समीकरण दो से अधिक मूल नहीं रख सकती, अर्थात् उसके केवल दो मूल ही हो सकते हैं। इसी प्रकार तीन घात वाले समीकरण में 3 से अधिक मूल नहीं हो सकते। n घात वाले समीकरण में n मूल ही हो सकते हैं।

द्विघात-समीकरणों का हल (Solution of Quadratic Equations)

द्विघात-समीकरणों के दोनों मूल ज्ञात करने की प्रक्रिया उन समीकरणों का हल कहलाती है। दोनों मूल परिगणित करने अर्थात् द्विघात समीकरणों को हल करने की निम्न तीन रीतियाँ हैं—

I. **गुणनखण्ड की रीति (Factorisation Method)**—इस रीति के अनुसार प्रदत्त समीकरण के गुणनखण्ड (factors) ज्ञात कर लिये जाते हैं। इनमें से कोई एक या दोनों शून्य होते हैं। प्रत्येक गुणनखण्ड को शून्य के बराबर मानकर x के दोनों मान निकाल लिए जाते हैं।

उदाहरण 11—निम्नांकित समीकरणों को गुणनखण्ड रीति द्वारा हल कीजिए—

(i) $x^2-12x+32=0 \qquad$ (ii) $x^2-25=0$

हल—(i) x^2 के गुणांक (coefficient) अर्थात् 1 की अचर-राशि 32 से गुणा करके उनके ऐसे 2 खण्ड कीजिए जिनका बीजगणितीय योग -12 हो। $32\times1=32$ के दो गुणनखण्ड 8 और 4 हैं जिनका बीजगणितीय जोड़ 12 है। $-12x$ को $-8x$ और $-4x$ दो खण्डों में विभक्त किया जाएगा। इस प्रकार समीकरण का निम्न स्वरूप होगा—

$$x^2-8x-4x+32=0$$
$$x(x-8)-4(x-8)=0$$
$$(x-8)(x-4)=0$$
$$x-8=0 \quad \therefore \quad x=8; \quad x-4=0 \quad \therefore \quad x=4$$

अतः $\qquad x=8, 4$

(ii) $\quad x^2-25=(x)^2-(5)^2=(x+5)(x-5) \quad \therefore \quad x=\pm5$

या $\qquad x=+5, \quad x=-5.$

उदाहरण 12—निम्न समीकरण को हल कीजिए—

$$4x^2-8x+3=0$$

हल— $4\times3=12$ के ऐसे खण्ड बनाने हैं जिनका बीजगणितीय योग -8 हो अतः -2 व -6 ऐसे खण्ड हुए जिनका जोड़ -8 है और गुणनफल $-2\times-6=+12$ है। इस प्रकार—

$$4x^2-6x-2x+3=0$$
$$2x(2x-3)-1(2x-3)=0$$
$$(2x-1)(2x-3)=0 \quad \therefore \quad 2x=1, \quad x=\tfrac{1}{2}, \quad 2x=3, \quad x=\tfrac{3}{2}$$

अतः $\qquad x=\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}.$

$$3\left(x^2-\frac{14}{3}x+\frac{8}{3}\right)=0$$

या $$x^2-2\cdot\frac{7}{3}\cdot x+\left(\frac{7}{3}\right)^2-\left(\frac{7}{3}\right)^2+\frac{8}{3}=0$$

या $$\left(x-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}-\frac{8}{3}=\frac{49-24}{9}=\frac{25}{9}$$

$$x-\frac{7}{3}=\pm\frac{5}{3}\quad\therefore\quad x=\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{3}\right),\left(\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\right)$$

$$\therefore\quad x=4,\ \tfrac{2}{3}$$

उदाहरण 18—हल कीजिए—

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}$$

हल—$$\frac{(x+2)+1}{(x+2)}+\frac{(x-2)-1}{(x-2)}=\frac{2(x-1)-1}{(x-1)}$$

$$1+\frac{1}{x+2}+1-\frac{1}{x-2}=\frac{2(x-1)}{(x-1)}-\frac{1}{x-1}$$

$$2+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=2-\frac{1}{x-1}\Rightarrow\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{x-2-x-2}{x^2-4}=\frac{-1}{x-1}\Rightarrow\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-1}$$

$$x^2-4=4x-4\Rightarrow x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0\quad\therefore\quad x=0,\ x=4$$

III. सूत्र रीति (Formula Method)—जिन स्थितियों में गुणनखण्ड सरलता से ज्ञात नहीं किये जा सकते उनमें निम्न सूत्रानुसार द्विघात-समीकरण का हल किया जा सकता है। यदि $ax^2+bx+c=0$ तो

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\text{तथा}\quad\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ये दोनों द्विघात-समीकरण के मूल हैं।

उदाहरण 19—द्विघाती समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल निकालिए।

हल—वर्ग समीकरण $\quad ax^2+bx+c=0$

$$\therefore\quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\qquad[a \text{ से दोनों पक्षों को भाग देने पर}]$$

या $$x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}=x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0\qquad\text{पूर्ण वर्ग बनाने पर}$$

या $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0$$

या $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\quad\text{अर्थात्}\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$=\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$$

या $$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

या $$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (+\text{ चिह्न लेने पर})\ \text{एवं}\ x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (-\text{चिह्न लेने पर})$$

ये ही द्विघाती समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के दो मूल हैं, जहाँ a उक्त समीकरण में x^2 का गुणांक है, b, x का गुणांक है और c अचर मूल्य है।

उदाहरण 20—उदाहरण 12 (पृष्ठ 61) में प्रदत्त समीकरण को सूत्र रीति द्वारा हल कीजिए।

उदाहरण 13—हल करिए—

(i) $$\frac{x}{4}-\frac{9}{x}=0$$

(ii) $$41-3x^2=5x^2-9$$

हल—(i) $$\frac{x}{4}-\frac{9}{x}=\frac{x^2-36}{4x}=0 \quad \therefore \quad x^2-36=0$$

$$x^2=36, \text{ अतः } x=\pm 6$$

(ii) $$41-3x^2=5x^2-9$$

$$\Rightarrow \quad -3x^2-5x^2=-9-41 \quad \Rightarrow \quad -8x^2=-50$$

$$x^2=\frac{25}{4} \quad \therefore \quad x=\pm\frac{5}{2}$$

उदाहरण 14—हल कीजिए—

$$\frac{9x-2}{3}+\frac{4x^2-7}{4x^2+3}=\frac{6x-1}{2}$$

हल—$$\frac{4x^2-7}{4x^2+3}=\frac{6x-1}{2}-\frac{9x-2}{3}=\frac{3(6x-1)-2(9x-2)}{6}$$

$$=\frac{18x-3-18x+4}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{4x^2-7}{4x^2+3}=\frac{1}{6} \Rightarrow 6(4x^2-7)=1(4x^2+3)$$

$$24x^2-42=4x^2+3$$

$$24x^2-4x^2=3+42$$

$$20x^2=45 \Rightarrow 4x^2=9$$

$$\therefore \quad x^2=\frac{9}{4} \quad \text{अतः} \quad x=\pm\frac{3}{2}$$

उदाहरण 15—निम्नलिखित को हल कीजिए—

$$\tfrac{1}{3}(x-2)(x-3)-\tfrac{1}{21}(x-21)(x-14)=2$$

हल— $$\tfrac{1}{3}(x^2-5x+6)-\tfrac{1}{21}(x^2-35x+294)=2$$

21 से दोनों पक्षों को गुणा करने पर—

$$7(x^2-5x+6)-1(x^2-35x+294)=42$$

$$7x^2-35x+42-x^2+35x-294=42$$

$$6x^2-294=0 \quad \text{या} \quad x^2-49=0$$

$$\therefore \quad (x+7)(x-7)=0 \quad \text{अतः} \quad x=+7, -7.$$

II. **वर्ग को पूर्ण करने की रीति (Method of Completing Square)**—इस रीति के अनुसार प्रदत्त समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाया जाता है, तत्पश्चात् उसको हल किया जाता है।

उदाहरण 16—उदाहरण 11 (i) में प्रदत्त समीकरण को पूर्ण-वर्ग रीति द्वारा हल कीजिए।

हल—प्रदत्त समीकरण $$x^2-12x+32=0$$

$$x^2-(2)(x)(6)+(6)^2-4=0$$

$$(x-6)^2-(2)^2=0$$

$$(x-6+2)(x-6-2)=0$$

$$\therefore \quad (x-4)(x-8)=0 \quad \text{अतः} \quad x=4, 8$$

उदाहरण 17—निम्नलिखित समीकरणों को वर्ग पूर्ण करने की रीति द्वारा हल कीजिए—

(i) $$x^2+16x+60=0$$

(ii) $$4x^2-11x+4=x^2+3x-4$$

हल—(i) $x^2+16x+60=0 \Rightarrow x^2+2.8.x+64-4=0$

या $(x+8)^2-(2)^2=0 \Rightarrow (x+8+2)(x+8-2)=0 \quad \therefore \quad (x+10)(x+6)=0$

$$\therefore \quad x=-10, -6$$

(ii) $$4x^2-11x+4=x^2+3x-4$$

$$4x^2-x^2-11x-3x+4+4=0$$

$$3x^2-14x+8=0$$

$$3\left(x^2-\frac{14}{3}x+\frac{8}{3}\right)=0$$

या $$x^2-2.\frac{7}{3}.x+\left(\frac{7}{3}\right)^2-\left(\frac{7}{3}\right)^2+\frac{8}{3}=0$$

या $$\left(x-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}-\frac{8}{3}=\frac{49-24}{9}=\frac{25}{9}$$

$$x-\frac{7}{3}=\pm\frac{5}{3} \quad \therefore \quad x=\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{3}\right), \left(\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\right)$$

$$\therefore \quad x=4, \tfrac{2}{3}$$

उदाहरण 18—हल कीजिए—

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}$$

हल—$\frac{(x+2)+1}{(x+2)}+\frac{(x-2)-1}{(x-2)}=\frac{2(x-1)-1}{(x-1)}$

$$1+\frac{1}{x+2}+1-\frac{1}{x-2}=\frac{2(x-1)}{(x-1)}-\frac{1}{x-1}$$

$$2+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=2-\frac{1}{x-1}\Rightarrow\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{x-2-x-2}{x^2-4}=\frac{-1}{x-1}\Rightarrow\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-1}$$

$$x^2-4=4x-4\Rightarrow x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0 \quad \therefore \quad x=0, x=4$$

III. सूत्र रीति (Formula Method)—जिन स्थितियों में गुणनखण्ड सरलता से ज्ञात नहीं किये जा सकते उनमें निम्न सूत्रानुसार द्विघात-समीकरण का हल किया जा सकता है। यदि $ax^2+bx+c=0$ तो

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{तथा} \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ये दोनों द्विघात-समीकरण के मूल हैं।

उदाहरण 19—द्विघाती समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल निकालिए।

हल—वर्ग समीकरण $\quad ax^2+bx+c=0$

$$\therefore \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad [a \text{ से दोनों पक्षों को भाग देने पर}]$$

या $x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}=x^2+2.\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$ पूर्ण वर्ग बनाने पर

या $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0$$

या $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \quad \text{अर्थात्} \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$=\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$$

या $$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

या $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (+ चिह्न लेने पर) एवं $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (− चिह्न लेने पर)

ये ही द्विघाती समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के दो मूल हैं जहाँ a उक्त समीकरण में x^2 का गुणांक है, b, x का गुणांक है और c अचर मूल्य है।

उदाहरण 20—उदाहरण 12 (पृष्ठ 61) में प्रदत्त समीकरण को सूत्र रीति द्वारा हल कीजिए।

उदाहरण 13—हल करिए—

(i) $$\frac{x}{4}-\frac{9}{x}=0$$

(ii) $$41-3x^2=5x^2-9$$

हल—(i) $$\frac{x}{4}-\frac{9}{x}=\frac{x^2-36}{4x}=0 \quad \therefore \quad x^2-36=0$$

$$x^2=36, \text{ अतः } x=\pm 6$$

(ii) $$41-3x^2=5x^2-9$$

$$\Rightarrow \quad -3x^2-5x^2=-9-41 \quad \Rightarrow \quad -8x^2=-50$$

$$x^2=\frac{25}{4} \quad \therefore \quad x=\pm\frac{5}{2}$$

उदाहरण 14—हल कीजिए—

$$\frac{9x-2}{3}+\frac{4x^2-7}{4x^2+3}=\frac{6x-1}{2}$$

हल—$$\frac{4x^2-7}{4x^2+3}=\frac{6x-1}{2}-\frac{9x-2}{3}=\frac{3(6x-1)-2(9x-2)}{6}$$

$$=\frac{18x-3-18x+4}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{4x^2-7}{4x^2+3}=\frac{1}{6} \Rightarrow 6(4x^2-7)=1(4x^2+3)$$

$$24x^2-42=4x^2+3$$

$$24x^2-4x^2=3+42$$

$$20x^2=45 \Rightarrow 4x^2=9$$

$$\therefore \quad x^2=\frac{9}{4} \quad \text{अतः} \quad x=\pm\frac{3}{2}$$

उदाहरण 15—निम्नलिखित को हल कीजिए—

$$\tfrac{1}{3}(x-2)(x-3)-\tfrac{1}{21}(x-21)(x-14)=2$$

हल— $$\tfrac{1}{3}(x^2-5x+6)-\tfrac{1}{21}(x^2-35x+294)=2$$

21 से दोनों पक्षों को गुणा करने पर—

$$7(x^2-5x+6)-1(x^2-35x+294)=42$$

$$7x^2-35x+42-x^2+35x-294=42$$

$$6x^2-294=0 \quad \text{या} \quad x^2-49=0$$

$$\therefore \quad (x+7)(x-7)=0 \quad \text{अतः} \quad x=+7, -7.$$

II. वर्ग को पूर्ण करने की रीति (Method of Completing Square)—इस रीति के अनुसार प्रदत्त समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाया जाता है, तत्पश्चात् उसको हल किया जाता है।

उदाहरण 16—उदाहरण 11 (i) में प्रदत्त समीकरण को पूर्ण-वर्ग रीति द्वारा हल कीजिए।

हल—प्रदत्त समीकरण $$x^2-12x+32=0$$

$$x^2-(2)(x)(6)+(6)^2-4=0$$

$$(x-6)^2-(2)^2=0$$

$$(x-6+2)(x-6-2)=0$$

$$\therefore \quad (x-4)(x-8)=0 \quad \text{अतः} \quad x=4, 8$$

उदाहरण 17—निम्नलिखित समीकरणों को वर्ग पूर्ण करने की रीति द्वारा हल कीजिए—

(i) $$x^2+16x+60=0$$

(ii) $$4x^2-11x+4=x^2+3x-4$$

हल—(i) $x^2+16x+60=0 \Rightarrow x^2+2.8.x+64-4=0$

या $(x+8)^2-(2)^2=0 \Rightarrow (x+8+2)(x+8-2)=0 \quad \therefore \quad (x+10)(x+6)=0$

$$\therefore \quad x=-10, -6$$

(ii) $$4x^2-11x+4=x^2+3x-4$$

$$4x^2-x^2-11x-3x+4+4=0$$

$$3x^2-14x+8=0$$

$$3\left(x^2-\frac{14}{3}x+\frac{8}{3}\right)=0$$

या $$x^2-2.\frac{7}{3}.x+\left(\frac{7}{3}\right)^2-\left(\frac{7}{3}\right)^2+\frac{8}{3}=0$$

या $$\left(x-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}-\frac{8}{3}=\frac{49-24}{9}=\frac{25}{9}$$

$$x-\frac{7}{3}=\pm\frac{5}{3} \quad \therefore \quad x=\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{3}\right), \left(\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\right)$$

$$\therefore \quad x=4, \tfrac{2}{3}$$

उदाहरण 18—हल कीजिए—

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}$$

हल—$$\frac{(x+2)+1}{(x+2)}+\frac{(x-2)-1}{(x-2)}=\frac{2(x-1)-1}{(x-1)}$$

$$1+\frac{1}{x+2}+1-\frac{1}{x-2}=\frac{2(x-1)}{(x-1)}-\frac{1}{x-1}$$

$$2+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=2-\frac{1}{x-1}\Rightarrow\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{x-2-x-2}{x^2-4}=\frac{-1}{x-1}\Rightarrow\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-1}$$

$$x^2-4=4x-4\Rightarrow x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0 \quad \therefore \quad x=0, x=4$$

III. सूत्र रीति (Formula Method)—जिन स्थितियों में गुणनखण्ड सरलता से ज्ञात नहीं किये जा सकते उनमें निम्न सूत्रानुसार द्विघात-समीकरण का हल किया जा सकता है। यदि $ax^2+bx+c=0$ तो

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{तथा} \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ये दोनों द्विघात-समीकरण के मूल हैं।

उदाहरण 19—द्विघाती समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल निकालिए।

हल—वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$

$$\therefore \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad [a \text{ से दोनों पक्षों को भाग देने पर}]$$

या $$x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}=x^2+2.\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \qquad \text{पूर्ण वर्ग बनाने पर}$$

या $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0$$

या $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \quad \text{अर्थात्} \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$=\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$$

या $$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

या $$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(+\text{ चिह्न लेने पर}) \text{ एवं } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(-\text{ चिह्न लेने पर})$$

ये ही द्विघाती समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के दो मूल हैं जहाँ a उक्त समीकरण में x^2 का गुणांक है, b, x का गुणांक है और c अचर मूल्य है।

उदाहरण 20—उदाहरण 12 (पृष्ठ 61) में प्रदत्त समीकरण को सूत्र रीति द्वारा हल कीजिए।

हल—प्रदत्त समीकरण $4x^2-8x+3=0$

$$ax^2+bx+c=0 \text{ में } x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

उक्त समीकरण में $a=4$, $b=(-8)$ तथा $c=3$. इन अचरांकों को सूत्र में आदिष्ट करने पर—

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(4)(3)}}{2(4)}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{8}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{8}$$

$$=\frac{8+4}{8}=\frac{3}{2} \text{ तथा } \frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$$

अतः $x=\frac{3}{2}$ तथा $\frac{1}{2}$.

कुछ समीकरण प्रत्यक्ष रूप में द्विघातीय समीकरण नहीं होते परन्तु उन्हें द्विघाती-समीकरण में बदल कर हल किया जा सकता है।

उदाहरण 21—x का मूल्य निकालने के लिए निम्न समीकरण को हल कीजिए—

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=2\tfrac{1}{6}$$

हल—$\sqrt{\frac{x}{1-x}}=y$ रखने पर समीकरण का निम्न स्वरूप हो जाता है—

$$y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6}; \quad \frac{y^2+1}{y}=\frac{13}{6}; \quad 6y^2+6=13y$$

$6y^2-13y+6=0$ गुणनखण्ड रीति द्वारा हल करने पर—

$$6y^2-9y-4y+6=0; \qquad 3y(2y-3)-2(2y-3)=0$$

$$\therefore \quad (2y-3)(3y-2)=0 \qquad\qquad \therefore \quad y=\tfrac{3}{2}, \tfrac{2}{3}$$

लेकिन $$y=\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\frac{3}{2} \qquad \ldots(i)$$

वर्ग करने पर $$\frac{x}{1-x}=\frac{9}{4}; \qquad 4x=9-9x$$

$$\therefore \quad 13x=9 \text{ अर्थात् } x=\tfrac{9}{13}$$

$$y=\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\frac{2}{3} \qquad \ldots(ii)$$

वर्ग करने पर $$\frac{x}{1-x}=\frac{4}{9} \text{ या } 9x=4-4x;$$

$$13x=4 \text{ अर्थात् } x=\tfrac{4}{13}$$

अतः $$x=\tfrac{9}{13} \text{ या } \tfrac{4}{13}$$

उदाहरण 22—हल कीजिए—

$$3x^2-7+3\sqrt{3x^2-16x+21}=16x$$

हल—$3x^2-16x-7+3\sqrt{3x^2-16x+21}=0$

$$3x^2-16x+21-7-21+3\sqrt{3x^2-16x+21}=0$$

$\sqrt{3x^2-16x+21}=y$ रखने पर—

$$y^2-28+3y=0$$

गुणनखण्ड करने पर— $y^2+7y-4y-28=0$

$$\therefore \quad y(y+7)-4(y+7)=0 \text{ या } (y-4)(y+7)=0$$

$\therefore \quad y=4$, या -7; पुनः $y=\sqrt{3x^2-16x+21}$ रखने पर

$$\sqrt{3x^2-16x+21}=4$$
$$\therefore \quad 3x^2-16x+21=16$$
$$3x^2-16x+5=0$$

गुणनखण्ड रीति द्वारा—

$$3x^2-15x-x+5=0$$
$$3x(x-5)-1(x-5)=0$$
$$(3x-1)(x-5)=0$$
$$\therefore \quad x=\frac{1}{3} \text{ या } 5$$

$$\sqrt{3x^2-16x+21}=-i$$
$$3x^2-16x+21=49$$
$$3x^2-16x-28=0$$

सूत्रानुसार—

$$a=3,\ b=-16,\ c=-28$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{16\pm\sqrt{256+336}}{6}$$
$$=\frac{16\pm\sqrt{592}}{6}=\frac{16\pm\sqrt{16\times37}}{6}$$

$$x=\frac{16\pm4\sqrt{37}}{6}=\frac{8\pm2\sqrt{37}}{3} \quad \therefore \quad x=\frac{8\pm2\sqrt{37}}{3}$$

अतः x के अभीष्ट मान निम्न प्रकार हैं—

$$\frac{1}{3},\ 5,\ \frac{8+2\sqrt{37}}{3},\ \frac{8-2\sqrt{37}}{3}$$

उदाहरण 23—निम्न समीकरण के मूल निकालिए—

$$x^4-10x^2+24=0$$

हल—प्रदत्त समीकरण चार घात का समीकरण (equation of fourth degree) है परन्तु इसे द्विघात समीकरण में बदलकर हल किया जा सकता है।

मान लिया $x^2=y$; यह मूल्य समीकरण में आदिष्ट करने पर—

$$(x^2)^2-10.x^2+24=0 \Rightarrow y^2-10y+24=0$$

गुणनखण्ड करने पर—

$$y^2-6y-4y+24=0 \Rightarrow y(y-6)-4(y-6)=0$$
$$\therefore \quad (y-6)(y-4)=0 \quad \therefore \quad y=6 \text{ या } 4$$

लेकिन $\quad y=x^2 \Rightarrow x^2=6$ या $x^2=4$

$$\therefore \quad x=+\sqrt{6} \text{ या } -\sqrt{6}, \quad x=+2 \text{ या } -2$$

अतः चार घात समीकरण होने के कारण x के 4 मूल हैं।

उदाहरण 24—निम्न समीकरण का हल कीजिए—

$$3x^4-20x^3-94x^2-20x+3=0.$$

हल—ऐसे समीकरण व्युत्क्रम (reciprocal) समीकरण कहलाते हैं जिनका सामान्य स्वरूप $ax^4\pm bx^3\pm cx^2\pm bx+a=0$ है।

इस प्रकार के समीकरणों को पहले x के ऐसे घात से भाग दिया जाता है जिससे अधिकतम घात 2 आ जाए।

$$3x^4-20x^3-94x^2-20x+3=0$$

x^2 से भाग देने पर—

$$3x^2-20x-94-20\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$$

पुनर्विन्यसित करने पर—

$$3x^2+3.\frac{1}{x^2}-20x-20.\frac{1}{x}-94=0$$
$$3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-20\left(x+\frac{1}{x}\right)-94=0$$
$$3\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-20\left(x+\frac{1}{x}\right)-94=0$$

अब $x+\frac{1}{x}=y$ रखने पर

$$3(y^2-2)-20y-94=0$$
$$3y^2-6-20y-94=0 \text{ या } 3y^2-20y-100=0$$

गुणनखंड करने पर— $3y^2-30y+10y-100=0$

$$3y(y-10)+10(y-10)=0 \text{ अर्थात् } (y-10)(3y+10)=0$$

$\therefore\ y=10, \frac{-10}{3}$ या $x+\frac{1}{x}=10$ या $-\frac{10}{3}$

$x+\frac{1}{x}=10$

$\frac{x^2+1}{x}=10;\ x^2+1=10x$

या $x^2-10x+1=0$

सूत्र द्वारा हल करने पर—

$a=1,\ b=-10,\ c=1$

$x=\frac{+10\pm\sqrt{100-4}}{2}$

$=\frac{+10\pm\sqrt{16\times6}}{2}=\frac{+10\pm4\sqrt{6}}{2}$

$=+5\pm2\sqrt{6}$

या

$x+\frac{1}{x}=\frac{-10}{3}$

$\frac{x^2+1}{x}=\frac{-10}{3}$

$3x^2+3=-10x$

$3x^2+10x+3=0$

$a=3,\ b=10,\ c=3$

$x=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{6}$

$=\frac{-10\pm8}{6}=-3,\ -\frac{1}{3}$

अतः $x=5+2\sqrt{6},\ 5-2\sqrt{6},\ -3$ या $-\frac{1}{3}$

उदाहरण 25—हल कीजिए—

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=3$$

हल—$\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=3 \Rightarrow \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{1+x^2}-3\sqrt{1-x^2}$

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{1+x^2}+3\sqrt{1-x^2}=0 \Rightarrow -2\sqrt{1+x^2}=-4\sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{1+x^2}=2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1+x^2=4(1-x^2) \text{ या } 1+x^2=4-4x^2$$

$$5x^2=3 \quad \therefore\ x^2=\frac{3}{5}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

उदाहरण 26—हल कीजिए—

$$x^4+x^3-4x^2+x+1=0$$

हल—प्रदत्त समीकरण एक व्युत्क्रम समीकरण है जिसका अधिकतम घात 4 है अतः उसे घात 2 में बदलने के लिए x^2 से भाग दिया जाएगा—

$$x^2+x-4+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0 \qquad \left[2.x.\frac{1}{x}=2\right]$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$x-\frac{1}{x}=y$ मानकर $\quad y^2+y-6=0$

$$\Rightarrow y^2+3y-2y-6=0 \Rightarrow y(y+3)-2(y+3)=0$$

यदि $x+\frac{1}{x}=2$

$x^2+1=2x \Rightarrow x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \quad \therefore\ x-1=0$ या $x=1,\ 1$

यदि $x+\frac{1}{x}=-3$

$x^2+1=-3x \Rightarrow x^2+3x+1=0$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

अतः अभीष्ट मूल हैं, 1, 1, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

उदाहरण 27—(i) हल कीजिए—

$$\sqrt{x^2+2x+15}=2x-5$$

(ii) हल कीजिए—

$$x+\sqrt{x}=\frac{6}{25}$$ [*B. Com. Hons., Delhi, 1974*]

हल—(i) $x^2+2x+15=(2x-5)^2=4x^2+25-20x$

या $x^2-4x^2+2x+20x+15-25=0$

$$-3x^2+22x-10=0 \Rightarrow 3x^2-22x+10=0$$

$$a=3,\ b=-22,\ c=10$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-22)\pm\sqrt{484-4\times30}}{6}$$

$$=\frac{22\pm\sqrt{484-120}}{6} \text{ या } \frac{22\pm\sqrt{364}}{6}=\frac{22\pm2\sqrt{91}}{6}$$

$$=\frac{11\pm\sqrt{91}}{3} \quad \text{अतः}\quad x=\frac{11+\sqrt{91}}{3} \text{ तथा } \frac{11-\sqrt{91}}{3}$$

(ii) $x+\sqrt{x}=\frac{6}{25}$ में $\sqrt{x}=y$ रखने पर

$$y^2+y=\frac{6}{25}\Rightarrow 25y^2+25y-6=0$$

$$25y^2+30y-5y-6=0$$ (गुणनखण्डों की रीति द्वारा)

$$5y(5y+6)-1(5y+6)=0$$

$$\therefore\quad (5y-1)(5y+6)=0 \Rightarrow 5y=1 \quad \therefore\quad y=\frac{1}{5}$$

$$\text{तथा}\quad 5y=-6 \Rightarrow y=-\frac{6}{5}$$

लेकिन $y=\sqrt{x}$ अतः $\sqrt{x}=\frac{1}{5}\quad \therefore\quad x=\frac{1}{25}$

यदि $\sqrt{x}=-\frac{6}{5}$ तो $x=\frac{36}{25}$ या $1\frac{11}{25}$

उदाहरण 28—निम्न समीकरणों को हल कीजिए—

(i) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$

(ii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{x}+4\right)-11=0$

हल—(i) $\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}=24$

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$$

$x^2+5x=t$ रखने पर—

$$(t+4)(t+6) \text{ या } t^2+10t+24=24$$

$$t^2+10t=0 \quad \therefore\quad t(t+10)=0 \quad \text{अतः}\quad t=0 \text{ या } -10$$

यदि $t=0$

तो $x^2+5x=0$

$\therefore\quad x(x+5)=0$

$x=0$, या $x=-5$

$\therefore\quad x=0, -5$

यदि $t=-10$

तो $x^2+5x=-10$

$x^2+5x+10=0$

$a=1,\ b=5,\ c=10$

$$\therefore\quad x=\frac{-5\pm\sqrt{25-40}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{-15}}{2}$$

$$=\frac{-5\pm i\sqrt{15}}{2}$$

अतः $x=0, -5, \frac{-5+i\sqrt{15}}{2}$ तथा $\frac{-5-i\sqrt{15}}{2}$

(ii) $x-\frac{1}{x}=t$ रखने पर

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4 \quad \therefore\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=t^2+4$$

$$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{x}+4\right)-11=0 \Rightarrow (t^2+4)-2(t+4)-11=0$$

$$t^2+4-2t-8-11=0 \Rightarrow t^2-2t-15=0$$

$$t^2+3t-5t-15=0 \Rightarrow t(t+3)-5(t+3)=0 \quad \therefore \quad t=5, -3$$

लेकिन $t=x-\frac{1}{x}$ अतः $x-\frac{1}{x}=5$ या $x-\frac{1}{x}=-3$

यदि $x-\frac{1}{x}=5$

तो $x^2-1=5x$

$x^2-5x-1=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-(4\times1\times-1)}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$$

यदि $x-\frac{1}{x}=-3$

$x^2-1=-3x$

$x^2+3x-1=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-(4\times1\times-1)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

अतः $x=\frac{5+\sqrt{29}}{2},\ \frac{5-\sqrt{29}}{2},\ \frac{-3+\sqrt{13}}{2},\ \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

उदाहरण 29—हल कीजिए—

(i) $3x^2+2x+1=0$

(ii) $x^{2/3}-7x^{1/3}+12=0$

(iii) $5^{2x}-5^{x+3}+5^3=5^x$

हल—(i) सूत्र रीति द्वारा—

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad a=3,\ b=2,\ c=1$$

अत. $x=\frac{-2\pm\sqrt{4-(4\times3\times1)}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{6}=\frac{-1\pm i\sqrt{8}}{3}$

अतः $x=\frac{-1+2i\sqrt{2}}{3}$ तथा $\frac{-1-2i.\sqrt{2}}{3}$

(ii) $x^{2/3}-7x^{1/3}+12=0$ माना $x^{1/3}=t \quad \therefore \quad x^{2/3}=(x^{1/3})^2=t^2$

$x^{2/3}-7x^{1/3}+12=t^2-7t+12=0$

गुणनखण्ड रीति के अनुसार $t^2-7t+12=(t-3)(t-4)=0$

$\therefore \quad t=3, 4$ लेकिन $t=x^{1/3}$

यदि $x^{1/3}=3$ तो $x=(3)^3=27$

यदि $x^{1/3}=4$ तो $x=(4)^3=64$

(iii) $5^{2x}-5^{x+3}+5^3=5^x \Rightarrow (5^x)^2-5^x.5^3+5^3=5^x$

$5^x=t$ रखने पर $t^2-125t+125=t$

$\therefore \quad t^2-126t+125=0; \quad t^2-125t-t+125=0$

$t(t-125)-1(t-125)=0 \quad \therefore \quad t=125$ या 1

लेकिन $t=5^x$ अतः $5^x=125$ या $5^x=1$

$5^x=125=5^3$ या $5^x=1=5^0$

$\therefore$ $x=3$ या 0

उदाहरण 30—(i) निम्न व्यंजक का मूल्य निकालिए—

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots\ldots\infty}}}$$ [B. Com. Hons., Delhi 1976]

(ii) हल कीजिए—

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=7$$

हल—(i) मान लिया $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots\ldots\infty}}}$

क्योंकि पद अनन्त हैं अतः व्यंजक के मूल्य में कोई परिवर्तन नहीं होगा यदि हम पहले 6 को तथा उस पर वर्गमूल के चिह्न को त्याग दें। इस स्थिति में पहले 6 के बाद का व्यंजक भी x हो जाता है—

अतः $x=\sqrt{6+x}$ या $x^2=6+x$

$$x^2-x-6=0 \Rightarrow x^2+2x-3x-6=0$$
$$\therefore \quad x(x+2)-3(x+2)=0 \quad \therefore \quad x=3, -2$$

लेकिन x धनात्मक है अतः प्रस्तुत व्यंजक का मूल्य 3 है।

(ii) $$\sqrt{2x+1}=7-\sqrt{3x+4}$$

वर्ग करने पर—

$$2x+1=(7-\sqrt{3x+4})^2=49+3x+4-2.7.\sqrt{3x+4}$$
$$\Rightarrow 2x+1=53+3x-14\sqrt{3x+4}$$
$$-x-52=-14\sqrt{3x+4} \text{ या } x+52=14\sqrt{3x+4}$$

पुनः वर्ग करने पर—

$$x^2+104x+2704=196(3x+4)=588x+784$$
$$x^2-484x+1920=0$$
$$x^2-4x-480x+1920=0$$
$$x(x-4)-480(x-4)=0$$
$$\therefore \quad x=4, 480$$

परन्तु मूल 480, समीकरण पर सही नहीं उतरता अतः यह निरर्थक है। सही मूल 4 है।

मूलों की प्रकृति
(Nature of the Roots)

यह पहले स्पष्ट किया जा चुका है कि द्विघात-समीकरण (सामान्य स्वरूप) के दो मूल होते हैं। इन मूलों को α व β संकेतों द्वारा निरूपित किया जाता है।

सामान्य-स्वरूप— $$ax^2+bx+c=0$$

मूल $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ तथा $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

दोनों मूलों में करणी चिह्न के अन्तर्गत आने वाली राशि b^2-4ac का वस्तुतः बहुत महत्त्व है क्योंकि मूलों की प्रकृति इसी राशि पर निर्भर होती है। करणी के अन्तर्गत राशि b^2-4ac द्विघात-समीकरण का विवेचक (discriminant) कहलाता है क्योंकि इसी के द्वारा मूलों की प्रकृति का विवेचन होता है। विवेचक के मूलों की प्रकृति निर्धारित करने के निम्न नियम हैं—

(i) यदि b^2-4ac धनात्मक हो अर्थात् $b^2-4ac>0$ या $b^2>4ac$ तो दोनों मूल (α व β) वास्तविक (real) एवं एक-दूसरे से भिन्न (distinct) होंगे।

(ii) यदि $b^2-4ac=0$ तब α एवं β एक-दूसरे के बराबर $[\alpha=\beta=-b/2a]$ और वास्तविक होंगे।

(iii) यदि b^2-4ac ऋणात्मक हो अर्थात् $b^2-4ac<0$ या $b^2<4ac$ तो α एवं β काल्पनिक (imaginary) व असमान (unequal) होंगे।

(iv) यदि b^2-4ac पूर्ण वर्ग (perfect square) हो तो α एवं β परिमेय (rational) व असमान होंगे।

(v) यदि b^2-4ac पूर्ण वर्ग नहीं है तो α एवं β अपरिमेय (irrational) होंगे तथा युग्मों में होंगे जैसे $p+\sqrt{q}$ व $p-\sqrt{q}$।

दोनों मूलों के बीजगणितीय चिह्न ($\pm$) समीकरण में a, b व c के चिह्नों पर निर्भर होते हैं जैसा कि निम्न नियमों से स्पष्ट है—

(i) यदि a एवं c समान चिह्न के हों जो b से भिन्न हो तो दोनों मूल धनात्मक (+) होंगे।

(ii) यदि a, b, c एक समान चिह्न के हों तो दोनों मूल ऋणात्मक (—) होंगे।

(iii) यदि a एवं ▪ विपरीत चिह्न के हों तो एक मूल धनात्मक (+) तथा दूसरा ऋणात्मक (—) होगा।

(iv) यदि $b=0$ तो मूल विपरीत चिह्नों के एवं समान होंगे।

(v) यदि $c=0$ तब एक मूल शून्य होगा।
(vi) यदि $b=c=0$ तब दोनों मूल शून्य होंगे।
(vii) यदि $a=c$ तो दोनों मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे।
निम्न सारणियो से ये नियम स्पष्ट हो जाते हैं—

I. विवेचक तथा मूलों की प्रकृति

नियम संख्या	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
विवेचक (b^2-4ac) की प्रकृति	धनात्मक $b^2-4ac>0$	शून्य $b^2-4ac=0$	ऋणात्मक $b^2-4ac<0$	पूर्ण वर्ग	अपूर्ण वर्ग
मूलो (α व β) की प्रकृति	वास्तविक व भिन्न	बराबर $\alpha=\beta=\frac{-b}{2a}$	कल्पित व पद-युग्मी	परिमेय व भिन्न	अपरिमेय व भिन्न

II. गुणांकों के चिह्न तथा मूलों के चिह्न

नियम संख्या	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)
a, b, c के चिह्न	a व c समान पर b से भिन्न	a, b, c समान चिह्न	a व c विपरीत चिह्न	$b=0$	$c=0$	$b=c=0$	$a=c$
α व β के चिह्न	धनात्मक +	ऋणात्मक −	एक धन दूसरा ऋण +, −	विपरीत चिह्न वाले और समान $\pm$	एक मूल शून्य α or $\beta=0$	दोनों शून्य $\alpha=\beta=0$	परस्पर व्युत्क्रम $\alpha=\frac{1}{\beta}$

उपर्युक्त नियमों के प्रयोग द्वारा प्रदत्त द्विघात-समीकरण को हल किए बिना ही मूलों की प्रकृति निश्चित की जा सकती है।

उदाहरण 31—निम्न समीकरणों मे विवेचकों की सहायता से मूलों की प्रकृति निर्धारित कीजिए—

(i) $3x^2-11x-4=0$;
(ii) $x^2-4x+4=0$;
(iii) $2x^2-6x+7=0$;
(iv) $(x-p)(x-q)=k^2$.

हल—प्रदत्त तीनों समीकरणों के विवेचक ज्ञात करके मूलो की प्रकृति निश्चित की जाएगी—

(i) $3x^2-11x-4=0$

$a=3,\ b=-11,\ c=-4 \quad \therefore \quad b^2-4ac=(-11)^2-(4\times3\times-4)$
$=121+48=169=(13)^2$

विवेचक धनात्मक और पूर्ण वर्ग है अतः मूल α व β वास्तविक, परिमेय तथा असमान होंगे।

(ii) $x^2-4x+4=0$ में $a=1, b=-4$ तथा $c=4$
$b^2-4ac=\{(-4)^2-(4\times1\times4)\}=16-16=0$

विवेचक शून्य है अतः मूल $\alpha=\beta=-\frac{b}{2a}$ या $\frac{4}{2}=2$. मूल बराबर और वास्तविक हैं।

(iii) $2x^2-6x+7=0$ में $a=2, b=-6, c=7$
$b^2-4ac=\{(-6)^2-(4\times2\times7)\}=36-56=-20$

विवेचक ऋणात्मक है अतः मूल काल्पनिक, असमान व एक दूसरे के पदयुग्मी (conjugate) होंगे।

(iv) $x^2-px-qx+pq-k^2=0 \Rightarrow x^2-(p+q)x+(pq-k^2)=0$
यहाँ पर $a=1,\ b=-(p+q)$ व $c=pq-k^2$
विवेचक $b^2-4ac=\{-(p+q)\}^2-4\times1\times(pq-k^2)$
$=p^2+q^2+2pq-4pq+4k^2 \Rightarrow (p-q)^2+4k^2$
$=(p-q)^2+4k^2>0$ अतः मूल वास्तविक हैं।

उदाहरण 32— k के किन मानों के लिए $x^2+2x+k=0$ के मूल (क) बराबर (ख) वास्तविक (ग) काल्पनिक होंगे।

हल— समीकरण के मूल $=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4k}}{2}=(-1\pm\sqrt{1-k})$

अर्थात् $\alpha=-1+\sqrt{1-k},\ \beta=-1-\sqrt{1-k}$.

(क) $\alpha=\beta$ अर्थात् $-1+\sqrt{1-k}=-1-\sqrt{1-k}$
घटाने पर $\alpha-\beta=0 \Rightarrow 2\sqrt{1-k}=0$ या $k=1$.

(ख)-मूल वास्तविक होंगे यदि $1-k>0$ या $1>k$ या $k<1$.

(ग) मूल काल्पनिक होंगे यदि $1-k<0$ या $k>1$.

उदाहरण 33—(i) सिद्ध कीजिए कि निम्न समीकरणों में एक मूल उभयनिष्ठ (common root) है। उसका मान भी निकालिए—

$$x^2-2x-15=0$$
$$3x^2+10x+3=0$$

(ii) यदि x वास्तविक है तो सिद्ध कीजिए कि व्यंजक $\left(\dfrac{x^2+2x+15}{2x+7}\right)$ का मान -7 और 2 के बीच नहीं हो सकता।

हल—(i) मान लिया t दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करने वाला उभयनिष्ठ मूल है। अतः

$$t^2-2t-15=0 \quad \ldots(1)$$
$$3t^2+10t+3=0 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) को 3 से गुणा करके (2) में से घटाने पर—

$$3t^2+10t+3=0$$
$$3t^2-6t-45=0$$
$$16t+48=0 \quad \therefore \quad t=-3$$

$t=-3$ दोनों समीकरणों पर पूरा उतरता है अतः यह उभयनिष्ठ मूल है।

(ii) माना कि $\dfrac{x^2+2x+15}{2x+7}=y \quad \therefore \quad x^2+2x+15=2xy+7y$

$$x^2+2x(1-y)+15-7y=0$$
या $$x^2+\{2(1-y)\}x+(15-7y)=0$$
$$a=1,\ b=2(1-y),\ c=15-7y$$
$D=b^2-4ac=\{2(1-y)\}^2-4\times1.(15-7y)=4(1-2y+y^2)-4(15-7y)\geqslant0$
या $1-2y+y^2-15+7y\geqslant0$ ($\because$ मूल वास्तविक है)
या $y^2+5y-14\geqslant0 \Rightarrow (y+7)(y-2)\geqslant0$

$(y+7)$ और $(y-2)$ दोनों गुणनखण्डों के चिह्न विपरीत नहीं होने चाहिए, यदि $y>2$ तो दोनों खण्ड धनात्मक होंगे और यदि $y<-7$ तो दोनों ऋणात्मक होंगे। यदि y दोनों के मध्य है तो चिह्न विपरीत होंगे। अतः यदि x वास्तविक है तब y का मूल्य -7 और 2 के बीच नहीं हो सकता।

मूलों का योग एवं गुणा
(Sum and Product of Roots)

सामान्य द्विघात-समीकरण—

$$ax^2+bx+c=0$$

के दोनों मूल निम्नांकित हैं—

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ तथा } \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

मूलों का योग
(Sum of Roots)

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\boxed{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}}$$

मूलों की गुणा
(Product of Roots)

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\boxed{\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}}$$

यदि व्यापक समीकरण को इस प्रकार लिखा जाए कि प्रथम पद का गुणांक इकाई (1) हो, अर्थात् उसे a से भाग दे दिया जाए तो

$$\frac{ax^2+bx+c}{a}=\frac{0}{a} \longrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

अब $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=$ दूसरे पद का चिह्न-परिवर्तित गुणांक और $\alpha\beta=\frac{c}{a}=$ तीसरा पद।

उक्त समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है—

$x^2-(\alpha+\beta)\,x+\alpha\beta=0$
अथवा
x^2-(मूलों का योग) $x+$ मूलों की गुणा $=0$

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$
अथवा
($x-$पहला मूल)($x-$दूसरा मूल) $=0$

उपर्युक्त विश्लेषण से यह निष्कर्ष निकलता है कि यदि दोनों मूल ज्ञात हों तो द्विघात-समीकरण की रचना की जा सकती है।

उदाहरण 34—(i) वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल α व β हों;
(ii) वे द्विघात समीकरण बनाइए जिनके मूल (क) -3 व $-\frac{2}{3}$ हों; (ख) $\frac{4}{5}$ व $\frac{5}{4}$ हों; (ग) $-3\pm 5i$ हों।

हल—(i) क्योंकि दोनों मूल α व β हैं अतः

$x=\alpha \quad \therefore \quad x-\alpha=0$ और $x=\beta \quad \therefore \quad x-\beta=0$

अभीष्ट समीकरण दोनों गुणनखण्डों का गुणनफल होगी

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad \therefore \quad x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=0$$

$x^2-(\alpha+\beta)\,x+\alpha\beta=0$ या x^2-(मूलों का योग) $x+$ (मूलों की गुणा) $=0$

(ii) (क) $\alpha=-3;\ \beta=-\frac{2}{3}$ समीकरण : $x^2-\{(-3)+(-\frac{2}{3})\}\,x+(-3\times-\frac{2}{3})=0$

$\therefore \quad x^2+\frac{11}{3}x+2=0$ या $3x^2+11x+6=0$

(ख) $\alpha=\frac{4}{5},\ \beta=\frac{5}{4} \quad \therefore \quad \alpha+\beta=\frac{4}{5}+\frac{5}{4}=\frac{41}{20};\ \alpha\beta=\frac{4}{5}\times\frac{5}{4}=1$

समीकरण : $x^2-\frac{41}{20}x+1=0$ या $20x^2-41x+20=0$

(ग) $\alpha=-3+5i \quad \beta=-3-5i$

$\alpha+\beta=-3+5i-3-5i=-6$

$\alpha\beta=(-3+5i)(-3-5i)=(-3)^2-25i^2=9-(25\times-1)=34$

समीकरण : $x^2+6x+34=0$

उदाहरण 35—यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α, β हैं तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\alpha^3+\beta^3$ (iii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (iv) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ (v) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$

हल—द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ एवं } \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

(i) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{-b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$

(ii) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=\frac{3abc-b^3}{a^3}.$$

(iii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c}{a}}=\frac{b^2-2ac}{ac}$ {देखिए (i)}

(iv) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$

(v) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}\right)^2=\frac{(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2[(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta]}{\alpha^2\beta^2}$

$$=\frac{\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}\right]}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{b^2-4ac}{a^2}\right]}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2(b^2-4ac)}{a^2c^2}$$

उदाहरण 36—यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α व β हों तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल निम्नांकित होंगे :

(i) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$; (ii) $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$

हल—समीकरण : x^2-(मूलों का योग) $x+$(मूलों की गुणा)$=0$

(i) प्रदत्त मूल हैं $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$: मूलों का योग $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

मूलों की गुणा$=\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}$

$\therefore$ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ और $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ अतः—

मूलों का योग$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{a}\times\frac{a}{c}=-\frac{b}{c}$

मूलों की गुणा$=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}$

अभीष्ट समीकरण $x^2-\left(-\frac{b}{c}\right)x+\frac{a}{c}=0$ या $cx^2+bx+a=0$

(ii) प्रदत्त मूल $\alpha+\frac{1}{\beta}$ तथा $\beta+\frac{1}{\alpha}$ हैं।

योग $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

परन्तु $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ तथा $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

अतः योग$=-\frac{b}{a}+\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{a}+\left(-\frac{b}{a}\times\frac{a}{c}\right)=-\frac{b}{a}-\frac{b}{c}$

गुणा $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{(\alpha\beta+1)(\alpha\beta+1)}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha\beta+1)^2}{\alpha\beta}$

$$=\frac{\left(\frac{c}{a}+1\right)^2}{\frac{c}{a}}=\frac{\left(\frac{c+a}{a}\right)^2}{\frac{c}{a}}=\frac{(c+a)^2}{a^2}\times\frac{a}{c}=\frac{(c+a)^2}{ac}$$

नवीन समीकरण—

$$x^2-\left(\frac{-b}{a}-\frac{b}{c}\right)x+\frac{(c+a)^2}{ac}=0 \Rightarrow x^2+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\frac{(c+a)^2}{ac}=0$$

$$=x^2+b\left(\frac{c+a}{ac}\right)x+\frac{(c+a)^2}{ac}=0 \Rightarrow acx^2+b(a+c)x+(a+c)^2=0$$

उदाहरण 37—यदि $lx^2+nx+n=0$ के मूलों का अनुपात (ratio) $\frac{p}{q}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0$

हल—मान लिया कि समीकरण $lx^2+nx+n=0$ के मूल α एवं β हैं तब

$$\alpha+\beta=-\frac{n}{l},\ \alpha\beta=\frac{n}{l} \text{ प्रश्नानुसार } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{p}{q}$$

अब $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{n}{l}}$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=\frac{-\frac{n}{l}}{\sqrt{\frac{n}{l}}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=-\sqrt{\frac{n}{l}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0$$

उदाहरण 38—यदि α और β समीकरण $x^2-px+q=0$ के मूल हों तो उन समीकरणों की रचना कीजिए जिनके निम्नांकित मूल हैं—

(i) $(\alpha\beta+\alpha+\beta)$ तथा $(\alpha\beta-\alpha-\beta)$

(ii) $\alpha^2\beta$ तथा $\alpha\beta^2$

हल—(i) $x^2-px+q=0$ के $\alpha+\beta=p;\ \alpha\beta=q$

अभीष्ट समीकरण के मूलों का योग—

$$(\alpha\beta+\alpha+\beta)+(\alpha\beta-\alpha-\beta)=2\alpha\beta=2q$$

मूलों का गुणनफल—

$$(\alpha\beta+\alpha+\beta)(\alpha\beta-\alpha-\beta)=(\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta)^2$$
$$=q^2-p^2$$

समीकरण—x^2-(मूलों का योग) $x+$ गुणनफल $=0$

$$x^2-2qx+q^2-p^2=0$$

(ii) $\alpha+\beta=p,\ \alpha\beta=q$

मूल $\alpha^2\beta$ व $\alpha\beta^2$ हैं जिनका योग $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ है

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)=qp=pq$$

मूलों का गुणनफल—

$$\alpha^2\beta\times\alpha\beta^2=\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=q^3$$

अतः अभीष्ट समीकरण—

$$x^2-(\text{मूलों का जोड़})\ x+\text{मूलों की गुणा}=0$$
$$x^2-pqx+q^3=0$$

उदाहरण 39—यदि समीकरण $(1+k)x^2-2(1+3k)x+(1+8k)=0$ के मूल समान हों तो k मान ज्ञात कीजिए।

हल—प्रदत्त समीकरण—

$$(1+k)x^2-2(1+3k)x+(1+8k)=0$$
$$a=(1+k),\ b=-2(1+3k),\ c=1+8k$$

$\because$ मूल समान हैं अतः $\quad b^2=4ac$

$$\{-2(1+3k)\}^2=4(1+k)(1+8k)$$
$$4(1+3k)^2=4(1+k)(1+8k)$$
$$1+6k+9k^2=1+9k+8k^2$$
$$9k^2-8k^2+6k-9k+1-1=0 \Rightarrow k^2-3k=0$$
$$k(k-3)=0 \quad \therefore \quad k=0 \text{ या } 3$$

उदाहरण 40—यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों में से एक दूसरे का n गुना हो तो a, b, c में क्या सम्बन्ध होगा ?

हल—माना कि प्रदत्त समीकरण का एक मूल α है तो दूसरा मूल $\beta=n\alpha$

$$\text{योग } \alpha+\beta=\alpha+n\alpha=-\frac{b}{a}\ ;\ \alpha(1+n)=-\frac{b}{a}$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{-b}{a(1+n)} \qquad ...(1)$$

$$\alpha\beta=\alpha.n\alpha=\frac{c}{a} \text{ या } n.\alpha^2=\frac{c}{a} \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) से प्राप्त α का मूल्य समीकरण (2) में रखने पर—

$$n.\left(\frac{-b}{a(1+n)}\right)^2=n\frac{b^2}{a^2(1+n)^2}=\frac{c}{a}$$
$$nb^2.a=ca^2(1+n)^2$$
$$nb^2=ca(1+n)^2$$
$$\text{या} \quad b^2n=ac(1+n)^2$$

उदाहरण 41—यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों का योग उनके वर्गों के योग के बराबर हो तो सिद्ध कीजिए कि—

$$2ac=ab+b^2$$

हल—प्रदत्त समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α व β हैं जिनका योग—

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

उनके वर्गों का योग—

$$\alpha^2+\beta^2=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=-\frac{b}{a}$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=-\frac{b}{a}$$

a^2 से गुणा करने पर—

$$b^2-2ac=-ab$$
$$-2ac=-ab-b^2$$
$$\therefore\ 2ac=ab+b^2$$

उदाहरण 42—यदि समीकरण $2x^2-4x+1=0$ के दो मूल—α व β हों तो उस समीकरण की रचना कीजिए जिसके मूल $\alpha^2+\beta$ और $\beta^2+\alpha$ हों।

हल—$2x^2-4x+1=0$ मे $a=2,\ b=-4,\ c=1$

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\left(\frac{-4}{2}\right)=2,$$
$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$$

समीकरण— $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

या $x^2-(\text{मूलों का योग})x+\text{मूलों का गुणनफल}=0$

अभीष्ट मूल हैं—$\alpha^2+\beta$ और $\beta^2+\alpha$

मूलों का योग $=(\alpha^2+\beta)+(\beta^2+\alpha)=\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta$

$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+(\alpha+\beta)$

$=2^2-2\times\frac{1}{2}+2=5$

मूलों की गुणा $=(\alpha^2+\beta)(\beta^2+\alpha)$

$=\alpha^2\beta^2+\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2+(\alpha\beta)+\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}$

$[\because\ (\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$\therefore\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)]$

$=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})+\{(2)^3-3\times\frac{1}{2}\times2\}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+8-3=5\frac{3}{4}$ या $\frac{23}{4}$

अतः अभीष्ट समीकरण—

$$x^2-(\text{मूलों का योग})x+\text{मूलों का गुणनफल}=0$$
$$x^2-5x+\frac{23}{4}=0$$
$$\Rightarrow 4x^2-20x+23=0$$

उदाहरण 43—किसी संख्या का 8 गुना उसके वर्ग से 20 कम है। संख्या बताइए।

हल—माना संख्या x है।

उसका 8 गुना $=8x$; उसका वर्ग $=x^2$

$$x^2-8x=20 \Rightarrow x^2-8x-20=0$$
$$x^2+2x-10x-20=0$$
$$x(x+2)-10(x-2)=0$$
$$(x+2)(x-10)=0 \Rightarrow x=10,\ -2$$

[परीक्षण—यदि संख्या 10 है तो—

$$(10)^2-8\times10=100-80=20$$

यदि संख्या -2 है तो—

$$(-2)^2-(-2\times8)=4-(-16)=20]$$

महत्त्वपूर्ण सूत्र

I. रैखिक (सरल) समीकरण (Linear Equations—Simple)

सामान्य स्वरूप→ $ax+b=0 \quad (a\neq 0)$

x अज्ञात राशि है जिसका केवल एक मान है; a व b अचर राशियाँ है तथा a शून्य नहीं है

$$x=-\frac{b}{a}$$

सर्वसमिका (Identity)—प्रतीकों के किसी मान के लिए सत्य कथन

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

II. द्विघात समीकरण (Quadratic Equations)

सामान्य स्वरूप→ $ax^2+bx+c=0$

x अज्ञात राशि है जिसके 2 मूल्य हैं, a, b, c अचर राशियाँ हैं।

हल करने की रीतियाँ—

1. गुणनखण्ड रीति (Factorisation Method)
2. वर्ग पूर्ण करने की रीति (Method of Completing Square)
3. सूत्र रीति (Formula Method)—

$$x = \text{दो मूल } \alpha \text{ व } \beta$$

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

मूलों का योग (Sum of Roots)—

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

मूलों की गुणा (Product of Roots)—

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

α व β मूल वाला समीकरण—

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad \text{अथवा} \quad (x-\alpha)(x-\beta)=0$$

अभ्यासार्थ प्रश्न

रैखिक या सरल समीकरण (Linear or Simple Equations)—

1. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए—
   (i) $4x-7=2x+3$
   (ii) $\sqrt{x-1}=3$
   (iii) $\frac{x-1}{2}=\frac{x+2}{5}$
2. हल कीजिए—
   (i) $(2x-3)^2=4x(x-2)+(x-1)$
   (ii) $\frac{x-2}{x-1}-\frac{x+2}{x+1}=0$
3. x का मान निकालिए—
   (i) $\frac{5}{x-6}=\frac{8}{x+3}-\frac{3}{x-2}$

(ii) $\frac{6x}{5}-4\frac{1}{2}=\frac{9x}{25}-\frac{1}{10}+\frac{2x}{5}$

4. हल कीजिए—

(i) $(x-4)+(x-7)(x-8)=(x-6)^2$

(ii) $(x+1)-\frac{3(x-4)}{5}+\frac{5x}{2}=\frac{15x}{4}-\left(\frac{x}{4}-1\right)$

5. हल कीजिए—

(i) $\frac{2(x-1)}{5}+3=3x-\frac{x-1}{3}$

(ii) $125^{x-1}\times 5^{1-x}=25^{2x}\times 5^{2-3x}$

6. x का मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\frac{a}{x+a}-\frac{b}{x+b}=0$

(ii) $3^{8x-7}\times 27\div 9^{x}=9^{2x}\div 3^{2x-11}$

7. हल कीजिए—

(i) $16^{x-2}+4^{2x-5}=5$

(ii) $\frac{3a-x}{3a}-\frac{a-x}{a}=\frac{2a-x}{2a}$

8. दो क्रमिक संख्याओं में से छोटी संख्या का एक-तिहाई, बड़ी (अगली) संख्या के एक चौथाई से 5 अधिक है। संख्याएँ बताइए। उत्तर का परीक्षण भी कीजिए।

9. माँग व पूर्ति के निम्नांकित फलनों से साम्यावस्था-मूल्य और मात्रा ज्ञात कीजिए—

(i) $D=13-2p,\ S=3p+3$; (ii) $D=\sqrt{36-p},\ S=\sqrt{4p-24}$

10. रवि यूनिट ट्रस्ट ऑफ इण्डिया के 100 यूनिट 10·30 रु० प्रति यूनिट की दर से खरीदता है। वह 200 यूनिट 10·40 रु० प्रति, 400 यूनिट 10·50 रु० प्रति और 300 यूनिट 10·80 रु० प्रति यूनिट की दर से खरीदता है। कीमत कम हो जाती है और 10·25 रु० की दर से वह इतने यूनिट खरीदना चाहता है जिससे उसकी क्रय की औसत लागत 10·50 रु० प्रति इकाई हो जाए। यह मानते हुए कि रवि सदा 100 के गुणकों में ही यूनिट खरीदता है, बताइए वह 10·25 रु० की कीमत पर कितने यूनिट खरीदता है ?

द्विघात समीकरण (Quadratic Equations)—

11. निम्नलिखित समीकरणों को गुणनखण्ड रीति द्वारा हल कीजिए—

(i) $x^2-6x+5=0$; (ii) $x^2-169=0$.

12. निम्नलिखित समीकरणों के गुणनखण्ड बनाकर हल कीजिए—

(i) $3x^2-19x+20=0$;

(ii) $x-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a}$.

13. निम्न समीकरणों को हल कीजिए—

(i) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$;

(ii) $a(x^2+1)=x(a^2+1)$.

14. हल कीजिए—

(i) $25x^2-150x+216=0$;

(ii) $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{1}{x}$.

15. हल कीजिए—

(i) $16x^2-4x-6=0$;

(ii) $\frac{4x+5}{x}-\frac{3x}{4x+5}=2$.

16. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए—

(i) $mnx^2+(n^2-m^2)x-mn=0$;

(ii) $x^2-14x+29=0$.

(ii) $\frac{6x}{5}-4\frac{1}{2}=\frac{9x}{25}-\frac{1}{15}+\frac{2x}{5}$

4. हल कीजिए—

(i) $(x-4)+(x-7)(x-8)=(x-6)^2$

(ii) $(x+1)-\frac{3(x-4)}{5}+\frac{5x}{2}=\frac{15x}{4}-\left(\frac{x}{4}-1\right)$

5. हल कीजिए—

(i) $\frac{2(x-1)}{5}+3=3x-\frac{x-1}{3}$

(ii) $125^{x+1}\times 5^{1-x}=25^{2x}\times 5^{2-3x}$

6. x का मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\frac{a}{x+a}-\frac{b}{x+b}=0$

(ii) $3^{5x-7}\times 27\div 9^{x}=9^{2x}\div 3^{3x-11}$

7. हल कीजिए—

(i) $16^{x-2}+4^{2x-6}=5$

(ii) $\frac{3a-x}{3a}-\frac{a-x}{a}=\frac{2a-x}{2a}$

8. दो क्रमिक संख्याओं में से छोटी संख्या का एक-तिहाई, बड़ी (अगली) संख्या के एक चौथाई से 5 अधिक है। संख्याएँ बताइए। उत्तर का परीक्षण भी कीजिए।

9. माँग व पूर्ति के निम्नांकित फलनों से साम्यावस्था-मूल्य और मात्रा ज्ञात कीजिए—

(i) $D=13-2p,\ S=3p+3$; (ii) $D=\sqrt{36-p},\ S=\sqrt{4p-24}$

10. रवि यूनिट ट्रस्ट ऑफ इण्डिया के 100 यूनिट 10·30 रु० प्रति यूनिट की दर से खरीदता है। वह 200 यूनिट 10·40 रु० प्रति, 400 यूनिट 10·50 रु० प्रति और 300 यूनिट 10·80 रु० प्रति यूनिट की दर से खरीदता है। कीमत कम हो जाती है और 10·25 रु० की दर से वह इतने यूनिट खरीदना चाहता है जिससे उसकी क्रय की औसत लागत 10·50 रु० प्रति इकाई हो जाए। यह मानते हुए कि रवि सदा 100 के गुणकों में ही यूनिट खरीदता है, बताइए वह 10·25 रु० की कीमत पर कितने यूनिट खरीदता है?

द्विघात समीकरण (Quadratic Equations)—

11. निम्नलिखित समीकरणों को गुणनखण्ड रीति द्वारा हल कीजिए—

(i) $x^2-6x+5=0$; (ii) $x^2-169=0$.

12. निम्नलिखित समीकरणों के गुणनखण्ड बनाकर हल कीजिए—

(i) $3x^2-19x+20=0$;

(ii) $x-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a}$.

13. निम्न समीकरणों को हल कीजिए—

(i) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$;

(ii) $a(x^2+1)=x(a^2+1)$.

14. हल कीजिए—

(i) $25x^2-150x+216=0$;

(ii) $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{1}{x}$.

15. हल कीजिए—

(i) $16x^2-4x-6=0$;

(ii) $\frac{4x+5}{x}-\frac{3x}{4x+5}=2$.

16. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए—

(i) $mnx^2+(n^2-m^2)x-mn=0$;

(ii) $x^2-14x+29=0$.

17. हल कीजिए—

(i) $x^2+a^2+b^2-2ax=0;$

(ii) $x^2+a^2+b^2-2ab=0.$

18. हल कीजिए—

(i) $3x^2-4x+\sqrt{3x^2-4x-6}=18;$

(ii) $x^2+2\sqrt{x^2+6x}=24-6x.$

19. हल कीजिए—

$$\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9$$

20. $6x^4-25x^3+12x^2+25x+6=0$ को हल कीजिए।

21. हल कीजिए—

(i) $ax^2+bx+c=0;$

(ii) $x^3-2x^2-x+2=0.$

22. निम्न समीकरणों के मूलों की प्रकृति बतलाइए—

(i) $4x^2-12x+9=0;$

(ii) $3x^2+7x+8=0.$

23. निम्न समीकरणों के मूल कैसे हैं ?—

(i) $(b+c)x^2-(a+b+c)x+a=0;$

(ii) $4x^2-3x+5=0.$

24. निम्न मूलों वाले समीकरणों की रचना कीजिए—

(i) 3 व -2,

(ii) [illegible] व [illegible],

(iii) $-p\pm2\sqrt{2q}.$

25. वह समीकरण बनाइए जिसके मूल, समीकरण $x^2+2x-5=0$ के मूलों के योग एवं गुणनफल हों।

26. यदि समीकरण $p(q-r)x^2+q(r-p)x+r(p-q)=0$ के मूल समान हों तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{2}{q}.$$

27. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों में से एक दूसरे का वर्ग हो तो सिद्ध कीजिए—

$$b^3+ac^2+a^2c=3abc.$$

28. यदि α व β समीकरण $lx^2+mx+n=0$ के मूल हो तो वह समीकरण बनाइए जिसके मूल—

(i) $\frac{\alpha}{\beta}$ व $\frac{\beta}{\alpha}$ हो तथा (ii) $(\alpha+\beta)^2$ व $(\alpha-\beta)^2$ हों।

29. यदि $ax^2+bx+c=0$ के मूल α व β हो तो निम्नलिखित व्यंजकों का मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\alpha^3-\beta^3;$

(ii) $\frac{1}{(a\alpha+b)^2}+\frac{1}{(a\beta+b)^2}$

30. (i) हल कीजिए—

$4x^2+7x-1=0.$

(ii) निम्न समीकरण का हल कीजिए यदि एक मूल का मान 2 हो—

$x^4-7x^3+15x^2-11x+2=0.$ [C. A. Inter. Nov. 1980]

31. हल कीजिए—

(i) $\sqrt{3x^2-2x+9}+\sqrt{3x^2-2x-4}=13$

(ii) $\frac{p^2}{p+x}+\frac{q^2}{q+x}=p+q$

32. हल कीजिए—

(i) $\sqrt{3x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{3x^2+1}}=5;$

(ii) $\sqrt{x^2-5x+6}-\sqrt{x^2-9}=\sqrt{2x^2-11x+15}.$

33. हल कीजिए—

(i) $(x+2)(x-5)(x-6)(x+1)=144;$

(ii) $\sqrt{\frac{x+5}{x-5}}+\sqrt{\frac{x-5}{x+5}}=2\frac{1}{2}.$

34. हल कीजिए—

(i) $x^4-5x^3+15x+9=0$; (ii) $(x+1)(x+3)(x+4)(x+6)=72$.

35. हल कीजिए—

(i) $4x^4-16x^3+7x^2+16x+4=0$;

(ii) $5^x+5^{2-x}=26$.

36. (i) k के किन मूल्यों के लिए निम्न समीकरण के समान मूल होंगे ?—

$$(k+1)x^2+2(k+3)x+(2k+3)=0.$$

(ii) यदि किसी द्विघाती समीकरण के मूलों का जोड़ 3 हो और उनके घनों (cubes) का जोड़ 7 हो तो समीकरण को रचना कीजिए।

37. निम्न परिस्थितियों में k का मान ज्ञात कीजिए—

(i) समीकरण $x^2+2x+k=0$ के मूल समान होंगे।

(ii) समीकरण $x^2-6x+k=0$ का एक मूल $3+i\sqrt{2}$ होगा।

(iii) $x^2-4x=k$ का एक मूल $2(1-\sqrt{3})$ होगा।

38. (i) निम्न समीकरण के सभी मूल ज्ञात कीजिए—

$$x^3+9x^2-x-9=0$$

(ii) यदि -6 निम्न समीकरण का एक मूल हो तो शेष मूल ज्ञात कीजिए—

$$x^3+2x^2-17x+42=0$$

39. (i) ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका जोड़ 16 हो और गुणनफल 55 हो।

(ii) दो संख्याओं में 3 का अन्तर है और उनके वर्गों का जोड़ 149 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

40. किसी उद्योग में माँग व पूर्ति फलन निम्न प्रकार हैं—

माँग (Demand) $pq=100$

पूर्ति (Supply) $20+3p=q$

जहाँ, p और q संकेताक्षर क्रमशः कीमत (price) और मात्रा (quantity) के लिए प्रयोग किये गए हैं।

साम्यावस्था-कीमत और मात्रा ज्ञात कीजिए।

उत्तर

1. (i) 5; (ii) 10; (iii) 3. 2. (i) 2; (ii) 0. 3. (i) 3; (ii) 10. 4. (i) 8; (ii) 4. 5. (i) 1; (ii) 4. 6. (i) 0; (ii) 3. 7. (i) $2\frac{1}{3}$; (ii) $6a/7$. 8. 63 व 64. 9. (i) $p=2$, $q=9$; (ii) $p=12$, $q=\sqrt{24}$. 10. 200 यूनिट। 11. (i) 5, 1; (ii) ± 13. 12. (i) $1\frac{2}{3}$, 5; (ii) a, $-\frac{1}{a}$. 13. (i) $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$; (ii) $a, \frac{1}{a}$. 14. (i) $3\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}$; (ii) $\frac{-1\pm i\sqrt{23}}{6}$. 15. (i) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; (ii) $-1, -5$. 16. (i) $\frac{m}{n}, \frac{-n}{m}$; (ii) $7\pm 2\sqrt{5}$. 17. (i) $a\pm ib$; (ii) $\pm i(a-b)$. 18. (i) 3, $-1\frac{2}{3}$, $2\pm\sqrt{70}/3$; (ii) 2, -8, $-3\pm 3\sqrt{5}$. 19. 3 या $-\frac{2}{3}$. 20. 3, 2, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$. 21. (i) $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; (ii) $x=-1, 1, 2$. 22. (i) वास्तविक व समान; (ii) कल्पित। 23. (i) अपरिमेय, असमान, (ii) कल्पित। 24. (i) $x^2-x-6=0$; (ii) $35x^2+13x-12=0$. (iii) $x^2+2px+p^2-8q=0$. 25. $x^2+7x+10=0$. 28. (i) $nlx^2-(m^2-2nl)x+nl=0$; (ii) $l^4x^2-2l^2(m^2-2nl)x+m^2(m^2-4nl)=0$. 29. (i) $\frac{(b^2-ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^3}$; (ii) $\frac{b^2-2ac}{a^2c^2}$. 30. (i) $\frac{-7\pm\sqrt{65}}{8}$; (ii) 2, 1, $2\pm\sqrt{3}$. 31. (i) 4, $-\frac{10}{3}$; (ii) 0, $\frac{-2pq}{p+q}$. 32. (i) 0, $\pm\sqrt{5}$; (ii) 3, $\frac{-1\pm\sqrt{61}}{2}$. 33. (i) 7, -3, 2; (ii) $\pm\frac{25}{3}$. 34. (i) -1, 3, $\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$; (ii) 0, -7, $\frac{-7\pm i\sqrt{23}}{2}$. 35. (i) 2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$; (ii) 0, 2. 36. (i) 3, -2; (ii) $9x^2-27x+20=0$. 37. (i) 1; (ii) 11; (iii) 8. 38. ± 1, -9, संकेत—गुणनखण्ड कीजिए—$x^2(x+9)-1(x+9)=0$; (ii) -6, $2\pm i\sqrt{3}$, संकेत—-6 मूल है अतः $x+6$ एक खण्ड हुआ जिससे समीकरण को भाग दीजिए। 39. (i) 11 व 5; (ii) 7 व 10. 40. $p=3{\cdot}33$, $q=30$. संकेत—q का मान $(20+3p)$ प्रथम समीकरण में आदिष्ट करके हल कीजिए।

3. क्रमचय एवं संचय
(Permutations and Combinations)

गणना का मूल सिद्धान्त (Fundamental Principle of Counting)—यदि किसी कार्य को करने के m तरीके हों और यदि इनमें से किसी एक तरीके से कार्य हो जाने पर दूसरे कार्य को n तरीकों से किया जा सके तो दोनों को एक साथ पूरा करने के $m \times n$ तरीके होंगे। इसी प्रकार दोनों कार्यों (m व n) के एक साथ पूरा हो जाने पर किसी तीसरे कार्य को यदि p तरीकों से पूरा किया जा सके तो तीनों कार्यों (m, n व p) को एक साथ पूरा करने के कुल तरीकों की संख्या $m \times n \times p$ होगी। इस आधारभूत सिद्धान्त को व्यापक रूप से तीन से अधिक कार्यों को एक साथ पूरा करने के कुल तरीकों की संख्या ज्ञात करने के लिए इसी प्रकार (गुणा द्वारा) प्रयोग किया जा सकता है।

प्रमाण—यदि एक क्रिया, $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_m$ अर्थात् m तरीकों से सम्पन्न की जा सकती है और दूसरी स्वतन्त्र क्रिया $b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots b_n$ अर्थात् n तरीकों से की जा सकती है तो दोनों क्रियाएँ साथ-साथ निम्न तरीकों से पूरी की जा सकती हैं—

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_n
a_1	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	$a_1b_4 \ldots\ldots a_1b_n$	
a_2	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	$a_2b_4 \ldots\ldots a_2b_n$	
a_3	a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	$a_3b_4 \ldots\ldots a_3b_n$	
a_4	a_4b_1	a_4b_2	a_4b_3	$a_4b_4 \ldots\ldots a_4b_n$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_m	a_mb_1	a_mb_2	a_mb_3	$a_mb_4 \ldots\ldots a_mb_n$	

∴ दोनो क्रियाओं के तरीकों की कुल सख्या $= m \times n$

यदि छः पहलू (six-faced) वाले दो पासे (dice) लेकर उछाले जाएँ तो सभी सम्भाव्य परिणामों (all possible outcomes) की कुल संख्या $6 \times 6 = 6^2 = 36$ होगी जैसा कि निम्न तालिका से स्पष्ट है—

दो पासे के प्रयोग में सम्भाव्य परिणाम

I \ II	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

यदि उपर्युक्त प्रयोग में पहले पासे के एक परिणाम के साथ दूसरे पासे के उसी परिणाम (1, 1; 2, 2……..6, 6) का संयोजन न हो तो कुल परिणामों की संख्या घटकर 30 रह जाएगी। 36 तरीको में से 6 (1, 1; 2, 2; 3, 3; 4, 4; 5, 5; 6, 6) तरीके निकल जाएँगे। अतः यदि समान परिणामो की आवृत्ति न हो (no repetitions) तो कुल तरीकों की संख्या $= n(n-1) = 6 \times 5 = 30$ होगी। यदि समान परिणामों के संयोग भी सम्मिलित किए जाएँ तो कुल तरीकों की संख्या $= n^r = 6^2 = 6 \times 6 = 36$ होगी।

उदाहरण 1—जयपुर और अजमेर के बीच 16 बस सेवाएँ चलती हैं। एक यात्री जयपुर से अजमेर जाता है और फिर अजमेर से वापस जयपुर लौट आता है। बताइए वह यह यात्रा—जाना व लौटना—कितने तरीकों से पूरी कर सकता है यदि वह—

(i) किसी भी बस से लौटे,

(ii) उस बस से न लौटे जिससे वह अजमेर गया था,

(iii) उसी बस से लौटे जिससे वह गया था।

हल—(i) जयपुर से अजमेर जाने के लिए 16 बस सेवाएँ हैं। अतः जयपुर से अजमेर के लिए यात्री के सामने 16 विकल्प या तरीके हैं। 16 में से किसी विकल्प से अजमेर पहुँचने के बाद वह वापस भी 16 तरीकों (बसों) से लौट सकता है।

जयपुर से अजमेर तक जाने के तरीकों की संख्या $=16$

अजमेर से जयपुर वापस आने के तरीकों की संख्या $=16$

अतः दोनों ओर की यात्रा पूरी करने के तरीकों की संख्या $=16\times 16=256$

(ii) यदि वह उस बस से न लौटे जिससे जयपुर से अजमेर गया था तो यात्रा

$$16(16-1)=16\times 15=240$$

तरीकों से सम्पन्न हो सकती है।

जयपुर से अजमेर जाने के विकल्पों की संख्या $=16$

अजमेर से जयपुर वापस आने के तरीकों की संख्या, यदि वह किसी अन्य बस से ही लौटे अर्थात् उस बस से न लौटे जिससे गया था $=16-1=15$

अतः दोनों ओर की यात्रा पूरी करने के तरीकों की संख्या $=16\times 15=240$

(iii) यदि वह उसी बस से लौटे जिससे वह गया था—तो लौटने का एक ही तरीका होगा।

जयपुर से अजमेर जाने के तरीकों की संख्या $=16$

अजमेर से वापस जयपुर आने के तरीकों की संख्या जब वह उसी बस से लौटता है जिससे गया था $=1$

अतः यात्रा पूरी करने के तरीकों की संख्या $=16\times 1=16$

उदाहरण 2—(i) एक क्रिकेट स्टेडियम की पूर्वी सीमा पर 6 द्वार हैं और पश्चिमी सीमा पर 4 द्वार हैं। (क) कितने तरीकों से एक दर्शक पूर्वी द्वार से प्रवेश करके पश्चिमी द्वार से बाहर जा सकता है? (ख) कुल कितने तरीकों से कोई दर्शक एक द्वार से प्रवेश करके अन्य द्वार से निकल सकता है?

(ii) तीन यात्री एक ऐसे नगर में पहुँचते हैं जहाँ चार होटल हैं। उनमें वे कितने तरीकों से ठहर सकते हैं यदि प्रत्येक एक अलग होटल में ही ठहरे। यदि प्रत्येक के अलग-अलग होटल में ठहरने का प्रतिबन्ध न रहे तो वे कुल कितने तरीकों से ठहर सकते हैं?

हल—(i) (क) पूर्वी द्वार से प्रवेश करने के तरीको की संख्या $=6$

पश्चिमी द्वार से बाहर जाने के तरीकों की संख्या $=4$

पूर्वी द्वार से प्रवेश करने तथा पश्चिमी द्वार से निकलने के तरीको की संख्या $=6\times 4=24$

(ख) कुल द्वार $6+4=10$ हैं।

किसी द्वार से प्रवेश करने के तरीकों की संख्या $=10$

किसी अन्य द्वार से बाहर जाने के तरीकों की संख्या $=10-1=9$

$\therefore$ एक दरवाजे से आने और दूसरे से निकलने के तरीकों की संख्या $=10\times 9=90$

(ii) पहला यात्री चारों में से किसी भी होटल में ठहर सकता है।

अतः पहले यात्री के किसी होटल में ठहरने के तरीकों की संख्या $=4$

पहले यात्री के एक होटल मे ठहरने के बाद, दूसरे यात्री के किसी अन्य $(4-1)$ होटल में ठहरने के तरीको की संख्या $=4-1=3$

पहले और दूसरे यात्रियों के अलग-अलग होटलों में ठहरने के बाद तीसरे यात्री के किसी अन्य होटल में ठहरने के तरीकों की संख्या $=4-1-1=2$

∴ तीनों यात्रियों के अलग-अलग होटलों में ठहरने के तरीकों की संख्या $= 4(4-1)(4-2) = 4 \times 3 \times 2 = 24$

यदि अलग-अलग होटलों में ठहरने का प्रतिबन्ध न हों तो तीनों के ठहरने के कुल तरीकों की संख्या $= 4 \times 4 \times 4 = 4^3$
$= 64$

उदाहरण 3—(i) एक कक्षा में 10 लड़के और 5 लड़कियां हैं। दो कक्षा-प्रतिनिधियों का चयन करना है। ये कितने तरीको से चुने जा सकते हैं यदि (क) दोनों सभी विद्यार्थियों में से छांटे जाएँ, (ख) एक लड़का और लड़की चुने जाएँ, (ग) पहला लड़का तथा दूसरा कोई भी लड़का या लड़की, हो ?

(ii) किन्हीं 5 रिक्त स्थानों के लिए 8 पुरुष और 5 महिलाएँ प्रार्थना पत्र भेजती हैं। 3 विशेष स्थानों के लिए पुरुष और शेष 2 स्थानों के लिए महिलाओं की नियुक्ति की जानी है। बताइए वे रिक्त स्थान कितने प्रकार से भरे जा सकते हैं ?

हल—(i) (क) दोनों सभी विद्यार्थियों में से चुने जाएँ—

विद्यार्थियों की कुल संख्या $= 10 + 5 = 15$

पहला प्रतिनिधि 15 तरीकों से छांटा जा सकता है

दूसरा प्रतिनिधि $15 - 1 = 14$ तरीकों से चुना जा सकता है

अतः दोनों प्रतिनिधियों की चयन-विधियों की संख्या $= 15 \times 14 = 210$

(ख) एक लड़का 10 प्रकार से चुना जा सकता है

एक लड़की 5 प्रकार से चुनी जा सकती है

अतः एक लड़का व एक लड़की चुने जाने के तरीकों की संख्या $= 10 \times 5 = 50$

(ग) पहला लड़का 10 तरीकों से छांटा जा सकता है इसके बाद शेष $(10 - 1)$
$9 + 5 = 14$
विद्यार्थियों में से कोई एक (लड़का या लड़की) चुना जा सकता है।

अतः पहला लड़का तथा दूसरा कोई भी (लड़का या लड़की) चुने जाने के तरीकों की संख्या $= 10 \times 14 = 140$

(ii) रिक्त स्थान 5 हैं जिनमे से 3 पर पुरुषों और 2 पर महिलाओं की नियुक्ति होनी है :

8 पुरुष प्रत्याशियों में से 3 का चयन $8 \times 7 \times 6 = 336$ प्रकार से हो सकता है।

5 महिला प्रत्याशियों में से 2 की नियुक्ति $5 \times 4 = 20$ तरीकों से हो सकती है।

अतः 3 पुरुष और 2 महिलाओं की नियुक्ति $336 \times 20 = 6720$ प्रकार से हो सकती है। अर्थात् 5 रिक्त स्थान 6720 प्रकार से भरे जा सकते है।

उदाहरण 4—1 से 9 तक प्राकृत अंको से (क) 5 अंकों वाले कितने टेलीफोन नम्बर बन सकते हैं, (ख) केवल विषम अंको को लेकर कितने 6 अंकों वाले नम्बर बन सकते है, (ग) 7 अंकों वाले ऐसे कितने नम्बर बन सकते है जिनके पहले तीन अंक 786 हो तथा इनमे से कितने ऐसे होंगे जिनमे किसी अंक की पुनरावृत्ति न हो ?

हल—1 से 9 तक कुल 9 प्राकृत अंक है—1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 और 9,

$$N = 9$$

(क) 5 अंकों वाले दूरभाष नम्बर—$N^r = 9^5 = 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$
(यदि अंको की पुनरावृत्ति हो) $= 59049$

(ख) 6 अंकों वाले नम्बर—केवल विषम अंक—1, 3, 5, 7, 9 लेकर यहाँ 6 रिक्त स्थान भरने हैं जिनमे से प्रत्येक स्थान 5 तरीको से भरा जा सकता है अतः कुल संख्या—

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6 = 15625$$

(ग) 7 अंकों वाले नम्बर जिनमें 786 आरम्भ के 3 अंक हों—7 अंकों में से पहले 3 अंक पूर्व निर्धारित हैं। अतः $7 - 3 = 4$ स्थान शेष रहे जिनकी पूर्ति 9^4 या $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$ तरीकों से की जा सकती है। इनमें से ऐसे फोन नम्बरों की संख्या निम्न प्रकार ज्ञात की जाएगी

जिनमें कोई भी अंक दोबारा न आता हो—

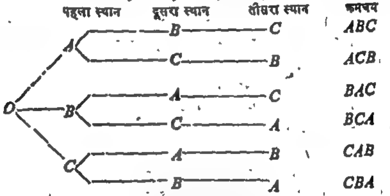
9 अंकों में से तीन, 7, 8, 6—पहले ही शामिल हैं।

शेष 6 अंक रहे (1 से 5 व 9)। चौथा स्थान 6 तरीकों से, पाँचवाँ 5, छठा 4 व सातवाँ 3 तरीकों से भरा जा सकता है अतः कुल $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ नम्बर बनेंगे।

स्थान	I	II	III	IV	V	VI	VII	तरीके
पुनरावृत्ति होने पर :	7	8	6	9 ×	9 ×	9 ×	9	=6561
पुनरावृत्ति न होने पर :	7	8	6	6 ×	5 ×	4 ×	3	= 360

क्रमचय (Permutation)—निश्चित वस्तुओं का एक निर्धारित क्रम में विन्यास (arrangement), क्रमचय कहलाता है। दूसरे शब्दों में, 'क्रमचय' से हमारा तात्पर्य उन समस्त क्रमों (orders) से है जिनमें हम दी हुई वस्तुओं (*n*) में से कुछ (*r*) या सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर विन्यसित (arrange) कर सकते हैं।[1] तीन पुस्तकों *A*, *B* व *C* के निम्नांकित 6 क्रमचय प्राप्त होंगे—

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA



चित्र 1—तीन पुस्तकों के क्रमचय

संचय (Combination)—क्रम को ध्यान में न रखते हुए निश्चित वस्तुओं के समूहों या चयनों (groups or selections) को संचय कहते हैं। दूसरे शब्दों में, संचय से हमारा तात्पर्य उन समूहों या चुनावों से है जो दी हुई वस्तुओं (*n*) में से कुछ (*r*) या सभी को एक साथ लेने पर प्राप्त होते हैं।[2]

चार पुस्तकों—*A, B, C, D* में से दो-दो को साथ लेकर निम्न संचय और क्रमचय बनेंगे—

संचय	क्रमचय
AB	*AB, BA*
AC	*AC, CA*
AD	*AD, DA*
BC	*BC, CB*
BD	*BD, DB*
CD	*CD, DC*
कुल संख्या 6	12

[1] A permutation of a number of objects is any *arrangement* of those objects in a definite *order*. In other words, each of the different *orders* in which a number of given objects (*n*) can be *arranged* by taking some or all of them (*r*) at a time is called a permutation.

[2] A combination is a *group or selection* of objects considered without regard to their order. In other words each of the *groups or selections* of given objects (*n*) formed by taking some or all of them (*r*) at a time is called a combination.

उपर्युक्त स्थिति में क्रमचयों की संख्या, संचयों की संख्या से दोगुनी है क्योंकि प्रत्येक संचय के दो क्रमचय बने हैं जैसे *AB* संचय के *AB* और *BA* क्रमचय हैं।

क्रमचय व संचय-सम्बन्धी सूत्र—यदि दी हुई वस्तुएँ बहुत कम हों तो क्रमचयों व संचयों की संख्याएँ सरलता से ज्ञात की जा सकती हैं परन्तु अधिक वस्तुएँ होने पर सूत्रों की सहायता लेनी पड़ती है। '*n*' असमान वस्तुओं में से '*r*' वस्तुओं के क्रमचय और संचय निम्न सूत्रों द्वारा ज्ञात किये जाते हैं—

क्रमचय (Permutations—*P*)	संचय (Combinations—*C*)
$^nP_r=\frac{n\,!}{(n-r)\,!}$	$^nC_r=\frac{n\,!}{(n-r)\,!\,r\,!}$

$n\,!$ या $\underline{|n}$, *n* क्रमगुणित (*n* factorial or factorial *n*) कहलाता है जो 1 से लेकर *n* तक की प्राकृत संख्याओं (natural numbers) का गुणनफल है। अर्थात् $n\,!=1.2.3...n$ परन्तु सुविधा के लिए $n\,!$ में अंक विपरीत क्रम से लिखे जाते है—

$$n\,!=n(n-1)(n-2)(n-3)........3.2.1$$
$$n\,!=n.(n-1)\,!=n(n-1)(n-2)\,!=n(n-1)(n-3)\,!$$

जैसे, $5\,!=5\times4\times3\times2\times1=120.$

क्रमचय के सूत्र का स्पष्टीकरण—यदि *n* असमान वस्तुओं में से *r* लेकर क्रमचय बनाए जायें तो पहला स्थान '*n*' ढंगों से भरा जा सकता है, दूसरा स्थान $n-1$ ढंगों से, तीसरा $n-2$ ढंगों से; चौथा $n-(4-1)$ या $n-3$ ढंगों से और अन्त में *r*वाँ स्थान (*r*th space) $n-(r-1)$ या $n-r+1$ तरीकों से भरा जा सकता है। अतः $^nP_r=n(n-1)(n-2)(n-3)........(n-r+1)$। सूत्र को $(n-r)\,!$ से गुणा व भाग देने पर निम्न परिणाम निकलेगा—

$$^nP_r=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)\times(n-r)(n-r-1)...3.2.1}{(n-r)(n-r-1)...3.2.1}=\frac{n\,!}{(n-r)\,!}$$

संचय और क्रमचय का सम्बन्ध—*n* असमान वस्तुओं में से *r* को एक साथ लेकर '^nC_r' संचय बनाये जा सकते हैं जिनमें से प्रत्येक संचय को $r\,!$ ढंगों से विन्यसित किया जा सकता है। अतः—

$$^nP_r={^nC_r}\times r\,! \quad \text{या} \quad {^nC_r}=\frac{^nP_r}{r\,!}=\frac{n\,!}{(n-3)\,!\,r\,!}$$

उदाहरणार्थ, 4 पुस्तकों में से तीन-तीन के संचय $^4C_3=\frac{4\,!}{(4-3)\,!\,3\,!}=4$ होंगे परन्तु क्रमचय $^4P_3$ अर्थात् $^4C_3\times3\,!=4\times6=24$ होंगे जैसा कि निम्न सारणी से स्पष्ट है। प्रत्येक संचय के 3 ! या 6 क्रमचय हैं—

$^4C_3$ और $^4P_3$

संचय	क्रमचय
ABC	*ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA*
ABD	*ABD, ADB, BDA, BAD, DAB, DBA*
ACD	*ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA*
BCD	*BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB*
4	4×3 !=24

क्रमचय सम्बन्धी नियम
(Rules regarding Permutations)

नियम 1—n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाये जाने वाले क्रमचयों की संख्या—

$${}^nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-r+1)$$

अथवा

$$\boxed{{}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}} \quad \text{जहाँ } r \leqslant n.$$

इस सूत्र का स्पष्टीकरण पहले दिया जा चुका है।

नियम 2—यदि सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर (n) क्रमचय बनाये जावें (अर्थात् $r=n$) तो उनकी कुल संख्या— $\boxed{{}^nP_n = n!}$ होगी।

उदाहरण 5—सिद्ध कीजिए कि—

(i) ${}^nP_n = n!$; (ii) $0! = 1$; (iii) $10! = 5!\,.2^5.(1.3.5.7.9)$;

(iv) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$;

हल—(i) यह ज्ञात है कि

$${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

$r=n$ रखने पर—

$$\begin{aligned}{}^nP_n &= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-n+1)\\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots1\\ &= n!\end{aligned}$$

(ii) $${}^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

परन्तु ${}^nP_n = n!$; $\therefore \dfrac{n!}{0!} = n!$ अतः $0! = \dfrac{n!}{n!} = 1$

(iii) $$\begin{aligned}10! &= 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 \text{ या } 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10\\ &= (1.3.5.7.9)(2.4.6.8.10)\\ &= (1.3.5.7.9).2\times1.2\times2.2\times3.2\times4.2\times5\\ &= (1.3.5.7.9).(2\times2\times2\times2\times2).(1\times2\times3\times4\times5)\\ &= (1.3.5.7.9).(2^5).(5!) = 5!\,.2^5.(1.3.5.7.9)\end{aligned}$$

(iv) $$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n = n(n+1)$$

उदाहरण 6—(i) मान बताइये—${}^9P_3$, ${}^{20}P_2$, ${}^4P_4$

(ii) यदि ${}^nP_4 = 12.{}^nP_2$ तो n का मान बताइये।

(iii) यदि ${}^nP_4 = 10.{}^nP_3$ तो n का क्या मान होगा।

हल—(i) $${}^9P_3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9.8.7.6!}{6!} = 504$$

$${}^{20}P_2 = \frac{20!}{18!} = 20.19 = 380$$

$${}^4P_4 = \frac{4!}{0!} = 24$$

(ii) $${}^nP_4 = \frac{n!}{(n-4)!};\quad {}^nP_2 = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\frac{n!}{(n-4)!} = 12.\frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = 12;$$

$$\frac{n!}{(n-4)!} \times \frac{(n-2)!}{n!} = 12$$

$$(n-2)(n-3) = 12$$

$$n^2-5n+6-12=0 \quad \therefore \quad n^2-5n-6=0$$
$$n^2+n-6n-6=0; \quad n(n+1)-6(n+1)=0$$
$$\therefore \quad (n+1)(n-6)=0 \quad \therefore \quad n=6 \text{ या } -1$$

$\therefore$ $n=6$ क्योंकि n ऋणात्मक का भिन्नात्मक नहीं हो सकता

(iii) $^nP_6=\frac{n!}{(n-6)!}$; $^nP_5=\frac{n!}{(n-5)!}$

$$\frac{n!}{(n-6)!}=10\times\frac{n!}{(n-5)!}=\frac{n!}{(n-6)!}\times\frac{(n-5)!}{n!}=10$$
$$\frac{(n-5)(n-6)!}{(n-5)!}=n-5=10 \quad \therefore \quad n=10+5=15$$

उदाहरण 7—(i) यदि $^{2n+1}P_{n-1} : {}^{2n-1}P_n :: 3:5$, तो n का मान बताइए।

(ii) यदि $^{15}P_{r-1} : {}^{16}P_{r-2}=3:4$, तो r का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल—(i) $\frac{^{2n+1}P_{n-1}}{^{2n-1}P_n}=\frac{3}{5}$; $5\times{}^{2n+1}P_{n-1}=3\times{}^{2n-1}P_n$

$$5\times\frac{(2n+1)!}{\{(2n+1)-(n-1)\}!}=3\times\frac{(2n-1)!}{(2n-1-n)!} \text{ या } 5\times\frac{(2n+1)!}{(n+2)!}=3\times\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$
$$5\times\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(n+2)(n+1)n(n-1)!}=3\frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \text{ या } 5\times\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!\,(n-1)!}{(n+2)(n+1)n(n-1)!\,(2n-1)!}=3$$
$$5\times\frac{(2n+1)2n}{(n+2)(n+1)n}=3 \text{ या } \frac{10(2n+1)}{(n+1)(n+2)}=3$$
$$\frac{10(2n+1)}{n^2+3n+2}=3 \quad \text{या} \quad 3n^2+9n+6=20n+10$$
$$\therefore \quad 3n^2-11n-4=0$$
$$3n^2-12n+n-4=0$$
$$3n(n-4)+1(n-4)=0$$
$$\therefore \quad n=4 \text{ या } -\tfrac{1}{3}$$

अतः $n=4$

(ii) $\frac{^{15}P_{r-1}}{^{16}P_{r-2}}=\frac{3}{4}$ या $\frac{15!}{(15-r+1)!}\times\frac{(16-r+2)!}{16!}=\frac{3}{4}$

$$\frac{15!}{(16-r)!}+\frac{(18-r)!}{16!}=\frac{3}{4}; \quad \frac{15!\times(18-r)(17-r)(16-r)!}{16.15!.(16-r)!}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{(18-r)(17-r)}{16}=\frac{3}{4}; \; 4(306-35+r^2)=48$$
$$306-35r+r^2=12 \quad \text{या} \quad r^2-35r+294=0$$
$$r^2-21r-14r+294=0; \quad r(r-21)-14(r-21)=0$$
$$r=14, 21 \text{ लेकिन } r \not> n \text{ अतः } r=14$$

उदाहरण 8—(i) आठ स्थानों (seats) वाले एक रेल के डिब्बे में 5 यात्री घुसते हैं। वे कितने तरीको से बैठ सकते हैं।

(ii) शब्द *'TRIANGLE'* के सभी अक्षरों से कितने क्रमचय बन सकते हैं (क) एक समय में सभी अक्षरों को लेकर ; (ख) एक समय में 3 अक्षर लेकर ; (ग) एक समय में सभी अक्षर लेकर यदि T सदा आरम्भ में आये और E सदा अन्त मे।

(iii) 3, 1, 7, 0, 5 अंकों से 6 विभिन्न अंकों वाली कुल कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं ?

हल—(i) $n=8, r=5$ $\therefore$ $^nP_r={}^8P_5=\frac{8!}{3!}=6720$ तरीके।

(ii) *'TRIANGLE'* शब्द मे 8 विभिन्न अक्षर हैं।

(क) सभी आठ अक्षरो को लेकर $^8P_8=8!$ या 40320 क्रमचय बनेंगे;

(ख) तीन अक्षर लेकर $^8P_3=\frac{8!}{5!}=336$ क्रमचय बनेंगे।

(ग) सभी आठ अक्षरों को लेकर *T* से शुरू और *E* पर समाप्त होने वाले क्रमचयों की संख्या निम्न प्रकार ज्ञात की जायेगी—

'*T*' सदा आरम्भ में और '*E*' अन्त में रहेगा। शेष 8—2=6 अक्षरों के $^6P_6$=6 !=720 क्रमचय होंगे जिन सभी में यह शर्त पूरी होगी।

(iii) 6 विभिन्न अंक दिये हुए हैं और उनसे 6, 6 अंकों की संख्याएँ बनानी हैं, किसी अंक की पुनरावृत्ति नहीं होगी। अतः 6 अंकों वाली राशियों की संख्या=$^6P_6$=6 !=720 परन्तु इन 720 संख्याओं में ऐसी संख्याएँ भी शामिल हैं जो शून्य (0) से आरम्भ होती हैं और वस्तुतः 5 अंकों वाली संख्याएँ हैं। ये संख्याएँ कुल $^5P_5$=5 !=120 हैं जो कि 720 में सम्मिलित हैं अतः 6 अंकों वाली राशियों की वास्तविक संख्या $^6P_6-{}^5P_5$=600।

वैकल्पिक रीति—प्रथम स्थान 5 तरीकों से भरा जा सकता है 0 को छोड़ कर, दूसरा स्थान 5 तरीकों से (0 शामिल करके), तीसरा 4, चौथा 3, पाँचवां 2 और छठा 1 तरीके से। अतः 5×5×4×3×2×1=600 संख्याएँ बनाई जा सकती है।

उदाहरण 9—(i) '*ANSWER*' शब्द के सब अक्षरों को लेकर कितने विभिन्न शब्द बनाये जा सकते हैं ?

(ii) '*JODHPUR*' शब्द के अक्षरों को कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है—(क) यदि इसमें अक्षर '*P, U, R*' सर्वदा साथ-साथ आएँ; (ख) तीनों अक्षर '*P, U, R*' कभी भी साथ न आएँ। [*B. Com. Raj., 1973*]

हल—(i) '*ANSWER*' शब्द में 6 विभिन्न अक्षर हैं (n=6) उन सभी को एक साथ लेकर (r=6) $^nP_n={}^6P_6$ क्रमचय बन सकते हैं। इस प्रकार

$$^nP_n={}^6P_6=6\,!=6.5.4.3.2=720$$

720 विभिन्न शब्द बनाए जा सकते हैं।

(ii) (क) *P, U, R*—ये तीनों अक्षर एक साथ $^nP_n={}^3P_3$=3 !=6 तरीकों से क्रमबद्ध किये जा सकते हैं। क्योंकि *P, U, R* एक साथ आने है अतः इन्हें एक ही अक्षर-समूह माना जाएगा।

इस प्रकार '*JODHPUR*' में 5 अक्षर (4 अक्षर और 1 अक्षर-समूह) हुए जिनका विन्यास $^5P_5$=5 !=120 तरीको से हो सकता है। अतः उन तरीकों की कुल संख्या जिनमें *P, U, R* साथ-साथ आएँ $={}^5P_5\times{}^3P_3=120\times$ [illegible] $=720$

(ख) '*JODHPUR*' शब्द में कुल 7 विभिन्न अक्षर हैं जिनका विन्यास $^7P_7$=7 !=5040 तरीकों से किया जा सकता है। इनमें से 720 तरीके ऐसे हैं जिनमें *P, U, R* साथ-साथ आते हैं अतः उन तरीकों की संख्या जिनमें *P, U, R* अक्षर साथ-साथ न आएँ=5040—720=4320.

उदाहरण 10—(i) '*ARTICLE*' शब्द अक्षरों से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं जबकि स्वर सम स्थानों पर आएँ ?

(ii) शब्द '*STRANGE*' के अक्षरों का कितने तरीकों से विन्यास किया जा सकता है यदि (क) स्वर केवल विषम स्थानों पर आएँ, (ख) स्वर कभी अलग न हों, (ग) स्वर कभी साथ-साथ न आएँ ?

हल—(i) *ARTICLE* शब्द में 7 विभिन्न अक्षर हैं—3 स्वर *A, I, E* हैं और शेष 4—*R, T, C, L* व्यंजन हैं। स्वर सम स्थानो पर—2, 4 व 6 पर 3 ! तरीकों से तथा व्यंजन शेष 4 स्थानों पर 4 ! तरीकों से रखे जा सकते हैं—

1	2	3	4	5	6	7
(*R*)	(*A*)	(*T*)	(*I*)	(*C*)	(*E*)	(*L*)

अतः कुल क्रमचयों की संख्या 3 !×4 !=3×2×4×3×2=144 होगी।

(ii) '*STRANGE*' शब्द में 7 अक्षर हैं—2 स्वर *A* व *E* तथा 5 व्यंजन है।

(क) विषम स्थान 1, 3, 5 व 7 अर्थात् चार है। 4 स्थानों मे 2 स्वर $^4P_2$ तरीको से क्रमबद्ध किए जा सकते हैं। शेष 5 अक्षर (व्यंजन) 5 स्थानों पर $^5P_5$ तरीको से विन्यसित किए

जा सकते हैं अतः कुल क्रमचय—

$$^4P_2\times{}^5P_5=\frac{4!}{2!}\times5!=4\times3\times5\times4\times3\times2$$

$=1440$ होंगे

(ख) दोनों स्वर कभी अलग न हों अर्थात् साथ-साथ आएँ—

दोनों स्वरों को एक अक्षर मानते हुए सभी अक्षरों के क्रमचयों की संख्या

$$(5+1)!=6!$$

लेकिन दोनों स्वर भी 2 ! तरीकों से रखे जा सकते हैं।

अतः उक्त स्थिति में क्रमचयों की संख्या $6!\times2!=1440$ होगी।

ऐसे शब्द 1440 बनेंगे जिनमें स्वर कभी अलग न हों।

(ग) स्वर कभी साथ-साथ न आएँ—

7 अक्षरों के कुल क्रमचयों की संख्या—7 !

इनमें से ऐसे विन्यासों की संख्या जिनमें स्वर साथ-साथ आते हैं $=6!\times2!$

अतः उन अक्षर-विन्यासों की संख्या जिनमें स्वर कभी साथ-साथ न आएँ

$$=7!-(6!.2!)=6!(7-2!)$$
$$=6!\times5=720\times5=3600$$

3600 शब्दों में स्वर कभी साथ-साथ नहीं आयेंगे।

नियम 3—जब n वस्तुओं में से कुछ आपस में समान हों तो स्पष्ट है कि उनके क्रमचयों की संख्या n ! से कम होगी। अतः यदि n वस्तुओं में से p वस्तुएँ पूर्णतः एक समान और एक ही प्रकार की हों, q वस्तुएँ पूर्णतः एक समान और दूसरे प्रकार की हों, r वस्तुएँ पूर्णतः समान और तीसरी किस्म की हों और शेष वस्तुएँ भिन्न हों तो सभी वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या निम्न सूत्र के अनुसार निकलेगी—

$$\boxed{\frac{n!}{p!\,q!\,r!}}$$

मान लिया n वस्तुओं में से p वस्तुएँ a, q वस्तुएँ b, r वस्तुएँ c और शेष सभी विभिन्न हैं। मान लिया क्रमचयों की अभीष्ट संख्या x है। इन x क्रमचयों में से किसी एक विन्यास में यदि p समान वस्तुओं के स्थान पर भिन्न-भिन्न वस्तुएँ a_1, a_2, a_3........रख दी जाएँ और कोई परिवर्तन न हो तो उनके p ! क्रमचय होंगे। सभी x विन्यासों पर यदि यह क्रिया की जाए तो कुल xp ! क्रमचय होंगे। इसी प्रकार q समान वस्तु, असमान वस्तुओं $(b_1, b_2, b_3........)$ से r समान वस्तु, असमान वस्तुओं $(c_1, c_2, c_3......)$ से बदल दी जाएँ तो कुल क्रमचयों की संख्या निम्न होगी—

$$x\times p!\times q!\times r!$$

ऐसा करने से सभी वस्तुएँ भिन्न हो जाती है जिनके कुल क्रमचय n ! होंगे।

अतः $\quad x.p!.q!.r!=n!\quad$ या $\quad x=\dfrac{n!}{p!.q!.r!}$

उदाहरण 11—निम्न शब्दों के अक्षरों के कितने क्रमचय बनाये जा सकते हैं?—

(क) *STATISTICS*, (ख) *ASSESSMENT*, (ग) *COMMITTEE*।

हल—(क) '*STATISTICS*' शब्द में कुल 10 अक्षर है जिनमें 3 '*S*', 3 '*T*', 2 '*I*' हैं और शेष अक्षर असमान है। अतः क्रमचयों की संख्या है—

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}=\frac{10!}{3!\,3!\,2!}=50400$$

(ख) '*ASSESSMENT*' में 10 अक्षर हैं जिनमें से 4 '*S*', 2 '*E*' हैं और शेष अक्षर असमान है। अतः $\dfrac{10!}{4!\,2!}=75600$ क्रमचय बनेंगे।

(ग) *'COMMITTEE'* शब्द के 9 अक्षरों के क्रमचयों की संख्या

$$\frac{9!}{2!2!2!}=45360 \text{।}$$

उदाहरण 12—(i) शब्द *'ALABAMA'* के सभी अक्षरों से कुल कितने विभिन्न क्रमचय बनाये जा सकते हैं ? इन क्रमचयों में से कितनों में शब्द *LAMB* आयेगा ?

[*I.C.W.A. (Final) June, 1980*]

(ii) निम्न शब्दों के अक्षरों से बनने वाले सभी क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए—

(क) *ACCOUNTANT*, (ख) *ENGINEERING*

(iii) निम्न अंकों से कितनी संख्याएँ बन सकती हैं यदि विषम अंक विषम स्थानों पर ही रहें— 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1

हल—(i) *ALABAMA* मे कुल 7 अक्षर हैं जिनमें *A*—4 बार आया है अतः क्रमचयों की संख्या $=\frac{7!}{4!}=7.6.5=210$

इनमें से ऐसे क्रमचयों की संख्या जिनमें *LAMB* शब्द आए—

LAMB अक्षर समूह को एक अक्षर मानकर शेष तीन अक्षर (*A* 3 बार) बचते हैं अर्थात् $n=(1+1\times3)=4$ *A* तीन बार आया है।

अतः $\frac{4!}{3!}=4$ क्रमचय बनेंगे।

(ii) (क) 10 अक्षर हैं जिनमें *A* 2 बार *C* 2 बार *N* 2 बार व *T* 2 बार आते हैं।

अतः $\frac{n!}{p!q!r!}=\frac{10!}{2!2!2!2!}=226800$ क्रमचय होंगे।

(ख) 11 अक्षर हैं जिनमे से *E* 3 बार, *N* 3 बार, *G* 2 बार व *I* 2 बार आए हैं।

अतः क्रमचयों की संख्या $\frac{11!}{3!3!2!2!}=277200$ होगी।

(iii) कुल 7 स्थान हैं जिनमें से 4 विषम और 3 सम स्थान है विषम अंक 1, 3, 3, 1 हैं जो 4 विषम स्थानों पर निम्न तरीकों से विन्यसित किए जा सकते हैं—

$$\frac{n!}{p!q!r!}=\frac{4!}{2!2!}$$ (3 दो बार और 1 दो बार आए हैं)

शेष सम अंक 2, 4, 2 सम स्थानों पर $\frac{3!}{2!}$ तरीको से क्रमबद्ध किए जा सकते हैं।

अतः क्रमचयों की अभीष्ट संख्या—

$$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{3!}{2!}=\frac{4\times3}{2}\times3=18$$

नियम 4—दी हुई *n* असमान वस्तुओं में से *r* वस्तुएँ लेकर बनाये गये क्रमचयों की संख्या निम्न प्रकार निकाली जा सकती है यदि प्रत्येक वस्तु *r* बार दोहरायी जाये—

पहला स्थान *'n'* तरीकों से भरा जा सकता है, दूसरा भी *'n'* ढंगों से ($n-1$ से नहीं) भरा जा सकता है और इसी प्रकार *r* तक स्थान $n\times n\times n\times$....*r* तक तरीको से भरे जा सकते हैं। अतः क्रमचयों की संख्या

$$\boxed{n^r}$$ होगी।

उदाहरण 13—(i) 5 इनाम 4 लड़कों में कितने तरीको से बाँटे जा सकते हैं जबकि किसी भी लड़के को सब इनाम दिये जा सकते हों ?

(ii) गणित के पहले और दूसरे, सांख्यिकी के पहले और दूसरे, अंग्रेजी के पहले तथा हिन्दी के पहले इनामों को 20 छात्रों में कितने विभिन्न तरीको से बाँटा जा सकता है ?

(iii) 1, 3, 5, 7 व 9 से 5 अंकों की कितनी विभिन्न संख्याएँ बनाई जा सकती हैं यदि अंकों की पुनरावृत्ति पर कोई प्रतिबन्ध न हो।

हल—(i) पहला इनाम 4 लड़कों में से किसी एक को अर्थात् 4 तरीकों से बांटा जा सकता है। दूसरा इनाम भी 4 लड़कों में से किसी एक को अर्थात् 4 तरीकों से बांटा जा सकता है।

इस प्रकार दो इनाम 4×4 या 4^2 ढंग से बाँटे जा सकते हैं क्योंकि उसी लड़के को फिर इनाम दिया जा सकता है जिसे पहला इनाम मिला है।

तीन इनाम देने के तरीकों की संख्या 4^3, 4 इनाम बाँटने के ढंगों की संख्या 4^4 तथा 5 इनाम चार लड़कों मे बाँटने के संभाव्य तरीकों की संख्या।

$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$ होगी।

(ii) पहले इनाम चार हैं अतः वे 20 छात्रों में 20^4 ढंगों से बाँटे जा सकते है। स्पष्ट है कि पहला इनाम प्राप्त करने वाले को दूसरा इनाम नहीं मिल सकता। अतः दूसरे इनाम के लिए प्रत्याशी छात्र $20-1=19$ होंगे और इनामों की संख्या 2 है। इस प्रकार दूसरे इनाम को 19^2 ढंगों से बाँटा जा सकता है।

इनामों के बाँटने के ढंगों की संख्या $= 20^4 \times 19^2 = 160000 \times 361 = 57760000$ है।

(iii) पहला स्थान 5 तरीकों से भरा जा सकता है, इसी प्रकार, दूसरा, तीसरा, चौथा व पाँचवां स्थान भी 5–5 तरीकों से भरा जा सकता है क्योंकि प्रत्येक अंक कितनी ही बार दोहराया जा सकता है। इस प्रकार 3125 संख्याएँ बनेंगी—

अतः $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5 = 3125$

नियम 5—n विभिन्न वस्तुओं में से r एक साथ लेकर ऐसे क्रमचयों की संख्या जिनमें p विशेप वस्तुओं को कभी शामिल नही करना है—

$$\boxed{{}^{n-p}P_r}$$

मान लीजिए $p=1$ वस्तु को क्रमचयों में कभी शामिल नहीं करना है। उस वस्तु को अलग रखने के बाद $n-1$ वस्तुएँ शेष रह जाती है जिनमें से r एक साथ लेकर ${}^{n-1}P_r$ क्रमचय बनेंगे। इसी प्रकार, यदि p वस्तुओं को विन्यासों में शामिल न करना हो तो शेष $n-p$ वस्तुओं के ${}^{n-p}P_r$ क्रमचय होंगे।

नियम 6—n विभिन्न वस्तुओं में से r एक साथ लेकर ऐसे क्रमचयो की संख्या जिनमें विशेष वस्तु सदा शामिल रहती है—

$$\boxed{r.{}^{n-1}P_{r-1}}$$

मान लिया कि n विभिन्न वस्तुएँ $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ हैं। हमें ऐसे क्रमचयों की संख्या ज्ञात करनी है जिनमे से प्रत्येक में a_1 शामिल हो। a_1 पहले, दूसरे, तीसरे··· या rवें स्थान पर रखा जा सकता है।

माना कि a_1 पहले स्थान पर रखा जाता है, अब हमारे पास $n-1$ वस्तुएँ शेप हैं जिनमें से $r-1$ को एक साथ लेकर ${}^{n-1}P_{r-1}$ क्रमचय बनाए जा सकते है। a_1 को r स्थानों में से कोई स्थान प्राप्त हो सकता है। अतः जब a_1 हर एक विन्यास में आता है तो कुल क्रमचयो की संख्या जिनमे a_1 शामिल है—$r.{}^{n-1}P_{r-1}$ होगी।

यदि सदा शामिल होने वाली वस्तुएँ p हों तो उनमें से पहली वस्तु $r-p+1$ तरीको से, दूसरी $r-p+2$ और pवी वस्तु $r-p+p=r$ तरीकों से रखी जा सकती है। इस प्रकार p वस्तुएँ कुल $(r-p+1)(r-p+2)\ldots\ldots(r-p+p)$ तरीकों से शामिल की जा सकती है अर्थात् ${}^rP_p$ तरीको से। शेप $n-p$ वस्तुओ मे से $r-p$ एक साथ लेकर ${}^{n-p}P_{r-p}$ क्रमचय बनेंगे। अतः p विशेष वस्तुओ को शामिल करते हुए, क्रमचयों की संख्या निम्नांकित होगी—

$${}^rP_p.{}^{n-p}P_{r-p}$$

उदाहरणार्थ, यदि 2 विशेप वस्तुओ को सदा शामिल किया जाए तो

अभीष्ट संख्या—

$${}^{r}P_2 . {}^{n-2}P_{r-2} \text{ या } \frac{r\,!}{(r-2)\,!} . {}^{n-2}P_{r-2} \text{ या } r(r-1) . {}^{n-2}P_{r-2} \text{ होगी ।}$$

उदाहरण 14—सिद्ध कीजिए कि

(i) ${}^{n}P_r = n . {}^{n-1}P_{r-1}$

(ii) ${}^{n}P_r = {}^{n-1}P_r + r . {}^{n-1}P_{r-1}$

हल—(i) R.H.S.—$n . {}^{n-1}P_{r-1} = n \times \frac{(n-1)\,!}{\{(n-1)-(r-1)\}\,!}$

$$= n \times \frac{(n-1)\,!}{(n-1-r+1)\,!} = \frac{n(n-1)\,!}{(n-r)\,!}$$

$$= \frac{n\,!}{(n-r)\,!} = {}^{n}P_r \quad \text{L.H.S.}$$

इसे सूत्र की सहायता के बिना भी सिद्ध किया जा सकता है । माना कि हमारे पास n विभिन्न वस्तुएँ हैं । इनमें से एक वस्तु हम n विधियों से ले सकते हैं । अब शेष $n-1$ वस्तुओं के हम, $(r-1)$ एक साथ लेकर, ${}^{n-1}P_{r-1}$ क्रमचय बना सकते हैं ।

अतः कुल क्रमचयों की संख्या ${}^{n}P_r = n . {}^{n-1}P_{r-1}$

(ii) R.H.S.—${}^{n-1}P_r + r . {}^{n-1}P_{r-1}$

$$= \frac{(n-1)\,!}{(n-1-r)\,!} + r \times \frac{(n-1)\,!}{(n-1-r+1)\,!} = \frac{(n-1)\,!}{(n-r-1)\,!} + \frac{r.(n-1)\,!}{(n-r)\,!}$$

$$= \frac{(n-1)\,!}{(n-r-1)\,!} + \frac{r(n-1)\,!}{(n-r)(n-r-1)\,!} = \frac{(n-1)\,!}{(n-r-1)\,!}\left\{1 + \frac{r}{n-r}\right\}$$

$$= \frac{(n-1)\,!}{(n-r-1)\,!}\left\{\frac{n-r+r}{n-r}\right\} = \frac{(n-1)\,!}{(n-r-1)\,!}\,\frac{n}{n-r}$$

$$= \frac{n(n-1)\,!}{(n-r)(n-r-1)\,!} = \frac{n\,!}{(n-r)\,!} = {}^{n}P_r \quad \text{L.H.S.}$$

सूत्र की सहायता के बिना भी यह सम्बन्ध प्रमाणित किया जा सकता है ।

उदाहरण 15—(i) अंक 2, 4, 6, 8 से 2 अंकों वाली कुल कितनी विभिन्न संख्याएँ बन सकती हैं ? ऐसी कितनी संख्याएँ बनेंगी जिनमें (क) 8 अवश्य हो, (ख) 8 न हो ।

(ii) 10 विभिन्न वस्तुओं के, एक साथ 5 लेकर, कितने ऐसे विन्यास बनेंगे जिनमें 2 विशेष वस्तुएँ (क) सदा शामिल हों, (ख) कभी शामिल न हों ?

हल—(i) चार अंक दिए हैं जिनमें से 2 अंकों की ${}^{4}P_2 = \frac{4\,!}{2\,!} = 12$ संख्याएँ बनेंगी ।

(क) ऐसी संख्याएँ जिनमें 8 अवश्य हों—

$$r . {}^{n-1}P_{r-1} = 2 . {}^{4-1}P_{2-1} = 2 \times {}^{3}P_1$$

$$= 2 \times \frac{3\,!}{2\,!} = 6 \text{ संख्याएँ}$$

(ख) ऐसी संख्याएँ जिनमें 8 कभी न हो—

$${}^{n-1}P_r = {}^{4-1}P_2 = {}^{3}P_2 = \frac{3\,!}{1\,!} = 6$$

(ii) (क) दो वस्तुएँ सदा शामिल हों—

$n = 10,\ r = 5,\ p = 2 \qquad {}^{r}P_p . {}^{n-p}P_{r-p} = {}^{5}P_2 . {}^{10-2}P_{5-2}$

$$= \frac{5\,!}{3\,!} \times \frac{8\,!}{5\,!} = 8.7.6.5.4 = 6720$$

(ख) दो वस्तुएँ कभी शामिल न हों—

$${}^{n-p}P_r = {}^{10-2}P_5 = {}^{8}P_5 = \frac{8\,!}{(8-5)\,!}$$

$$= 8.7.6.5.4 = 6720$$

उदाहरण 16—(i) '*DELHI*' शब्द के अक्षरों में से 3–3 अक्षरों के कितने शब्द बनेंगे ? उनमें से कितने ऐसे होंगे जिनमें अक्षर *H* सदा शामिल होगा और कितने ऐसे शब्द बनेंगे जिनमें *H* कभी शामिल नहीं होगा ?

(ii) 5 लड़कों और 3 लड़कियों को एक पंक्ति में कितने तरीकों से क्रमबद्ध किया जा सकता है यदि तीनों लड़कियाँ एक साथ खड़ी हों ?

(iii) 5 लड़के और 3 लड़कियाँ कितने तरीकों से एक पंक्ति में खड़े हो सकते हैं यदि दो लड़कियाँ कभी पास-पास न खड़ी हों ?

हल—(i) '*DELHI*' शब्द में 5 विभिन्न अक्षर हैं 3–3 अक्षरों को लेकर कुल विन्यासों की संख्या—

$$={}^{n}P_{r}={}^{5}P_{3}=\frac{5\,!}{2\,!}=60$$

ऐसे क्रमचयों की संख्या जिनमें 1 अक्षर (*H*) सदा शामिल हो—

$$r.{}^{n-1}P_{r-1}=3\times{}^{5-1}P_{3-1}=3\times\frac{4\,!}{2\,!}=36$$

ऐसे क्रमचय जिनमें *H* कभी शामिल न हो—

$${}^{n-1}P_{r}={}^{5-1}P_{3}={}^{4}P_{3}=\frac{4\,!}{1\,!}=24$$

(ii) तीनों लड़कियों को एक साथ पास-पास खड़ा होना है अतः उन्हें एक इकाई माना जाएगा। अब $5+1=6$ इकाइयों को पंक्तिबद्ध करना है। अभीष्ट तरीकों की संख्या $=6\,!$

लेकिन $6\,!$ में से प्रत्येक क्रमचय में 3 लड़कियों का समूह है जो $3\,!$ तरीकों से पास-पास खड़ी हो सकती हैं। अतः कुल विन्यास $6\,!\times 3\,!=720\times 6=4320$

(iii) लड़कों को *B* और लड़कियों को *G* द्वारा निरूपित करने पर प्रश्न के निर्देशानुसार एक पंक्ति में उनका विन्यास निम्न प्रकार किया जा सकता है—

G B G B G B G B G B G

5 लड़के है जिनका विन्यास $5\,!$ तरीकों से हो सकता है परन्तु दो लड़कियों को पास-पास नहीं खड़ा होना है। अतः *G* संकेत द्वारा व्यक्त कुल 6 स्थानों पर उन्हें खड़ा किया जा सकता है। उनकी संख्या केवल 3 है अतः 6 स्थानों में 3 लड़कियों को ${}^{6}P_{3}$ अनुक्रम मे व्यवस्थित किया जा सकता है।

अतः अभीष्ट संख्या $=5\,!\times\frac{6\,!}{3\,!}$

$=5\times4\times3\times2\times6\times5\times4$

$=120\times120=14400$

उदाहरण 17—अंक 3, 5, 7, 8, 9 से ऐसी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं जो 7000 से अधिक हों और जिनमें कोई अंक दोहराया न जाए ?

[I. C. W. A. (Final), June, 1977]

हल—5 अंक दिये हैं जिनसे ऐसी विभिन्न संख्याएँ बनानी हैं जो 7000 से अधिक हों। ये संख्याएँ 2 प्रकार की होंगी—

(क) 5 अंकों वाली सभी।

(ख) 4 अंकों वाली वे संख्याएँ जो 7, 8 या 9 से आरम्भ हो।

(क) 5 अंकों वाली सख्याएँ ${}^{5}P_{5}=5\,!=120$ होगी।

(ख) 4 अंकों वाली संख्याएँ—

7 से आरम्भ होने वाली—4 अंकों 3, 5, 8, 9 मे से 3 के क्रमचय $={}^{4}P_{3}=24$

8 से आरम्भ होने वाली—4 अकों 3, 5, 7, 9 मे से 3 के क्रमचय $={}^{4}P_{3}=24$

9 से आरम्भ होने वाली—4 अंको 3, 5, 7, 8 मे से 3 के क्रमचय $={}^{4}P_{3}=24$

अतः 7000 से अधिक मूल्य वाली अभीष्ट सख्याएँ

$=120+24+24+24=192$ होंगी।

उदाहरण 18—दिये हुए दस अंकों (0 से 9 तक) से ऐसी कितनी संख्याएँ बन सकती हैं जो 10000 से कम हों और 5 से विभाजित हो जाएँ ? कोई भी अंक किसी संख्या में एक से अधिक बार न आए।

हल—10 अंक दिये हैं—0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 इनसे ऐसी संख्याएँ बनानी हैं जो (क) 10000 से कम हों अर्थात् 4 अंकों वाली हों तथा (ख) 5 से विभाजित हो जाएँ अर्थात् जिनके अन्त में 5 या शून्य आए।

		संख्या
1 अंक की संख्या जो 5 से विभाज्य हो 5 ही है		1
2 अंकों वाली संख्याएँ जो 5 पर समाप्त हों $= {}^9P_1 - 1$	=	8 (पहले स्थान पर 0 वाली संख्याएँ छोड़कर)
2 ,, ,, ,, ,, 0 ,, ,, ,, $= {}^9P_1$	=	9
3 ,, ,, ,, ,, 5 ,, ,, ,, $= {}^9P_2 - {}^8P_1 = (8 \times 8 \times 1)$	=	64 (पहले स्थान पर 0 वाली ${}^8P_1$ संख्याएँ होंगी)
3 ,, ,, ,, ,, 0 ,, ,, ,, $= {}^9P_2 = 9 \times 8 \times 1$	=	72
4 ,, ,, ,, ,, 5 ,, ,, ,, $= {}^9P_3 - {}^8P_2 = (8 \times 8 \times 7 \times 1)$	=	448 (पहले स्थान पर 0 वाली ${}^8P_2$ संख्याएँ होंगी)
4 ,, ,, ,, ,, 0 ,, ,, ,, $= {}^9P_3 = 9 \times 8 \times 7 \times 1$	=	504

अतः $1 + ({}^9P_1 - 1) + {}^9P_1 + ({}^9P_2 - {}^8P_1) + {}^9P_2 + ({}^9P_3 - {}^8P_2) + {}^9P_3 = 1106$

वृत्तीय क्रमचय (Circular Permutations)—जब वस्तुओं को गोलाकार या घेरे में क्रमबद्ध किया जाता है अर्थात् किसी वृत्त की परिधि पर रखा जाता है तो ऐसे क्रमचय को चक्रीय या वृत्तीय क्रमचय (circular permutation) कहते हैं।

चक्रीय क्रमचयों में, पहले एक वस्तु का स्थान निश्चित कर लिया जाता है। शेष वस्तुओं के विन्यास प्रथम वस्तु की सापेक्ष स्थिति पर निर्भर होते हैं। अतः n वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाये गए क्रमचयों की संख्या $(n-1)\,!$ होगी।

$$\frac{{}^nP_r}{r} \Rightarrow \frac{{}^nP_n}{n} = \frac{n\,!}{n} = \frac{n(n-1)\,!}{n} = (n-1)\,!$$

(r लेकर) (n लेकर)

उदाहरणार्थ, 5 व्यक्ति एक गोलमेज के चारों ओर $(5-1)\,! = 4\,! = 24$ तरीकों से बैठाये जा सकते हैं।

चक्रीय क्रमचयों में दक्षिणावर्त्त (clockwise) और वामावर्त्त (anticlockwise) विन्यासों में यदि अन्तर न हो और उन्हें एक ही समझा जाए तो क्रमचयों की संख्या

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{{}^nP_r}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{{}^nP_n}{n} = \boxed{\frac{1}{2}(n-1)\,!}$$ होगी।

उदाहरणार्थ; यदि n वस्तुओं को इस प्रकार क्रमबद्ध करना हो कि कोई दो समान वस्तुएँ एक-दूसरे के निकट न हों तो कुल $\frac{1}{2}(n-1)\,!$ क्रमचय बनेंगे। इस प्रकार 5 व्यक्तियों के एक गोलमेज के चारों ओर इस प्रकार बैठने के ढंगों की संख्या $\frac{1}{2}(5-1)\,! = \frac{1}{2} \times 24 = 12$ होगी जिससे कोई से दो पड़ोसी दूसरे विन्यास में साथ-साथ न बैठने पाएँ।

उदाहरण 19—(i) 4 पुरुषों और 4 महिलाओं को एक गोलमेज के चारों ओर कितने तरीकों से बैठाया जा सकता है जबकि कोई दो महिलाएँ साथ-साथ न बैठें ?

(ii) 6 व्यक्ति एक गोलमेज के चारों ओर कितने तरीकों में बैठाये जा सकते हैं यदि सभी के किन्हीं दो विन्यासों में वही पड़ौसी न रहें ?

हल—(i) एक पुरुष का स्थान निर्धारित करने के बाद शेष पुरुषों को $4-1=3\,!$ विधियों में बैठाया जा सकता है। 4 महिलाएँ 4 पुरुषों के बीच का स्थान $4\,!$ तरीकों से ग्रहण कर सकती हैं। अतः कुल क्रमचयों की संख्या $= 3\,! \times 4\,! = 6 \times 24 = 144$ होगी।

(ii) दक्षिणावर्त और वामावर्त विन्यास एक ही रहेंगे, अतः 6 व्यक्तियों के ऐसे वृत्ताकार विन्यासों की संख्या $\frac{1}{2}(6-1)$! होगी। इस प्रकार यदि सभी के किन्हीं दो विन्यासों में वही पड़ोसी न रहें तो 6 व्यक्तियों को गोलमेज के चारों ओर बैठाये जाने के तरीकों की संख्या

$$\frac{1}{2}\times 5\ ! = \frac{1}{2}\times 120 = 60 \text{ होगी।}$$

उदाहरण 20—(i) 8 व्यक्ति कितने तरीकों से एक गोलमेज के चारों ओर बैठाये जा सकते हैं यदि दो विशिष्ट व्यक्ति कभी साथ न बैठें ?

(ii) 10 देशों के 10 प्रतिनिधियों का एक गोलमेज सम्मेलन होना है। ये कितने प्रकार से अपना स्थान ग्रहण कर सकते हैं यदि दो विशिष्ट देशों के प्रतिनिधि सदा साथ-साथ बैठें ?

हल—(i) 8 व्यक्ति गोलमेज के चारों ओर $8-1=7$! तरीकों से बैठ सकते हैं। दो विशिष्ट व्यक्तियों को एक मानकर, 7 व्यक्तियों (6+1 व्यक्ति समूह) को $7-1=6$! तरीकों से बैठाया जा सकता है लेकिन दो विशिष्ट व्यक्ति भी अपना स्थान 2 ! तरीकों से ग्रहण कर सकते हैं। इस प्रकार कुल ऐसे विन्यास जिनमें 2 विशिष्ट व्यक्ति पास-पास बैठें 2 !.6 ! होगे। कुल विन्यास 7 ! हैं अतः ऐसे क्रमचयों की संख्या जिनमें दो विशिष्ट व्यक्ति साथ-साथ न बैठें निम्नवत् होगी—

$$7\,!-2\,!.6\,!=5040-2\times720$$
$$=3600$$

(ii) 10 प्रतिनिधियों में से 2 सदा साथ-साथ बैठेंगे अतः उन्हें 1 मानकर $(9-1)$! तरीकों से विन्यास किया जा सकता है लेकिन 2 विशिष्ट प्रतिनिधि भी 2 ! तरीकों से अपना स्थान ग्रहण कर सकते हैं अतः अभीष्ट संख्या 8 !.2 ! =80640 है।

उदाहरण 21—(i) एक माला में 7 फूल कितने तरीकों से पिरोये जा सकते हैं ?

(ii) 4 भारतीय, 3 पाकिस्तानी तथा 2 जापानियों को एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बिठाया जा सकता है यदि एक राष्ट्रीयता के व्यक्ति सदा साथ-साथ बैठें ?

हल—(i) माला बनाने के लिए सर्वप्रथम एक फूल पिरोया जाएगा फिर शेष 6 फूल 6 ! तरीकों से पिरोए जा सकते हैं। माला गोलाकार होती है अतः दक्षिणावर्त्त (Clockwise) और वामावर्त्त (Anti-clockwise) विन्यासों में अन्तर करना असम्भव है। इस प्रकार क्रमचयों की अभीष्ट संख्या—

$$\frac{1}{2}(n-1)\,!=\frac{1}{2}(7-1)\,!=\frac{1}{2}\times5040=2520 \text{ होगी।}$$

(ii) तीन विभिन्न राष्ट्रीयता वाले व्यक्तियों को एक गोलमेज के चारों ओर $(n-1)$! या $(3-1)$! =2 ! तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है। उक्त प्रत्येक विन्यास में से भारतीय आपस में 4 ! प्रकार से, पाकिस्तानी 3 ! तथा जापानी 2 ! प्रकार से बैठ सकते हैं। अतः अभीष्ट व्यवस्थाओं की संख्या—

$$=2\,!.4\,!.3\,!.2\,!=2\times24\times6\times2=576 \text{ होगी।}$$

संचय सम्बन्धी नियम
(Rules Regarding Combinations)

संचय (Combination)—दी हुई वस्तुओं (n) में से, क्रम का ध्यान न रखते हुए, कुछ (r) या सभी वस्तुओं को लेकर जो भिन्न-भिन्न समूह या चयन (groups or selections) बनाये जाते हैं उनमें से प्रत्येक समूह को संचय कहते हैं। संचयों की अभीष्ट संख्या ज्ञात करनी होती है।

नियम 1—n असमान वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाये गये संचयों की संख्या ${}^nC_r$ संकेत द्वारा व्यक्त की जाती है।

$$\boxed{{}^nC_r=\frac{n\,!}{(n-r)\,!\,r\,!}}$$

प्रमाण—मान लिया संचयों की अभीष्ट संख्या ${}^nC_r=x$ है। x संचयों में r वस्तुएँ हैं जो r ! विधि से क्रमबद्ध की जा सकती हैं। परन्तु संचयों की संख्या

वस्तुओं में से r एक साथ लेकर बनाए गए क्रमचयों की कुल संख्या $x.r\,!$ होगी। लेकिन n में से r के क्रमचय ${}^nP_r$ होते हैं।

अतः $$x.r\,! = {}^nP_r$$

$$\therefore\quad x = \frac{{}^nP_r}{r\,!} = \frac{\frac{n\,!}{(n-r)\,!}}{r\,!}$$

$$\therefore\quad x = {}^nC_r = \frac{n\,!}{(n-r)\,!\,r\,!}$$

उपप्रमेय (Corollary)—यदि $r=n$ हो तो, n वस्तुओं के संचयों की संख्या एक बार में n वस्तुएँ लेकर, ${}^nC_n$ होगी।

$${}^nC_n = \frac{n\,!}{(n-n)\,!\,n\,!} = \frac{n\,!}{0\,!\,n\,!} = 1 \qquad [\because 0\,! = 1]$$

इसी प्रकार $${}^nC_0 = \frac{n\,!}{(n-0)\,!\,0\,!} = \frac{n\,!}{n\,!\,0\,!} = 1$$

उदाहरण 22—(i) 6 बंगाली और 5 राजस्थानियों में से 5 सदस्यों की एक कमेटी बननी है। यह कमेटी कितनी प्रकार से बनाई जा सकती है अगर उस कमेटी में 2 बंगाली (exactly 2 Bengalis) जरूर हों ?

(ii) 7 भारतीयों तथा 4 जापानियों के समूह में से 5 व्यक्तियों की एक समिति कितने प्रकार से बनाई जा सकती है, यदि समिति में (क) सभी भारतीय हों, (ख) कम से कम 2 जापानी हों, (ग) कम से कम 2 जापानी व 2 भारतीय हों, (घ) 2 जापानियों से अधिक न हों।

हल—(i) समिति में 5 सदस्य लेने हैं जिनमें से 2 बंगाली और शेष 3 राजस्थानी होंगे।

6 में से 2 बंगालियों के चयन के तरीकों की संख्या $= {}^6C_2$

5 में से 3 राजस्थानियों " " " $= {}^5C_3$

अतः समिति के गठन के कुल तरीकों की संख्या $= {}^6C_2 \times {}^5C_3 = 150$

(ii) (क) सभी भारतीय हों— ${}^7C_5 = \frac{7\,!}{2\,!\,5\,!} = 21$ तरीके।

(ख) कम से कम 2 जापानी हों—

कुल	जापानी	भारतीय	तरीके
5	2	3	${}^4C_2 . {}^7C_3 = 6 \times 35 = 210$
5	3	2	${}^4C_3 . {}^7C_2 = 4 \times 21 = 84$
5	4	1	${}^4C_4 . {}^7C_1 = 1 \times 7 = 7$
		कुल तरीके	$= 301$

(ग) कम से कम 2 भारतीय और 2 जापानी—

कुल	भारतीय	जापानी	तरीके
5	2	3	${}^7C_2 . {}^4C_3 = 84$
5	3	2	${}^7C_3 . {}^4C_2 = 210$
		कुल तरीकों की संख्या	294

(घ) 2 से अधिक जापानी न हों—

कुल	जापानी	भारतीय	तरीके
5	1	4	${}^4C_1 . {}^7C_4 = 140$
5	2	3	${}^4C_2 . {}^7C_3 = 210$
		तरीकों की संख्या	350

उदाहरण 23—(i) एक थैले में 8 सफेद, 7 हरी तथा 5 लाल गेंदें हैं। इनमें से (a) 4 गेंदें, (b) 4 हरी गेंदें, (c) 4 हरी व 4 लाल गेंदें, (d) 4 सफेद, 3 हरी तथा 2 लाल गेंदें कितने प्रकार से निकाली जा सकती हैं। (*B. Com., II Yr. T.D.C. (CQM), Raj. 1979(S)*)

(ii) 15 खिलाड़ियों में से एक क्रिकेट एकादश (cricket eleven) कितने तरीकों से चुनी जा सकती है यदि (क) एक विशिष्ट खिलाड़ी को सदा शामिल करना हो; और (ख) एक विशिष्ट खिलाड़ी को टीम में कोई स्थान न देना हो।

हल—(i) थैले में कुल 8 + 7 + 5 = 20 गेंदें हैं।

रंग	सफेद	हरी	लाल	कुल
गेंदों की संख्या	8	7	5	20

(a) 4 गेंदें निकालने के तरीकों की संख्या $= {}^nC_r = {}^{20}C_4 = \frac{20}{16!\,4!} = \frac{20.19.18.17}{4.3.2}$

$n=20,\ r=4 \qquad\qquad = 4845$

(b) 4 हरी गेंदें—$n=7,\ r=4 \qquad {}^7C_4 = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$

(c) 4 हरी व 4 लाल गेंदें—

$${}^7C_4 \times {}^5C_4 = 30 \times \frac{5!}{1!\,4!} = 35 \times 5 = 175$$

(d) 4 सफेद, 3 हरी व 2 लाल—

$${}^8C_4 \times {}^7C_3 \times {}^5C_2 = 70 \times 35 \times 10 = 24500$$

(ii) (क) 15 खिलाड़ियों में 11 चुनने हैं किन्तु एक व्यक्ति विशेष को अवश्य शामिल करना है। एक खिलाड़ी को टीम में लेने के बाद 14 में से 10 का ही चुनाव करना है जिसके $C_{10} = \frac{14!}{4!\,10!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2} = 1001$ तरीके हैं।

(ख) 15 खिलाड़ियों में से 1 विशेष खिलाड़ी को सदा छोड़ देना है। इस प्रकार 14 खिलाड़ियों में से 11 छाँटने हैं जिसके ${}^{14}C_{11} = \frac{14!}{3!\,11!} = 364$ तरीके हैं।

नियम 2—पूरक संचय (Complementary Combinations)—यदि n वस्तुओं में से r वस्तुओं का एक समूह बनाया जाए तो $(n-r)$ वस्तुओं का एक समूह शेष रह जाता है। इस प्रकार r वस्तुओं के प्रत्येक समूह के तत्संवादी शेष $(n-r)$ वस्तुओं का एक समूह है। अतः r वस्तुओं के भिन्न-भिन्न समूहों की संख्या $(n-r)$ वस्तुओं के विभिन्न समूहों की संख्या के बराबर होगी। संकेताक्षरों के रूप में—

$$\boxed{{}^nC_r = {}^nC_{n-r}}$$

प्रमाण—R.H.S.—$${}^nC_{n-r} = \frac{n!}{\{n-(n-r)\}!\,(n-r)!}$$
$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = {}^nC_r$$

यह सूत्र गणन-क्रिया में बहुत उपयोगी है।

उपप्रमेय— यदि ${}^nC_x = {}^nC_y$ तो $x=y$ या $n=x+y$

प्रमाण— ${}^nC_x = {}^nC_y \Rightarrow x=y$

$\because\ {}^nC_r = {}^nC_{n-r} \quad \therefore\ (r)+(n-r)=n$

इसी प्रकार यदि ${}^nC_x = {}^nC_y \quad \therefore\ x+y=n$ या $x=n-y$

${}^nC_n = 1$ प्रमाण— ${}^nC_n = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$

${}^nC_n = {}^nC_0$ प्रमाण— ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ यदि $r=n$ तो

${}^nC_n = {}^nC_{n-n} = {}^nC_0 = 1$

उदाहरण 24—(i) यदि ${}^nP_r = 32760,\ {}^nC_r = 1365,$ तो ${}^{15}C_r$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि ${}^{18}C_r = {}^{18}C_{r+2}$ तो ${}^rC_5$ का मान बताइए।

हल—(i) ${}^nP_r = 32760,\ {}^nC_r = 1365$

$${}^nP_r = {}^nC_r \times r! \quad \therefore\ \frac{{}^nP_r}{{}^nC_r} = r!$$

$$\frac{32760}{1365} = r! = 24 = 1.2.3.4 = 4! \quad \therefore\ r=4$$

$$^{25}C_r={}^{25}C_4=\frac{25!}{21!\,4!}=\frac{25\times24\times23\times22}{4\times3\times2}$$
$$=12650$$

(ii) $^nC_r={}^nC_{n-r}$ अतः $^{18}C_r={}^{18}C_{18-r}$

लेकिन
$$^{18}C_r={}^{18}C_{r+2} \quad \text{(प्रदत्त)}$$

अतः
$$^{18}C_r={}^{18}C_{18-r}={}^{18}C_{r+2}$$
$$\therefore\ 18-r=r+2 \quad \text{या} \quad -2r=-16$$
$$\therefore\ r=\frac{-16}{-2}=8$$
$$^8C_3={}^8C_5=\frac{8!}{3!\,5!}=\frac{8.7.6}{3.2}=56$$

उदाहरण 25—(i) यदि $^nP_r=90$, $^nC_r=45$ तो n व r के मान बताइए।
(ii) यदि $^{2n}C_3 : {}^nC_2=44 : 3$, तो n का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल—(i)
$$^nP_r=90,\ {}^nC_r=45$$
$$\therefore\ \frac{^nP_r}{^nC_r}=\frac{90}{45}=r!=2.1 \quad \therefore\ r=2$$
$$^nP_r={}^nP_2=\frac{n!}{(n-2)!}=90 \quad \text{या} \quad n(n-1)=90$$
$$n^2-n-90=0 \quad \text{या} \quad n^2+9n-10n-90=0$$

अतः
$$n(n+9)-10(n+9)=0,\ (n+9)(n-10)=0 \quad \therefore\ n=10,\ -9$$
$$n=10,\ r=2$$

(ii)
$$\frac{^{2n}C_3}{^nC_2}=\frac{44}{3} \quad \text{या} \quad \frac{\frac{2n!}{(2n-3)!\,3!}}{\frac{n!}{(n-2)!\,2!}}=\frac{44}{3}$$
$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3.2!}\times\frac{2!}{n(n-1)}=\frac{44}{3}$$
$$\frac{2(2n-1)2(n-1)}{3(n-1)}=\frac{4(2n-1)}{3}=\frac{44}{3} \quad \text{या} \quad 4(2n-1)=44$$
$$\therefore\ 2n-1=11 \quad \text{या} \quad 2n=12 \quad \therefore\ n=6$$

उदाहरण 26—सिद्ध कीजिए कि—
$$^{n+1}C_r={}^nC_r+{}^nC_{r-1}$$

हल—R.H.S. $\Rightarrow {}^nC_r+{}^nC_{r-1}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}+\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$
$$\Rightarrow \frac{n!}{r!\,(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)!}$$
$$=\frac{n!}{r(r-1)!\,(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)!}$$
$$\Rightarrow \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r+1}\right] \quad \text{या} \quad \frac{n!}{(r-1)!\,(n-1)!}\left[\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}\right]$$
$$\Rightarrow \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left[\frac{n+1}{r(n-r+1)}\right]$$
$$=\frac{(n+1).n!}{r(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)!}=\frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!}$$
$$=\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}={}^{n+1}C_r=\text{L.H.S.}$$
$$\therefore\ {}^{n+1}C_r={}^nC_r+{}^nC_{r-1}$$

नियम 3—प्रतिबन्धी संचय—

(i) n वस्तुओं में से r एक साथ लेकर बनने वाले ऐसे संचयों की संख्या जिनमें p विशिष्ट वस्तुऐं सदैव शामिल होती है : $\boxed{^{n-p}C_{r-p}}$ होंगी।

यदि p विशिष्ट वस्तुओं को अलग रख दिया जाए तो $n-p$ वस्तुएँ शेष रहती हैं, जिनमें से $r-p$ वस्तुओं के $^{n-p}C_{r-p}$ समूह बनते हैं। इनमे से प्रत्येक के साथ p वस्तुओं का संचय किया जाएगा। अत: अभीष्ट संचयों की संख्या $^{n-p}C_{r-p}$ होगी।

(ii) n वस्तुओं में से r एक साथ लेकर बनने वाले ऐसे संचयों की संख्या जिनमें p विशिष्ट वस्तु कभी शामिल न हो, $\boxed{^{n-p}C_r}$ होगी।

यदि p विशिष्ट वस्तु को शामिल नहीं करना है तो उसे अलग रखकर शेष $n-p$ में से r एक साथ लेकर $^{n-p}C_r$ संचय बनेंगे। इनमें से किसी समूह में p वस्तु नहीं होगी। अत: अभीष्ट संख्या $^{n-p}C_r$ होगी।

नियम 4—सभी सम्भाव्य संचयों की संख्या—(2^n-1) n में से कुछ या सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर बने संचयों की कुल संख्या $\boxed{2^n-1}$ होती है।

प्रथम वस्तु या तो चुनी जा सकती है या छोड़ी जा सकती है अर्थात् उसके 2 तरीके हैं, दूसरी वस्तु के भी 2 तरीके हैं। प्रथम के 2 तरीकों से दूसरी वस्तु के 2 तरीके सम्बद्ध हैं 2×2........ इसी प्रकार n वस्तुओं के तरीकों की संख्या—

$$2\times 2\times 2\times ....\times n \text{ तक}=2^n \text{ हैं}$$

लेकिन इस संख्या में एक ऐसी परिस्थिति भी शामिल है जिसमें प्रत्येक वस्तु को छोड़ दिया जाए ($^nC_0=1$) अत: संचयों की अभीष्ट संख्या 2^n-1 होगी।

n में से कुछ या सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर बनने वाले संचयों की कुल संख्या—

$$^nC_0+{}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+......{}^nC_r=2^n$$

$$^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+......{}^nC_n=2^n-{}^nC_0$$

$$\therefore\quad {}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+......{}^nC_n-2^n-1 \qquad (\because\ {}^nC_0=1)$$

उदाहरण 27—(i) कुल कितनी मोटर लाइसेन्स पट्टिकाएँ (licence plates) बन सकती हैं यदि प्रत्येक में 2 पृथक् अक्षर (English Alphabets) और बाद में 3 अंक (digits) हों लेकिन इनमें से प्रथम अंक शून्य (zero) न हो?

(ii) एक व्यक्ति के 7 मित्र हैं। उनमें से एक या अधिक को वह रात्रि भोज (dinner) पर कितने तरीकों से आमन्त्रित कर सकता है?

हल—(i) 26 वर्णाक्षरो में से 2 का क्रमचय $^{26}P_2=\frac{26!}{24!}=650$ तरीकों से किया जा सकता है, प्रत्येक क्रमचय के बाद 3 अंकों का विन्यास होगा जिनके आरम्भ में '0' नही होगा। ऐसे क्रमचय की संख्या $9\times 10\times 10=900$ होगी अत: कुल प्लेटों की सख्या $650\times 900=585000$ होगी।

(ii) कुल 7 मित्र हैं जिनमें से 1 या 1 से अधिक को छाँटना है। अत: यह कार्य निम्न तरीकों से किया जा सकता है—

$$^7C_1+{}^7C_2+{}^7C_3+{}^7C_4+{}^7C_5+{}^7C_6+{}^7C_7=7+21+35+35+21+7+1=127$$

वैकल्पिक रीति—

एक या अधिक चयन के तरीकों की संख्या$=2^n-1=2^7-1=128-1=127.$

उदाहरण 28—(i) एक परीक्षा में उत्तीर्ण होने के लिए 6 विषयों में से प्रत्येक में न्यूनतम अंक प्राप्त करने अनिवार्य हैं। एक प्रत्याशी कितने तरीकों से अनुत्तीर्ण हो सकता है ?

(ii) एक प्रश्न पत्र में 5 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक का एक विकल्प (alternative) है। एक परीक्षार्थी एक या अधिक प्रश्नों के उत्तर कितने तरीकों से दे सकता है ?

हल—(i) प्रत्येक विषय में प्रत्याशी के 2 परिणाम हो सकते हैं—वह उत्तीर्ण हो सकता है या अनुत्तीर्ण। इस प्रकार 6 विषयों में वह $2^n = 2^6$ परिणाम प्राप्त कर सकता है जिनमें से एक परिणाम के अनुसार वह सभी विषयों में उत्तीर्ण $({}^6C_0) = 1$ (किसी में भी अनुत्तीर्ण नहीं होता है), अतः इस परिणाम को निकालने के बाद कुल $2^6 - 1 = 63$ परिणाम रह जाते हैं। वह 63 तरीकों से अनुत्तीर्ण हो सकता है।

(ii) वह या तो किसी प्रश्न को (क) हल कर सकता है, या (ख) उसके विकल्प को हल कर सकता है या (ग) नहीं। इस प्रकार एक प्रश्न के सम्बन्ध में 3 तरीके हैं। अतः वह $3^5 - 1 = 242$ तरीकों से प्रश्न पत्र हल कर सकता है।

उदाहरण 29—(i) 12 बिन्दुओं को, जिनमें से 7 एक सीधी रेखा में पड़ते हैं मिलाने पर कुल कितने त्रिभुज बन सकते हैं ?

(ii) किसी परीक्षा में एक प्रत्याशी को 10 प्रश्नों में से कुल 5 प्रश्नों का उत्तर देना है। 10 प्रश्न 5–5 प्रश्नों के दो खण्डों A व B में विभाजित हैं। प्रत्याशी को किसी एक खण्ड में से अधिक से अधिक 3 प्रश्न करने हैं। वह कितने तरीकों से प्रश्नों का चयन कर सकता है ?

हल—(i) एक त्रिभुज ऐसे 3 बिन्दुओं को आपस में मिलाने से बनता है जो एक सरल रेखा में नहीं हैं।

12 बिन्दुओं से बनने वाले त्रिभुजों की संख्या $= {}^{12}C_3$

लेकिन 12 में से 7 बिन्दु एक ही सीधी रेखा में हैं जिनसे त्रिकोण नहीं बन सकता, अतः इनमें से ${}^7C_3$ त्रिभुज नहीं हैं।

$$\therefore \text{ त्रिभुजों की अभीष्ट संख्या} = {}^{12}C_3 - {}^7C_3 = \frac{12!}{9!\,3!} - \frac{7!}{4!\,3!}$$

$$= \frac{12.11.10}{3.2} - \frac{7.6.5}{3.2} = 220 - 35 = 185$$

(ii) कुल 5 प्रश्न करने हैं जिनमें से किसी एक खण्ड में से 3 से अधिक प्रश्न नहीं छाँटने हैं। प्रत्याशी के समक्ष निम्न विकल्प हैं—

खण्ड	A		B	तरीके
	(5)		(5)	
प्रश्नों की संख्या (क)	2	+	3	${}^5C_2.{}^5C_3 = 10 \times 10 = 100$
		या		
(ख)	3	+	2	${}^5C_3.{}^5C_2 = 10 \times 10 = 100$
				कुल तरीकों की संख्या $= 100 + 100 = 200$

अतः वह 200 तरीकों से प्रश्नों का चयन कर सकता है।

नियम 5—यदि एक प्रकार की p वस्तुएँ एक समान हों, दूसरे प्रकार की q वस्तुएँ एक समान हों, तीसरे प्रकार की r वस्तुएँ एक समान हों,........तो $(p+q+r+\ldots\ldots)$ वस्तुओं में से कुछ या सबको लेकर बनने वाले संचयों की कुल संख्या—

$$\boxed{(p+1)(q+1)(r+1)-1} \text{ होगी।}$$

उदाहरण 30—विजय के पास 4 अमरूद, 3 सेब, 3 सन्तरे और 2 केले हैं। इन 12 फलों में से कुछ अथवा सबको लेकर वह कितने प्रकार से चयन कर सकता है ?

हल—कुल 12 फल हैं जिनमें से 4 एक प्रकार के, 3 दूसरी प्रकार के, 3 तीसरी प्रकार के और 2 चौथी प्रकार के हैं। अतः कुछ या सबको लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाएगी—

$$(p+1)(q+1)(r+1)(s+1)-1$$

जहाँ $p=4,\ q=3,\ r=3,\ s=2$

अतः अभीष्ट संख्या$\rightarrow(4+1)(3+1)(3+1)(2+1)-1$

$$=(5\times4\times4\times3)-1=239 \text{ होगी।}$$

नियम 6—समूहों में विभाजन (Division into Groups)—$(m+n)$ वस्तुओं को m और n वस्तुओं के दो असमान समूहों में विभाजित करने के ढंगों की संख्या $\frac{(m+n)\,!}{m\,!\,n\,!}$ होती है। $m+n$ में से m वस्तुओं को छाँटने की संख्या ${}^{m+n}C_m$ है। प्रत्येक बार m वस्तुएँ छाँटने पर n वस्तुएँ बच रहती हैं जिनसे n वस्तुओं का समूह ${}^{n}C_n=1$ प्रकार से बन सकता है।

$$\text{अतः अभीष्ट संख्या}={}^{m+n}C_m=\frac{(m+n)\,!}{m\,!\,(m+n-m)\,!}=\boxed{\frac{(m+n)\,!}{m\,!\,n\,!}}$$

यदि $n=m$ हो, तो दोनों समूह समान होंगे और इस दशा में संचयों की संख्या $\frac{(m+m)\,!}{m\,!\,m\,!\,2\,!}$ अर्थात् $\frac{2m\,!}{(m\,!)^2 .\ 2\,!}$ होगी। यहाँ दो समूह आपस में बदले जा सकते हैं।

नियम 7— $m+n+p$ वस्तुओं को m, n तथा p वस्तुओं के भिन्न-भिन्न तीन समूहों में बाँटने के ढंगों की संख्या $\frac{(m+n+p)}{m\,!\,n\,!\,p\,!}$ होती है। $(m+n+p)$ वस्तुओं में से m वस्तुएँ ${}^{m+n+p}C_m$ प्रकार से तथा शेष $n+p$ वस्तुओं में से n, ${}^{n+p}C_n$ प्रकार से और शेष p वस्तुओं में से p वस्तुएँ ${}^{p}C_p=1$ प्रकार से चुनी जा सकती हैं।

$$\text{अतः वाञ्छित संख्या}={}^{m+n+p}C_m\times{}^{n+p}C_n\times{}^{p}C_p$$

$$=\frac{(m+n+p)\,!}{m\,!\,(n+p)\,!}\times\frac{(n+p)\,!}{n\,!\,p\,!}\times1$$

$$=\boxed{\frac{(m+n+p)\,!}{m\,!\,n\,!\,p\,!}}$$

यदि $p=n=m$ हों तो समूह समान होंगे और ऐसी स्थिति में समूह बनाने के प्रकार $\frac{(m+m+m)\,!}{m\,!\,.\,m\,!\,.\,m\,!\,.\,3\,!}=\frac{3m\,!}{(m\,!)^3 .\ 3\,!}$ होंगे।

व्यापक सूत्र—$\frac{(t.m)\,!}{t\,!\,(m\,!)^t}$

उदाहरण 31—(i) 15 जवानों को (क) तीन बराबर समूहों में, तथा (ख) 5–5 जवानों वाले तीन विभिन्न दलों में बाँटने के ढंगों की संख्या बताइए

(ii) ताश के 52 पत्ते किस प्रकार विभाजित किये जा सकते हैं जिससे (क) प्रत्येक में 13 ताशों वाले 4 पैकेट बन जाएँ; (ख) 4 खिलाड़ियों में से प्रत्येक को 13 पत्ते मिलें।

हल—(i) (क) तीन बराबर समूहों में बाँटने की क्रिया में समूहों को बदलने से फ़र्क नहीं पड़ता अतः उन्हें बराबर समूहों मे बाँटने के ढंगों की संख्या $\frac{15\,!}{5\,!\,5\,!\,5\,!\,3\,!}=$

(ख) यदि इन्हें तीन विभिन्न दलों में बाँटना हो तो दलों को परस्पर बदला नहीं जा सकता अतः अभीष्ट संख्या $\frac{15!}{5!.5!5!}=756756$ होगी।

(क) (ii) 13 ताशों वाले पैकेट आपस में बदले जा सकते हैं अतः विभाजन करने के ढंगों की संख्या $\frac{52!}{13!13!13!13!4!}=\frac{52!}{(13!)^4 4!}$ होगी।

(ख) चार खिलाड़ियों में से प्रत्येक को 13 पत्ते बाँटने के तरीकों की संख्या—

$$=\frac{52!}{(13!)^4}.$$

महत्त्वपूर्ण सूत्र

I. आधारभूत सिद्धान्त (Fundamental Theorem)

यदि एक कार्य करने के 'm' तरीके, दूसरे के 'n', तीसरे के p तरीके हों·······तो तीनों के तरीकों की संख्या$=m\times n\times p\times$........

II. क्रमचय (Permutations)

(i) n विभिन्न वस्तुओं में से r को एक साथ लेकर

$${}^nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

(ii) सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर $(r=n)$:

$${}^nP_n=n!$$

(iii) यदि n में से p वस्तुएँ समान हों, q दूसरे प्रकार की तथा समान, r तीसरे प्रकार की तथा समान व शेष भिन्न हों तो क्रमचयों की संख्या

$$=\frac{n!}{p!q!r!}$$

(iv) यदि प्रत्येक वस्तु r बार दोहरायी जाए तो क्रमचयों की संख्या$=n^r$

(v) p विशेष वस्तुएँ कदापि शामिल न हों $\quad {}^{n-p}P_r$

(vi) विशेष वस्तु सदा शामिल हो $\quad r.{}^{n-1}P_{r-1}$

(vii) चक्रीय क्रमचय (Circular Permutations) :

n वस्तुओं को एक साथ लेकर $\quad (n-1)!$

यदि दक्षिणावर्त व वामावर्त विन्यासों में अन्तर न हो तो $\frac{1}{2}(n-1)!$

III. संचय (Combinations)

(i) n विभिन्न वस्तुओं में से r एक साथ लेकर ${}^nC_r=\frac{n!}{(n-r)!r!}$

(ii) पूरक संचय $\quad {}^nC_r={}^nC_{n-r}$

(iii) p विशिष्ट वस्तु शामिल हो $\quad {}^{n-p}C_{r-p}$

(iv) p कभी शामिल न हो $\quad {}^{n-p}C_r$

(v) कुछ या सभी को एक साथ लेकर $\quad 2^n-1$

(vi) p समान, q दूसरे प्रकार की व समान, r तीसरे प्रकार व समान हो तो $p+q+r+\cdots$ मे से कुछ या सभी को लेकर $\quad \{(p+1)(q+1)(r+1)\}-1$

(vii) $(m+n)$ वस्तुओं को m व n के असमान समूहों में विभाजित करने के तरीकों की संख्या$=\frac{(m+n)!}{m!n!}$ यदि $n=m$ तो संख्या $\frac{2m!}{(m!)^2.2!}$ होगी।

अभ्यासार्थ प्रश्न

1. (i) रेल के एक डिब्बे में 6 सीट हैं और 4 आदमी *A, B, C, D* प्रवेश करते हैं। ये लोग कितने प्रकार से सीटें घेर सकते हैं ?
   (ii) एक सुपर मार्केट में 4 प्रवेश द्वार हैं—*A, B, C, D* तथा 5 निर्गम-द्वार हैं *a, b, c, d, e* एक ग्राहक कितने तरीको से उसमें आ-जा सकता है ?
2. *A* और *B* के बीच 6 सड़कें हैं और *B* तथा *C* के बीच 4 सड़कें हैं। बताइए कितने तरीको से एक कार चालक (i) *A* से *C* को *B* से होकर जा सकता है; (ii) *A* से *C* को *B* से होकर जा सकता है और फिर वापस *C* से *A* को *B* से होते हुए आ सकता है; (iii) *A* से *C* को *B* से होते हुए आ सकता है शर्त यह है कि जिस सड़क से वह जाये उसी से वापस न लौटे।
3. (i) 12 विभिन्न वस्तुओं में से 5–5 लेकर बनाए गये क्रमचयों में कितने ऐसे होंगे जिनमें एक निश्चित वस्तु (क) कभी न पड़ती हों; (ख) सदैव पड़ती हो ?
   (ii) कार लाइसेन्स नम्बरों की कितनी प्लेटें (plates) बनाई जा सकती हैं यदि प्रत्येक प्लेट में अंग्रेजी वर्णमाला के 2 अक्षर और फिर 3 अंक हों जिनमें से पहला अंक शून्य न हो ?
4. (i) 1 से 9 तक प्राकृतिक अंकों से (क) 5 अंकों वाले कितने टेलीफोन नम्बर बन सकते हैं, (ख) 5 अंकों वाले कितने ऐसे नम्बर होंगे जिनमें 7 आरम्भ में आए तथा इनमें में कितने ऐसे होंगे जिनमें किसी अंक की पुनरावृत्ति न हो ?
   (ii) एक ताले में दो छल्ले (rings) हैं जिनमें से प्रत्येक में 0 से 9 तक 10 अंक हैं। यदि ताला 2 अंकों के केवल एक संयोग से ही खुलता है तो कितने असफल प्रयास सम्भव हैं ? असफल प्रयास कितने होंगे यदि छल्ले चार हों, प्रत्येक पर 1 से 9 तक 9 अंक हो और चार अंकों के एक ही संयोग से ताला खुलता हो ?
5. निम्नलिखित शब्दों के अक्षरों को कितने तरीकों से जमाया जा सकता है—
   (i) '*INDIA*'
   (ii) '*RELIGION*'
   (iii) '*JAIPUR*'
   (iv) '*ELEMENT*' [*B. Com., CQM Raj., 1976 N. C.*]
6. निम्न शब्दों के अलग-अलग कितने क्रमचय बनेंगे—
   (i) '*COLLEGE*'
   (ii) '*MANAGEMENT*'
7. (i) '*DRAUGHT*' शब्द के अक्षरों से कितने ऐसे विन्यास बन सकते हैं जिनमें दोनो स्वर कभी पृथक् न हों ?
   (ii) शब्द '*INTERMEDIATE*' के अक्षरो से कितने विभिन्न शब्द बन सकते हैं जबकि दो स्वर कभी एक साथ न आएँ ?
8. (i) '*ELEVEN*' शब्द के सभी अक्षरों से कुल कितने विन्यास बनाये जा सकते हैं ? इनमें से कितने *E* से आरम्भ और *E* पर समाप्त होंगे ? कितने विन्यासों में तीनों *E* साथ-साथ आयेंगे ? कितने *E* से आरम्भ होकर *N* पर समाप्त होंगे ?
   (ii) '*SIMPLETON*' शब्द के अक्षरो को अन्य क्रमचयो में रख सकने की संख्या बताइए।
9. शब्द '*SERIES*' के अक्षरों में से एक बार में (क) सब लेने पर, और (ख) 3 लेने पर बन सकने वाले क्रमचयो की संख्या बताइये।
10. (i) 7 व्यंजन और 4 स्वरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं जिनमें 3 व्यंजन व 2 स्वर हो ? [*B. Com., CQM Raj., 1978S*]
    (ii) यदि निम्न शब्दों में से एक समय 4 अक्षर एक साथ लिए जाएँ तो कुल कितने संचय बन सकते हैं—
    (क) *COMBINATION*
    (ख) *EXAMINATION*
11. शब्द *ZENITH* के अक्षर प्रत्येक सम्भाव्य क्रम में लिखे जाते हैं। कितने शब्द बन सकते हैं यदि उन्हें शब्दकोश के क्रम से लिखा जाए ? उनमे *ZENITH* शब्द का कोटिक्रम (rank) क्या होगा ?

12. (i) संयुक्त राष्ट्र संघ (*UNO*) में 5 अमरीकी, 4 रूसी और 3 फ्रांसीसी प्रतिनिधियों में से 5 सदस्यों की कितनी समितियाँ बन सकती हैं यदि प्रत्येक समिति में 3 अमरीकी, 2 रूसी और 1 फ्रांसीसी प्रतिनिधि रखे जाएँ ?

(ii) एक व्यक्ति के 7 मित्र हैं। वह एक या एक से अधिक मित्रों को कितने तरीके से दावत पर बुला सकता है ?

13. 7 जापानी और 4 भारतीयों में से 6 सदस्यों की एक समिति का गठन करना है। यह कार्य कितने तरीकों से हो सकता है यदि समिति में (क) 2 भारतीय हों; (ख) कम से कम दो भारतीय हों ?

14. (i) 15 खिलाड़ियों में से 3 अध्यापक हैं ? कितने ढंगो से 11 खिलाड़ी चुने जा सकते हैं यदि कम से कम एक अध्यापक अवश्य खेले ?

(ii) एक क्रिकेट क्लब के 16 सदस्य हैं जिनमें से 2 विकेट-रक्षक, 5 गेंद फेंकने वाले तथा शेष बल्लेबाज हैं। इनमें 11 खिलाड़ियों की एक टीम कितने तरीकों से बनाई जा सकती है यदि उनमें एक विकेट-रक्षक और कम से कम तीन गेंदबाज सम्मिलित हों ?

15. (i) 7 सदस्यों की एक ऐसी समिति के लिए 6 महिलाओं और 8 पुरुषों के नामांकन पत्र प्राप्त हुए हैं जिसमें कम से कम एक महिला और कम से कम तीन पुरुष शामिल हों। समिति कितने प्रकार से बनाई जा सकती है ?

(ii) यदि दो विशिष्ट व्यक्ति (Mr. *X* व Mr. *Y*) एक ही समिति के साथ-साथ सदस्य होना अस्वीकार कर दें तो समिति की रचना कितने तरीकों से होगी ?

16. (i) तीन पुरुषों के पास 4 कोट, 5 वेस्ट और 6 टोप हैं। वे कितने प्रकार से कपड़े पहन सकते हैं ?

(ii) यदि 6 झंडियों में से कितनी भी झंडियाँ एक साथ दिखाई जा सकती हों तो ज्ञात कीजिए कि इनके प्रयोग से कितने विभिन्न संकेत (*signals*) दिखाए जा सकते हैं ?

17. चार विद्यार्थियों में तीन पारितोषिक कितने प्रकार से दिए जा सकते हैं यदि (क) एक विद्यार्थी कितने भी पारितोषिक प्राप्त कर सकता हो; (ख) एक विद्यार्थी को सारे पारितोषिक न मिल सकते हों ?

18. (i) 10 वस्तुओं में से 3 दोषपूर्ण हैं लेकिन यह ज्ञात नहीं है कि कौनसी तीन। 3 वस्तुओं का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है ? इन चयनों में से कितने ऐसे होंगे जिनमें कम से कम एक दोषपूर्ण वस्तु शामिल होगी ?

(ii) 7 व्यक्तियों की एक तालिका (panel) में 3 वकील, 3 चार्टर्ड एकाउन्टेन्ट और 1 चार्टर्ड एकाउन्टेन्ट व वकील (दोनों) हैं। उनमें से 3 विशेषज्ञों की एक समिति कितने प्रकार से चुनी जा सकती है यदि समिति में कम से कम एक C. A. व एक वकील अवश्य हो ?

19. (i) मेरे पास 4 आम, 5 सन्तरे और 6 अनार हैं। उनमें से कितने भिन्न-भिन्न चयन हो सकते हैं जबकि हरएक चयन में कम से कम 1 आम, 1 सन्तरा और 1 अनार अवश्य हो ?

(ii) एक प्रश्न-पत्र में दो खण्ड हैं जिनमें क्रमानुसार 3 और 4 प्रश्न हैं। इस प्रश्न-पत्र पर निम्न आदेश अंकित है—

'सब प्रश्नों का उत्तर देना अनिवार्य नहीं है; प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न का उत्तर देना अनिवार्य है।' परीक्षार्थी कितने प्रकार से प्रश्नों का चयन कर सकता है ?

20. (i) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 अंको की सहायता से पाँच अंकों वाली कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं यदि कोई भी अंक एक से अधिक बार नहीं आता और सभी संख्याएँ 5 से विभाजित हो सकें।

(ii) अंक 0, 2, 4, 6, 8 की सहायता से 10000 से अधिक कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं यदि किसी अंक की पुनरावृत्ति न हो ? उनका योग ज्ञात कीजिए :

21. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 अंको से ऐसी कितनी संख्याएँ बन सकती हैं जो 1000 से कम हों, तथा 5 से विभाज्य हों और जिनमें कोई अंक दोहराया न जाए ?

22. किसी परीक्षा में सांख्यिकी का प्रश्न-पत्र दो खण्डो मे विभाजित है। प्रत्येक खण्ड मे 5 प्रश्न हैं। एक प्रत्याशी कितने तरीकों से 6 प्रश्न हल कर सकता है यदि प्रत्येक खण्ड में से कम से कम 2 प्रश्न करने अनिवार्य हो ?

23. (i) एक व्यक्ति ने 12 मित्रों को प्रीतिभोज पर आमन्त्रित किया और उनमें से 8 को उसने एक गोल-मेज के चारो ओर और शेष को छोटी गोलमेज के चारों ओर बैठाया। उन तरीकों की सख्या ज्ञात कीजिए जिनमें वह अतिथियो को क्रमबद्ध कर सकता है ?

(ii) किसी परीक्षा के 10 प्रश्न-पत्रो को कितनी प्रकार से रखा जा सकता है यदि सर्वोत्तम (best) और सर्वनिकृष्ट (worst) प्रश्न-पत्र (क) सदा साथ आएँ, (ख) कभी साथ न आएँ ?

24. (i) एक समिति के 10 सदस्य एक गोल-मेज के चारों ओर कितने तरीकों से बैंठ सकते हैं यदि मन्त्री और कोषाध्यक्ष सदा अध्यक्ष के पड़ोसी रहे ?

(ii) पाँच पुरुष और पांच महिलाएँ एक गोल-मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं यदि कोई भी दो महिलाएँ साथ-साथ न बैठें ?

25. (i) 7 व्यक्ति कितने तरीको से एक घेरा (ring) बना सकते हैं ? 7 भारतीय और 7 पाकिस्तानी कितने तरीको से एक गोल-मेज के चारो ओर बैठ सकते हैं यदि दो पाकिस्तानी साथ-साथ न बैठें ?

(ii) 7 व्यक्ति एक पक्ति मे बैठाए जाते हैं। बैठने के क्रमचयो की सख्या ज्ञात कीजिए यदि—

(क) 3 व्यक्ति—A, B व C एक साथ बैठें।

(ख) A, B व C कभी एक साथ न बैठें।

(ग) A और C सदा सिरे के स्थानों (end-seats) पर ही बैठें।

(घ) B सदा बिल्कुल बीच के स्थान पर बैठें।

26 (i) 6 पुरुष और 6 महिलाएँ एक गोल-मेज के चारो ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं जबकि कोई भी दो महिलाएँ साथ-साथ न बैठें ?

(ii) 3, 2, 7, 4, 0 अको की सहायता से 5 अंको वाली कितनी विषम (odd) संख्याएँ बनाई जा सकती हैं यदि कोई अक न दोहराया जाए ?

27. 20 छात्रो को कितने प्रकार से विभाजित किया जा सकता है—

(i) चार बराबर समूहों मे।

(ii) 5–5 छात्रों के 4 विभिन्न दलो में ?

28. (i) 12 वस्तुओं को चार व्यक्तियो में बराबर-बराबर कितने तरीको से बाँटा जा सकता है ?

[B. Com., CQM Raj., 1978]

(ii) एक नाव मे 8 व्यक्ति हैं जिनमें से 2 केवल अग्र-भाग (bow side) में ही पतवार चला सकते हैं और 1 केवल पृष्ठ भाग (stroke side) मे ही पतवार चलाकर खे सकता है। नाव खेने (crew) वालों को कितने तरीकों से क्रमबद्ध किया जा सकता है ?

29. (i) 15 डाक्टरों को 3 बाढ़-ग्रस्त क्षेत्रों मे पहुँचना है जिनको क्रमश. 5, 7 व 3 डाक्टरो की आवश्यकता है। ये डाक्टर कितने प्रकार से भेजे जा सकते हैं ?

(ii) एक रुपया, एक पचास- पैसे, एक पच्चीस पैसे और एक दस पैसे के सिक्के से कितने प्रकार की धनराशि बनाई जा सकती है ?

30. (i) 4 महिलाएँ और 3 पुरुष कितनी विभिन्न टोलियो मे टेनिस का खेल खेल सकते हैं यदि प्रत्येक ओर एक महिला और एक पुरुष का रहना जरूरी हो और खेल दो सेट्स का हो ?

(ii) किसी दशभुज के शीर्षों को जोड़ने से कितने त्रिभुज बन सकते हैं ? इस आकृति में कितने विकर्ण (diagonals) आएँगे ?

31. (i) यदि ${}^{n}P_4 : {}^{n-1}P_3 = 9 : 1$ तो n का मान बताइए।

(ii) यदि ${}^{18}C_r = {}^{18}C_{r+2}$ तो ${}^{r}C_5$ का मान निकालिए।

32. सिद्ध कीजिए कि—

(i) ${}^nP_r = n.{}^{n-1}P_{r-1}$;

(ii) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$;

(iii) ${}^nP_r = {}^{n-r}P_r + r.{}^{n-1}P_{n-r}$.

33. (i) यदि n वस्तुओं में से 3 एक साथ लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या का 4 गुना, $(n-1)$ वस्तुओं में से 3 एक साथ लेकर बने क्रमचयों की संख्या का 5 गुना हो, तो n का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि ${}^nP_r = 604800$, ${}^nC_r = 120$, तो ${}^{12}C_r$ का मान बताइए।

(iii) यदि ${}^{56}P_{r+6} : {}^{54}P_{r+3} = 30800 : 1$ तो r का मान बताइए।

34. सिद्ध कीजिए कि—

(i) ${}^nP_r = (n-r+1).{}^nP_{r-1}$ तथा ${}^nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$

(ii) ${}^nC_r = \frac{n}{r}.{}^{n-1}C_{r-1}$.

35. (i) यदि ${}^{28}C_{2r} : {}^{24}C_{2r-4} = 225 : 11$ तो r का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(ii) n और r का क्या मूल्य होगा यदि—

(क) ${}^nP_r = 5040$, ${}^nC_r = 270$.

(ख) ${}^{n+1}C_{r+1} : {}^nC_r : {}^{n-1}C_{r-1} = 11 : 6 : 3$.

उत्तर

1. (i) 360, (ii) 20; 2. (i) 24, (ii) 576, (iii) 360; 3. (i) (क) 55440, (ख) 7920, (ii) 585000; 4. (i) (क) 59049, (ख) 6561, 1680, (ii) $10^2-1=99$, $9^4-1=6560$; 5 (i) 60, (ii) 20160, (iii) 720, (iv) 840; 6. (i) 1260, (ii) 226800; 7. (i) 1440, (ii) 151200; 8. (i) 120, 24, 24, 12, (ii) $9!-1=362879$; 9. (क) 180, (ख) 42; 10. (i) ${}^7C_3 \times {}^4C_2 \times 5!$, (ii) (क) 136, (ख) 136; 11. 720, Rank=616; 12. (i) 180, (ii) 127; 13. (क) 210, (ख) 371; 14. (i) 1353, (ii) 12144; 15. 3248, 696; 16. (i) 172800, (ii) 1956; 17. (क) 64, (ख) 60; 18. (i) 120, 85, (ii) 15; 19. (i) 29295 *i.e.* $\{(2^4-1)(2^5-1)(2^6-1)\}$, (ii) 105 *i.e.* $\{(2^3-1)(2^4-1)\}$; 20. (i) $22680=9.9.8.7.5$, (ii) $(24\times20\times10000)+(18\times20\times1111)=5199960$. 21. 154; 22. 200; 23. (i) ${}^{12}C_8.7!.3!$, (ii) (क) 725760, (ख) $10!-9!\,2!=2903040$; 24. (i) $2!.7!=10080$, (ii) 2880; 25. (i) 720, $6!\,7!=3628800$, (ii) (क) $720=5!\,3!$, (ख) $4320=7!-5!\,3!$, (ग) $240=5!\,2!$, (घ) $6!=720$; 26. (i) $86400=6!\,5!$, (ii) $(4!-2!)\,2!=36$; 27. (i) $20!/\{(5!)^4\,4!\}$, (ii) $20!/(5!)^4$; 28. (i) $369600=12!/(3!)^4$, (ii) $5760={}^5C_2.4!.4!$; 29. (i) ${}^{15}C_8.{}^{10}C_7.{}^3C_3=36036$, (ii) 5; 30. (i) 36, (ii) 120, 35; 31. (i) 9, (ii) 56; 33. (i) $n=15$, (ii) 792, $(r=7)$, (iii) $r=41$; 35. (i) 7, (ii) (क) $n=10$, $r=4$, (ख) $n=10$, $r=5$.

4. द्विपद-प्रमेय

(BINOMIAL THEOREM)

परिभाषा—वह व्यंजक (experession) जिसमें केवल दो पद हों जिनके बीच + या — का चिह्न हो, द्विपद-व्यंजक या द्विपद (Binomial) कहलाता है जैसे $(x+a)$, $(3x^2+5y)$, $(2x-3y)$, $(1-x)$ आदि। यदि n कोई भी घातांक हो तो $(x+a)^n$ के विस्तार को द्विपद-विस्तार (Binomial Expansion) कहते हैं, उदाहरणार्थ $x^2+2xa+a^2$ व्यंजक $(x+a)^2$ का द्विपद-विस्तार है। किसी द्विपद-व्यंजक के किसी भी घात के विस्तार को एक व्यापक नियम या सूत्र द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। इस सूत्र को द्विपद-प्रमेय (Binomial Theorem) कहते हैं।

द्विपद-विस्तार के इस नियम का सूत्रपात 1676 में प्रसिद्ध वैज्ञानिक सर आइजक न्यूटन (Sir Isaac Newton) ने किया था यद्यपि इससे पूर्व घात 3 ($n=3$) तक के विस्तार का प्रयोग हिन्दू व अरब गणितज्ञों द्वारा किया जाता रहा था।

द्विपद-प्रमेय की व्याख्या—यदि n कोई धनात्मक पूर्णांक (positive integer) हो तो $(x+a)^n$ पद संहति का विस्तार निम्न सूत्रानुसार लिखा जा सकता है—

$$(x+a)^n={}^nC_0\,.\,x^n+{}^nC_1\,.\,x^{n-1}\,.\,a+{}^nC_2\,.\,x^{n-2}\,.\,a^2+{}^nC_3\,.\,x^{n-3}a^3+\ldots\ldots{}^nC_{n-1}x\,.\,a^{n-1}+{}^nC_n\,.\,a^n$$

वामपक्ष (L.H.S.) द्विपद व्यंजक, दक्षिण पक्ष (R.H.S.), द्विपद विस्तार और x की विभिन्न घातों के संख्यात्मक गुणांक (जैसे, ${}^nC_0$, ${}^nC_1$, ${}^nC_{n-1}$, ${}^nC_n$ आदि) द्विपद-गुणांक (binomial coefficients) कहलाते हैं।

धनात्मक पूर्णांक घात के लिए द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem for Positive Integral Index)—प्रत्यक्ष गुणन की बीजगणितीय रीति से निम्न परिणाम स्पष्ट हैं—

द्विपद व्यंजक	घात	द्विपद-विस्तार गुणन-क्रिया द्वारा उपलब्ध परिणाम—	
$(x+a)^1$	1	$x+a={}^1C_0x^1+{}^1C_1a^1$	...(i)
$(x+a)^2$	2	$x^2+2xa+a^2={}^2C_0x^2+{}^2C_1xa+{}^2C_2a^2$	...(ii)
$(x+a)^3$	3	$x^3+3x^2a+3xa^2+a^3={}^3C_0x^3+{}^3C_1x^2a+{}^3C_2xa^2+{}^3C_3a^3$	...(iii)
$(x+a)^4$	4	$x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4={}^4C_0x^4+{}^4C_1x^3a+{}^4C_2x^2a^2$ ${}^4C_3xa^3+{}^4C_4a^4$	...(iv)

प्रमाण—द्विपद प्रमेय के सामान्य सूत्र का विश्लेषण करने से यह निष्कर्ष निकलता है कि प्रमेय *(i), (ii), (iii)* तथा *(iv)* पर पूर्ण रूप से सत्य ($n=1, 2, 3, 4$) सिद्ध होता है। इसी प्रकार, यह सिद्धान्त यदि किसी भी धनात्मक पूर्णांक n के लिए सत्य है तो वह अगली घात $n+1$ के लिए भी सत्य होगा जैसा कि निम्नलिखित विश्लेषण से स्पष्ट होता है—

$$(x+a)^n={}^nC_0.x^n+{}^nC_1.x^{n-1}.a+{}^nC_2.x^{n-2}.a^2+{}^nC_3.x^{n-3}.a^3+\ldots\ldots+{}^nC_{n-1}x.a^{n-1}+{}^nC_n.a^n$$

दोनों पक्षों को $(x+a)$ से गुणा करने पर—

$$(x+a)^n.(x+a)=({}^nC_0x^n+{}^nC_1x^{n-1}.a+{}^nC_2x^{n-2}a^2+\ldots\ldots+{}^nC_{n-1}x.a^{n-1}+{}^nC_n.a^n)(x+a)$$

$$=x(x^n+{}^nC_1x^{n-1}.a+{}^nC_2x^{n-2}.a^2+\ldots\ldots+{}^nC_na^n)+a(x^n+{}^nC_1x^{n-1}a+{}^nC_2x^{n-2}a^2+\ldots\ldots+{}^nC_na^n)$$

$$=(x^{n+1}+{}^nC_1x^na+{}^nC_2x^{n-1}a^2+\ldots\ldots+{}^nC_nxa^n)+(x^na+{}^nC_1x^{n-1}a^2+{}^nC_2x^{n-2}a^3+\ldots\ldots+{}^nC_na^{n+1})$$

$$=x^{n+1}+x^na({}^nC_1+1)+x^{n-1}a^2({}^nC_2+{}^nC_1)+x^{n-2}a^3({}^nC_3+{}^nC_2)+\ldots+x^1a^n({}^nC_n+{}^nC_{n-1})+a^{n+1}$$

यह ज्ञात है कि संचय के नियमों के अनुसार—

$${}^nC_0={}^{n+1}C_0=1;\quad {}^nC_n={}^{n+1}C_{n+1}=1$$

तथा $\quad {}^nC_r+{}^nC_{r-1}={}^{n+1}C_r$

इस प्रकार—यदि $r=1$, ${}^nC_1+{}^nC_0={}^{n+1}C_1$, यदि $r=2$, तो ${}^nC_2+{}^nC_1={}^{n+1}C_2$, यदि $r=3$, तो ${}^nC_3+{}^nC_2={}^{n+1}C_3$........

इन सम्बन्धों का उपर्युक्त विस्तार में प्रयोग करते हुए—

$$\therefore\quad (x+a)^n(x+a)=x^{n+1}+{}^{n+1}C_1x^na+{}^{n+1}C_2x^{n-1}.a^2+{}^{n+1}C_3.x^{n-2}a^3+\ldots\ldots+{}^{n+1}C_nxa^n+{}^{n+1}C_{n+1}a^{n+1}$$

$$\therefore\quad (x+a)^{n+1}={}^{n+1}C_0x^{n+1}+{}^{n+1}C_1x^na+{}^{n+1}C_2x^{n-1}a^2+{}^{n+1}C_3x^{n-2}a^3+\ldots\ldots+{}^{n+1}C_nxa^n+{}^{n+1}C_{n+1}a^{n+1}$$

अतः $(x+a)^{n+1}$ के द्विपद विस्तार का स्वरूप $(x+a)^n$ के विस्तार के अनुरूप है। अन्तर केवल यह है कि n के स्थान पर $(n+1)$ घात है। इनसे यह सिद्ध होता है कि यह प्रमेय n

के किसी धनपूर्णांक मान के लिए सत्य है तो उससे अगले $(n+1)$ मान के लिए भी सत्य होगी। इस प्रकार द्विपद प्रमेय किसी भी धनात्मक पूर्णांक n (any positive integral index) के लिए सत्य है।

उदाहरण—यदि $n=5$ तो—

$$(x+a)^5 = {}^5C_0x^5a^0 + {}^5C_1x^4a^1 + {}^5C_2x^3a^2 + {}^5C_3x^2a^3 + {}^5C_4x^1a^4 + {}^5C_5x^0a^5$$
$$= x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

यदि $n+1=5+1=6$ तो—

$$(x+a)^{5+1} = {}^{5+1}C_0x^{5+1}a^0 + {}^{5+1}C_1x^5a + {}^{5+1}C_2x^4a^2 + {}^{5+1}C_3x^3a^3$$
$$+ {}^{5+1}C_4x^2a^4 + {}^{5+1}C_5xa^5 + {}^{5+1}C_{5+1}x^0a^{5+1}$$
$$= {}^6C_0x^6 + {}^6C_1x^5a + {}^6C_2x^4a^2 + {}^6C_3x^3a^3 + {}^6C_4x^2a^4 + {}^6C_5xa^5 + {}^6C_6a^6$$
$$= x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$$

द्विपद-विस्तार—

$$(x+a)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}.a + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}xa^{n-1} + {}^nC_na^n.$$

द्विपद प्रमेय की मुख्य विशेषताएँ—

(i) पदों की संख्या (Number of Terms)—द्विपद-विस्तार के पदों की कुल संख्या घात (n) से एक अधिक $(n+1)$ होती है। उदाहरणार्थ $(x+a)^5$ के विस्तार में $5+1=6$ पद हैं और $(x+a)^6$ के विस्तार में $6+1=7$ पद हैं;

(ii) घातांक क्रम (Exponents)—प्रथम पद x के घातांक n से आरम्भ होकर उत्तरोत्तर एक-एक कम होते रहते हैं और दूसरे पद a के घातांक इसके विपरीत बढ़ते रहते हैं और अन्तिम पद में a का घात n हो जाता है। परन्तु प्रत्येक पद में x और a के घातों का जोड़ n होता है। इस प्रकार $n+0=n$, $n-1+1=n$, $n-2+2=n$, $n-3+3=n$, $1+n-1=n$, $0+n=n$. $(x+a)^6$ के विस्तार में प्रत्येक पद के घातांकों का जोड़ 6 है जैसे—
$6+0=6$, $5+1=6$, $4+2=6$, $3+3=6$, $2+4=6$, $1+5=6$, $0+6=6$

(iii) द्विपद-गुणांक (Binomial Coefficients)—प्रथम पद से आरम्भ होकर विभिन्न पदों के द्विपद-गुणांक ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2 \ldots {}^nC_{n-1}, {}^nC_n$ होते हैं। आरम्भ और अन्त से समान दूरी (${}^nC_0={}^nC_n=1$; ${}^nC_1={}^nC_{n-1}$) के पदों के गुणांक भी समान होते हैं। सभी गुणांकों का योग $({}^nC_0+{}^nC_1+{}^nC_2+\ldots{}^nC_n)=2^n$ होता है। विस्तार के समपदो के गुणांकों का जोड़ विषम पदों के गुणांकों के जोड़ के बराबर होता है अर्थात् ${}^nC_0+{}^nC_2+{}^nC_4+\ldots={}^nC_1+{}^nC_3+{}^nC_5\ldots$

द्विपद-गुणांकों को सरलता से पास्कल के त्रिभुज (Pascal's Triangle) की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है—

पास्कल का त्रिभुज
(Pascal's Triangle)

n	द्विपद गुणांक	योग
1	1 1	$2^1=2$
2	1 2 1	$2^2=4$
3	1 3 3 1	$2^3=8$
4	1 4 6 4 1	$2^4=16$
5	1 5 10 10 5 1	$2^5=32$
6	1 6 15 20 15 6 1	$2^6=64$
7	1 7 21 35 35 21 7 1	$2^7=128$
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	$2^8=256$
$n\rightarrow$	${}^nC_0,\ {}^nC_1\ \ {}^nC_2 \ldots {}^nC_r \ldots {}^nC_{n-1}\ \ {}^nC_n$	$=2^n$

यह त्रिभुज निम्न सम्बन्ध पर आधारित है—

$${}^{n+1}C_r = {}^nC_{r-1} + {}^nC_r$$

(iv) व्यापक पद (General Term)—द्विपद-विस्तार का पहला पद ${}^nC_0 x^n a^0$, दूसरा पद ${}^nC_1 x^{n-1}.a$, तीसरा पद ${}^nC_2 x^{n-2}a^2$....$(r+1)$वाँ पद ${}^nC_r x^{n-r} a^r$ होता है। $(r+1)$वाँ पद व्यापक पद (general term—T_{r+1}) कहलाता है।

अतः व्यापक $(r+1)$वाँ पद, $T_{r+1}={}^nC_r x^{n-r} a^r$.

द्विपद प्रमेय के अन्य रूप—

$$(x+a)^n=x^n+{}^nC_1 x^{n-1}a+{}^nC_2 x^{n-2}a^2+\ldots{}^nC_r x^{n-r}.a^r+\ldots+{}^nC_n a^n.$$

(क) उपर्युक्त सूत्र में $a=-a$ रखने पर—

$$(x-a)^n=x^n-{}^nC_1 x^{n-1}a+{}^nC_2 x^{n-2}a^2+\ldots(-1)^r\,{}^nC_r x^{n-r}.a^r+\ldots(-1)^n.a^n.$$

(ख) इसी प्रकार,

$$(1+x)^n=1+{}^nC_1 1^{n-1}.x+{}^nC_2 1^{n-2}x^2+\ldots{}^nC_r 1^{n-r}x^r+\ldots x^n$$
$$=1+{}^nC_1 x+{}^nC_2 x^2+\ldots{}^nC_r x^r+\ldots{}^nC_n x^n.$$

(ग) $(1-x)^n=1-{}^nC_1 x+{}^nC_2 x^2-{}^nC_3 x^3+\ldots(-1)^r.{}^nC_r x^r+\ldots(-1)^n.{}^nC_n.x^n.$

उदाहरण 1—सिद्ध कीजिए कि $(1+x)^n$ के द्विपद विस्तार में, जहाँ n धन पूर्णांक हो—

(i) सभी द्विपद गुणांकों का जोड़ 2^n होता है।

(ii) आरम्भ से और अन्त से द्विपद गुणाकों के मान समान होते हैं।

(iii) समपदों के गुणांकों का योग विषम पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है।

हल—(i) $(1+x)^n={}^nC_0.1^n+{}^nC_1.1^{n-1}x^1+{}^nC_2.1^{n-2}x^2$
$+\ldots\ldots{}^nC_{n-1}.1^1.x^{n-1}+{}^nC_n x^n$
$={}^nC_0+{}^nC_1.x+{}^nC_2.x^2+{}^nC_3.x^3+\ldots\ldots+{}^nC_n.x^n$

$x=1$ रखने पर—

$$(1+1)^n={}^nC_0+{}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\ldots\ldots+{}^nC_n=(1+1)^n=2^n$$

(ii) यह ज्ञात है कि ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$

अतः प्रथम गुणांक—${}^nC_0={}^nC_{n-0}={}^nC_n$ अन्तिम गुणांक।

इसी प्रकार ${}^nC_1={}^nC_{n-1}$, ${}^nC_2={}^nC_{n-2}$........

प्रमाण—आरम्भ से $(r+1)$वाँ पद$=T_{r+1}={}^nC_r x^r$

$\Rightarrow$ $(r+1)$वें पद का गुणांक ${}^nC_r$ है।

कुल पदों की संख्या$=n+1$

अन्त में $(r+1)$वें पद से पहले $(n+1)-(r+1)=n-r$ पद हैं। आरम्भ से वह $(n-r+1)$वाँ पद है।

अतः अन्त से $(r+1)$वाँ पद या $T_{n-r+1}={}^nC_{n-r}x^{n-r}$

$\Rightarrow$ अन्त से $(r+1)$वें पद का गुणांक$={}^nC_{n-r}$

लेकिन ${}^nC_{n-r}={}^nC_r$ अतः आरम्भ से और अन्त से समान अन्तर वाले पदों (equidistant terms) के द्विपद गुणाक समान होते हैं।

(iii) $(1+x)^n={}^nC_0+{}^nC_1 x+{}^nC_2 x^2+\ldots\ldots+{}^nC_n x^n$

$(x=-1)$ रखने पर—

$$(1-1)^n=0={}^nC_0-{}^nC_1+{}^nC_2-{}^nC_3+{}^nC_4-\ldots\ldots$$
$$\Rightarrow{}^nC_0+{}^nC_2+{}^nC_4+\ldots\ldots={}^nC_1+{}^nC_3+{}^nC_5+\ldots\ldots$$

अतः सम गुणांकों का जोड़ विषम गुणाकों के जोड़ के बराबर है।

प्रत्येक पक्ष का जोड़$=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$

उदाहरण 2—यदि $C_0, C_1, C_2,\ldots\ldots,C_n$ $(1+x)^n$ के विस्तार के द्विपद गुणांक हों तो निम्न व्यंजकों का मान ज्ञात कीजिए—

(i) $C_1+2C_2+3C_3+\ldots\ldots+n.C_n$

(ii) $C_0+2C_1+3C_2+\ldots\ldots+(n+1)C_n$

हल—(i) $C_1+2C_2+3C_3+......+nC_n$

$={}^nC_1+2.{}^nC_2+3.{}^nC_3+......+n.{}^nC_n$

$=\frac{n!}{(n-1)!1!}+2.\frac{n!}{(n-2)!2!}+3.\frac{n!}{(n-3)!3!}+......+n.\frac{n!}{(n-n)!n!}$

$=n+2.\frac{n(n-1)}{2\times1}+3.\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2}+......+n.1$

$=n\left[1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+......+1\right]$

$=n\,[{}^{n-1}C_0+{}^{n-1}C_1+{}^nC_2+......{}^{n-1}C_{n-1}]$

$\because\quad (n-1)=\frac{(n-1)!}{(n-2)!1!},\quad \frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!}$

$=n.2^{n-1}$ $\qquad\because\quad {}^nC_0+{}^nC_1+......{}^nC_n=2^n$

(ii) $C_0+2C_1+3C_2+......(n+1)C_n$

$=(C_0+C_1+C_2+......+C_n)+(C_1+2.C_2+......n.C_n)$

$=2^n+n.2^{n-1}$ [देखिए (i)]

$=2.2^{n-1}+n.2^{n-1}=2^{n-1}(2+n)$

$=(n+2).2^{n-1}$

उदाहरण 3—निम्नलिखित का द्विपद विस्तार प्राप्त कीजिए—

(i) $(2x+3)^5$ [*B. A. Econ., Rajasthan, 1972, 1976 (S), 1978 (S)*]

(ii) $(x-3)^5$ [*B. A. Econ., Rajasthan, 1971*]

हल—(i) $(2x+3)^5={}^5C_0(2x)^5+{}^5C_1.(2x)^4.(3)^1+{}^5C_2(2x)^3.(3)^2+{}^5C_3(2x)^2.(3)^3$
$+{}^5C_4(2x)^1.(3)^4+{}^5C_5.(3)^5$

$=32x^5+5\times16x^4\times3+10\times8x^3\times9+10\times4x^2\times27$
$+5\times2x\times81+243$

$=32x^5+240x^4+720x^3+1080x^2+810x+243.$

(ii) $(x-3)^5={}^5C_0x^5-{}^5C_1x^4\times3+{}^5C_2x^3.3^2-{}^5C_3x^2.3^3+{}^5C_4x.3^4-{}^5C_5.3^5$

$=x^5-5x^4\times3+10x^3\times9-10x^2\times27+5x\times81-243$

$=x^5-15x^4+90x^3-270x^2+40x-243.$

उदाहरण 4—निम्न व्यंजकों का द्विपद विस्तार लिखिए—

(i) $\left(1+\frac{x}{2}\right)^7$ (ii) $\left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{2x}\right)^6.$

हल—(i) $\left(1+\frac{x}{2}\right)^7={}^7C_0.1^7+{}^7C_1.1^6.\frac{x}{2}+{}^7C_2\,1^5.\left(\frac{x}{2}\right)^2+{}^7C_3.1^4.\left(\frac{x}{2}\right)^3$
$+{}^7C_4.1^3.\left(\frac{x}{2}\right)^4+{}^7C_5.1^2.\left(\frac{x}{2}\right)^5+{}^7C_6.1.\left(\frac{x}{2}\right)^6+{}^7C_7\left(\frac{x}{2}\right)^7$

$=1+\frac{7x}{2}+\frac{21x^2}{4}+\frac{35x^3}{8}+\frac{35x^4}{16}+\frac{21x^5}{32}+\frac{7x^6}{64}+\frac{x^7}{128}$

(ii) $\left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{2x}\right)^6={}^6C_0\left(\frac{2x}{3}\right)^6-{}^6C_1\left(\frac{2x}{3}\right)^5\left(\frac{3}{2x}\right)+{}^6C_2\left(\frac{2x}{3}\right)^4.\left(\frac{3}{2x}\right)^2$
$-{}^6C_3\left(\frac{2x}{3}\right)^3\left(\frac{3}{2x}\right)^3+{}^6C_4\left(\frac{2x}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2x}\right)^4-{}^6C_5\left(\frac{2x}{3}\right)\left(\frac{3}{2x}\right)^5+{}^6C_6\left(\frac{3}{2x}\right)^6$

$=\frac{64x^6}{729}-6\times\frac{16x^4}{81}+15\times\frac{4x^2}{9}-20+15\times\frac{9}{4x^2}-6\times\frac{81}{16x^4}+\frac{729}{64x^6}$

$=\frac{64x^6}{729}-\frac{32x^4}{27}+\frac{20x^2}{3}-20+\frac{135}{4x^2}-\frac{243}{8x^4}+\frac{729}{64x^6}.$

उदाहरण 5—(i) निम्न व्यंजक का विस्तार करके सरल कीजिए—

$$(\sqrt{2}+1)^6+(\sqrt{2}-1)^6$$

(ii) सिद्ध कीजिए कि—

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3=18\sqrt{3}$$

हल—(i) $(\sqrt{2}+1)^6=(\sqrt{2})^6+{}^6C_1(\sqrt{2})^5.1+{}^6C_2(\sqrt{2})^4.1^2+{}^6C_3(\sqrt{2})^3.1^3$
$+{}^6C_4(\sqrt{2})^2.1^4+{}^6C_5(\sqrt{2})^1.1^5+{}^6C_6(\sqrt{2})^0.1^6$

$(\sqrt{2}-1)^6=(\sqrt{2})^6-{}^6C_1(\sqrt{2})^5.1+{}^6C_2(\sqrt{2})^4.1^2-{}^6C_3(\sqrt{2})^3.1^3$
$+{}^6C_4(\sqrt{2})^2.1^4-{}^6C_5(\sqrt{2})^1.1^5+{}^6C_6(\sqrt{2})^0.1^6$

$\therefore\quad (\sqrt{2}+1)^6+(\sqrt{2}-1)^6=2\{(\sqrt{2})^6+{}^6C_2(\sqrt{2})^4+{}^6C_4(\sqrt{2})^2+{}^6C_6(\sqrt{2})^0\}$
$=2\{(2)^{1/2\times 6}+15.(2)^{1/2\times 4}+15(2)^{1/2\times 2}+1\}$
$=2(8+60+30+1)$ या $2\times 99=198$

(ii) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3=(\sqrt{3})^3+{}^3C_1(\sqrt{3})^2.(\sqrt{2})^1+{}^3C_2(\sqrt{3})^1.(\sqrt{2})^2+{}^3C_3(\sqrt{3})^0(\sqrt{2})^3$
$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3=(\sqrt{3})^3-{}^3C_1(\sqrt{3})^2\sqrt{2}+{}^3C_2\sqrt{3}.(\sqrt{2})^2-{}^3C_3(\sqrt{3})^0(\sqrt{2})^3$

जोड़ने पर—

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3=2(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}.2=2.3.\sqrt{3}+12\sqrt{3}$
$=6\sqrt{3}+12\sqrt{3}=18\sqrt{3}$

उदाहरण 6—$(x+\sqrt{x^2-1})^7+(x-\sqrt{x^2-1})^7$ का मान बताइए।

हल—$\sqrt{x^2-1}=a$ रखने पर $(x+a)^7+(x-a)^7$

$(x+a)^7=x^7+{}^7C_1x^6a+{}^7C_2x^5a^2+{}^7C_3x^4a^3+{}^7C_4x^3a^4+{}^7C_5x^2a^5+{}^7C_6xa^6+{}^7C_7a^7$
$(x-a)^7=x^7-{}^7C_1x^6a+{}^7C_2x^5a^2-{}^7C_3x^4a^3+{}^7C_4x^3a^4-{}^7C_5x^2a^5+{}^7C_6xa^6-{}^7C_7a^7.$

जोड़ने पर—

$(x+a)^7+(x-a)^7=2[x^7+{}^7C_2x^5a^2+{}^7C_4x^3a^4+{}^7C_6xa^6]$
$=2[x^7+21x^5a^2+35x^3a^4+7xa^6]$

a का मान पुनः आदिष्ट करने पर—

$2[x^7+21x^5(x^2-1)+35x^3(x^2-1)^2+7x(x^2-1)^3]$
$=2[x^7+21x^7-21x^5+35x^3(x^4-2x^2+1)+7x(x^6-3x^4+3x^2-1)]$
$=2[x^7+21x^7-21x^5+35x^7-70x^5+35x^3+7x^7-21x^5+21x^3-7x]$
$=2[64x^7-112x^5+56x^3-7x)=128x^7-224x^5+112x^3-14x$
या $2x[64x^6-112x^4+56x^2-7].$

उदाहरण 7—(i) विस्तार कीजिए—

$$(x^3-x^{-2})^8$$

[B. A. Econ. (Final), Raj. 1978]

(ii) व्यंजक $(3x-\frac{1}{2}y)^4$ का द्विपद-विस्तार लिखिए और x तथा y को उपयुक्त मूल्य देकर $(29\cdot5)^4$ का मान छः सार्थक अंकों तक ज्ञात कीजिए।

हल—(i) $(x^3-x^{-2})^8=\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^8$

$=(x^3)^8-{}^8C_1.(x^3)^7.\left(\frac{1}{x^2}\right)^1+{}^8C_2(x^3)^6.\left(\frac{1}{x^2}\right)^2-{}^8C_3(x^3)^5.\left(\frac{1}{x^2}\right)^3+{}^8C_4(x^3)^4.\left(\frac{1}{x^2}\right)^4$
$-{}^8C_5(x^3)^3.\left(\frac{1}{x^2}\right)^5+{}^8C_6(x^3)^2.\left(\frac{1}{x^2}\right)^6-{}^8C_7(x^3).\left(\frac{1}{x^2}\right)^7+{}^8C_8(x^3)^0.\left(\frac{1}{x^2}\right)^8$

$=x^{24}-8.x^{21}.\frac{1}{x^2}+28x^{18}.\frac{1}{x^4}-56x^{15}.\frac{1}{x^6}+70x^{12}.\frac{1}{x^8}-56x^9.\frac{1}{x^{10}}+28x^6.\frac{1}{x^{12}}$
$-8x^3.\frac{1}{x^{14}}+\frac{1}{x^{16}}$

$=x^{24}-8x^{19}+28x^{14}-56x^9+70x^4-56x^{-1}+28x^{-6}-8x^{-11}+x^{-16}$

$=x^{24}-8x^{19}+28x^{14}-56x^9+70x^4-56.\frac{1}{x}+28.\frac{1}{x^6}-8.\frac{1}{x^{11}}+\frac{1}{x^{16}}$

(ii) $\left(3x-\frac{1}{2}y\right)^4=(3x)^4-{}^4C_1(3x)^3\left(\frac{y}{2}\right)+{}^4C_2(3x)^2\left(\frac{y}{2}\right)^2-{}^4C_3 3x\left(\frac{y}{2}\right)^3+\left(-\frac{y}{2}\right)^4$

$=81x^4-4\times27x^3\times\frac{y}{2}+6\times9x^2\times\frac{y^2}{4}-4\times3x\times\frac{y^3}{8}+\frac{y^4}{16}$

$=81x^4-54x^3y+\frac{27x^2y^2}{2}-\frac{3xy^3}{2}+\frac{y^4}{16}$

$(29.5)^4=(30-0\cdot5)^4=(3\times10-\frac{1}{2})^4$ [$x=10,\ y=1$

$=81\times10^4-54\times10^3\times1+\frac{27\times10^2\times1^2}{2}-\frac{3\times10\times1^3}{2}+\frac{1}{16}$

$=81\times10000-54\times1000+27\times100\times\frac{1}{2}-\frac{3\times10}{2}+\frac{1}{16}$

$=810000-54000-1350=15+\ldots$

$=757335$

उदाहरण 8—द्विपद प्रमेय द्वारा निम्न व्यंजकों का मान निकालिए—

(i) $(99)^4$ [B. A. TDC (F) Priv., Raj. 1976]

(ii) $(11)^7$

(iii) $(2\cdot1)^5$. [B. A. Econ. (Final), Raj. 1977(S)]

हल—(i) $(99)^4=(100-1)^4=(100)^4+{}^4C_1 100^3\times-1+{}^4C_2 100^2\times(-1)^2+{}^4C_3 100^1\times(-1)^3+{}^4C_4(-1)^4$

$=10,00,00,000-4\times10,00,000+6\times10,000-4\times100+1$

$=10,00,60,001-40,00,400=9,60,59,601$

(ii) $(11)^7=(10+1)^7=10^7+{}^7C_1 10^6+{}^7C_3 10^4+{}^7C_4 10^4+{}^7C_5 10^2+{}^7C_6 10+{}^7C_7(1)^7$

$=1,00,00,000+70,00,000+21,00,000+3,50,000+35,000+2,100+70+1$

$=1,94,87,171$

(iii) $(2\cdot1)^5=(2+\cdot1)^5=\left(2+\frac{1}{10}\right)^5$

$=(2)^5+{}^5C_1(2)^4\cdot\frac{1}{10}+{}^5C_2(2)^3\frac{1}{10^2}+{}^5C_3(2)^2\frac{1}{10^3}+{}^5C_4 2\cdot\frac{1}{10^4}+{}^5C_5\cdot\frac{1}{10^5}$

$=32+\left(5\times16\times\frac{1}{10}\right)+\left(10\times8\times\frac{1}{100}\right)+\left(10\times4\times\frac{1}{1000}\right)+\frac{5\times2\times1}{10000}+\frac{1}{100000}$

$=32+8+\cdot8+\cdot04+\cdot001+\cdot00001=40\cdot84101$

उदाहरण 9—(i) $(x^2+2x-1)^3$ का विस्तार कीजिए।

(ii) व्यंजक $[1+(x+x^2)]^{10}$ का द्विपद विस्तार x के आरोही घातों के रूप में x^3 तक लिखिए और $(1\cdot0101)^{10}$ का मान तीन दशमलव बिन्दुओं तक निकालिए।

हल—(i) $(2x-1)$ को एक पद मानकर—

$\{x^2+(2x-1)\}^3=(x^2)^3+{}^3C_1(x^2)^2(2x-1)+{}^3C_2x^2(2x-1)^2+(2x-1)^3$

$=x^6=3x^4(2x-1)+3x^2(4x^2-4x+1)+(8x^3-3\times4x^2+3\times2x-1)$

$=x^6+6x^5-3x^4+12x^4-12x^3+3x^2+8x^3-12x^2+6x-1$

$=x^6+6x^5+9x^4-4x^3-9x^2+6x-1$

(ii) $\{1+(x+x^2)\}^{10}=(1)^{10}+{}^{10}C_1.1^9.(x+x^2)^1+{}^{10}C_2.1^8.(x+x^2)^2+{}^{10}C_3.1^7.(x+x^2)^3+\ldots$

$=1+10(x+x^2)+45(x+x^2)^2+120(x+x^2)^3+\ldots$

(iv) 125 का $5\sqrt{5}$ के आधार पर।

(v) $\frac{1}{324}$ का $3\sqrt{2}$ के आधार पर।

हल—(i) मान लिया

$$\log_{\sqrt{2}} 16 = x \quad \therefore \quad (\sqrt{2})^x = 16$$

$$(2)^{1/2x} = (2)^4 \Rightarrow \tfrac{1}{2}x = 4 \quad \therefore \quad x = 8$$

अत: 16 का $\sqrt{2}$ के आधार पर log 8 है— $\log_{\sqrt{2}} 16 = 8$.

(ii) माना कि अभीष्ट लघुगणक x है।

$$(2\sqrt{2})^x = 32.\sqrt[5]{4} \Rightarrow (2\sqrt{2})^x = 2^5.2^{2/5}$$

$$(2.2^{1/2})^x = 2^{5+2/5} \Rightarrow 2^{3/2.x} = 2^{27/5} \Rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{27}{5}$$

$$x = \frac{27}{5} \times \frac{2}{3} = 3{\cdot}6 \quad \text{अत: अभीष्ट लघुगणक} = 3{\cdot}6$$

(iii) $1000 = (.01)^x = \left(\frac{1}{10^2}\right)^x = (10^{-2})^x \quad \therefore \quad 10^{-2x} = 10^3 \Rightarrow -2x = 3$

$$\therefore \quad x = -\tfrac{3}{2} \quad \text{अत:} \ \log_{.01} 1000 = -1{\cdot}5$$

(iv) $125 = (5\sqrt{5})^x \Rightarrow (5^1.5^{1/2})^x = 5^3 \Rightarrow 5^{3/2.x} = 5^3$

$\therefore \ \tfrac{3}{2}x = 3$ अत: $x = 2$ 125 का $5\sqrt{5}$ आधार पर log 2 है।

(v) $(3\sqrt{2})^x = \frac{1}{324} \Rightarrow (3.2^{1/2})^x = \frac{1}{3^4.2^2} = 3^{-4}.2^{-2}$

$3^x.2^{x/2} = 3^{-4}.2^{-2} \Rightarrow x^{-4}$

अत: $3\sqrt{2}$ के आधार पर $\frac{1}{324}$ का लघुगणक -4 है।

उदाहरण 3—(i) निम्नलिखित व्यंजकों का मूल्य ज्ञात कीजिए—

(क) $\log_6 \frac{1}{216}$; (ख) $\log_{343} 49$

(ii) सरल कीजिए—

$$\log_3 \sqrt[4]{729\sqrt[3]{9^{-1}.27^{-4/3}}}$$

हल—(i) (क) $\log_6 \frac{1}{216} = x \Rightarrow 6^x = \frac{1}{216}$ या $\frac{1}{6^3} = 6^{-3}$

$$\therefore \quad x = -3 \quad \text{अत:} \ \log_6 \frac{1}{216} = -3$$

(ख) $\log_{343} 49 = x \Rightarrow 343^x = 49$ या $7^{3x} = 7^2$

$$\Rightarrow 3x = 2 \quad \therefore \quad x = \tfrac{2}{3} \quad \text{अत:} \ \log_{343} 49 = \tfrac{2}{3}$$

(ii) $\log_3 \sqrt[4]{729\sqrt[3]{9^{-1}.27^{-4/3}}}$

$= \log_3 \sqrt[4]{3^6\sqrt[3]{9^{-1}.27^{-4/3}}}$

$= \log_3 \sqrt[4]{3^6.\sqrt[3]{3^{-2}.3^{-4}}}$ या $\log_3 \sqrt[4]{3^6.\sqrt[3]{3^{-6}}}$

$= \log_3 \sqrt[4]{3^6.3^{-6/3}}$ या $\log_3 \sqrt[4]{3^6.3^{-2}}$

$= \log_3 \sqrt[4]{3^{6-2}}$ या $\log_3 \sqrt[4]{3^4}$

$= \log_3 3 = 1$

अत: प्रदत्त व्यंजक का मूल्य 1 है।

उदाहरण 4—सिद्ध कीजिए कि—

(i) $xy = 1$ यदि $a^x = b$ तथा $b^y = a$

(ii) $\log_n m \times \log_m n = 1$

हल—(i) प्रदत्त $a^x = b$; $b^y = a$

$$a^x = (b^y)^x = b^{yx} \text{ या } b^{xy} = a^x = b^1 \quad \therefore \quad xy = 1$$

(ii) मान लिया $\log_n m = x$ और $\log_m n = y$

∴ घातांक रूप में $n^x = m$ तथा $m^y = n$

$$m = n^x = (m^y)^x = m^{xy} = m^1 \qquad \therefore \quad xy = 1$$

अतः x और y के मान पुनः आदिष्ट करने पर—

$$xy = \log_n m \times \log_m n = 1$$

उदाहरण 5—सिद्ध कीजिए कि—

(i) इकाई का लघुगणक किसी भी आधार पर सदा शून्य होता है।

(ii) स्वयं आधार का लघुगणक सदा 1 होता है।

हल—(i) $\log_a 1 = 0$

किसी मूल्य पर शून्य घातांक आरोहित करने पर उसका मान 1 हो जाता है अर्थात्

$$a^0 = 1$$

अतः घातांकीय रूप में $a^0 = 1$, लघुगणकीय रूप में $\log_a 1 = 0$

इसलिए आधार के प्रत्येक मान के लिए $\log_a 1 = 0$

(ii) $\log_a a = 1$

$$a^1 = a \qquad \therefore \quad \log_a a = 1$$

उदाहरण 6—सिद्ध कीजिए कि—

$$\log x = \log [1 - \{1 - (1 - x^2)^{-1}\}^{-1}]^{-1/2}$$

हल—R. H. S. $= -\frac{1}{2} \log [1 - \{1 - (1 - x^2)^{-1}\}^{-1}]$

$$= -\frac{1}{2} \log \left[1 - \left\{1 - \frac{1}{1 - x^2}\right\}^{-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \log \left[1 - \left\{\frac{1 - x^2 - 1}{1 - x^2}\right\}^{-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \log \left[1 - \left\{\frac{-x^2}{1 - x^2}\right\}^{-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \log \left[1 - \frac{1 - x^2}{-x^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \log \left[\frac{-x^2 - 1 + x^2}{-x^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \log \left[\frac{-1}{-x^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \log \frac{1}{x^2} \quad \text{या} \quad -\frac{1}{2} \log x^{-2}$$

$$= (-\tfrac{1}{2} \times -2) \log x = \log x \qquad \text{(L. H. S.)}$$

लघुगणकों के मूलभूत नियम

(Fundamental Rules regarding Logarithms)

लघुगणकों से सम्बन्धित अनेक आधारभूत नियम हैं जिनका गुणा, भाग, घात-क्रिया व मूलक्रिया में पर्याप्त मात्रा में प्रयोग होता है। इन नियमों की सहायता से जटिल गणनाएँ भी सरल हो जाती हैं।

नियम 1—गुणनफल का लघुगणक (Logarithm of Product)—दिए हुए आधार पर दो संख्याओं के गुणनफल का लघुगणक उनके अलग-अलग लिए गए लघुगणकों के जोड़ के बराबर होता है। अतः गुणा की क्रिया को सरल बनाने के लिए संख्याओं के लघुगणकों को जोड़ा जाता है। जोड़ का प्रतिलघुगणक (antilogarithm) ही अभीष्ट गुणनफल है।

सूत्रानुसार—

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

प्रमाण—मान लिया $\log_a M=x$ तथा $\log_a N=y$

$\because$ $\log_a M=x$ $\therefore$ $a^x=M$; तथा $\log_a N=y$ $\therefore$ $a^y=N$

अब $M\times N=a^x\times a^y=a^{x+y}$ या $MN=a^{x+y}$

इसको लघुगणकीय रूप में रखने पर—

$\log_a MN=x+y$; x और y के मूल्य आदिष्ट करने पर—

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

इसी प्रकार व्यापक रूप से—

$$\log_a MNPQ\ldots=\log_a M+\log_a N+\log_a P+\log_a Q+\ldots$$

लेकिन $\log_a (M+N)\neq\log_a M+\log_a N$

क्योंकि यदि $M=1$, $N=1$ और $a=2$ तो

$\log_a (M+N)=\log_2 (1+1)=\log_2 2=1$

तथा $\log_a M+\log_a N=\log_2 1+\log_2 1=0+0=0$

अतः $\log_a (M+N)\neq\log_a M+\log_a N$

नियम 2—भिन्न का लघुगणक (Logarithm of Quotient)—किसी भिन्न का लघुगणक उस भिन्न के अंश (numerator) के लघुगणक और हर (denominator) के लघुगणक के अन्तर के बराबर होता है। अतः भाग की क्रिया को सरल बनाने के लिए संख्याओं के लघुगणकों का अन्तर निकाल लिया जाता है। अन्तर का प्रतिलघुगणक ही अभीष्ट भजनफल है।

सूत्र रूप में—

$$\boxed{\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N}$$

प्रमाण—मान लिया $\log_a M=x$ तथा $\log_a N=y$

$\therefore$ $M=a^x$ और $N=a^y$ अब $\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

$\therefore$ $\frac{M}{N}=a^{x-y}$ अतः लघुगणकीय रूप मे $\log_a \frac{M}{N}=x-y$

x और y के मान आदिष्ट करने पर—

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

लेकिन $\log_a (M-N)\neq\log_a M-\log_a N$

यदि $M=2$, $N=1$, $a=2$

$\log_a (M-N)=\log_2 (2-1)=\log_2 1=0$

$\log_a M-\log_a N=\log_2 2-\log_2 1=1-0=1$

अतः $\log_a (M-N)\neq\log_a M-\log_a N$

यदि किसी भिन्न मे अंश और हर के अनेक गुणनखण्ड दिये हो तो उपर्युक्त दोनो नियमों के आधार पर व्यापक रूप में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है—

$$\log_a\left(\frac{MNP\ldots\ldots}{XYZ\ldots\ldots}\right)=(\log_a M+\log_a N+\log_a P+\ldots)-(\log_a X+\log_a Y+\log_a Z+\ldots)$$

उदाहरण 7—निम्न सख्याओ के लघुगणकों को उनके गुणनखण्डों के लघुगणकों के रूप में व्यक्त कीजिए—

(i) $\log_a 10010$; (ii) $\log_a \frac{17}{53}$; (iii) $\log_a 2\frac{181}{462}$.

हल—(i) $\log_a 10010=\log_a (2\times5\times7\times11\times13)$

$=\log 2+\log 5+\log 7+\log 11+\log 13.$

(ii) $\log_a \frac{17}{53}=\log_a 17-\log_a 53.$

(iii) $\log_a 2\frac{181}{462}=\log_a \frac{1105}{462}=\log_a \frac{(5\times13\times17)}{(2\times3\times7\times11)}$

$=(\log 5+\log 13+\log 17)-(\log 2+\log 3+\log 7+\log 11).$

नियम 3—घातांक-युक्त संख्या का लघुगणक (Logarithm of a number raised to a power)—दिये हुए आधार पर किसी घात-युक्त संख्या का लघुगणक, उस संख्या के लघुगणक और उस घातांक के गुणनफल के बराबर होता है।

सूत्रानुसार—

$$\boxed{\log_a M^N = N \log_a M}$$

मान लिया $\log_a M = x; \quad \therefore \quad M = a^x$

$$M^N = (a^x)^N = a^{Nx}$$

$$\log M^N = Nx = N \log_a M$$

नियम 4—किसी मूल-युक्त संख्या या भिन्नात्मक घातांक वाली संख्या का लघुगणक (Logarithm of a number with root or fractional power)—प्रदत्त आधार पर किसी मूल-वाली संख्या का लघुगणक, उस संख्या के लघुगणक को मूल से भाग देने पर प्राप्त संख्या के बराबर होता है। दूसरे शब्दों में, भिन्नात्मक (fractional) घातांक वाली संख्या का लघुगणक उस भिन्नात्मक घातांक और उस संख्या के लघुगणक के गुणनफल के बराबर होता है।

सूत्र रूप में—

$$\boxed{\log_a \sqrt[N]{M} = \frac{\log_a M}{N}}$$

$\log_a \sqrt[N]{M} = \log_a M^{1/N} = \frac{1}{N} \log_a M = \frac{\log_a M}{N}$ (नियम 3 के अनुसार)

वास्तव में यह नियम पिछले नियम (3) का ही उप-प्रमेय है।

उदाहरण 8—निम्नलिखित को सरल रूप में व्यक्त कीजिए—

(i) $\log_{10} 75$; (ii) $\log_{10} 2187$; (iii) $\log \sqrt[N]{a \times b \times c \times \ldots n}$

हल—(i) $\log 75 = \log (3 \times 5 \times 5) = \log (3 \times 5^2) = \log 3 + 2 \log 5.$

(ii) $\log 2187 = \log (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) = \log (3^7) = 7 \log 3$

(iii) $\log \sqrt[N]{a \times b \times c \times \ldots \times n} = \log (a \times b \times c \times \ldots n)^{1/N}.$

$$= \frac{\log a + \log b + \log c + \ldots \log n}{N}.$$

उदाहरण 9—सिद्ध कीजिए कि—

(i) $\log \frac{81}{8} - 2 \log \frac{3}{2} + 3 \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} = 0$

(ii) $\dfrac{\log 343}{1 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{49}{4}\right) + \frac{1}{3} \log \left(\frac{1}{125}\right)} = 3$

हल—(i) $\log \frac{3^4}{2^3} - 2 \log \frac{3}{2} + 3 \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{2^2}$

$= 4 \log 3 - 3 \log 2 - 2 (\log 3 - \log 2) + 3 (\log 2 - \log 3) + \log 3 - 2 \log 2$

$= 4 \log 3 - 3 \log 2 - 2 \log 3 + 2 \log 2 + 3 \log 2 - 3 \log 3 + \log 3 - 2 \log 2$

$= 4 \log 3 - 2 \log 3 - 3 \log 3 + \log 3 - 3 \log 2 + 2 \log 2 + 3 \log 2 - 2 \log 2$

$= 5 \log 3 - 5 \log 3 + 5 \log 2 - 5 \log 2 = 0$

(ii) L.H.S. $\dfrac{\log 343}{1 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{49}{4}\right) + \frac{1}{3} \log \left(\frac{1}{125}\right)} = \dfrac{\log 7^3}{1 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \log (5)^{-3}}$

$$= \frac{3 \log 7}{1 + \frac{2}{2} \log \left(\frac{7}{2}\right) + \left(-3 \times \frac{1}{3}\right) \log 5} = \frac{3 \log 7}{1 + (\log 7 - \log 2) - \log 5}$$

$$=\frac{3\log 7}{\log_{10}10+\log 7-\log 2-\log 5}=\frac{3\log 7}{\log(5\times 2)+\log 7-\log 2-\log 5}$$

$$=\frac{3\log 7}{\log 5+\log 2+\log 7-\log 2-\log 5}=\frac{3(\log 7)}{(\log 7)}=3 \quad \text{R.H.S.}$$

उदाहरण 10—(i) यदि $\log_2[\log_3(\log_2 x)]=1$, तो x का मान बताइए।

(ii) निम्न व्यंजक का मूल्य ज्ञात कीजिए—

$$\log_2[\log_2\{\log_3(\log_3 27^3)\}]$$

हल—(i) मान लिया—

$$[\log_3(\log_2 x)=y]$$

प्रदत्त व्यंजक $\log_2[\log_3(\log_2 x)]=\log_2 y=1 \Rightarrow y=2^1=2$

$$\log_3 x(\log_2 x)=2$$

मान लिया $\log_2 x=z$ अतः $\log_3 z=2 \Rightarrow z=3^2=9$

$\therefore\ \log_2 x=9 \Rightarrow x=2^9=512$ अतः $x=512$

(ii) $\log_2[\log_2\{\log_3(\log_3 27^3)\}]=\log_2[\log_2\{\log_3(\log_3 3^9)\}]$

$=\log_2[\log_2\{\log_3(9\log_3 3)\}]=\log_2[\log_2\{\log_3 9\times 1\}]$

$=\log_2[\log_2\{\log_3 3^2\}]=\log_2[\log_2\{2\log_3 3\}]$

$=\log_2[\log_2(2\times 1)]=\log_2(\log_2 2)=\log_2 1=0 \quad (\because 2^0=1)$

उदाहरण 11—निम्नलिखित समीकरणों में x का मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\log_x 4+\log_x 16+\log_x 64=12$

(ii) $\log_{10}x+\log_{10}(x-3)=1$

(iii) $3^{2x+1}=27^{x-3}$

हल—(i) $\log_x 2^2+\log_x 2^4+\log_x 2^6=12$

$$2\log_x 2+4\log_x 2+6\log_x 2=12$$

$$12\log_x 2=12$$

$$\therefore\ \log_x 2=1$$

लेकिन $\log_2 2=1$ अतः $x=2$

(ii) $\log_{10}x+\log_{10}(x-3)=1$

$\Rightarrow \log_{10}\{x(x-3)\}=1 \quad (\because \log_a M+\log_a N=\log_a MN)$

$$x(x-3)=10^1$$

$$x^2-3x-10=0 \Rightarrow x^2+2x-5x-10=0$$

या $x(x+2)-5(x+2)=0 \Rightarrow (x-5)(x+2)=0$

$\therefore\ x=5$ या -2

लेकिन लघुगणकों के सन्दर्भ में

$x\neq -2$ अतः $x=5$

(iii) $3^{2x+1}=27^{x-3}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर—

$$\log 3^{2x+1}=\log 27^{x-3}$$

$(2x+1)\log 3=(x-3)\log 3^3$ या $2x+1(\log 3)=3(x-3)\log 3$

$$2x\log 3+\log 3=3x\log 3-9\log 3$$

$$-x\log 3=-10\log 3$$

$\therefore\ -x=-10$ या $x=10$

उदाहरण 12—सिद्ध कीजिए कि—

$$7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$$

[B. A. Econ. (Final), Raj., 1978]

हल—वाम पक्ष (L. H. S.)

$=7(\log 16-\log 15)+5(\log 25-\log 24)+3(\log 81-\log 80)$

$=7\{\log(2^4)-\log(5\times 3)\}+5\{\log(5^2)-\log(2^3\times 3)\}+3\{\log(3^4)-\log(2^4\times 5)\}$

$=7(4\log 2-\log 5-\log 3)+5(2\log 5-3\log 2-\log 3)+3(4\log 3-4\log 2-\log 5)$

$=28\log 2-7\log 5-7\log 3+10\log 5-15\log 2-5\log 3+12\log 3$
$-12\log 2-3\log 5$

$=28\log 2-27\log 2-7\log 5+10\log 5-3\log 5-7\log 3-5\log 3+12\log 3$

$=\log 2+10\log 5-10\log 5-12\log 3+12\log 3=\log 2.$

नियम 5—आधार-परिवर्तन (Change of Base)—किसी संख्या का पुराने आधार पर ज्ञात लघुगणक, उस संख्या के किसी नये आधार वाले लघुगणक और नये आधार की संख्या के पुराने आधार पर लघुगणक के गुणनफल के बराबर होता है।

सूत्रानुसार—

$$\boxed{\log_a M=\log_b M\times\log_a b}$$

प्रमाण—मान लिया $\log_a M=x$ तथा $\log_b M=y$

$M=a^x$ तथा $M=b^y$ अतः $a^x=b^y$

$b^y=a^x \quad \therefore \quad b=\sqrt[y]{a^x}=a^{x/y}$ अतः $\frac{x}{y}=\log_a b$

या $x=y\log_a b$

x और y के मूल्य पुनः आदिष्ट करने पर—

$$\log_a M=\log_b M\times\log_a b.$$

$$\Rightarrow \log_b M=\log_a M\times\frac{1}{\log_a b}=\frac{\log_a M}{\log_a b}$$

उपप्रमेय— $\log_b a\times\log_a b=1$

यह ज्ञात है कि—

$$\log_a M=\log_b M\times\log_a b$$

$(M=a)$ रखने पर—

$$\log_a a=\log_b a\times\log_a b$$

$$\Rightarrow \log_b a\times\log_a b=1 \qquad (\because \log_a a=1)$$

घातांक-नियमों के आधार पर—

मान लिया $\log_b a=x$ तथा $\log_a b=y$

अतः $b^x=a$ तथा $a^y=b$

$$b=a^{1/x}=a^y \quad \therefore \quad \frac{1}{x}=y\Rightarrow xy=1$$

अतः $\log_b a\times\log_a b=xy=1$

उदाहरण 13—सिद्ध कीजिए—

$$\log_b a\times\log_c b\times\log_a c=1.$$

हल—सभी लघुगणकों को एक नये आधार e पर बदलने पर—

$\log_b a=\log_e a\times\log_b e \qquad [\because \log_a M=\log_b M\times\log_a b]$

$\log_b a=\log_e a\times\frac{1}{\log_e b}=\frac{\log_e a}{\log_e b}$

इसी प्रकार $\log_c b=\log_e b\times\log_c e=\log_e b\times\frac{1}{\log_e c}=\frac{\log_e b}{\log_e c}$

तथा $\log_a c=\log_e c\times\log_a e=\log_e c\times\frac{1}{\log_e a}=\frac{\log_e c}{\log_e a}$

$$\therefore \log_b a\times\log_c b\times\log_a c=\frac{\log_e a}{\log_e b}\times\frac{\log_e b}{\log_e c}\times\frac{\log_e c}{\log_e a}=1.$$

उदाहरण 14—(i) सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{1}{\log_a (abc)}+\frac{1}{\log_b (abc)}+\frac{1}{\log_c (abc)}=1$$

(ii) सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{\log_3 8}{\log_9 16.\log_4 10}=3 \log_{10} 2$$

(iii) यदि $a^2+b^2=7ab$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\log [\tfrac{1}{3} (a+b)]=\tfrac{1}{2} (\log a+\log b)$$

हल—(i) $\frac{1}{\log_a (abc)}+\frac{1}{\log_b (abc)}+\frac{1}{\log_c (abc)}$

सामान्य आधार k मे परिवर्तित करने पर व्यंजक का निम्न रूप हो जाता है—

$$\frac{1}{\frac{\log_k (abc)}{\log_k a}}+\frac{1}{\frac{\log_k (abc)}{\log_k b}}+\frac{1}{\frac{\log_k (abc)}{\log_k c}} \quad \left[\because \log_a (abc)=\frac{\log_k (abc)}{\log_k a}\right]$$

$$=\frac{\log_k a}{\log_k (abc)}+\frac{\log_k a}{\log_k (abc)}+\frac{\log_k c}{\log_k (abc)}$$

$$=\frac{\log_k a+\log_k b+\log_k c}{\log_k (abc)}=\frac{\log_k (a\times b\times c)}{\log_k (abc)}=1$$

(ii) L. H. S. के सभी लघुगणकों को 10 के आधार वाले लघुगणकों में निम्न प्रकार बदला जाएगा—

$$\log_3 8=\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3}=\frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 3}=\frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 3} \quad \left[\because \log_b M=\frac{\log_a M}{\log_a b}\right]$$

$$\log_9 16=\frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 9}=\frac{\log_{10} 2^4}{\log_{10} 3^2}=\frac{4 \log_{10} 2}{2 \log_{10} 3}$$

$$\log_4 10=\frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 4}=\frac{1}{2 \log 2} \quad [\because \log_{10} 10=1]$$

अतः
$$\frac{\log_3 8}{\log_9 16.\log_4 10}=\frac{\frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 3}}{\frac{4 \log_{10} 2}{2 \log_{10} 3}\times\frac{1}{2 \log_{10} 2}}$$

$$=\frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 3}\times\frac{2 \log_{10} 3}{4 \log_{10} 2}\times\frac{2 \log_{10} 2}{1}$$

$$=\frac{3 \log_{10} 2\times 4 \log_{10} 6}{4 \log_{10} 6}=3 \log_{10} 2 \quad \text{(R.H.S.)}$$

(iii) यदि $a^2+b^2=7ab$

तो $a^2+b^2+2ab=7ab+2ab$

$\Rightarrow (a+b)^2=9ab$

अतः $a+b=3\sqrt{ab}$

$\tfrac{1}{3} (a+b)=\sqrt{ab}=(a\times b)^{1/2}$

दोनों पक्षों का log लेने पर—

$$\log \{\tfrac{1}{3} (a+b)\}=\log \{a\times b\}^{1/2}$$

$$=\tfrac{1}{2} \{\log a+\log b\}$$

$$\therefore \log \{\tfrac{1}{3} (a+b)\}=\tfrac{1}{2} (\log a+\log b)$$

साधारण लघुगणक

(Common Logarithm)

व्यवहार में, लघुगणक की दो प्रणालियाँ प्रयोग में लायी जाती हैं। पहली नेपीरियन या प्राकृतिक (Naperian of Natural) प्रणाली है। इस प्रणाली का नाम लघुगणक के आविष्कारक जॉन नेपियर (Napier) के नाम पर रखा गया है। इसमें आधार (*e*)* लिया जाता है।

दूसरी प्रणाली सामान्य लघुगणक (common logarithm) है। इसमें आधार 10 लिया जाता है। इसका विकास सर्वप्रथम हेनरी ब्रिग्स (Henry Briggs) ने 1615 में किया था। जब आधार दिया हुआ नहीं होता तब हम 10 को ही आधार मानकर साधारण लघुगणक का प्रयोग करते हैं। इस प्रणाली का प्रयोग अंकगणित की जटिल क्रियाओं को सरल बनाने में किया जाता है।

यदि किसी संख्या के लघुगणक का कुछ भाग पूर्णांक (integral) और कुछ भाग भिन्नात्मक (fractional) हो तो पूर्णांक भाग को पूर्णांश (characteristic) तथा भिन्नात्मक भाग को दशमलवांश (Mantissa) कहते है। दशमलवांश सदैव धनात्मक होता है परन्तु पूर्णांश धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। जैसे— यदि log 526·1 = 2·7210683 हो तो 2 पूर्णांश और ·7210683 दशमलवांश है।

एक से अधिक किसी भी संख्या का पूर्णांक ज्ञात करने का नियम—

$\because\ 10^0 = 1 \qquad \therefore \log 1 = 0$

$10^1 = 10 \qquad \therefore \log 10 = 1$

$10^2 = 100 \qquad \therefore \log 100 = 2$

$10^3 = 1000 \qquad \therefore \log 1000 = 3$

$10^4 = 10000 \qquad \therefore \log 10000 = 4$

स्पष्ट है कि 1 और 10 के बीच की संख्याओं के लघुगणक 0 और 1 के बीच मे होंगे, अर्थात् पूर्णांक में एक अक रखने वाली सख्या के लघुगणक 0 + एक धनात्मक भिन्न होगी। 10 और 100 के बीच की संख्याओं के लघुगणक 1 और 2 के बीच होंगे अर्थात् पूर्णांश मे दो अक वाली संख्या के लघुगणक का पूर्णांश 1 होगा। इसी प्रकार, 100 और 1000 के बीच की सख्याओं के लघुगणक 2 और 3 के बीच मे होंगे अर्थात् पूर्णांश 2 होगा।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि एक से बड़ी किसी संख्या के लघुगणक का पूर्णांश (characteristic) सदैव धनात्मक होता है एवं संख्या के पूर्णांक भाग के अंकों की संख्या से एक कम होता है। जैसे—log 42·5 का पूर्णांश 1 और log 425·3 का पूर्णांश 2 होगा।

किसी दशमलव भिन्न के लघुगणक का पूर्णांश ज्ञात करने का नियम—

$\because\ 10^0 = 1 \qquad \therefore \log 1 = 0$

$10^{-1} = \frac{1}{10} = \cdot 1 \qquad \therefore \log \cdot 1 = -1$

$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \cdot 01 \qquad \therefore \log \cdot 01 = -2$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \cdot 001 \qquad \therefore \log \cdot 001 = -3$

$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \cdot 0001 \qquad \therefore \log \cdot 0001 = -4$

स्पष्ट है कि ·1 और 1 के बीच की सभी संख्याओं का लघुगणक —1 और 0 के बीच

* $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots\ldots \infty = 2\cdot 71828\ldots$

में होगा अर्थात् दशमलव के बाद एक भी शून्य न रखने वाली संख्या के लघुगणक का पूर्णांश $\bar{1}$ (—1) होगा।

·01 एवं 1 के बीच की संख्याओं के लघुगणक का पूर्णांश $\bar{2}$ और $\bar{1}$ के बीच में होगा। अर्थात् दशमलव के बाद एक शून्य वाली संख्या के लघुगणक का पूर्णांश $\bar{2}$ होगा।

इस प्रकार, एक से कम किसी संख्या के लघुगणक का पूर्णांश सदैव ऋणात्मक एवं दशमलव बिन्दु और प्रथम सार्थक अंक के मध्य आये हुए शून्यों की संख्या से एक अधिक होता है। जैसे log ·035 का पूर्णांश $\bar{2}$, log ·00035 का पूर्णांश $\bar{4}$ होगा।

दशमलवांश ज्ञात करने की विधि—किसी संख्या के लघुगणक का दशमलवांश लघुगणकीय सारणी (Table of *Logarithm*) के द्वारा निकाला जाता है। सारणी को हम निम्न प्रकार से देखते हैं। पहले स्तम्भ में संख्या के प्रथम दो अंक देखते हैं, अब तीसरा अंक पंक्ति में दाहिनी ओर देखते हैं तथा दोनों की सर्वनिष्ठ संख्या को लिख लेते हैं। दी हुई संख्या के चौथे अंक को माध्य-अन्तर (*Mean Difference*) वाले स्तम्भ से देखते हैं। पहले प्राप्त संख्या में इसका मान जोड़ देते हैं। यही अभीष्ट दशमलवांश है। जैसे 4514 का लघुगणक निकालने के लिए हम पहले स्तम्भ में 45 रखने वाली पंक्ति और तृतीय अंक 1 रखने वाले स्तम्भ में सामान्य संख्या देखेंगे (6542)। अब इसी पंक्ति में माध्य-अन्तर 4 के स्तम्भ में सामान्य संख्या 4 प्राप्त होती है। इसे 6542 में जोड़ने पर 6546 प्राप्त होता है जो कि अभीष्ट दशमलवांश है। संख्या में चार पूर्णांश हैं अतः पूर्णांश 3 होगा। ∴ लघुगणक 4514=3·6546; log 1·23 का पूर्णांश (0) है एवं दशमलवांश वही होगा जो कि 123 या 1230 का। अतः log 1·23 का पूर्णांश log ·00123=$\bar{3}$·0899, log 123=2·0899 इकाई से कम मूल्यों के लघुगणकों में केवल पूर्णांश ऋणात्मक होता है अतः पूर्णांश के ऊपर (केन्द्र) ऋण दण्ड चिह्न (minus bar) लगा दिया जाता है जैसे log ·0123=$\bar{2}$0899।

प्रति-लघुगणक
(Anti-logbrithm)

कोई संख्या किसी आधार के सापेक्ष अपने लघुगणक का प्रतिलघुगणक कहलाती है जैसे यदि

$$\log_a N = x \text{ तो Anti-}\log_a x = N$$

लघुगणक सारणी की भाँति ही प्रतिलघुगणक भी सारणी (Table of Anti-logarithm) से देखा जाता है। यदि किसी संख्या का लघुगणक ज्ञात हो तो वह संख्या इस लघुगणक से ज्ञात की जा सकती है। हम लघुगणक के दशमलवांश के द्वारा प्रतिलघु-सारणी से अभीष्ट संख्या के सार्थक अंकों को ज्ञात कर लेते हैं और पूर्णांश से अभीष्ट संख्या में दशमलव बिन्दु का स्थान निश्चित करते हैं। मान लिया हमें वह संख्या ज्ञात करनी है जिसका लघुगणक 3·6546 है।

प्रतिलघुगणक सारणी में प्रतिलघुगणक ·65 बतलाने वाली पंक्ति और तृतीय अंक 4 रखने वाले स्तम्भ की सामान्य संख्या (4508) लिख लेते है। अब इसी पंक्ति में अन्तिम अंक 6 वाले स्तम्भ की सामान्य संख्या 6 को इसमें जोड़ देते है। इसे जोड़ने पर संख्या 4514 आती है। अब क्योंकि पूर्णांश 3 है अतः दशमलव को चार (3+1) अंकों के बाद रखना चाहिए। इसलिए अभीष्ट संख्या 4514 हुई। इसी प्रकार, $\bar{3}$·0899 का प्रति-लघुगणक ज्ञात करने के लिए प्रतिलघु-सारणी के पहले स्तम्भ में 0 8 के सामने 9 वाले खाने के नीचे वाली सामान्य संख्या (1227) में 9 माध्यान्तर के नीचे (और ·8 के सामने) वाली संख्या (3) जोड़ दी जायेगी (1227+3 =1230) दशमलव-बिन्दु का निर्धारण पूर्णांश $\bar{3}$ से होगा। 3 मे से 1 घटाकर अर्थात् 2 प्रतिलघुगणक मे दशमलव बिन्दु के बाद होंगे। इस प्रकार अभीष्ट प्रतिलघुगणक ·00123 है। अतः Antilog $\bar{3}$·0899=·00123।

उदाहरण 15—(i) यदि log 2=·30103 तो 2^{100} के अंकों की संख्या बताइये।

(ii) यदि log 3=·4771213 और log 312936=5·4954243 हों तो ·003 का पाँचवां मूल (fifth root) निकालिये।

(iii) यदि log 9237=3·9655 और log 5·735=0·7585 तो $(9{\cdot}237)^7$ का मान बताइये।

हल—(i) मान लिया $2^{100}=x$; $\log x=\log 2^{100}=100\log 2$

$$=100\times{\cdot}30103=30{\cdot}103$$

पूर्णांश 30 होने पर x अर्थात् प्रदत्त संख्या में 31 अंक (digits) होंगे।

(ii) मान लिया $x=\sqrt[5]{{\cdot}003}=({\cdot}003)^{1/5}$; $\log x=\log({\cdot}003)^{1/5}$

$$=\tfrac{1}{5}(\log{\cdot}003)=\tfrac{1}{5}(\bar{3}{\cdot}4771213)=\tfrac{1}{5}(\bar{5}+2{\cdot}4771213)$$

Antilog $\bar{1}{\cdot}49542426={\cdot}312936$

(iii) मान लिया $x=(9{\cdot}237)^7$ $\quad\therefore\quad \log x=7\log 9{\cdot}237=7\times{\cdot}9655$

$=6{\cdot}7585=\log 5735000 \quad\therefore\quad x=5735000$

उदाहरण 16—लघुगणकों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए—

$$10\times 125^{\cdot 4}\times 110^{\cdot 6}=1158$$

[B. A. Econ., (Final) N. C., Raj., 1979]

(ii) यदि $\log_{10}2={\cdot}3010$ तथा $\log_{10}3={\cdot}4771$ तो निम्न व्यंजक का मूल्य ज्ञात कीजिए—

$$\log_{10}81+3\log_{10}64-2\log_{10}4+\log_{10}25$$

(iii) $\dfrac{24{\cdot}395\times(3{\cdot}16)^3}{8.79}$ का मान बताइए।

हल—(i) L. H. S. का लघुगणक निकालने पर—

$\log 10+{\cdot}4\log 125+{\cdot}6\log 110=1+{\cdot}4\times 2{\cdot}0969+{\cdot}6\times 2{\cdot}0414$

$$=1+0{\cdot}83876+1{\cdot}22484=3{\cdot}0636$$

Antilog 3·0636=1158 R. H. S.

(ii) $\log_{10}81+3\log_{10}64-2\log_{10}4+\log_{10}25$

$=\log_{10}3^4+3\log_{10}2^6-2\log_{10}2^2+\log_{10}5^2$

$=4\log_{10}3+18\log_{10}2-4\log_{10}2+2\log_{10}5$

$=4\log_{10}3+14\log_{10}2+2\log_{10}(10/2)$

या $4\log_{10}3+14\log_{10}2+2\log_{10}10-2\log_{10}2$

$=4\log_{10}3+12\log_{10}2+2=4\times{\cdot}4771+12\times{\cdot}3010+2$

$=1{\cdot}9084+3{\cdot}6120+2=7{\cdot}5204$

(iii) मान लिया $x=\dfrac{24{\cdot}395\times(3{\cdot}16)^3}{8{\cdot}79}$

$\log x=\log 24{\cdot}395+3\log 3{\cdot}16-\log 8{\cdot}79$

$=1{\cdot}3874+3\times 0{\cdot}4997-0{\cdot}9440$

$=1{\cdot}3874+1{\cdot}4991-0{\cdot}9440=1{\cdot}9425$

$\therefore\quad x=$ Antilog $1{\cdot}9425=87{\cdot}60$

उदाहरण 17—(i) निम्नलिखित को logarithm की सहायता से हल कीजिए—

$$\frac{43216\times 2132\times 656}{192\times 5468}$$

[B.A. Econ. Final, Raj., 1979]

(ii) यदि log 2=·30103, log 3=·4771213, log 7=·845098 तथा log 9076·226=3·9579053 तो निम्न व्यंजक का मूल्य, 6 दशमलव अंकों तक परिकलित कीजिए—

$$\sqrt[3]{\left(\frac{294\times 125}{42\times 32}\right)^4}$$

हल—(i) मान लिया $\frac{43216\times2132\times656}{192\times5468}=x$

$\therefore \log x=\{\log 43216+\log 2132+\log 656-(\log 192+\log 5468)\}$
$=4{\cdot}6357+3{\cdot}3288+2{\cdot}8169-(2{\cdot}2833+3{\cdot}7378)$
$=10{\cdot}7814-6{\cdot}0211=4{\cdot}7603$

$\log x=4{\cdot}7603 \quad \therefore \quad x=\text{Antilog } 4{\cdot}7603=57580$

(ii) मान लिया $\left(\frac{294\times125}{42\times32}\right)^{2/3}=x$

$\therefore \log x=\frac{2}{3}\{(\log 294+\log 125)-(\log 42+\log 32)\}$
$=\frac{2}{3}\{\log(2\times3\times7^2)+\log(5^3)\}-\{\log(2\times3\times7)+\log 2^5\}$
$=\frac{2}{3}\{(\log 2+\log 3+2\log 7+3\log 5)$
$-(\log 2+\log 3+\log 7+5\log 2)\}$
$=\frac{2}{3}(\log 2+\log 3+2\log 7+3\log 10-3\log 2-\log 2-\log 3$
$-\log 7-5\log 2)$
$=\frac{2}{3}(\log 7-8\log 2+3)=\frac{2}{3}({\cdot}845098-8\times{\cdot}30103+3)$
$=\frac{2}{3}(3{\cdot}845098-2{\cdot}40824)=\frac{2}{3}\times1{\cdot}436858=\frac{2{\cdot}873716}{3}$

$\log x=0{\cdot}9579053 \quad \therefore \quad x=\text{Antilog } 0{\cdot}9579053=9{\cdot}076226$

उदाहरण 18—लघुगणक सारणी का प्रयोग करते हुए निम्नांकित व्यंजकों का मूल्य निकालिए—

(i) $\{\sqrt[5]{3{\cdot}219}\div(0{\cdot}0624)^7\}+\frac{(1{\cdot}78)^{-3/4}}{\sqrt{2{\cdot}13}}$

(ii) $\frac{0{\cdot}0357\times\sqrt{0{\cdot}235}}{\sqrt[3]{0{\cdot}0637}}$

हल—(i) मान लिया—

$$x=\{\sqrt[5]{3{\cdot}219}\div(0{\cdot}0624)^7\}+\frac{(1{\cdot}78)^{-3/4}}{(2{\cdot}13)^{1/2}}$$

$\log x=[\frac{1}{5}\log 3{\cdot}219-7\log 0{\cdot}0624]+[-\frac{3}{4}\log 1{\cdot}78-\frac{1}{2}\log 2{\cdot}13]$
$=(\frac{1}{5}\times0{\cdot}5077-7\times\bar{2}{\cdot}7952)+-\frac{3}{4}\times0{\cdot}2504-\frac{1}{2}\times0{\cdot}3284$
$=0{\cdot}10154-7(-2-{\cdot}7952)+-3\times0{\cdot}0626-0{\cdot}1642$
$=(0{\cdot}10154+14-5{\cdot}5664)+-0{\cdot}1878-0{\cdot}1642$
$=8{\cdot}5351-1+1-{\cdot}3520=8{\cdot}5351+\bar{1}{\cdot}6480$
$x=\text{Antilog } 8{\cdot}5351+\text{Antilog } \bar{1}{\cdot}6480$
$=342900000+0{\cdot}4446=342900000{\cdot}4446$

(ii) मान लिया कि $\frac{0{\cdot}0357\times\sqrt{0{\cdot}235}}{\sqrt[3]{0{\cdot}0637}}=x$

$\therefore \log x=\log\left\{\frac{0{\cdot}0357\times(0{\cdot}235)^{1/2}}{(0{\cdot}0637)^{1/3}}\right\}$
$=\log 0{\cdot}0357+\frac{1}{2}\log 0{\cdot}235-\frac{1}{3}\log 0{\cdot}0637$
$=\bar{2}{\cdot}5527+\frac{1}{2}\times\bar{1}{\cdot}3711-\frac{1}{3}\times\bar{2}{\cdot}8041$
$=\bar{2}{\cdot}5527+\frac{1}{2}(-2+1{\cdot}3711)-\frac{1}{3}(-3+1{\cdot}8041)$
$=\bar{2}{\cdot}5527+(\bar{1}{\cdot}6856)-(\bar{1}{\cdot}6014)$
$=\{(-2)+(-1)-(-1)\}+\{0{\cdot}5527+0{\cdot}6856-0{\cdot}6014\}$
$=\bar{2}+0{\cdot}6369=\bar{2}{\cdot}6369 \quad \therefore \quad \text{Antilog } \bar{2}{\cdot}6369={\cdot}04334$

उदाहरण 19—लघुगणक सारणी की सहायता से निम्न व्यंजकों का मूल्य ...

(i) $\sqrt[7]{\frac{1}{0{\cdot}8176\times36{\cdot}21}}$

(ii) $\frac{(17{\cdot}5)^{1/3}+(15{\cdot}2)^{-1/3}}{(56{\cdot}3)^{1/6}-(12{\cdot}4)^{1/4}}$

हल—(i) मान लिया $\sqrt[7]{\frac{1}{0·8176\times36·21}}=x$

$\therefore \quad \log x=\log\left(\frac{1}{0·8176\times36·21}\right)^{1/7}=\frac{1}{7}[\log 1-\{\log 0·8176+\log 36·21\}]$

$=\frac{1}{7}[0-\{\bar{1}·9125+1·5588\}]$

$=\frac{1}{7}(0-\bar{1}·9125-1·5588)=\frac{1}{7}(-1·4713)$

$=\frac{1}{7}(-7+7-1·4713)=\frac{1}{7}(-7+5·5287)$

$\log x=\bar{1}·7898 \quad \therefore \quad x=\text{Antilog }\bar{1}·7898=0·6163$

(ii) माना कि प्रदत्त व्यंजक $=\frac{p+q}{r-s}$

$p=(17·5)^{1/2} \quad \therefore \quad \log p=\frac{1}{2}\log 17·5=\frac{1}{2}\times1·2430=0·6215 \Rightarrow p=4·183$

$q=(15·2)^{-1/3} \quad \therefore \quad \log q=-\frac{1}{3}\log 15·2=-\frac{1}{3}\times1·1818=-0·3939$

$=\bar{1}·6061 \Rightarrow q=0·4037$

$r=(56·3)^{3/5} \quad \therefore \quad \log r=\frac{3}{5}\log 56·3=\frac{3}{5}\times1·7505=1·0503 \Rightarrow r=11·23$

$s=(12·4)^{1/4} \quad \therefore \quad \log s=\frac{1}{4}\log 12·4=\frac{1}{4}\times1·0934=0·2734 \Rightarrow s=1·877$

$\frac{p+q}{r-s}=\frac{4·183+0·4037}{11·230-1·877}=\frac{4·5867}{9·3530}=0·489$

उदाहरण 20—यदि $\log 3=·4771$ एवं $\log 2=·3010$ हो तो समीकरण हल कीजिए—

$$6^{3-4x}\times4^{x+5}=8.$$

हल—दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर—

$(3-4x)\log 6+(x+5)\log 4=\log 8$

या $\quad (3-4x)\log 6+(x+5)\log 4=\log 2^3$

या $\quad x[-4\log 6+\log 4]=-3\log 6-5\log 4+3\log 2$

या $\quad x[-4\log 2\times3+\log 2^2]=-3\log 2\times3-5\log 2^2+3\log 2$

या $\quad x[-4\log 2-4\log 3+2\log 2]=-3\log 2-3\log 3-10\log 2+3\log 2$

या $\quad x[-2\log 2-4\log 3]=-10\log 2-3\log 3$

या $\quad x=\frac{10\log 2+3\log 3}{2\log 2+4\log 3}=\frac{10\times(·3010)+3\times(·4771)}{2\times(·3010)+4\times(·4771)}=\frac{4·4413}{2·4107}=1·77$

अतः $\quad x=1·77.$

अभ्यासार्थ प्रश्न

1. दी हुई संख्याओं के निम्नलिखित आधारों पर लघुगणक निकालिए—(i) ·1 का 10 के आधार पर ; (ii) 243 का 3 के आधार पर ; (iii) 1728 का $2\sqrt{3}$ के आधार पर ; (iv) ·C625 का 2 के आधार पर।
2. निम्नांकित व्यंजकों के लघुगणक ज्ञात कीजिए—
   (i) $\frac{1}{81}$ के 3 व 9 के आधार पर ; (ii) 20736 का $2\sqrt{3}$ के आधार पर ;
   (iii) 5832 का $3\sqrt{2}$ के आधार पर ; (iv) 784 का $2\sqrt{7}$ के आधार पर।
3. सिद्ध कीजिए कि (i) $\log_a M\times\log_b N=\log_b M\times\log_a N.$
   (ii) $\log_a(1+2+3)=\log_a 1+\log_a 2+\log_a 3.$
4. निम्न संख्याओं के लघुगणकों को उनके गुणनखण्डों के रूप में प्रस्तुत कीजिए—
   (i) $\log_a 3927$; (ii) $\log_a$ [illegible] ; (iii) $\log_a 73$[illegible].
5. सिद्ध कीजिए कि—
   (i) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N.$ लेकिन $\log_a(M+N)\neq\log_a M+\log_a N.$
   (ii) $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N;$
   (iii) $\log_a M^N=N\log_a M.$

6. निम्नलिखित को सरल रूप में व्यक्त कीजिए —

(i) $\log_{10} \cdot 0081$; (ii) $\log_{10} 1944$; (iii) $\log \{\sqrt[3]{32}/(40\times\sqrt[3]{18})\}$.

7. (i) यदि $x^3=7$ तो $\log_x 2401$ का मान बताइए ।

(ii) सरल कीजिए—

(क) $\frac{1}{2}\log_{10} 25+\log_{10} 18-2\log_{10} 3$;

(ख) $\log_2 [\log_2 \{\log_3 81\}]$.

8. सिद्ध कीजिए कि —

(i) $\log 2500=2+2\log 5$;

(ii) $\log_{10} 50=2-\log_{10} 2$;

(iii) $\log \dfrac{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{4}\log 5-\dfrac{2}{5}\log 2-\dfrac{2}{3}\log 3$.

9. सिद्ध कीजिए कि—

(i) $\log \frac{75}{16}-2\log \frac{5}{9}+\log \frac{32}{243}=\log 2$;

(ii) $4\log$ [illegible] $-16\log$ [illegible] $+7\log$ [illegible] $=\log 5$.

10. सिद्ध कीजिए कि—

(i) $\log_a b.\log_b c.\log_c d.\log_d a=1$;

(ii) $\dfrac{1}{\log_a (ab)}+\dfrac{1}{\log_b (ab)}=1$;

(iii) $\log_2 3.\log_3 4.\log_4 5.\log_5 6.\log_6 7.\log_7 8=3$.

11. सिद्ध कीजिए कि—

(i) $\log 2+16\log \dfrac{16}{15}+12\log \dfrac{25}{24}+7\log \dfrac{81}{80}=1$;

(ii) $\log_2 \left(\dfrac{75}{16}\right)-2\log_2 \left\{\dfrac{\sqrt[4]{(25/81)^6}\cdot\sqrt[3]{25/81}}{\sqrt[12]{(25/81)^7}}\right\}+\dfrac{1}{3}\log_2 (2^{15}.3^{-15})=1$.

12. सिद्ध कीजिए कि —

(i) $\log_b a\times\log_c b\times\log_d c=\log_d a$;

(ii) $\log\left(\dfrac{a+b}{5}\right)=\dfrac{1}{2}(\log a+\log b)$ यदि $a^2+b^2=23ab$.

13. सिद्ध कीजिए कि—

(i) $\dfrac{2\log 6+6\log 2}{4\log 2+\log 27-\log 9}$;

(ii) $x^{\log y-\log z}\times y^{\log z-\log x}\times z^{\log x-\log y}=1$;

(iii) $\dfrac{1}{\log_{xy} (xyz)}+\dfrac{1}{\log_{yz} (xyz)}+\dfrac{1}{\log_{zx} (xyz)}=2$.

14. (i) निम्न संख्याओं के लघुगणक के पूर्णांश (characteristics) लिखिए—

(क) $\log 29785$; (ख) $\log 0{\cdot}579$; (ग) $\log 5{\cdot}908$; (घ) $\log 0{\cdot}0010305$.

(ii) उन संख्याओं में पहले सार्थक अंक (first significant figure) की स्थिति बतलाइए जिनके लघुगणक $\bar{3}{\cdot}30103$, $\bar{1}{\cdot}47712$ और $\bar{6}{\cdot}6990$ हों ।

15. यदि $\log_{10} 2=\cdot 30103$ तथा $\log_{10} 3=\cdot 4771213$ तो—

(i) 2^{31} और 2^{25} में अंकों की संख्या ज्ञात कीजिए ;

(ii) 3^{-7} और 2^{-24} में दशमलव विन्दु और प्रथम सार्थक अंक के मध्य शून्य की संख्या बतलाइए ।

16. (i) $3^{12}\times 2^8$ में अंकों की संख्या निकालिए ;

(ii) $\cdot 0009$ का घनमूल तथा $\log_{16} 12$ का मान निकालिए ।

17. (i) $\cdot 0007$ का घनमूल ज्ञात कीजिए; यदि $\log 7=\cdot 845098$ तथा $\log 887904=5{\cdot}948366$.

(ii) यदि $\log 2=\cdot 30103$ और $\log 3=\cdot 4771213$ तो निम्न व्यंजक का मान बताइए—

(क) $\log (\sqrt[3]{48}\times 108^{1/4}\div\sqrt[12]{6})$; (ख) $\log \{(2{\cdot}7)^8\times(\cdot 81)^{4/5}\div(90)^{5/4}\}$.

18. निम्नलिखित को लघुगणक की सहायता से हल कीजिए—

(i) $\dfrac{1239\times 156\times 0{\cdot}924}{145\times 23{\cdot}}$; [B. A. Econ (Final), Raj., 1979 Suppl]

(ii) $\dfrac{(6{\cdot}284)^{3}\times(624)^{1/2}}{({\cdot}005)^{1/6}}$;

(iii) $\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{21{\cdot}6\times12{\cdot}6}{562{\cdot}6}}$;

(iv) $\dfrac{1}{5{\cdot}7002\times6{\cdot}0818\div69{\cdot}732}$.

19. मूल्यांकन कीजिए—

(i) $\dfrac{(435)^{3}.({\cdot}056)^{1/2}}{(380)^{4}}$;

(ii) $\sqrt{\dfrac{{\cdot}0074\times{\cdot}0137}{873{\cdot}5}}$;

(iii) $\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{3\log1728}{\frac{1}{2}\log36+\frac{1}{3}\log8}}$.

20. लघुगणक सारणी का प्रयोग करते हुए निम्न सम्बन्ध से x का मान निकालिए—

$$2x=\log_{10}26{\cdot}54+\log_{10}0{\cdot}004321-\log_{10}0{\cdot}00001357$$

और निम्न व्यंजक का निकटतम पूर्णांक तक उपसादित मूल्य ज्ञात कीजिए—

$$\sqrt{\frac{26{\cdot}54\times0{\cdot}004321}{0{\cdot}00001357}}.$$

21. यदि $\log 2=0{\cdot}30103$, $\log 3={\cdot}47712$, $\log 7={\cdot}845098$ तो सिद्ध कीजिए कि—

(i) $(1\frac{1}{50})^{100}>100$;

(ii) यदि प्रदत्त लघुगणकों के अतिरिक्त,

$\log 11=1{\cdot}0413927$ और $\log 17814{\cdot}1516=4{\cdot}2507651$

तो निम्न व्यंजक का मूल्य छः दशमलव अंकों तक परिकलित कीजिए—

$$(330\div49)^{4}\div\sqrt[4]{22\times70}.$$

22. यदि $\log_{10}2={\cdot}30103$, $\log 3={\cdot}47712$; $\log 7={\cdot}845098$ तो निम्नांकित समीकरणों को हल कीजिए—

(i) $8^{x}=5$; (ii) $3^{x-2}=5$; (iii) $21^{x}=2^{2x+1}.5^{x}$.

23. यदि $\log 2=0{\cdot}3010$, $\log 3=0{\cdot}4771$, $\log 5=0{\cdot}6990$, $\log 7=0{\cdot}8451$ और $\log 11=1{\cdot}0414$, तो निम्न समीकरणों को हल कीजिए—

(i) $2^{x}.3^{2x+1}=7^{4x+3}$;

(ii) $11^{4x-5}\div3^{-2x}=5^{2-x}\times7^{x}$.

24. लघुगणक सारणी की सहायता से x का मान बताइए यदि x निम्न समीकरण संतुष्ट करता है—

$$\frac{20}{14{\cdot}7}=\left(\frac{{\cdot}0613}{x}\right)^{1{\cdot}22}$$

25. यदि a, b, c किसी गुणोत्तर श्रेणी (G.P.) के क्रमशः pवें, qवें और rवें पद हों तो सिद्ध कीजिए कि

$$(q-r)\log a+(r-p)\log b+(p-q)\log c=0$$

[संकेत—सिद्ध कीजिए कि $\log(a^{q-r}.\,b^{r-p}.\,c^{p-q})=0$].

26. सिद्ध कीजिए कि—

(i) $\log 8-\log 2<\log(8-2)$, (ii) $\log 8+\log 2>\log(8+2)$.

27. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी (G.P.) में हों तो सिद्ध कीजिए कि $\log a$, $\log b$ व $\log c$ समान्तर श्रेणी (A.P.) में होंगे।

28. (i) यदि किसी फर्म का उत्पादन फलन $x=10\,L^{0{\cdot}4}.K^{0{\cdot}6}$ है जहाँ $x=$ उत्पादन, $L=$श्रम एवं $K=$पूँजी तो 125 इकाई श्रम व 11[illegible] इकाई पूँजी लगाने पर 1158 इकाई उत्पादन होगा—सिद्ध करिये। [*B. A. Econ. (Final), Raj., 1978*]

(ii) किसी स्थान के लिए पैरेटो का आय-नियम निम्नांकित है—

$$N=\frac{5\times10^{10}}{x^{1{\cdot}5}}$$

जहाँ x आय-स्तर है और N x रु० और इससे अधिक आय कमाने वाले व्यक्तियों की संख्या है। 327500 रु० और अधिक आय कमाने वालों की संख्या ज्ञात कीजिए। (लघुगणक सारणी का प्रयोग किया जा सकता है)।

उत्तर

1. (i) -1, (ii) 5, (iii) 6, (iv) -4; **2.** (i) $-4, -2$, (ii) 8, (iii) 6, (iv) 4; **4.** (i) $\log 3+\log 7+\log 11+\log 17$, (ii) $(\log 5+\log 7)-(\log 3+\log 17)$, (iii) $(\log 3+\log 7+\log 11+\log 17+\log 23)-(\log 5+\log 13+\log 19)$; *6.* (i) $4 \log 0{\cdot}3$, (ii) $3 \log 2+5 \log 3$, (iii) $-1-\frac{1}{2} \log 6$; **7.** (i) 12, (ii) (क) 1 (ख) 1; **14.** (i) (क) 4, (ख) $\bar{1}$, (ग) 0, (घ) $\bar{3}$, (ii) दशमलव बिन्दु से (क) तीसरा, (ख) पहला, (ग) छठा। **15.** (i) 4 व 8, (ii) 2 व 7; **16.** (i) 9, (ii) $\bar{2}{\cdot}98474$ का प्रतिलघुगणक तथा log 1·07918; **17.** (i) ·887905, (ii) (क) 1·003924, (ख) 2·7780766; **18** (i) 5·356, (ii) 7979, (iii) ·2617, (iv) 2·01; **19.** (i) ·0009342, (ii) ·0003408, (iii) $\frac{1}{2}$; **20.** 1·9635, 92; **21.** (ii) 178·141516; **22.** (i) ·773976, (ii) 3·46, (iii) 14·206; **23.** (i) $-0{\cdot}9685$, (ii) 1·468; **24.** 0·04854; **28.** (ii) 12040.

8. सारणिक
(DETERMINANTS)

अर्थशास्त्र में युग्पत समीकरणों (simultaneous equations) का बहुत प्रयोग होता है। इन समीकरणों मे जितने अज्ञात चर होते हैं समीकरणों की संख्या भी उतनी ही होती है। जैसे-जैसे अज्ञात चरो की संख्या बढ़ती जाती है युग्पत समीकरणों का हल करना भी जटिल होता जाता है। उक्त समीकरणों के आसान हल के लिए एक विशेष बीजगणितीय विधि का प्रयोग किया जाता है जिसे निर्धारक-विधि या सारणिक विधि (method of determinants) कहते हैं।

परिभाषा—मान लिया कि हमें निम्न दो युग्पत समीकरणों को हल करके अज्ञात चर x व y के मान ज्ञात करने हैं—

$$a_1+b_1y=0 \qquad ...(i)$$
$$a_2+b_2y=0 \qquad ...(ii)$$

दोनों समीकरणों को x से भाग देने पर—

$$\frac{a_1x}{x}+\frac{b_1y}{x}=0; \quad \frac{a_2x}{x}+\frac{b_2y}{x}=0$$

अर्थात्
$$a_1+b_1\frac{y}{x}=0; \quad a_2+b_2\frac{y}{x}=0$$

$$\frac{y}{x}=-\frac{a_1}{b_1}; \qquad \frac{y}{x}=-\frac{a_2}{b_2}$$

अतः
$$-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2} \quad \text{या} \quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$$

$$\therefore \quad a_1b_2=a_2b_1 \quad \text{अर्थात्} \quad a_1b_2-a_2b_1=0.$$

समीकरण (i) व (ii) के बायें पक्ष (L.H.S.) को एक वर्ग के रूप मे दो लम्ब रेखाओं के बीच में निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

उपर्युक्त वर्ग-रूप में दो लम्ब रेखाओ के बीच अज्ञात चरों के गुणांकों का व्यवस्थित क्रम सारणिक अथवा निर्धारक (determinant) कहलाता है। इससे समीकरणों के अज्ञात मूल्य निर्धारित (determine) किए जाते हैं इसीलिए इसे निर्धारक या सारणिक कहते हैं। सभी सारणिकों में स्तम्भो (columns) और पंक्तियों (rows) की संख्या समान होती है। (जैसे 2×2 या 3×3 या 4×4 अर्थात् $n\times n$)।

क्रम (Order)—किसी सारणिक मे जितने स्तम्भ या पंक्तियाँ होती हैं वह संख्या ही

सारणिक का क्रम (order) कहलाती है। उपर्युक्त उदाहरण में सारणिक के दो स्तम्भ तथा दो पंक्तियाँ हैं अतः यह द्वितीय-क्रम सारणिक (determinant of the second order) है। तीन स्तम्भ व तीन पंक्तियाँ होने पर सारणिक तृतीय क्रम का (of the third order) कहलाता है।

मौलिक अंश (Constituents) तथा तत्त्व (Elements)—किसी सारणिक के मौलिक पद उसके मौलिक अंश (constituents) कहलाते हैं तथा इन मौलिक पदों के गुणनफल (product of the form a_1b_2, a_2b_1 etc.) उसके तत्त्व (elements) होते हैं। किसी सारणिक का विस्तार उसका मूल्य (value) होता है। उपर्युक्त उदाहरण द्वितीय क्रम के सारणिक का है जिसमें दो स्तम्भ व 2 पंक्तियाँ हैं, $4(=2^2)$ मौलिक अंश हैं—a_1, a_2 b_1 व b_2—और उसके विस्तार $(a_1b_2-a_2b_1)$ या मूल्य में $2(=2\,!)$ तत्त्व हैं।

इस प्रकार व्यापक रूप से यह कहा जा सकता है कि nवें क्रम (nth order) के सारणिक में n स्तम्भ व n पंक्तियाँ होती हैं, n^2 मौलिक अंश होते हैं, तथा $n\,!$ तत्त्व होते हैं—

सारणिक का क्रम (Order)	स्तम्भ (c)	पंक्तियाँ (r)	मौलिक अंश $(a_1, a_2 \ldots b_1, b_2)$	तत्त्व $(a_1b_2, a_2b_1, \ldots)$
nवाँ	n	n	n^2	$n\,!$
द्वितीय	2	2	2^2	$2\,!=2$
तृतीय	3	3	3^2	$3\,!=6$

मूल विकर्ण (Principal Diagonal) तथा मूल तत्त्व (Principal Element)—सारणिक में बाएँ हाथ के शीर्ष से नीचे की ओर (दाहिनी ओर) वाला विकर्ण मूल विकर्ण (principal diagonal) कहलाता है और मूल विकर्ण पर स्थित पदों (जोकि प्राकृतिक क्रम में होते हैं)—a_1, b_2, c_3.... का गुणनफल सारणिक का मूल तत्त्व (Leading or Principal Element) कहा जाता है। द्वितीय क्रम के सारणिक का मूल तत्त्व a_1b_2 तथा तृतीय क्रम के सारणिक का मूल तत्त्व $a_1b_2c_3$ होता है।

द्वितीय क्रम के सारणिक का मूल्य निर्धारण—यदि a_1, a_2, b_1 व b_2 किसी द्वि-क्रमीय सारणिक $|A|$ के मौलिक अंश हों तो वह सारणिक और उसका मूल्य निम्न प्रकार व्यक्त किए जायेंगे—

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ या } \begin{vmatrix} +a_1 & b_1 \\ -a_2 & b_2 \end{vmatrix} \overset{\text{मूल्य}}{=} a_1b_2 - a_2b_1$$

सारणिक $|A|$ ज्ञात करने के लिए A के मूल विकर्ण के दो तत्त्वों $(a_1 \times b_1)$ को गुणा करके उसमें से अन्य दो तत्त्वों का गुणनफल $(a_2 \times b_1)$ घटा दिया जाता है। यही द्वितीय क्रम का अभीष्ट सारणिक है जिसका मूल्य $(a_1b_2-a_2b_1)$ है।

उदाहरण 1—निम्नलिखित सारणिक का मूल्य ज्ञात कीजिए—

(i) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} -a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} \dfrac{2}{a-1} & 3 \\ \dfrac{1}{1-a_2} & \dfrac{1}{1+a} \end{vmatrix}$

हल—(i) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = (5\times8)-(3\times6)$ $40-18=22$ (ii) $\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (9\times0)-(3\times4)$ $0-12=-12$

(iii) $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-4\times-3)-(-2\times-1) = 12-2=10$ (iv) $\begin{vmatrix} -a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -a^2-1 = -(a^2+1)$

(v) $\begin{vmatrix} \frac{2}{a-1} & 3 \\ \frac{1}{1-a^2} & \frac{1}{1+a} \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{a-1}\right)\left(\frac{1}{a+1}\right)-3\left(\frac{1}{1-a^2}\right)=\frac{2}{a^2-1}-\left(-\frac{3}{a^2-1}\right)$
$=\frac{2}{a^2-1}+\frac{3}{a^2-1}=\frac{5}{a^2-1}$

उदाहरण 2—(i) सिद्ध कीजिए कि—

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{12} \\ \sqrt{3} & 3\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$$

(ii) मूल्य ज्ञात कीजिए—

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & y \\ x & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & d \\ a & y \end{vmatrix}$$

हल—(i) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (3\times8)-(7\times2)=10$

$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{12} \\ \sqrt{3} & 3\sqrt{2} \end{vmatrix} = (\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2})-(\sqrt{12}\cdot\sqrt{3})=3.2-\sqrt{36}=0$

$\therefore \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{12} \\ \sqrt{3} & 3\sqrt{2} \end{vmatrix} = 10\times0=0$

(ii) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$; $\begin{vmatrix} b & y \\ x & c \end{vmatrix} = bc-xy$;

$\begin{vmatrix} x & d \\ a & y \end{vmatrix} = xy-ad$

$\therefore \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & y \\ x & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & d \\ a & y \end{vmatrix}$

$=(ad-bc)+(bc-xy)-(xy-ad)$
$=ad-bc+bc-xy-xy+ad$
$=2ad-2xy=2(ad-xy)$

युग्पत समीकरणों का हल—सारणिकों की सहायता से क्रेमर के नियम (Cramer's Rule) द्वारा युग्पत समीकरणों का हल सरलतापूर्वक किया जा सकता है। मान लीजिए कि निम्न दो समीकरणों में x और y के मान ज्ञात करने हैं—

$$ax+by=p \qquad \text{...(i)}$$
$$cx+dy=q \qquad \text{...(ii)}$$

x के गुणांकों को समान बनाने के लिए (ii) को a से तथा (i) को c से गुणा करके घटाने पर—

$$acx+ady=aq$$
$$acx+bcy=cp$$
$$(ad-bc)y=aq-cp$$

$$\therefore\ y=\frac{aq-cp}{ad-bc}$$

इसी प्रकार (i) को d से तथा (ii) को b से गुणा करके घटाने पर—

$$\begin{array}{r} adx+bdy=pd \\ bcx+bdy=qb \\ - \quad - \quad - \\ \hline (ad-bc)\ x=pd-qb \end{array}$$

$$\therefore\ x=\frac{pd-qb}{ad-bc}$$

स्पष्ट है कि x और y दोनों के मानों को हर (denominator) एक समान $(ad-bc)$ है। यह x और y के गुणांको का अन्तर है जिसे सारणिक रूप में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है—

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$ad-bc=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix};\quad pd-qb=\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix};\quad aq-cp=\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$$

अतः $x=\dfrac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\dfrac{pd-bq}{ad-bc}$ और $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\dfrac{aq-cp}{ad-bc}$

उदाहरण 3—सारणिक की सहायता से निम्न समीकरणों को हल कीजिए—

(क) $2x+3y=13$
$4x-y=5$

(ख) $2x+6y=9$
$3x+y=2$

हल—(क) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}=\dfrac{(13\times-1)-(3\times5)}{(2\times-1)-(3\times4)}=\dfrac{-13-15}{-2-12}=2$

तथा $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}=\dfrac{(2\times5)-(13\times4)}{(2\times-1)-(3\times4)}=\dfrac{10-52}{-2-12}=3$

$\therefore\ x=2,\ y=3$

(ख) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{9-12}{2-18}=\dfrac{3}{16};\quad y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{4-27}{2-18}=\dfrac{23}{16}$

$\therefore\ y=\dfrac{3}{16};\quad x=1\dfrac{7}{16}$

उदाहरण 4—क्रेमर के नियम (Cramer's rule) का प्रयोग करके निम्न समीकरणों को हल कीजिए—

(i) $2x-y=5;\quad 3x+2y=-3$

(ii) $3x_1-x_2-15=0;\quad 4x_1+x_2-20=0$

हल—(i) $2x-y=5$

$3x+2y=-3$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{(5\times2)-(-1\times-3)}{(2\times2)-(-1\times3)}=\frac{10-3}{4+3}=\frac{7}{7}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{(2\times-3)-(5\times3)}{(2\times2)-(-1\times3)}=\frac{-6-15}{4+3}=\frac{-21}{7}=-3$$

$$\therefore \quad x=1, y=-3$$

(ii) $3x_1-x_2=15$

$4x_1+x_2=20$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} 15 & -1 \\ 20 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{x_2}{\begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 15 & -1 \\ 20 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{(15\times1)-(-1\times20)}{(3\times1)-(-1\times4)}=\frac{15+20}{3+4}=\frac{35}{7}=5$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{60-60}{3+4}=0$$

$$\therefore \quad x_1=5, \; x_2=0$$

तृतीय क्रम के सारणिक (Determinants of Third Order)—तृतीय क्रम के सारणिक में तीन ($n=3$) स्तम्भ व तीन पंक्तियाँ होती हैं, उसमें $3^2=9$ मौलिक अंश ($a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \ldots c_3$) होते हैं और उसके $3!=6$ तत्त्व ($a_1b_2c_3, a_3b_2c_1 \ldots$) हैं। तृतीय क्रम के सारणिक का विस्तार (expansion) दो प्रकार से लिखा जा सकता है—

(क) प्रथम पंक्ति (*First Row or R_1*) के पदों के अनुसार या

(ख) प्रथम स्तम्भ (First Column—C_1) के पदों के अनुसार।

(क) तृतीय क्रम-सारणिक का प्रथम पंक्ति के पदों के अनुसार विस्तार—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\overset{A_1}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}-b_1\overset{B_1}{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}+c_1\overset{C_1}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \quad \ldots(1)$$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1$$

बीजगणितीय चिह्न—प्रथम पंक्ति के पहले पद का चिह्न प्रदत्त चिह्न के अनुरूप होगा,

दूसरे पद का चिह्न विपरीत हो जाएगा, तीसरे का प्रदत्त चिह्न रहेगा। इस प्रकार चिह्न एकान्तर (alternating) रूप से बदलते हैं।

विस्तार लिखने के लिए सर्वप्रथम a, b, c को 3 ! बार लिखकर 1, 2, 3 अनुलेख (subscript) प्रत्येक सम्भाव्य क्रम में रख दिये जाते हैं। जिस पद में अनुलेख चक्रीय क्रम में होते हैं (1, 2, 3 या 2, 3, 1 या 3, 1, 2) वह धनात्मक होता है शेष पदों के चिह्न के लिए यह नियम अपनाया जाता है—अनुलेख को प्राकृतिक क्रम में लाने के लिए यदि सम (even) संख्या में परिवर्तन (interchanges) करने पड़ें तो धन (+) और विषम (odd) संख्या में परिवर्तन करने पड़ें तो ऋण (—) चिह्न का प्रयोग किया जायेगा। उपर्युक्त उदाहरण में तीन तत्वों—$a_1b_2c_3$, $a_2b_3c_1$ और $a_3b_1c_2$ में संख्यात्मक अनुलेख चक्रीय क्रम में हैं अतः धनात्मक हैं। $a_1b_3c_2$ ऋणात्मक हैं क्योंकि इसके अनुलेखों 1, 3, 2 को प्राकृतिक क्रम (1, 2, 3) में लाने के लिए केवल एक (विषम) परिवर्तन 3, 2, के स्थान पर 2, 3 करना ही आवश्यक है, इसी प्रकार $a_2b_1c_3$ में भी एक परिवर्तन 2, 1 से 1, 2 तथा $a_3b_2c_1$ में भी एक ही परिवर्तन 3, 1 से 1, 3 होना आवश्यक है। यही कारण है कि ये तीनों पद ऋणात्मक हैं।

उपर्युक्त विस्तार में a_1 को एक निम्न क्रम (यहाँ पर दूसरा क्रम) के सारणिक से गुणा किया जाता है। यह सारणिक a_1 की पंक्ति और स्तम्भ के तत्वों को छोड़कर अवशिष्ट तत्वों से बना है। ऐसे सारणिक को a_1 का लघुसारणिक या माइनर (minor of a_1) कहा जाता है जिसे वर्णमाला के बड़े अक्षर—A_1 द्वारा व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार b_1 का लघुसारणिक B_1 तथा c_1 का लघुसारणिक C_1 कहलाता है। निम्न चार्ट से लघुसारणिकों की रचना-विधि स्पष्ट हो जाती है—

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_1} & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boxed{c_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

a_1 का लघु सारणिक $\qquad$ b_1 का लघु सारणिक $\qquad$ c_1 का लघुसारणिक

$$A_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad B_1=\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad C_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \ldots(2)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1$$

या मूल सारणिक $\Delta = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1$

सहखण्ड (Cofactor)—जब किसी लघु सारणिक (minor) के साथ उसका चिह्न भी होता हो जैसे $+A_1$ $-B_1$ $+C_1$ आदि तो उसको मूलपद (यहाँ पर (a_1, b_1, c_1) का सहखण्ड (cofactor) कहते हैं।

(ख) **प्रथम स्तम्भ के पदों के अनुसार विस्तार**—सारणिक के प्रथम स्तम्भ के पदों (a_1, a_2, a_3) की सहायता से विस्तार को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है—

यह विस्तार द्वितीय क्रम के सारणिकों के रूप में निम्न प्रकार प्रकट किया जाता है—

लघुसारणिक (minors)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\overset{A_1}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} - a_2\overset{A_2}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} + a_3\overset{A_3}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} \quad \ldots(4)$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

a_1 का लघुसारणिक (A_1) $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ a_2 का $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ अर्थात् (A_2) और a_3 का लघु-सारणिक (A_3) $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ हैं।

लघु सारणिकों का प्रयोग करके मूल सारणिक (Δ=Delta) इस प्रकार है—

$$\Delta = a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3$$

प्रथम स्तम्भानुसार सारणिक का विस्तार करते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि मूल सारणिक में मूल पद से सम्बद्ध पंक्ति व स्तम्भ को छोड़कर अवशिष्ट पदों से लघुसारणिकों की रचना की जाती है जैसा कि निम्नांकित चित्र से स्पष्ट है—

a_1 का लघुसारणिक A_1 $\begin{vmatrix} \boxed{a_1} - b_1 - c_1 \\ a_2 \quad b_2 \quad c_2 \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{vmatrix}$ a_2 का लघुसारणिक A_2 $\begin{vmatrix} a_1 \quad b_1 \quad c_1 \\ \boxed{b_2} - b_2 - c_2 \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{vmatrix}$ a_3 का लघुसारणिक A_3 $\begin{vmatrix} a_1 \quad b_1 \quad c_1 \\ a_2 \quad b_2 \quad c_2 \\ \boxed{a_3} - b_3 - c_3 \end{vmatrix}$

अतः सारणिक का विस्तार किसी भी पंक्ति या किसी भी स्तम्भ के अनुसार किया जा सकता है। उपर्युक्त उदाहरण में तृतीय क्रम मे सारणिक का विस्तार पहले (क) पंक्ति के मूल पदों के अनुसार किया गया है तथा फिर (ख) पहले स्तम्भ के अनुसार किया गया है।

चतुर्थ क्रम के सारणिक (Determinants of the Fourth Order)—सारणिक के विस्तार के उपर्युक्त नियम सभी क्रमो के सारणिकों पर प्रयोग किए जाते हैं। उदाहरणार्थ, चतुर्थ क्रम के सारणिक का पहली पंक्ति के अनुसार तथा पहले स्तम्भ के अनुसार निम्न प्रकार विस्तार किया जाएगा—

चतुर्थ क्रम का सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति के पदों के अनुसार विस्तार—

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

प्रथम स्तम्भ के पदों के अनुसार विस्तार—

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

उदाहरण 5—सारणिक का उपयोग करते हुए निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए—

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

[*B. A. Econ., Raj.*, 1272]

हल—पहली पंक्ति के अनुसार विस्तार करके सारणिक का मूल्य निम्न प्रकार होगा—

$$|A|=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}5&8\\6&9\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2&8\\3&9\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}$$

$=1(5\times9-6\times8)-4(2\times9-3\times8)+7(2\times6-3\times5)$

$=(1\times-3)-4(-6)+7(-3)=-3+24-21=0.$

इसी प्रकार पहले स्तम्भ के पदों (1, 2, 3) के अनुसार भी सारणिक का मूल्य ज्ञात किया जा सकता है—

$$|A|=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}5&8\\6&9\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}4&7\\6&9\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}4&7\\5&8\end{vmatrix}$$

$=1(5\times9-6\times8)-2(4\times9-6\times7)+3(4\times8-5\times7)$

$=(1\times-3)-2(-6)+3(-3)=-3+12-9=0$

उदाहरण 6—निम्न सारणिक का मूल्य ज्ञात कीजिए—

[B. A. Econ. (Final), Raj. 1979 N. C.]

(i) $\begin{vmatrix}1&3&1\\2&5&4\\6&1&0\end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix}3&2&7\\4&1&-2\\8&3&0\end{vmatrix}$

हल—(i) पहली पंक्ति के पदों के अनुसार सारणिक का विस्तार—

$$|A|=1\begin{vmatrix}5&4\\1&0\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&4\\6&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2&5\\6&1\end{vmatrix}$$

$=1\times\{(5\times0)-(4\times1)\}-3\{(2\times0)-(4\times6)\}+1\{(2\times1)-(5\times6)\}$

$=1\times(0-4)-3(0-24)+1(2-30)\times-4+72-28=40.$

(ii) पहले स्तम्भ के पदों के अनुसार—

$$|A|=\begin{vmatrix}3&2&7\\4&1&-2\\8&3&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&-2\\3&0\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2&7\\3&0\end{vmatrix}+8\begin{vmatrix}2&7\\1&-2\end{vmatrix}$$

$=3(0+6)-4(0-21)+8(-4-7)$

$=18+84-88=102-88=14.$

उदाहरण 7—निम्न मैट्रिक्स (matrix) के सारणिक का मान ज्ञात कीजिए—

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-4\\0&-4&2\\1&-1&5\end{pmatrix}$$

हल—पहली पंक्ति के पदों के अनुसार विस्तार करने पर—

$$|A|=2\begin{vmatrix}-4&2\\-1&5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0&2\\1&5\end{vmatrix}+(-4)\begin{vmatrix}0&-4\\1&-1\end{vmatrix}$$

$=2\{(-4\times5)-(-1\times2)\}-3\{(0\times5)-(1\times2)\}-4\{(0\times-1)-(1\times-4)\}$
$=2(-20+2)-3(0-2)-4(0+4)$
$=2\times-18-3\times-2-4\times4=-36+6-16=-46.$

सारणिकों के गुण
(Properties of Determinants)

सारणिकों के कुछ मौलिक गुण होते हैं जिनके प्रयोग द्वारा उनका मूल्य ज्ञात करना सरल हो जाता है। कुछ महत्त्वपूर्ण गुण निम्नांकित हैं—

(1) पंक्ति व कॉलम बदलने से मूल्य अप्रभावित—किसी सारणिक में पंक्तियों और स्तम्भों के पारस्परिक परिवर्तन से मूल्य में कोई अन्तर नहीं होता, अर्थात्—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) निकटवर्ती पंक्ति या कॉलम को बदलने से मूल्य अप्रभावित, चिह्न परिवर्तित—दो निकटवर्ती (adjacent) स्तम्भों अथवा पंक्तियों को आपस में बदलने से सारणिक का अंकात्मक मान (numerical value) तो वही रहता है परन्तु उसका चिह्न (+ या −) बदल जाता है, अर्थात्—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-) \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ स्तम्भ 1 और 2 बदलने पर

यह ध्यान रखना चाहिए कि किसी सारणिक की पंक्तियों अथवा स्तम्भों का विषम (1, 3....) बार परिवर्तन करने से सारणिक का चिह्न बदल जाता है परन्तु सम (2, 4....) बार परिवर्तन करने से कोई अन्तर नहीं होता।

पहली बार परिवर्तन — दूसरी बार परिवर्तन — तीसरी बार परिवर्तन

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-) \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = (-) \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

(3) समान पंक्तियाँ या समान स्तम्भ → मूल्य शून्य—यदि किसी सारणिक की कोई दो पंक्तियाँ अथवा दो स्तम्भ समान हों तो उसका मूल्य शून्य होता है, अर्थात्—

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{या} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(4) एक पंक्ति (या स्तम्भ) दूसरी पंक्ति (या स्तम्भ) का निश्चित गुना → मूल्य शून्य—यदि सारणिक की एक पंक्ति (या स्तम्भ) दूसरी पंक्ति (या स्तम्भ) का निश्चित गुना हो तो सारणिक का मूल्य शून्य हो जाएगा—

उदाहरण—दूसरी पंक्ति पहली पंक्ति की तीन गुनी है—

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 3b & 3c \\ e & f \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 3a & 3c \\ d & f \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$= a(3bf-3ce)-b(3af-3cd)+c(3ae-3bd)$$

$$= 3abf-3ace-3abf+3bcd+3ace+3bcd=0$$

(5) पंक्ति (या स्तम्भ) को **k** से गुणा करने पर सारणिक को भी k से गुणा—यदि किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के सभी पदों को किसी एक ही राशि (k) से गुणा किया जाए तो सारणिक भी उसी राशि से गुणा हो जाती है, अर्थात्—

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ अथवा } \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(6) पंक्ति (या स्तम्भ) का प्रत्येक तत्त्व दो या अधिक पदों का जोड़ होने पर सारणिक भी दो या अधिक सारणिकों का जोड़—यदि किसी स्तम्भ (या पंक्ति) का प्रत्येक पद दो अथवा दो से अधिक राशियों का योग हो तो सारणिक उसी क्रम के दो अथवा दो से अधिक सारणिकों के योग के रूप में रखा जाता है, अर्थात्—

$$\begin{vmatrix} l_1+m_1+n_1 & b_1 & c_1 \\ l_2+m_2+n_2 & b_2 & c_2 \\ l_3+m_3+n_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & b_1 & c_1 \\ l_2 & b_2 & c_2 \\ l_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_1 & b_1 & c_1 \\ n_2 & b_2 & c_2 \\ n_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार—

$$\begin{vmatrix} m_1+a_1 & n_1+b_1 & c_1 \\ m_2+a_2 & n_2+b_2 & c_2 \\ m_3+a_3 & n_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & c_1 \\ m_2 & n_2 & c_2 \\ m_3 & n_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1 & n_1 & c_1 \\ a_2 & n_2 & c_2 \\ a_3 & n_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(7) पंक्ति (या स्तम्भ) के तत्त्वों को एक राशि से भाग या गुणा करके दूसरी पंक्ति (या कॉलम) में जोड़ने या घटाने से सारणिक का मूल्य अपरिवर्तित—यदि किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के सभी घटकों में किसी दूसरी पंक्ति अथवा स्तम्भ के तत्संवादी घटकों के समापवर्त्य जोड़ अथवा घटा दिये जायें तो सारणिक के मूल्य में कोई परिवर्तन नहीं होता। दूसरे शब्दों में, किसी पंक्ति या कॉलम में किसी अन्य पंक्ति या कॉलम या उसके गुणा या भाग (एक उभयनिष्ठ राशि से) से प्राप्त पंक्ति या कॉलम को जोड़ने या घटाने के मूल्य में कोई अन्तर नहीं पड़ता।

(i) $$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & a_2+kb_2 & a_3+kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

प्रमाण— $$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & a_2+kb_2 & a_3+kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+kb_1)\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-(a_2+kb_2)\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+(a_3+kb_3)\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+kb_1)(b_2c_3-b_3c_2)-(a_2+kb_2)(b_1c_3-b_3c_1)+(a_3+kb_3)(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+kb_1b_2c_3+kb_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1-kb_1b_2c_3+kb_2b_3c_1$$
$$+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1+kb_1b_3c_2-kb_2b_3c_1$$

$$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$$
$$(+kb_1b_2c_3-kb_1b_2c_3)-(kb_1b_3c_2-kb_1b_3c_2)+(kb_2b_3c_1-kb_2b_3c_1)$$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\ldots\ldots$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(ii) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+mb_1-kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2-kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3-kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(8) अन्य गुण—यदि $x=a$ रखने पर सारणिक का मान शून्य हो जाता है तो $(x-a)$ उस सारणिक का एक खण्ड होगा—उदाहरणार्थ निम्न तृतीय कोटि के सारणिक में यदि $a=b$ रखा जाए तो पहले दोनों स्तम्भ हो जाते है जिससे सारणिक का मूल्य शून्य हो जाता है (देखिए गुण 3) अतः $(a-b)$ उसका एक खण्ड है—

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \text{ यदि } a=b \text{ तो } \overset{C_1=C_2C_3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b & c \\ b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}=0$$

$\Delta=(a-b)(b-c)(c-a)$

इसी प्रकार, यदि $x=a$ रखने से k पंक्तियाँ (या कॉलम) समान हो जाते हैं तो $(x-a)^{k-1}$ सारणिक का एक खण्ड होगा। उदाहरणार्थ, निम्न सारणिक में तीनों (k) पंक्तियाँ समान हो जाती हैं यदि $a+b+c=0$ अतः $(a+b+c)^{3-1}$ या $(a+b+c)^2$ प्रदत्त सारणिक का एक खण्ड होगा—

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$\Delta=2abc(a+b+c)^3$ अतः $(a+b+c)$ उक्त सारणिक का एक गुणनखण्ड है।

उपर्युक्त गुणों के प्रयोग से सारणिकों के मूल्य का परिकलन बहुत सरल हो जाता है।

उदाहरण 8—मूल्य ज्ञात कीजिए—

(i) $$\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$$ (ii) $$\begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 63 & 54 & 46 \end{vmatrix}$$

हल— C_1 C_2 C_3 C_2-C_1 तथा C_3-C_1 रखने पर—

$$|A|=\begin{vmatrix}13 & 16 & 19\\ 14 & 17 & 20\\ 15 & 18 & 21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}13 & 3 & 6\\ 14 & 3 & 6\\ 15 & 3 & 6\end{vmatrix}$$ $C_3=2C_2$ अतः $|A|=0$

[प्रमाण $|A|=\{13(3\times6)-(3\times6)\}-3\{(14\times6)-(15\times6)\}$
$+6\{(14\times3)-(15\times3)\}$
$=(13\times0)-(3\times-6)\times(6\times-3)=0+18-18=0]$

(ii) C_1-C_2 तथा C_3-C_2 3×-4 उभयनिष्ठ लेने पर—

$$|A|=\begin{vmatrix}29 & 26 & 22\\ 25 & 31 & 27\\ 63 & 54 & 46\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 25 & -4\\ -6 & 31 & -4\\ 9 & 54 & -8\end{vmatrix}=3\times-4\begin{vmatrix}1 & 26 & 1\\ -2 & 35 & 1\\ 3 & 54 & 2\end{vmatrix}$$

R_2-R_1 तथा R_3-2R_1 लेने पर—

C_3 के अनुसार विस्तार करने पर—

$$|A|=-12\times\begin{vmatrix}1 & 26 & 1\\ -3 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-12\times1\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-12(-6-5)$$

$=-12\times11=132.$

$[-12\{1(5\times0-2\times0)-26(-3\times0-1\times0)+1(-3\times2-1\times5)\}$
$=-12\{(0)-(26\times0)+(-6-5)\}=-(12\times-11)=132]$

उदाहरण 9—निम्न सारणिक का मूल्य ज्ञात कीजिए—

$$\begin{vmatrix}67 & 19 & 21\\ 39 & 13 & 14\\ 81 & 24 & 26\end{vmatrix}$$

हल—

$$|A|\begin{vmatrix}67 & 19 & 21\\ 39 & 13 & 14\\ 81 & 24 & 26\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}10+57 & 19 & 21\\ 0+39 & 13 & 14\\ 9+72 & 24 & 26\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10 & 19 & 21\\ 0 & 13 & 14\\ 9 & 24 & 26\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}57 & 19 & 21\\ 39 & 13 & 14\\ 72 & 24 & 26\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}10 & 19 & 21\\ 0 & 13 & 14\\ 9 & 24 & 26\end{vmatrix} \quad \because \begin{vmatrix}57 & 19 & 21\\ 39 & 13 & 14\\ 72 & 24 & 26\end{vmatrix}=0$$ (गुण 4)

$$=\begin{vmatrix}10 & 19 & 19+2\\ 0 & 13 & 13+1\\ 9 & 24 & 24+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10 & 19 & 19\\ 0 & 13 & 13\\ 9 & 24 & 24\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}10 & 19 & 2\\ 0 & 13 & 1\\ 9 & 24 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 10 & 19 & 2 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 24 & 2 \end{vmatrix} \quad \because \begin{vmatrix} 10 & 19 & 19 \\ 0 & 13 & 13 \\ 9 & 24 & 24 \end{vmatrix}=0 \quad \text{(गुण 3)}$$

पहले स्तम्भ के अनुसार विस्तार करने पर—

$$10\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 24 & 2 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 24 & 2 \end{vmatrix}+9\begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix}=10(26-24)+9(19-26)$$

$$=10\times2+9\times-7=20-63=-43.$$

उदाहरण 10—निम्नलिखित सारणिक का मूल्य ज्ञात कीजिए—

$$\Delta=\begin{vmatrix} 265 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix}$$

हल—प्रथम पंक्ति + तृतीय पंक्ति — 2 × द्वितीय पंक्ति का मान निकालने पर $R_1+R_3-2R_2$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -12 & 4 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix}$$

पहली पंक्ति में से 4 व दूसरे कॉलम में से 3 उभयनिष्ठ लेने पर—

$$=4\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix}=4\times3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 240 & 75 & 198 \\ 219 & 66 & 181 \end{vmatrix}$$

प्रथम स्तम्भ + द्वितीय स्तम्भ, तथा तृतीय स्तम्भ + द्वितीय स्तम्भ रखने पर C_1+C_2; C_3+C_2 लेने पर—

$$\Delta=12\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 315 & 75 & 273 \\ 285 & 66 & 247 \end{vmatrix}=12(-)(-1)\begin{vmatrix} 315 & 273 \\ 285 & 247 \end{vmatrix}$$

$$=12\{(315\times247)-(285\times273)\}=12\{(5\times3\times3\times7\times13\times19)$$
$$-(5\times3\times19\times13\times3\times7)\}=12\times0=0$$

उदाहरण 11—बिन्दु $P(2, 4)$ और $Q(3, 2)$ को मिलाने वाली सरल रेखा PQ का समीकरण बनाइए—

हल—

$$\text{समीकरण}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

पहली पंक्ति के अनुसार विस्तार करने पर—

$$x(4-2)-y(2-3)+1(4-12)=0$$

$2x+y-8=0$ यही वांछित समीकरण है।

उदाहरण 12—निम्न को सिद्ध कीजिए—

(i) $$\begin{vmatrix} 8 & 11 & 14 \\ 9 & 12 & 15 \\ 10 & 13 & 16 \end{vmatrix}=0$$

[B. A. Econ. (Final), Raj., 1979]

(iii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=0$, (iii) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}=0$

हल—(i) C_2-C_1 तथा C_3-C_1 रखने पर—

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 9 & 3 & 6 \\ 10 & 3 & 6 \end{vmatrix}=0$$ क्योंकि तीसरा स्तम्भ दूसरे का दो गुना है ($C_3=2C_2$)

(ii) C_2-C_3 तथा C_3-C_1 लेने पर—

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-c & c-a \\ b+c & a-b & a-c \end{vmatrix}$$

$(a-b)$ $(a-c)$ उभयनिष्ठ (common) लेने पर—

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ b+c & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$ क्योंकि दो कॉलम (C_2 व C_3) समान है।

(iii) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}=0$ $R_1\to R_1+R_2+R_3$ देखने पर—

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & c-a & c-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}=0$$

[$\because$ $0\{(c-a)(b-c)-(a-b)^2\}-0\{(b-c)^2-(a-b)(c-a)\}$
$+0\{(b-c)(a-b)-(c-a)^2\}=0$]

उदाहरण 13—(i) सिद्ध कीजिए कि $x=4$ व $x=5$ निम्न समीकरण के मूल हैं—

$$\begin{vmatrix} x-9 & 4 \\ -5 & x \end{vmatrix}=0$$

(ii) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3$

हल (i) $\begin{vmatrix} x-9 & 4 \\ -5 & x \end{vmatrix}=(x-9)x-(4x-5)=x^2-9x+20=0$

लेकिन $x^2-9x+20=x^2-4x-5x+20=0$

$\Rightarrow x(x-4)-5(x-4)=0$ $\therefore$ $x=4$ तथा 5 अभीष्ट मूल है।

(ii) $R_1\to R_1+R_2+R_3$ रखने पर—

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1$ तथा $C_3 \to C_3 - C_1$ लेने पर—

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)[1\{-(a+b+c)-(a+b+c)\}-0]=(a+b+c)(a+b+c)^2=(a=b+c)^3$$

उदाहरण 14—सिद्ध कीजिए कि—

$$\Delta=\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b^2) \end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3$$

हल—प्रथम स्तम्भ में से द्वितीय स्तम्भ के घटकों को, द्वितीय में से तृतीय के घटको को घटाने पर $(C_1-C_2$ व $C_2-C_3)$—

$$\Delta=\begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & o & a^2 \\ b^2-(c+a)^2 & (c+a)^2-b^2 & b^2 \\ o & c^2-(a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

प्रथम एवं द्वितीय स्तम्भों में से $(a+b+c)$ बाहर लेने पर—

$$\Delta=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & o & a^2 \\ b-c-a & c+a-b & b^2 \\ o & c-a-b & (a+b^2)^2 \end{vmatrix}$$

तृतीय पंक्ति में से प्रथम व द्वितीय के घटकों का योग करके घटाने पर—

$$\Delta=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & o & a^2 \\ b-c-a & c+a-b & b^2 \\ 2a-2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$$

प्रथम व द्वितीय स्तम्भों का योग करने पर—

$$\Delta=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & o & a^2 \\ o & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$$

$$=-2(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & o & a^2 \\ o & c+a-b & b^2 \\ b & a & -ab \end{vmatrix}$$

प्रथम स्तम्भ के घटक $+1/a$ तृतीय स्तम्भ के घटक, एवं द्वितीय स्तम्भ $+1/b$ तृतीय स्तम्भ के घटक लगाने पर—

$$=-2(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c & a^2/b & a^2 \\ b^2/a & c+a & b^2 \\ o & o & -ab \end{vmatrix}$$

$$=2ab(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c & a^2/b \\ b^2/a & c+a \end{vmatrix}$$

$$=2ab(a+b+c)^3\left[(b+c)(c+a)-\frac{b^2}{a}\cdot\frac{a^2}{b}\right]$$

$$\Delta=2ab(a+b+c)^3[bc+ba+c^2+ca-ab]$$

$$=2ab\,(a+b+c)^3\,[bc+c^2+ca]=2abc\,(a+b+c)^3$$

अभ्यासार्थ प्रश्न

1. 'सारणिक', 'उपसारणिक' और 'सहखण्ड' का अर्थ स्पष्ट कीजिए। तीसरे और चौथे क्रम के सारणिकों के विस्तार की विधि बताइए।
2. सारणिकों के प्रमुख गुणों का उदाहरण सहित वर्णन कीजिए।
3. निम्नलिखित सारणिक का विस्तार लिखिए और उसे a_1, a_2 तथा a_3 के उपसारणिक (minors) के रूप में प्रस्तुत कीजिए—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

4. सारणिक की सहायता से निम्न समीकरण का हल कीजिए—
   (i) $3x+4y=8.$ $2x+3y=5.$
   (ii) $3x+2y=7.$ $x+3y=8.$
5. निम्न समीकरणों का सारणिक के उपयोग द्वारा हल कीजिए—
   (i) $2x+6y=9$ $3x+\ y=1$
   (ii) $5x=3y$ $2x+6y-7=0$
6. निम्न समीकरणों का हल कीजिए (सारणिक का प्रयोग करके)—
   (i) $3x+4y-5=0$ $3x-4y-2=0$
   (ii) $x+2y-z=0$ $2x+5y+2z=14$ $y-3z=-7$
7. निम्न द्वि-क्रम सारणिकों का मान निकालिए—
   (i) $\begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 \\ x & x-1 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{b}{a} & \frac{a}{c} \end{vmatrix}$
8. निम्न सारणिक को हल कीजिए—
   (i) $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} \frac{2}{a-1} & 3 \\ \frac{1}{1-a^2} & \frac{1}{1+a} \end{vmatrix}$
9. सारणिक का उपयोग करके मान ज्ञात कीजिए— [B. A. Econ., Raj. 1971]
   (i) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
   (ii) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

10. सारणिक का उपयोग करते हुए निम्नांकित का मूल्यांकन कीजिए—

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

[B. A. TDC (Final) Raj., 1976]

11. निम्न सारणिक का मूल्य ज्ञात कीजिए—

$$\begin{vmatrix} 12 & 2 & 22 \\ 20 & 5 & 35 \\ 29 & 8 & 50 \end{vmatrix}$$

[B. A. Econ. (Final) Raj., 1979S]

12. निम्न सारणिकों का मान निकालिए—

(i) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & -6 & 4 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

13. निम्न सारणिकों का मूल्यांकन कीजिए—

(i) $\Delta=\begin{vmatrix} 43 & 1 & 6 \\ 35 & 7 & 4 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

14. सिद्ध कीजिए कि —

$$\begin{vmatrix} a & b+c & a^2 \\ b & c+a & b^2 \\ c & a+b & c^2 \end{vmatrix}=-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

15. सारणिक के नियमों का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित का मूल्य निकालिए—

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

[B. A. Econ. (Final) Raj., 1978S]

16. सिद्ध कीजिए कि—

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}=abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

17. सिद्ध कीजिए कि—

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

18. मूल्यांकन कीजिए—

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$

19. सिद्ध कीजिए कि—

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ba & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & b^2+a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & [illegible] & b \\ c & 0 & b \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

20. मूल्यांकन कीजिए—

(i) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 45 & 29 & 68 \\ 55 & 32 & 87 \end{vmatrix}$

21. मूल्यांकन कीजिए—

(i) $\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & [illegible] & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$

22. निम्नलिखित सारणिकों का मूल्यांकन कीजिए—

(i) $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 10 & 2 \\ 9 & 5 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 5 & 8 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$

23. सिद्ध कीजिए कि—

$$\begin{vmatrix} A_1 & -B_1 & C_1 \\ -A_2 & B_2 & -C_2 \\ A_3 & -B_3 & C_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

जहाँ वर्णमाला के बड़े अक्षर ($A_1 \ldots C_3$), सारणिक के तत्संवादी छोटे अक्षरों ($a_1 \ldots c_3$) के उप-सारणिकों के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

उत्तर

3. $a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3 = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$

$$a_1 \overset{A_1}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} - a_2 \overset{A_2}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} + a_3 \overset{A_3}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

4. (i) $x=4$, $y=-1$; (ii) $x=$[illegible], $y=2$[illegible]; 5. (i) $x=-$[illegible], $y=1$[illegible], (ii) $x=$[illegible], $y=$[illegible]; 6. (i) [illegible], [illegible]; (ii) $x=-1$, $y=2$, $z=3$; 7. (i) -32, (ii) $-(2x+1)$, (iii) 0;
8. (i) 10, (ii) $\dfrac{5}{(a+1)(a-1)}$; 9. (i) 40; (ii) 42; 10. -40; 11. 0 ($C_1 \to 2C_2 - C_2$)
12. (i) 242, (ii) $4abc$; 13. 0, (ii) 0. 15. (i) 0. 18. (i) 4, (ii) xy, (iii) $4abc$;
20. (i) $abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh$, (ii) 54, 21. (i) $2a^3b^3c^3$, (iii) -8;
22. (i) -500, (ii) 0.

गणितीय सारणियां

सारणी 1

लघुगणक
Logarithms

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
											6	8 11 13	15 17 19
											6	8 11 13	15 17 19
											6	8 10 12	14 16 18
											6	8 10 12	14 15 17
											6	7 9 11	13 15 17
											5	7 9 11	12 14 16
											5	7 9 10	12 14 15
											5	7 8 10	11 13 15
											5	6 8 9	11 13 14
											5	6 8 9	11 12 14
											4	6 7 9	10 12 13
											4	6 [illegible] 9	10 11 13
											4	6 7 8	10 11 12
											4	5 7 8	9 11 12
											4	5 6 8	9 10 12
											4	5 6 8	9 10 11
											4	5 6 7	9 10 11
											4	5 6 7	8 10 11
											3	5 6 7	8 9 10
											3	5 6 7	8 9 10
											3	4 5 7	8 9 10
											3	4 5 6	8 9 10
											3	4 5 6	7 8 9
											3	4 5 6	7 8 9
											3	4 5 6	7 8 9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1 1 3	4 5 6	7 8 9
											3	4 5 6	7 8 9
											3	4 5 6	7 7 8
											3	4 5 5	6 7 8
				[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1 2 3	4 4 5	6 7 8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8

(Contd.)

लघुगणक

Logarithms (Contd.)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1 1 2	2 3 3	4 4 5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1 1 2	2 3 3	4 4 5

सारणी 3

संख्याओं के व्युत्क्रम

Reciprocals of Numbers—From 1 to 10

(Mean Difference वाले खाने के अंक घटाने हैं, जोड़ने नहीं हैं)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10																			
[illegible]																			
[illegible]																			
[illegible]																			
[illegible]											[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	43
[illegible]											[illegible]	8	13	17	21	25	29	33	38
[illegible]											[illegible]	7	11	15	18	22	26	29	33
[illegible]											[illegible]	6	10	13	16	20	23	26	29
[illegible]											[illegible]	6	9	12	15	17	20	23	26
[illegible]											[illegible]	5	8	11	13	16	16	21	24
												5	7	10	12	14	17	19	21
												4	7	9	11	13	15	17	20
												4	6	8	10	12	14	16	18
												4	5	7	9	11	13	14	16
											[illegible]	3	5	7	8	10	12	13	15
[illegible]											[illegible]	3	5	6	8	9	11	12	14
[illegible]											[illegible]	3	4	6	7	8	10	11	13
[illegible]											[illegible]	3	4	5	7	8	9	11	12
[illegible]											[illegible]	2	4	5	6	7	9	10	11
[illegible]											1	2	3	5	6	7	8	9	10
												2	3	4	5	6	[illegible]	[illegible]	10
												2	3	4	5	6	7	8	9
												2	3	4	5	6	7	8	9
												2	3	4	4	5	6	7	8
34	·2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865	1	2	3	3	4	5	0	7	8
35												2	2	3	4	5	6	6	7
[illegible]												2	2	3	4	5	5	6	7
[illegible]												1	2	3	4	4	5	6	6
												1	2	3	3	4	5	5	6
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	1	2	3	3	4	4	5	6
40	·2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445	1	1	2	2	3	4	4	5	5
41	2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387	1	1	2	2	3	3	4	5	5
42	2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331	1	1	2	2	3	3	4	4	5
43	2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278	1	1	2	2	3	3	4	4	5
44	·2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227	1	1	2	2	3	3	4	4	5
45	·2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179	0	1	1	2	2	3	3	4	4
46	·2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132	0	1	1	2	2	3	3	4	4
47	·2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088	0	1	1	2	2	3	3	4	4
48	·2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045	0	1	1	2	2	3	3	3	4
49	2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004	0	1	1	2	2	2	3	3	4
[illegible]												1	1	2	2	2	3	3	4
[illegible]												1	1	2	2	2	3	3	3
[illegible]												1	1	1	2	2	3	3	3
[illegible]												1	1	1	2	2	2	3	3
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1838	1835	1832	1828	1825	1821	[illegible]	[illegible]	1	1	2	2	2	3	3

(Contd.)

व्युत्क्रम
Reciprocals (Contd.)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences		
											1 2 3	4 5 6	7 8 9
59	·1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669	0 1 1	1 1 2	2 2 3
99	·1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001	0 0 0	[illegible]	[illegible]

सारणी 4

घात, मूल एवं व्युत्क्रम

Powers, Roots and Reciprocals—From 1 to 100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	1	1	3.162	2.154	4.642	1
2	4	8	1.414	1.260	4.472	2.714	5.848	5000
3	9	27	1.732	1.442	5.477	3.107	6.694	3333
4	16	64	2	1.587	6.325	3.420	7.368	.2500
5	25	125	2.236	1.710	7.071	3.684	7.937	2000
6	36	216	2.449	1.817	7.746	3.915	8.434	1667
7	49	343	2.646	1.913	8.367	4.121	8.879	1429
8	64	512	2.828	2.000	8.944	4.309	9.283	1250
9	81	729	3.000	2.080	9.487	4.481	9.655	1111
10	100	1000	3.162	2.154	10.0	4.642	10.000	1000
11	121	1331	3.317	2.224	10.488	4.791	10.323	09091
12	144	1728	3.464	2.289	10.954	4.932	10.627	08333
13	169	2197	3.606	2.351	11.402	5.066	10.914	07692
14	196	2744	3.742	2.410	11.832	5.192	11.187	.07143
15	225	3375	3.873	2.466	12.247	5.313	11.447	.06667
16	256	4096	4.000	2.520	12.649	5.429	11.696	06250
17	289	4913	4.123	2.571	13.038	5.540	11.935	.05882
18	324	5832	4.243	2.621	13.416	5.646	12.164	.05556
19	361	6859	4.359	2.668	13.784	5.749	12.386	.05263
20	400	8000	4.472	2.714	14.142	5.848	12.599	.0500
21	441	9261	4.583	2.759	14.491	5.944	12.806	04762
22	484	10648	4.690	2.802	14.832	6.037	13.006	04545
23	529	12167	4.796	2.844	15.166	6.127	13.200	04348
24	576	13824	4.899	2.884	15.492	6.214	13.389	04167
25	625	15625	5.000	2.924	15.811	6.300	13.572	.0400
26	676	17576	5.099	2.962	16.125	6.383	13.751	.03846
27	729	19683	5.196	3.000	16.432	6.463	13.925	.03704
28	784	21952	5.292	3.037	16.733	6.542	14.095	.03571
29	841	24389	5.385	3.072	17.029	6.619	14.260	.03448
30	900	27000	5.477	3.107	17.321	6.694	14.422	.03333
31	961	29791	5.568	3.141	17.607	6.768	14.581	.03226
32	1024	32768	5.657	3.175	17.889	6.840	14.736	.03125
33	1089	35937	5.745	3.208	18.166	6.910	14.888	.03030
34	1156	39304	5.831	3.240	18.439	6.980	15.037	.02941
35	1225	42875	5.916	3.271	18.708	7.047	15.183	.02857
36	1296	46656	6.000	3.302	18.974	7.114	15.326	.02778
37	1369	50653	6.083	3.332	19.235	7.179	15.467	.02703
38	1444	54872	6.164	3.362	19.494	7.243	15.605	.02632
39	1521	59319	6.245	3.391	19.748	7.306	15.741	.02564
40	1600	64000	6.325	3.420	20.00	7.368	15.874	.0250
41	1681	68921	6.403	3.448	20.248	7.429	16.005	.02439
42	1764	74088	6.481	3.476	20.494	7.489	16.134	.02381
43	1849	79507	6.557	3.503	20.736	7.548	16.261	.02326
44	1936	85184	6.633	3.530	20.976	7.606	16.386	.02273
45	2025	91125	6.708	3.557	21.213	7.663	16.510	.02222
46	2116	97336	6.782	3.583	21.448	7.719	16.631	.02174
47	2209	103823	6.856	3.609	21.679	7.775	16.751	.02128
48	2304	110592	6.928	3.634	21.909	7.830	16.869	.02083
49	2401	117649	7.000	3.659	22.136	7.884	16.985	.02041
50	2500	125000	7.071	3.684	22.361	7.937	17.100	.020

(Contd.)

धात, मूल एवं व्युत्क्रम

Powers, Roots and Reciprocals (Contd.)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$
51	2601	132651	7.141	3.708	22.583	7.990	17.213	.01961
52	2704	140608	7.211	3.733	22.804	8.041	17.325	.01923
53	2809	148877	7.280	3.756	23.022	8.093	17.435	.01887
54	2916	157464	7.348	3.780	23.238	8.143	17.544	.01852
55	3025	166375	7.416	3.803	23.452	8.193	17.652	.01818
56	3136	175616	7.483	3.826	23.664	8.243	17.758	.01786
57	3249	185193	7.550	3.849	23.875	8.291	17.863	.01754
58	3364	195112	7.616	3.871	24.083	8.340	17.967	.01724
59	3481	205379	7.681	3.893	24.290	8.387	18.070	.01695
60	3600	216000	7.746	3.915	24.495	8.434	18.171	.01667
61	3721	226981	7.810	3.936	24.698	8.481	18.272	.01639
62	3844	238328	7.874	3.958	24.900	8.527	18.371	.01613
63	3969	250047	7.937	3.979	25.100	8.573	18.469	.01587
64	4096	262144	8.000	4.000	25.298	8.618	18.566	.01562
65	4225	274625	8.062	4.021	25.495	8.662	18.663	.01538
66	4356	287496	8.124	4.041	25.690	8.707	18.758	.01515
67	4489	300763	8.185	4.062	25.884	8.750	18.852	.01493
68	4624	314432	8.246	4.082	26.077	8.794	18.945	.01471
69	4761	328509	8.307	4.102	26.268	8.837	19.038	.01449
70	4900	343000	8.367	4.121	26.458	8.879	19.129	.01429
71	5041	357911	8.426	4.141	26.646	8.921	19.220	.01408
72	5184	373248	8.485	4.160	26.833	8.963	19.310	.01389
73	5329	389017	8.544	4.179	27.019	9.004	19.399	.01370
74	5476	405224	8.602	4.198	27.203	9.045	19.487	.01351
75	5625	421875	8.660	4.217	27.386	9.086	19.574	.01333
76	5776	438976	8.718	4.236	27.568	9.126	19.661	.01316
77	5929	456533	8.775	4.254	27.749	9.166	19.747	.01299
78	6084	474552	8.832	4.273	27.928	9.205	19.832	.01282
79	6241	493039	8.888	4.291	28.107	9.244	19.916	.01266
80	6400	512000	8.944	4.309	28.284	9.283	20.000	.01250
81	6561	531441	9.000	4.327	28.460	9.322	20.083	.01235
82	6724	551368	9.055	4.344	28.636	9.360	20.165	.01220
83	6889	571787	9.110	4.362	28.810	9.393	20.247	.01205
84	7056	592704	9.165	4.380	28.983	9.435	20.328	.01190
85	7225	614125	9.220	4.397	29.155	9.473	20.408	.01176
86	7396	636056	9.274	4.414	29.326	9.510	20.488	.01163
87	7569	658503	9.327	4.431	29.496	9.546	20.567	.01149
88	7744	681472	9.381	4.448	29.665	9.583	20.646	.01136
89	7921	704969	9.434	4.465	29.833	9.619	20.724	.01124
90	8100	729000	9.487	4.481	30.000	9.655	20.801	.01111
91	8281	753571	9.539	4.498	30.166	9.691	20.878	.01099
92	8464	778688	9.592	4.514	30.332	9.726	20.954	.01087
93	8649	804357	9.644	4.531	30.496	9.761	21.029	.01075
94	8836	830584	9.695	4.547	30.659	9.796	21.105	.01064
95	9025	857375	9.747	4.563	30.822	9.830	21.179	.01053
96	9216	884736	9.798	4.579	30.984	9.865	21.253	.01042
97	9409	912673	9.849	4.595	31.145	9.899	21.327	.01031
98	9604	941192	9.899	4.610	31.305	9.933	21.400	.01020
99	9801	970299	9.950	4.626	31.464	9.967	21.472	.01010
100	10000	1000000	10.000	4.642	31.623	10.000	21.544	.0100

27 DEC 1996